2 Signale und Systemtheorie

Signal sind physikalische Träger für Information. (Strom, Spannung, Schalldruck , Auslenkung Membran, Lichtsignal, etc.)

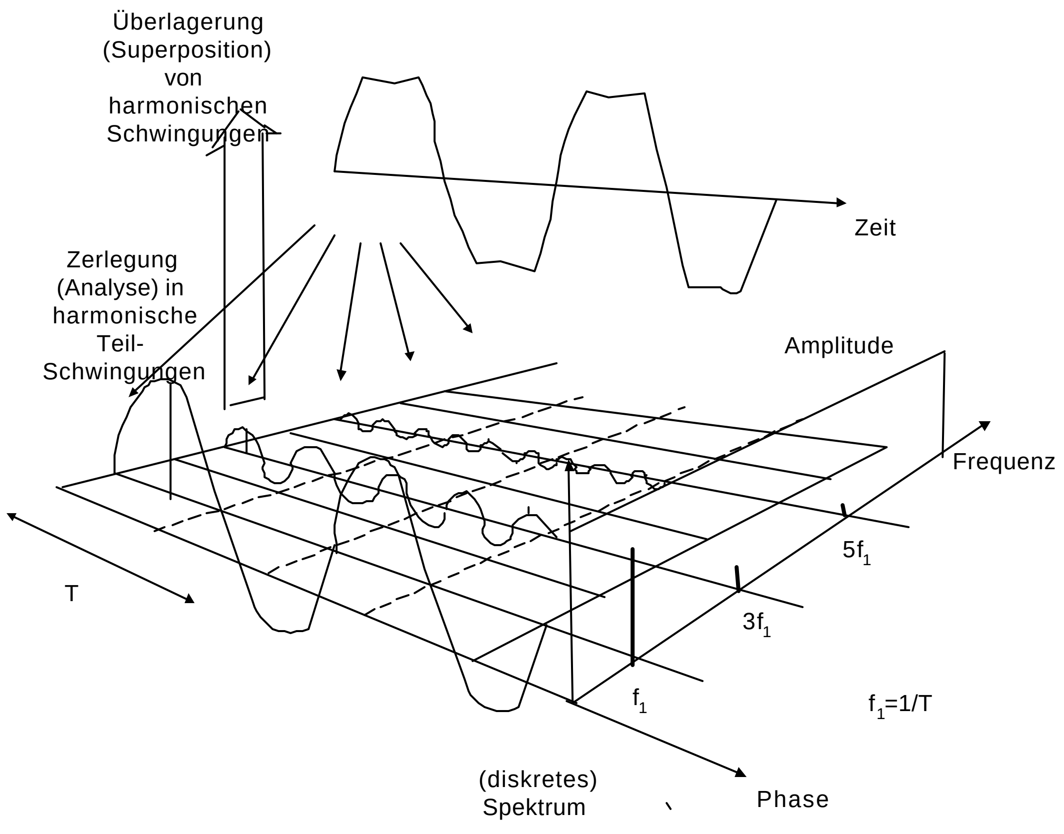
Signalanalyse ist ein mathematisches Verfahren, um Signale (Zeitfunktionen oder auch Funktionen des Ortes und ähnlichem) in „**Teilschwingungen**“ zu zerlegen . Bei periodischen Signalen gelingt dies mit dem Verfahren der **Fourierreihenzerlegung**. Bei nichtperiodischen und stochastischen Signalen liegen die Frequenzen der Teilschwingungen beliebig dicht und die Beschreibung kann nicht mehr über Amplituden von diskreten Teilschwingungen erfolgen, sondern muß über eine Dichtefunktion der Energie oder Leistung der Teilschwingungen erfolgen (**Energiedichte oder Leistungsdichte** ----> **Fouriertransformation**). Die Darstellung des Signals durch die Teilschwingungen wird **Spektraldarstellung** genannt, die Überführung in die Spektraldarstellung nennt man eine **Transformation**. Bei der technischen Berechnung von Spektren bzw. von Transformationen mit einem Rechner kann nur eine begrenzte Zahl von Abtastwerten des Signals verarbeitet werden. Das daraus abzuleitende diskrete Spektrum wird mit der **diskreten Fouriertransformation** berechnet.

2.2.1 Arten von Signalen :

deterministisch	Quasi-statistisch	nicht deterministisch stochastisch (statistisch)	
ergodisch	stationär	nicht stationär	
sinusförmig	periodisch	quasiperiodisch	nicht-periodisch
Energiesignale	Leistungssignale		
kontinuierlich	zeit/werte diskret	digital	
reell	komplexwertig	Vektorfunktionen (Stereosignal, Feldstärke, Bildsignal)	

2.3 Fourierreihe

Zerlegung einer periodischen Funktion in harmonische Teilschwingungen.



$$s(t) = s(t+T), \quad T = \ Periodendauer$$

Approximation von s(t) durch Summe von Teilschwingungen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundschwingung sind: A_k= Amplitude, φ_k = Phase der k-ten Teilschwingung

$$f_1 = \frac{1}{T} = Grundfrequenz$$

$$f_k = k \cdot f_1 \quad Frequenz \quad der \quad k-ten \quad Oberschwingung, \quad k = 1,2,3,....$$

$$\omega_k = 2\pi \cdot f_k \quad Kreisfrequenz \quad der \quad k-ten \quad Oberschwingung$$

Ansatz für Approximationsfunktion:

$$S_N(t) = \sum_{k=0}^{N} s_k(t)$$

Dabei ist $s_k(t)$ die k-te Oberschwingung .

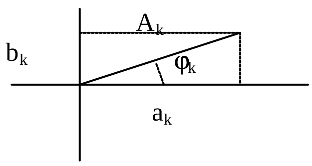
$$s_k(t) = A_k \cos(\omega_k t - \varphi_k)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten A_k und φ_k ist eine Zerlegung der Teilschwingungen in einen Cosinus- und Sinusanteil vorteilhaft.

$$s_k(t) = A_k \cos(\omega_k t - \varphi_k) = \underbrace{A_k \cos\varphi_k}_{a_k} \cos\omega_k t + \underbrace{A_k \sin\varphi_k}_{b_k} \sin\omega_k t$$

$$= a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t \qquad mit \quad a_k = A_k \cos\varphi_k \quad b_k = A_k \sin\varphi_k$$

Werden für die Approximation die Koeffizienten a_k und b_k bestimmt, so lassen sich die Koeffizienten A_k und φ_k aus der Umkehrung obiger Gleichungen bestimmen.



$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \varphi_k = \arctan\frac{b_k}{a_k}$$

Bestimmung der Koeffizienten a_k und b_k :

Beide Seiten der folgenden Gleichung * (Funktion = Approximationsfunktion)

$$s(t) \stackrel{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t) \qquad *$$

mit $\cos(\omega_n t)$ multiplizieren und über eine Periode integrieren :

$$\int_0^T s(t)\cos(\omega_n t)dt =$$

$$= \int_0^T \frac{a_0}{2}\cos(\omega_n t)dt + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \int_0^T \cos(\omega_k t)\cos(\omega_n t)dt + b_k \int_0^T \cos(\omega_k t)\cos(\omega_n t)dt] = a_n$$

Die rechte Seite der Gleichung ergibt wegen der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen a_n

$$\int_0^T \cos(w_k t)\cos(w_n t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & für \quad n = k \\ 0 & für \quad n \neq k \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(w_k t)\cos(w_n t)dt = 0$$

Analog bestimmen sich die b_k in dem man beide Seiten der Gleichung * (Funktion = Approximationsfunktion) mit $\sin(\omega_n t)$ multipliziert und dann über eine Periode integriert, wobei die Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen zu beachten ist.

$$\int_0^T \sin(w_k t)\sin(w_n t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & für \quad n = k \\ 0 & für \quad n \neq k \end{cases}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(w_k t)dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(w_k t)dt$$

Man kann beweisen, daß die Approximationsfunktion für N--∞ gegen die Funktion s(t) konvergiert (Ausnahme an Unstetigkeitsstellen) .

Eine für die meisten Berechnungen besser geeignete Form der Fourierreihe erhält man durch **Einführung der komplexen e-Funktionen** anstelle der reellen Sinus- und Cosinus- Funktionen.

$$s_k(t) = A_k \cos(w_k t - j_k)$$
$$= \underbrace{\frac{A_k}{2} e^{-jj_k}}_{\underline{c}_k} e^{jw_k \cdot t} + \underbrace{\frac{A_k}{2} e^{jj_k}}_{\underline{c}_k^*} e^{-jw_k \cdot t} = \underline{c}_k e^{jw_k \cdot t} + (\underline{c}_k e^{jw_k \cdot t})*$$

wobei sich die $\underline{c}_k$ wie folgt berechnen lassen:

$$\underline{c}_k = \frac{A_k}{2} e^{-jj_k} = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(w_k t)dt - j\frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(w_k t)dt\right]$$

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)e^{-jw_k \cdot t}dt$$

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\underline{c}_k e^{jw_k \cdot t} + (\underline{c}_k e^{jw_k \cdot t})*\right]$$

Die konjugiert komplexen Anteile lassen sich auch mit ‚**negativen Frequenzen‘** schreiben:

$$s(t) = c_0 + c_0* + \underline{c}_1 e^{jw_1 \cdot t} + \underbrace{\underline{c}_1 * e^{-jw_1 \cdot t}}_{\underline{c}_{-1} e^{jw_{-1} \cdot t}} + \underline{c}_2 e^{jw_2 \cdot t} + \underbrace{\underline{c}_2 * e^{-jw_2 \cdot t}}_{\underline{c}_{-2} e^{jw_{-2} \cdot t}} + \ldots =$$

$$s(t) = c_0 + c_0* + \underline{c}_1 e^{jw_1 \cdot t} + \underline{c}_{-1} e^{jw_{-1} \cdot t} + \underline{c}_2 e^{jw_2 \cdot t} + \underline{c}_{-2} e^{jw_{-2} \cdot t} + ..$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jw_k \cdot t} \qquad mit \qquad \underline{c}_{-k} := \underline{c}_k *, \qquad w_{-k} := -w_k$$

Aus den Fourierkoeffizienten $\underline{c}_k$ lassen sich die A_k und φ_k dann auf folgende Weise berechnen:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{c}_k = |\underline{c}_k| e^{jy_k} = \frac{A_k}{2} e^{-jj_k} = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} s(t) e^{-j2p \cdot f \cdot t} dt \\ &A_k = |\underline{c}_k| \; j_k = -y_k \quad , \quad c_0 = A_0 \end{aligned}}$$

Die Folge der Fourierkoeffizienten $\underline{c}_k$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,$ ($k \in Z$ ganze Zahl) beschreiben die Teilschwingungen der Funktion s(t) und heißen Frequenzbereichsdarstellung der Funktion s(t).

Die Folge $\underline{c}_k$ kann man auch als diskrete komplexwertige Funktion der ganzahligen Variablen k ansehen. und darstellen. Dabei ergibt der Betrag das Amplitudenspektrum und das Argument von $\underline{c}_k$ das Phasenspektrum. Die Frequenzachse läuft aus den oben genannten Gründen formal von $-\infty$ bis $+\infty$.

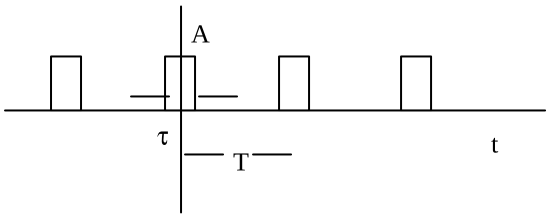
s(t) und die Folge $\{\underline{c}_k\}_{k=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots}$ bilden ein Transformationspaar. Der Übergang von der einen Darstellung in die andere wird durch die Transformationsgleichungen der **Fourier-Transformation Diskret (F.T.D.) und der Inversen Fourier-Transformation Diskret (I.F.T.D.)** hergestellt:

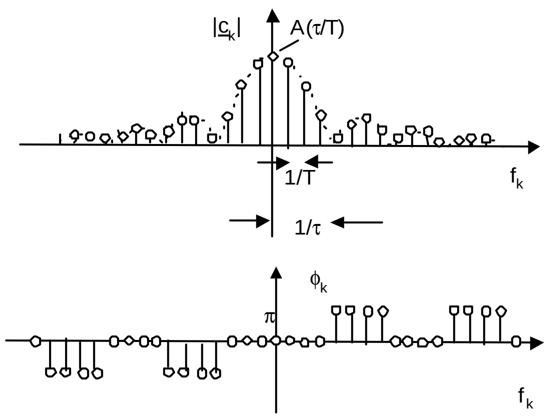
$$s(t) \underset{IFTD}{\overset{FTD}{\rightleftarrows}} \{\underline{c}_k\}$$

$$F.T.D. \quad \underline{c}_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jw_k \cdot t} dt \qquad Analysegleichung$$

$$I.F.T.D. \quad s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jw_k \cdot t} \qquad Synthesegleichung$$

Bsp.: Rechteckfolge





Einzelpuls und Pulsfolge

$$p(t) = A \cdot rect(\frac{t}{t}) = \begin{cases} A & |t| < t/2 \\ 0 & |t| > t/2 \end{cases}$$

$$p_T(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} rect(\frac{t - nT}{t})$$

Spektrum: Folge der ck

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T} \int_{-t/2}^{t/2} A e^{-j2p \cdot f_k \cdot t} dt = \frac{A}{T(-j2pf_k)} e^{-j2p \cdot f_k \cdot t} \Big|_{-t/2}^{t/2}$$

$$= \frac{A}{Tp \cdot f_k} \frac{(-1)}{2j} \left(e^{-jp \cdot f_k \cdot t} - e^{jp \cdot f_k \cdot t} \right)$$

$$= A \frac{t}{T} \frac{\sin(pf_k t)}{(pf_k t)}$$

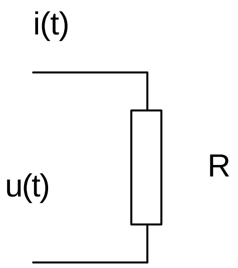
$$\left|\underline{c}_k\right| = A \frac{t}{T} \left| \frac{\sin(pf_k t)}{(pf_k t)} \right| \qquad \arg \underline{c}_k = \begin{cases} 0, & falls \ \frac{\sin(pf_k t)}{(pf_k t)} > 0 \\ p & falls \ \frac{\sin(pf_k t)}{(pf_k t)} < 0 \end{cases}$$

Die sinx/x Funktion wird auch Spaltfunktion genannt. Für x = 0 ergibt sich sin0/0 =1 . Die Nullstellen liegen - wie man leicht nachrechnet - bei n mal $(1/\tau)$, n = ±1, ±2, ±3, ±4, ...

Man erkennt, daß der Betrag der komplexen Spektralfunktion symmetrisch bezüglich der Frequenz ist, während die Phasen schiefsymmetrisch sind: $|\underline{c}(-f_k)| = |\underline{c}(f_k)|$, $\psi(-f_k) = -\psi(f_k)$.

Die reellen Amplituden und Phasen der Teilschwingungen ergeben sich aus dem Teil des Spektrums mit positiven Frequenzen . Die Beträge der Spektralfunktion sind lediglich mit zwei zu multiplizieren und die Phasen mit -1 zu multiplizieren (umzudrehen).

Leistung



$$s(t) = \frac{u(t)}{\sqrt{R}} \qquad P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{u(t)^2}{R} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t)^2 dt$$

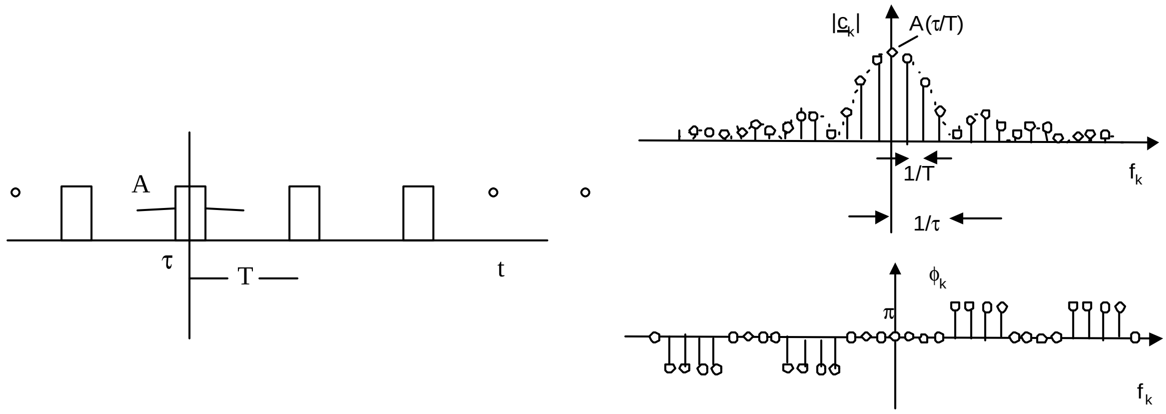
$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{U_k^{\ 2}}{R} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} A_k^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| c_k \right|^2$$

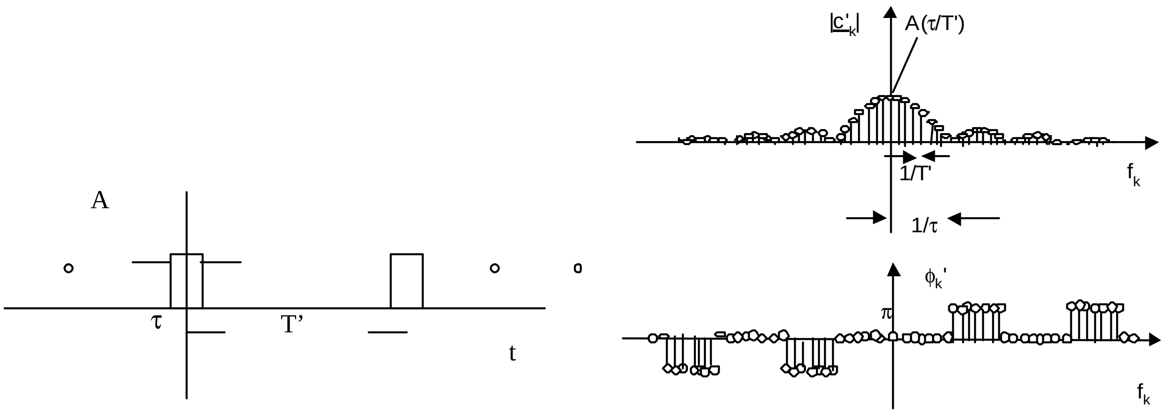
$$\Rightarrow \quad P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t)^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| c_k \right|^2$$

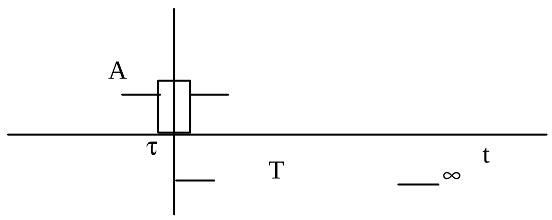
2.1 Fouriertransformation

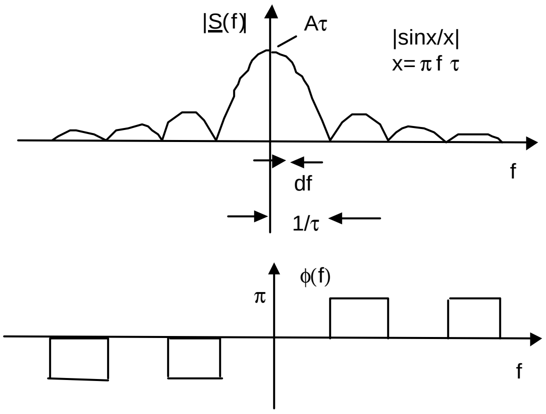
Will man das Spektrum einer nichtperiodischen Energiefunktion (Signal von endlicher Dauer, Signalamplitude beschränkt) ausrechnen, so kann dies aus den Formeln für die Fourierreihe abgeleitet werden, wenn man die Periodendauer gegen Unendlich gehen läßt. Die Frequenzen der Teilschwingungen rücken dann beliebig dicht aneinander und ihre Amplituden werden dementsprechend beliebig klein. Man kommt somit zu einer **Dichtefunktion** für die Teilschwingungen, die **Spektralfunktion** heißt oder auch **Fouriertransformation** genannt wird.

Beispiel : Übergang von Pulsfolge zu Einzelpuls.









$$s(t) \; \underset{\xleftarrow{F.T.D.^{-1}}}{\xrightarrow{F.T.D.}} \; \left\{\underline{c}_k\right\} \qquad\qquad s(t) \; \underset{\xleftarrow{F.T.^{-1}}}{\xrightarrow{F.T.}} \; \underline{S}(f)$$

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-jw_k \cdot t}dt \quad \xrightarrow{T\to\infty} \quad \underline{c}(f) = df \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2p \cdot f \cdot t}dt}_{\underline{S}(f)}$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jw_k \cdot t} \quad \xrightarrow{T\to\infty} \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(f)e^{j2p \cdot f \cdot t}df = F.T.^{-1}\left\{\underline{S}(f)\right\}$$

$$\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2p \cdot f \cdot t}dt = F.T.\left\{s(t)\right\}$$

Bsp.: Berechnung der Fouriertransformation des Einzelpulses.

Analog zu der Berechnung der Fouriertransformation Diskret (Fourierkoeffizienten) der Pulsfolge:

$$\underline{S}(f) = \int_{-t/2}^{t/2} Ae^{-j2p \cdot f \cdot t}dt = \frac{A}{(-j2p \cdot f)} e^{-j2p \cdot f \cdot t}\Big|_{-t/2}^{t/2}$$

$$= \frac{A}{p \cdot f}\frac{(-1)}{2j}\left(e^{-jp \cdot f \cdot t} - e^{jp \cdot f \cdot t}\right) = At\,\frac{\sin(p \cdot ft)}{(p \cdot ft)}$$

Dieses Ergebnis hatten wir uns schon bei der Ableitung des Formalismus zur Berechnung der Fouriertransformation beim Eingangsbeispiel überlegt.

Transformiert man umgekehrt die oben erhaltene Spektralfunktion durch die inverse Fouriertransformation, so erhält man wieder die Pulsfunktion. Die Berechnungsvorschrift für die inverse Fouriertransformation ist genauso aufgebaut wie die für die Fouriertransformation, man muß lediglich die Rollen von Zeit und Frequenzvariable vertauschen und im Exponenten + anstelle - schreiben.

Daraus ergibt sich, daß man **duale Transformationspaare** ableiten kann.

Bsp.: Die Spektralfunktion eines Pulses von der Form einer Spaltfunktion

$$s(t) = A \cdot (2B)\frac{\sin(2p \cdot Bt)}{(2p \cdot Bt)}$$

ist eine zum Ursprung symmetrische Rechtecksfunktion mit der Breite 2B und Amplitude A.

(Ersetze in obigen Formeln : t durch f und f durch t sowie τ durch 2B)

Der Puls in Form einer Spaltfunktion wird auch sinx/x -Puls genannt. Das Spektrum dieses Pulses ist konstant bis zu einer durch die Breite des Pulses (Abstand zwischen den beiden Nullstellen = 1/B) gegebenen oberen Grenze (B) . Man sagt der **sinx/x hat ein ideales bandbegrenztes Spektrum.**

Folgerung: Die Transformationspaare (Rechteckzeitpuls ---> sinx/x Spektrum) und (sinx/x-Zeit-Puls ---> Rechteckspektrum) bilden eine **duales Paar**.

Interpretation der Dichtefunktion S(f):

Ein elektrisches Signal läßt sich durch Strom und Spannung charakterisieren. Das Spannungssignal sei s(t)= u(t)/√R, es erzeugt an einem Widerstand den Strom i(t) = u(t)/R und die momentane Leistung u(t)i(t)= $u^2(t)/R=s^2(t)$.

Elektrische Energie während Zeit T, sowie die zeitlich gemittelte Leistung :

$$W = \int_0^T u(t)i(t)dt == \frac{1}{R}\left(\int_0^T u^2(t)dt\right) = \int_0^T s^2(t)dt$$

$$P = \frac{W}{T} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt\right)$$

Zur Charakterisierung des Signals durch seine Energie oder Leistung läßt man den Widerstand weg und nimmt somit die auf den Widerstand normierte Energie und Leistung .

Falls das Signal zeitlich begrenzt ist und nur von kurzer Dauer ist, ist die Angabe der Energie sinnvoll. Ist das Signal von längerer Dauer und stationär, so kann man einen Ausschnitt wählen und für diesen die mittlere Leistung bestimmen.

Da die Zeitfunktion und die Spektralfunktion zwei äquivalente Darstellungsformen des Signals sind kann man die Energie bzw. Leistung auch im Frequenzbereich berechnen (sog. **Parseval'sche Gleichung**). Es gilt: Die Energiedichte der Teilschwingungen ist durch das Betragsquadrat der Fouriertransformierten gegeben:

w(f) df = 2|S(f)|^2 df

Energie der kontinuierlich verteilten „Teilschwingungen" im Frequenzbereich zwischen f und f +df = (Energiedichte bei Frequenz f) mal df =2 mal (Betragsquadrat der Fouriertransformierten von s(t)) mal df

Entsprechend kann man die Leistungsdichte eines stationären Signals definieren. Dazu berechnet man die Fouriertransformierte eines Ausschnitts des Signals mit der Länge T - außerhalb dieses Zeitabschnitts wird die Funktion durch Null fortgesetzt (Nullfortsetzung) - dann ist

$$\boxed{p(f) = \frac{w(f)}{T} = \frac{2\left|\underline{S}_T(f)\right|^2}{T}}$$

Der Faktor 2 rührt daher, daß die Spektralfunktion für positive und negative Frequenzen definiert ist, der Betrag jedoch symmetrisch zum Ursprung ist.

Ableitung der Parseval'schen Gleichung:

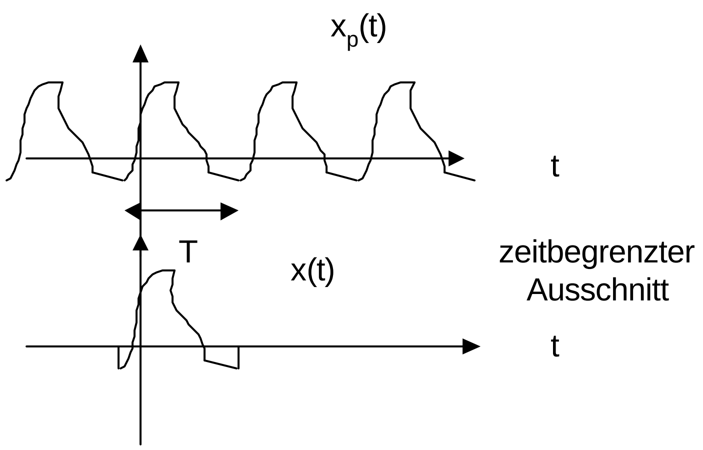
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(f)|^2\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(f)\underline{S}^*(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(f)\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{j2p\cdot f\cdot t}dt\right)df =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(f)e^{j2p\cdot f\cdot t}df\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$$

$$\boxed{W = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(f)|^2\, df = 2\int_{0}^{\infty} |\underline{S}(f)|^2\, df = \int_{0}^{\infty} w(f)df}$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß man die Integrale als Summen auffassen kann und man die Reihenfolge bei der Summenbildung über f und t vertauschen kann. Der bei s(t) stehende Faktor hängt ja von dem Produkt f mal t ab und kann somit auch zu S(f) geschrieben werden.

2.4 Fouriertransformation eines periodischen Signals



$$x(t) = \begin{cases} x_p(t) & T_0 < t < T_0 + T \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Abbildung 2-1

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} x_p(t)e^{-j2p\cdot f_k\cdot t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2p\cdot f_k\cdot t}dt = \frac{1}{T}\underline{X}(f_k)$$

2.5 Laplace- Transformation

für kausale Signale (s(t)= 0 für t<0) wendet man bei Systembeschreibung mit Übertragungsfunktion anstelle der Fouriertransformation die Laplace- Transformation an. Vorteil es können auch nicht-Energie Signale wie dz.B: die Sprungfunktion transformiert werden und es gibt die Möglichkeit Umformungen im komplexen vorzunehmen :

- Definition des Systems über Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion ,
- Faktorisierung der Übertragungsfunktion (Zerlegung in Stufen 2. Ordnung)

Erweiterung des Frequenzraumes (linearer Raum = Gerade „Frequenzachse") ω zum Bildraum (p = σ + jω = komplexe Ebene)

$$e^{-s\cdot t} = kovergenzerzeugender \quad Faktor$$

$$L.T.(s(t)) = F.T.(s(t)e^{-s\cdot t}) = \int_0^\infty s(t)e^{-s\cdot t}e^{-jw\cdot t}dt = \int_0^\infty s(t)e^{-p\cdot t}dt = L(p)$$

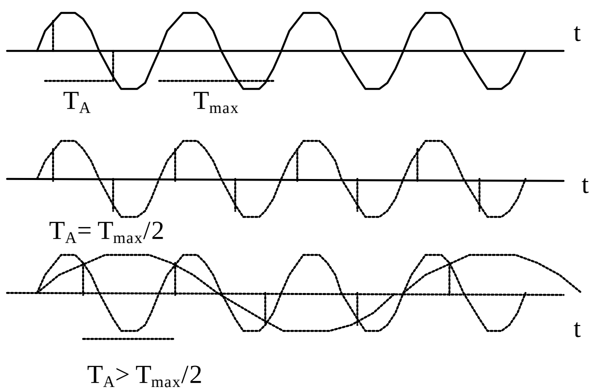
$$\underline{L}(p)\big|_{p=jw} = \underline{S}(f)$$

2.6 Umsetzung zeitkontinuierlicher Signale in zeitdiskrete Signale und umgekehrt

Shannon'sches Abtasttheorem

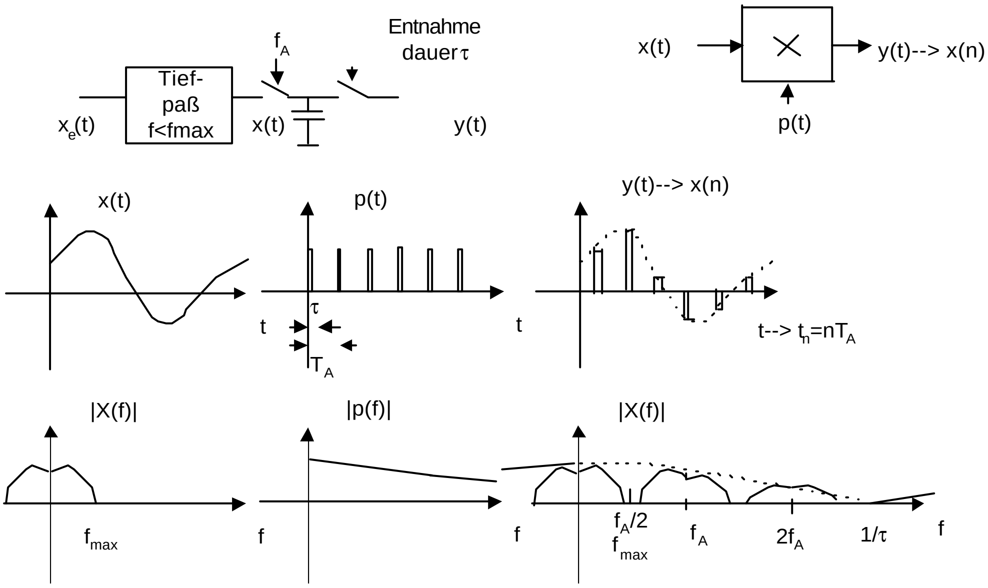
Sei x(t) Signal mit $\lvert\underline{X}(f)\rvert=0$ für $f > f_{max}$ ($= 1/T_{max}$) ---> x(t) kann vollständig durch eine äquidistante Folge von Abtastwerten im Abstand $T_A = T_{max}/2$ ($f_A = 2\,f_{max}$) beschrieben werden .

Der Sinn des Abtasttheorems leuchtet unmittelbar ein: Wir gehen von einem bandbegrenzten Signal aus. Dan ist die Aussage des Abtasttheorems, daß der Abtastprozeß für alle in dem Signal enthaltenen Teilschwingungen ausreichend Information erhalten muß. Insbesondere muß deswegen die Teilschwingung mit der höchsten Frequenz mindestens 2 mal pro Periode abgetastet werden. Ist der Abstand zwischen zwei Abtastwerten größer, so geht offenbar die Information von dieser Teilschwingung verloren!



Beweis:

Wir verwenden beim Beweis des Abtasttheorems ein Abtast-Halteglied, wie es auch in der Praxis verwendet wird ---> Schalter, der im Takt der Abtastfrequenz jeweils nur kurz das Signal mit einem Haltekondensator verbindet: Entnahme des gespeicherten Abtastwertes durch einen zweiten Schalter während der Zeit $\tau < T_A$. Diesen Abtastvorgang nennen wir Pulsmodulator. Das Ausgangssignal am Pulsmodulator das Pulsmodulierte Signal.



Wir zerlegen die Pulsfolge in eine Fourierreihe und berechnen dann das Spektrum des Ausgangssignals vom Pulsmodulator. Es zeigt sich, daß in diesem Spektrum sich das Basisbandspektrum des Ausgangssignals periodisch mit der Abtastrate f_A wiederholt, allerdings noch in der Amplitude moduliert mit der Spektralfunktion der Pulsfioge (c(f)) .

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\cdot p\cdot f_k \cdot t} \qquad mit \qquad c_k = \frac{At}{T_A} \frac{\sin(p \cdot f_k \cdot t)}{(p \cdot f_k \cdot t)}, \qquad f_k = k \cdot f_A$$

$$y(t) = x(t) \cdot p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x(t) e^{j2\cdot p\cdot f_k \cdot t}$$

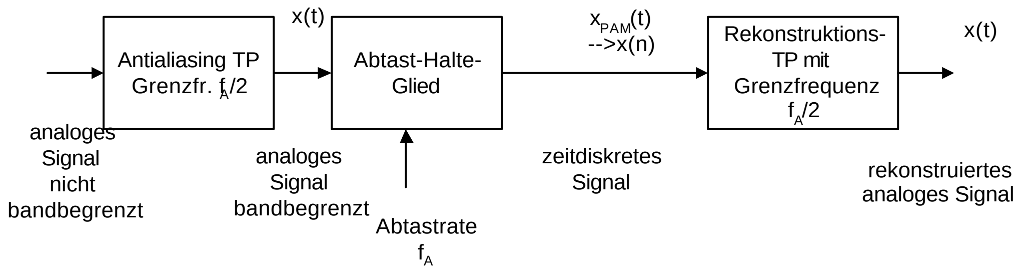
$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k F.T.\left\{x(t) e^{j2\cdot p\cdot f_k \cdot t}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\cdot p\cdot f_k \cdot t} e^{-j2\cdot p\cdot f\cdot t} dt =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\cdot p\cdot (f-f_k)\cdot t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k X(f - k \cdot f_A)$$

Rekonstruktion

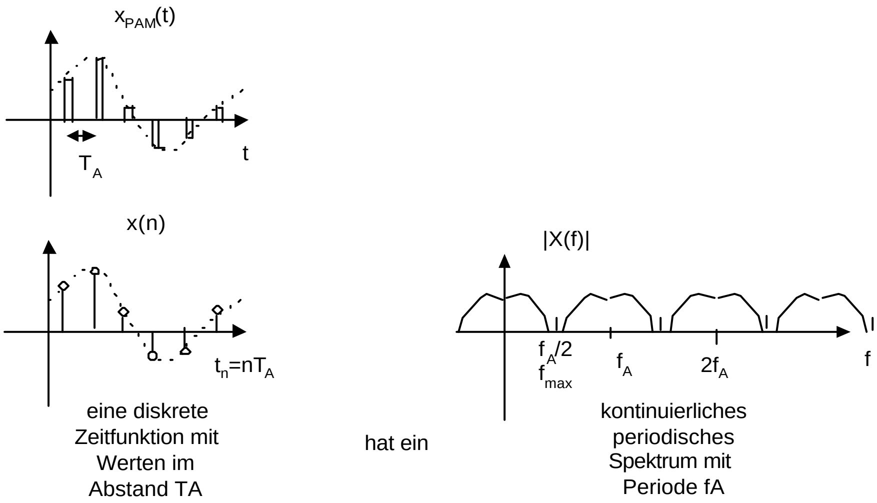
Falls $f_{max} < f_A/2$ kann durch Filterung mit einem idealen Tiefpaß mit Grenzfrequenz $f_A/2$ (**Rekonstruktionsfilter**) aus dem abgetasteten Signal wieder das ursprüngliche Signal zurückgewonnen werden. Um die Modulation des Spektrums mit c(f) rückgängig zu machen ist noch eine Entzerrung mit einem Filter notwendig , das die inverse Übertragungsfunktion zu c(f) hat. Ist jedoch $\tau \ll T_A$, so ist im Bereich bis fmax c(f) nahezu konstant und es kann auf die Entzerrung verzichtet werden.

Falls $f_{max} > f_A/2$ kann das ursprüngliche Signal nicht wieder zurückgewonnen werden, da das Spektrum des Pulsmodulierten Signals im Bereich von 0 bis f_{max} nicht mehr mit dem des ursprünglichen Signals übereinstimmt. (Überlappung mit höheren Frequenzanteilen im periodischen Spektrum sog. **Aliasing -Effekt**).


Antialiasing TP
Grenzfr. fA/2
x(t)
Abtast-Halte-Glied
xPAM(t)
-->x(n)
Rekonstruktions-TP mit Grenzfrequenz fA/2
x(t)
analoges Signal nicht bandbegrenzt
analoges Signal bandbegrenzt
Abtastrate fA
zeitdiskretes Signal
rekonstruiertes analoges Signal

2.7 Diskrete Signale: Beschreibung im Frequenzbereich

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt das Spektrum eines abgetasteten Signals über die Fourierreihenzerlegung (Fouriertransformation diskret) bestimmt. Wir ersetzen die Pulse jetzt durch diskrete Funktionswerte und definieren dafür das Spektrum.



Die Transformationsformeln lauten

Fourierkoeffizienten des periodischen Spektrums, sowie Fourierreihe für die Spektralfunktion:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t_n) &= \frac{1}{f_A} \int_{-f_A/2}^{f_A/2} \underline{X}(f) e^{j2\cdot\pi\cdot f\cdot t_n} df \\ X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-j2\cdot\pi\cdot f\cdot t_n} \end{aligned}}$$

Damit die Fourierreihe konvergiert muß $x(t_n)$ ein Energiesignal sein, d.h. $x(t_n)$ muß zeitlich begrenzt oder für große n stark abnehmende Werte haben.

Falls $x(nT_A)$ eine periodische Funktion ist,

$$x(t_n) = x((n+N)T_A) = x(t_n + T)$$

kann das Spektrum somit nicht nach der obigen Definition berechnet werden Das Spektrum wird jetzt über die Diskrete Fouriertransformation berechnet, die wir im nächsten Abschnitt definieren.

2.8 Die diskrete Fouriertransformation (DFT)

Zur Berechnung der Spektralfunktion (des Spektrums, oder der Fouriertransformation) mit einem Digitalrechner.

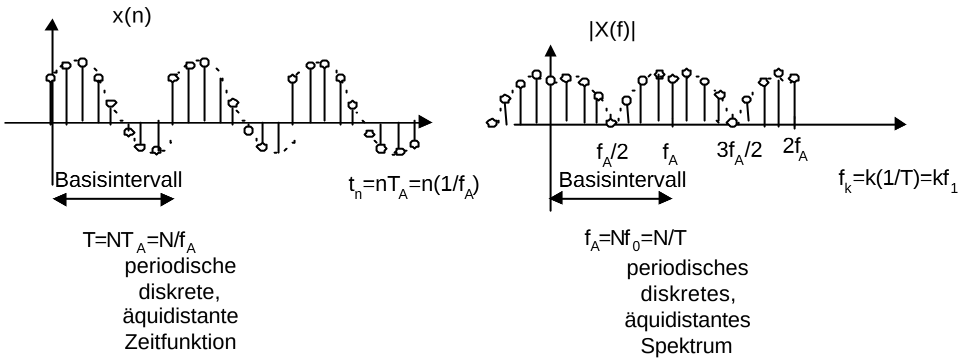
Der Rechner entnimmt dem Signal innerhalb eines Zeitintervalls T eine Folge von äquidistanten (Abtastperiode T_A) Abtastwerten $T= NT_A$. Wir sprechen von einem Signalabschnitt.

Setzt man in Gedanken diesen Signalabschnitt periodisch fort, so entsteht ein periodisches zeitdiskretes Signal.

Über das Spektrum dieses Signals können wir folgende Aussagen machen:

$x(t_n)$ ist periodisch mit T ---> X(f) muß diskret sein mit Werten im Abstand $f_0 = 1/T$, diskrete Frequenzen $f_k = kf_1$

$x(t_n)$ ist zeitdiskrete Folge von
Werten im zeitlichen Abstand $T_A = 1/ f_A$ ---> $X(f_A)$ muß periodisch mit der Periode $f_A = 1/T_A$ sein



Da

$$X(f_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-j2\cdot p\cdot f_k\cdot t_n}$$

wegen der Periodizität von x(tn) nicht konvergiert, setzen wir fest, daß zur Berechnung der Spektralwerte nur die vom Rechner entnommenen N Werte (aus dem sogenannten Basisintervall) herangezogen werden.

$$X(f_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{-j2\cdot p\cdot f_k\cdot t_n} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$X(kf_1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_A) e^{-j2\cdot p\frac{nk}{N}}, \quad da \quad f_k t_n = k\frac{1}{T} nT_A = k\frac{1}{NT_A} nT_A = \frac{nk}{N}$$

Für die Rücktransformation muß das im vorigen Abschnitt stehende Integral wegen der diskreten Frequenzen in eine Summe umgeschrieben werden. Es ergibt sich :

$$x(t_n) = \frac{1}{f_A} \int_{-f_A/2}^{f_A/2} \underline{X}(f) e^{j2\pi \cdot f \cdot t_n} df \quad \rightarrow \quad x(t_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(f_k) e^{j2\pi \cdot f_k \cdot t_n}$$

$$da \quad df = \frac{1}{T} \quad und \quad \frac{df}{f_A} = \frac{T_A}{T} = \frac{1}{N}$$

$$x(nT_A) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(kf_1) e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Da wir wieder diskrete Frequenzen und somit diskrete Teilschwingungen haben, ist es günstiger, diese auch wieder durch ihre Amplituden zu charakterisieren und nicht durch deren Dichte. Es ist deswegen notwendig, den Faktor 1/N bei der Berechnung der Spektralfunktion hinzuzufügen . Dann muß er aber bei der Rücktransformation weggelassen werden.

Zur Übersichtlichkeit schreiben wir vereinfachend

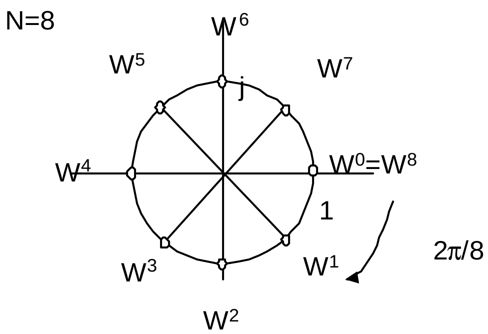
$$nT_A \rightarrow n$$
$$kf_1 \rightarrow k$$

$$\boxed{\begin{array}{llr} \{x(n)\}_{n=0,1,\ldots.N-1} & \overset{D.F.T.}{\underset{I.D.F.T.}{\rightleftarrows}} \quad \{\underline{X}(k)\}_{k=0,1,\ldots.N-1} & \\ D.F.T.: & \underline{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\cdot\pi \frac{nk}{N}} & k = 0,1,\ldots.N-1 \\ I.D.F.T. & x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{X}(k) e^{j2\cdot\pi\cdot\frac{nk}{N}} & n = 0,1,\ldots.N-1 \end{array}}$$

Drehfaktor:

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

ist komplexe Zahl mit Betrag = 1 und Winkel -(2π)/N. Die Potenzen von W liegen auf dem Einheitskreis in äquidistanten Winkel-Abständen (2π)/N. Sie sind die komplexen Nullstellen der Gleichung z^N-1 = 0



$$z^N = 1 = e^{-j2\pi \cdot n} \qquad n = 0,1,\ldots..$$

$$\Rightarrow \quad z_n = e^{-j2\pi \cdot \frac{n}{N}} = W^n$$

Unter Verwendung der Abkürzung für den Drehfaktor und der Matrizenschreibweise:

$$\underline{X}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot W^{nk} \qquad k = 0,1,\dots.N-1$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{X}(k)\cdot W^{-nk} \qquad n = 0,1,\dots.N-1$$

$$\vec{X} = A\vec{x} \qquad A = \frac{1}{N}\left(W^{nk}\right)$$

$$\vec{x} = B\vec{X} \qquad B = A^{-1} = \left(W^{-nk}\right)$$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ . \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & W & W^2 & . & W^{(N-1)} \\ 1 & W^2 & W^4 & . & W^{2(N-1)} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & W^{(N-1)} & W^{2(N-1)} & . & W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ .x_2 \\ . \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung der Inversen entfern man den Faktor 1/N und ersetzte bei den Drehfaktoren im Exponent das Plus-Vorzeichen durch ein Minuszeichen. Man beachte, daß für die Matrix A die i-te Zeile gleich der i-ten Spalte ist (Die Matrix ist gleich ihrer Transponierten).

2.9 Systemtheorie

2.9.1 Allgemeines Vorgehen

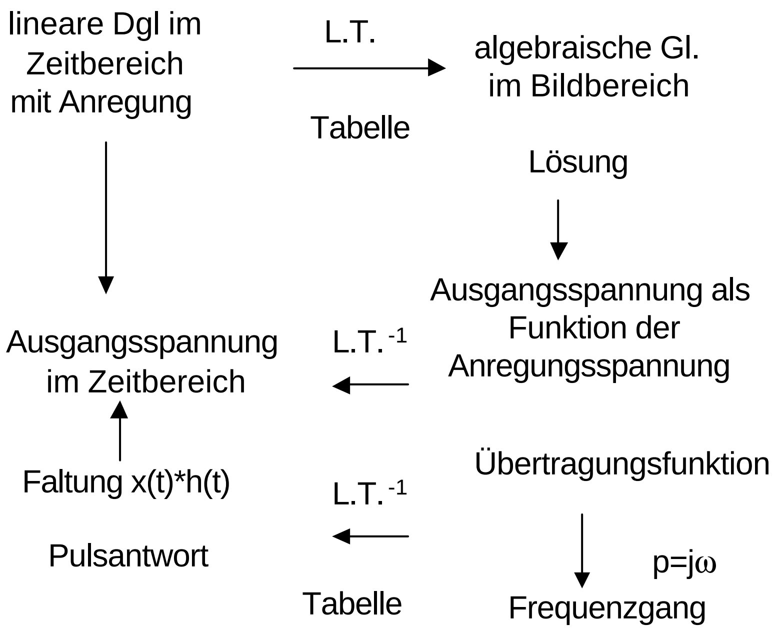
Elektrisches bzw. elektronisches analoges System setzt sich aus konzentrierten Bauteilen zusammen: Widerstände, Kondensator , Spulen (Induktivitäten,) , Transistoren, Dioden etc.

Bei einem LTI-System sind keine nichtlinearen Bauelemente vorhanden, bzw. sie werden nur im Kleinsignalbetrieb ausgesteuert.

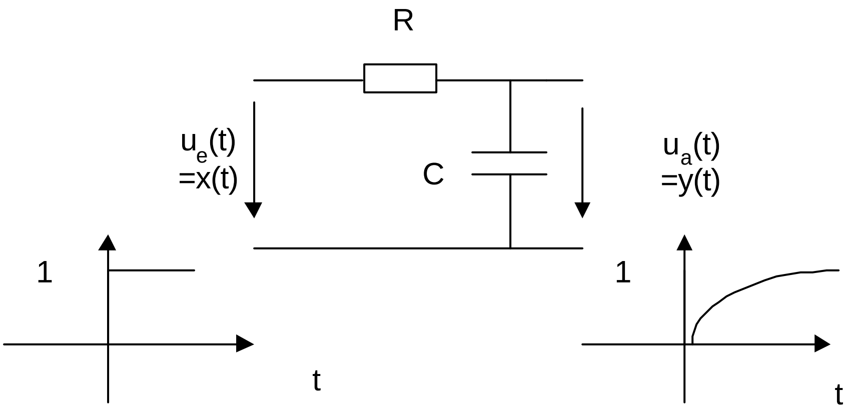
LTI = Linear time invariant. Außerdem sei das System kausal, d.h. das Ausgangsignal reagiert (erscheint) erst nach einer Anregung am Eingang.

Schaltung definiert, wie diese Bauelemente zusammengefügt sind und zusammenwirken. Die Eigenschaften des System sind z.B.: Welche Ausgangsspannung ergibt sich bei bestimmter Anregung durch Eingangsspannung? Wie ist der Frequenzgang ?etc.

System läßt sich durch ein System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben. Daraus können die Eigenschaften abgeleitet werden. Zur Lösung werden häufig die Differentialgleichungen aus dem Zeitbereich in den Bildbereich und von dort in den Frequenzbereich transformiert. Dort ergeben sich dann algebraische Gleichungen, die leichter zu lösen sind. Durch Rücktransformation ergibt sich die Lösung im Zeitbereich. Die Transformationen werden häufig anhand von Tabellen durchgeführt.


lineare Dgl im Zeitbereich mit Anregung
L.T.
Tabelle
algebraische Gl. im Bildbereich
Lösung
Ausgangsspannung als Funktion der Anregungsspannung
L.T.$^{-1}$
Ausgangsspannung im Zeitbereich
Faltung x(t)*h(t)
Pulsantwort
L.T.$^{-1}$
Tabelle
Übertragungsfunktion
p=jω
Frequenzgang

2.9.2 Beispiel: RC-Glied



$$-u_e(t)+R\cdot i(t)+u_a(t)=0 \qquad i=C\frac{du_a}{dt} \qquad u_e(t)=u(t)=Sprung$$

$$-u_e+R\cdot C\frac{du_a}{dt}+u_a=0$$

$$R\cdot C\frac{du_a}{dt}+u_a=u_e \qquad t=RC$$

$$t\cdot\frac{dy}{dt}+y(t)=x(t)$$

$$t\cdot p\cdot Y(p)+Y(p)=X(p)$$

$$H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{1}{1+t\cdot p}$$

$$H(jw)=\frac{Y(jw)}{X(jw)}=\frac{1}{1+t\cdot jw}=\frac{1}{1+j\dfrac{f}{f_g}} \qquad f_g=\frac{1}{2\cdot p\cdot RC}$$

$$x(t)=u(t)=Sprung\Rightarrow X(p)=\frac{1}{p} \quad \Rightarrow$$

$$Y(p)=H(p)\cdot X(p)=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1+t\cdot p}=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1/t+p}\right)=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1/t+p}\right) \quad (Partialbruchzerlegung)$$

$$\Rightarrow \quad x(t)=u(t)\left(1-e^{-t/t}\right)$$

Berechnung der Sprungantwort im Zeitbereich:

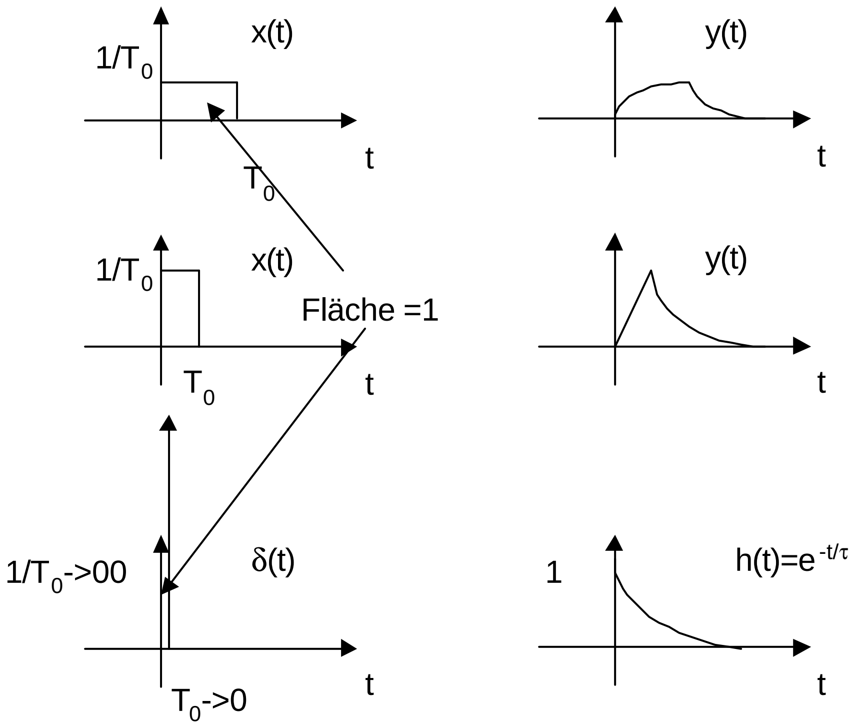
$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}(1-y) \qquad t>0$$

$$\text{hom}\,ogener \quad Teil: \quad \frac{dy}{dt}=-\frac{y}{t} \qquad \frac{dy}{y}=-\frac{dt}{t} \qquad \ln y=-\frac{t}{t}+C \quad \Rightarrow \quad u_a(t)=ke^{-t/t}$$

$$partikuläre \quad Lsg \quad des \quad in\,\text{hom}\,ogenen \quad Teils \quad u_a(t)=1 \quad \Rightarrow$$

$$u_a(t)=1-ke^{-t/t}=1-e^{-t/t} \qquad wegen \quad u_a(0)=0$$

Pulsantwort: am Eingang Flächengleiche Pulse

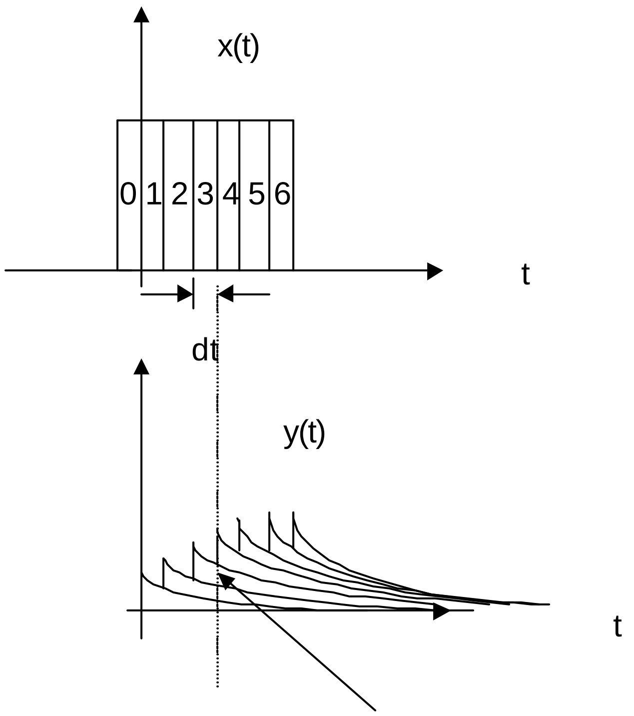


$$d(t) = \lim_{T_0 \to 0}\left(\frac{1}{T_0} rect(\frac{t}{T_0}) \right) = \lim_{T_0 \to 0}\left(\frac{1}{T_0} \frac{\sin(p \cdot \frac{t}{T_0})}{p \cdot \frac{t}{T_0}} \right) \quad \circ\!-\!-\!\bullet \quad h(t) = e^{-t/t}$$

Ausgangsspannung durch Überlagerung der Pulsantworten angestoßen aus Eingangssignal

-→ Faltung der Eingangsspannung mit der Pulsantwort

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t-t)dt$$



y(3)=x(0)h(3)dt+x(1)h(2)dt+x(2)h(1)dt+x(3)h(0)dt

= $\Sigma_{i=0..3}$x(idt)h(3dt-idt)dt

$$y(t_1) = \int_0^{t_1} x(t)h(t_1 - t)dt = \int_0^{t_1} h(t)x(t_1 - t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t_1 - t)dt = x(t) * h(t)$$

2.9.3 Korrelation zweier Signale:

allerdings für stochastische Signale, statistische Mittelwertsfunktion, gibt an, inwieweit zwei Zeitfunktionen übereinstimmen. Um die Übereinstimmung zu finden, müssen sie zeitlich gegeneinander verschoben werden.

$$r_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y(t+t)\,dt$$

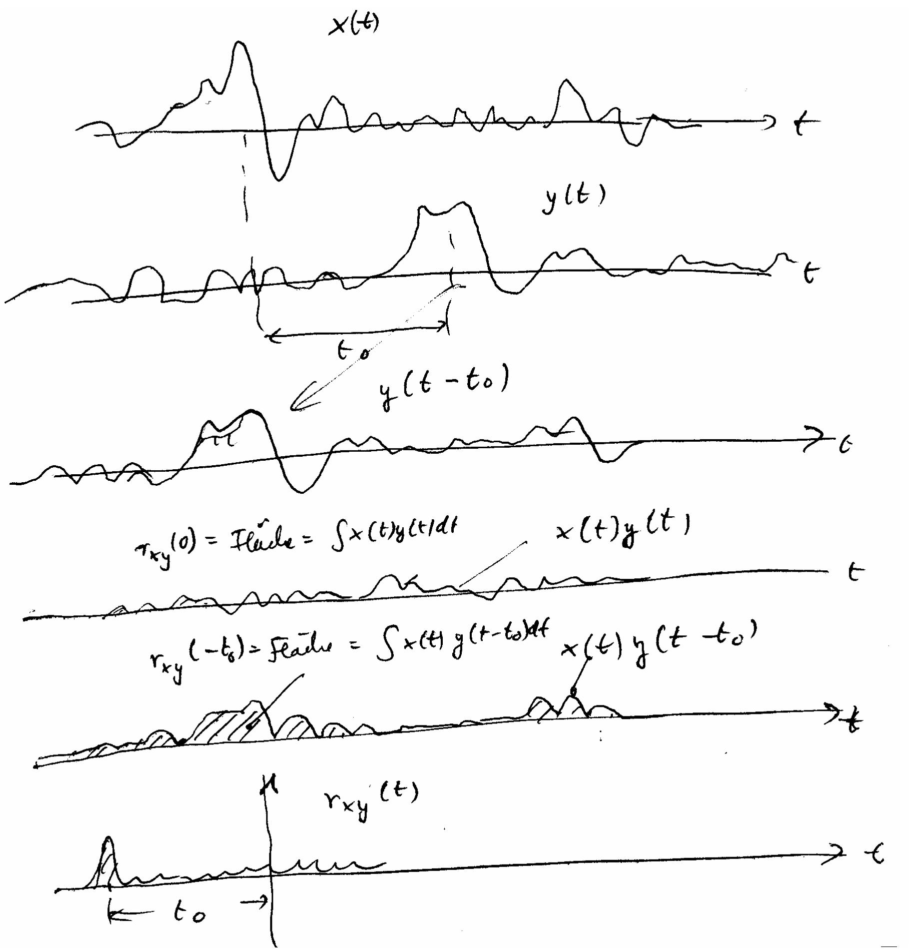
$$r_{xy}(t) = r_{xy}(-t) * y(t)\Big|_{t=t}$$

$$r_{xy}(t) = x(-t) * y(t) \qquad \circ\!-\!-\!\bullet \qquad X^{*}(f)\cdot Y(f)$$

Autokorrelationsfunktion (AKF):

$r_{xx}(\tau)$ Es gilt $W = r_{xx}(0)$ (Energie des Signals)

Skizze: „Passen die Signale zusammen , haben sie Gemeinsamkeiten, wenn man sie zeitlich in geeigneter Weise verschiebt?“



2.9.4 Übertragungsfunktion

$$x(t) = \underline{X} e^{jwt} \quad \Rightarrow$$

Falls $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X} e^{jw \cdot t} h(t-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X} e^{jw \cdot (t-t)} h(t) dt = \underline{X} e^{jwt} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-jw \cdot t} dt = \underline{X} e^{jwt} \underline{H}(jw)$

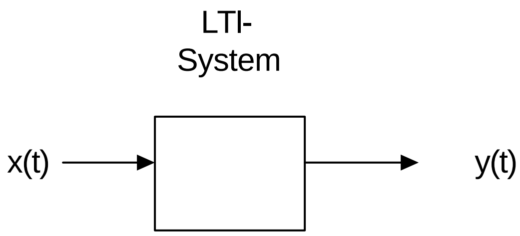
$$\underline{H}(f) = \frac{\underline{\underline{y(t)}}}{\underline{x(t)}} = \underline{H}(jw) = F.T.(h(t))$$

$$h(t) \quad \circ\!-\!-\!\bullet \quad \underline{H}(f)$$

wieder das Beispiel des RC-Tiefpaß:

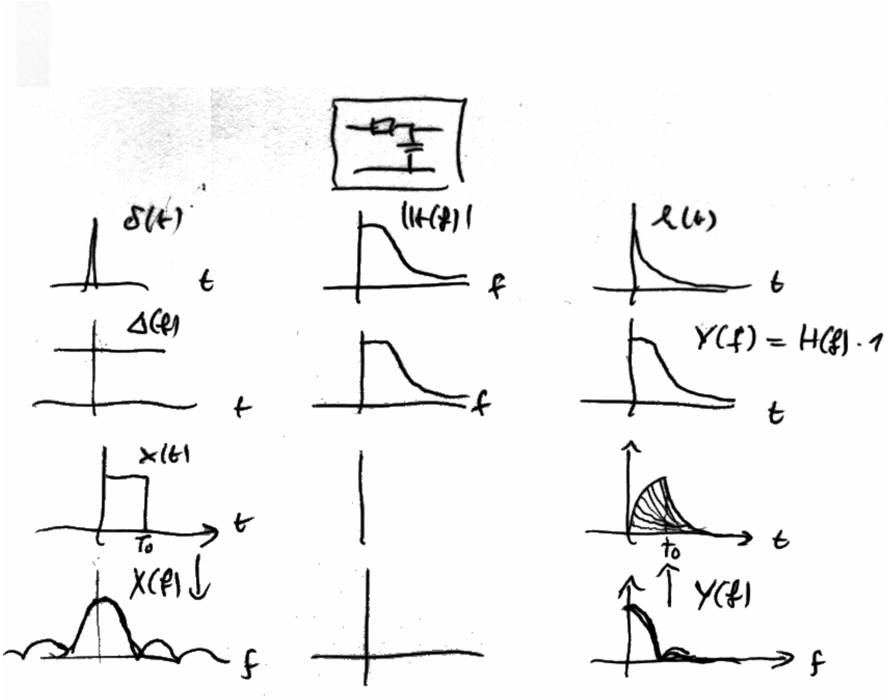
$$h(t) = L.T.^{-1}\left(\frac{1}{1+t \cdot p}\right) = e^{-t/t}$$

2.9.5 Zusammenhänge:



Aus x(t) Ausgangsfunktion y(t) berechnen:

- Lösen der Differentialgleichung im Zeitbereich
- Berechnung der Impulsantwort (im Bildbereich H(p) bestimmen, dann zurücktransformieren,) Faltung y(t)=x(t)*h(t)
- LT: x(t) → X(p) H(p)X(p)=Y(p) Y(p) → y(t)
- FT: x(t) → X(jω) H(jω)X(jω)=Y(jω) Y(jω) → y(t)



2.9.6 Abtastung und Grenzübergang zur „δ-Funktion“

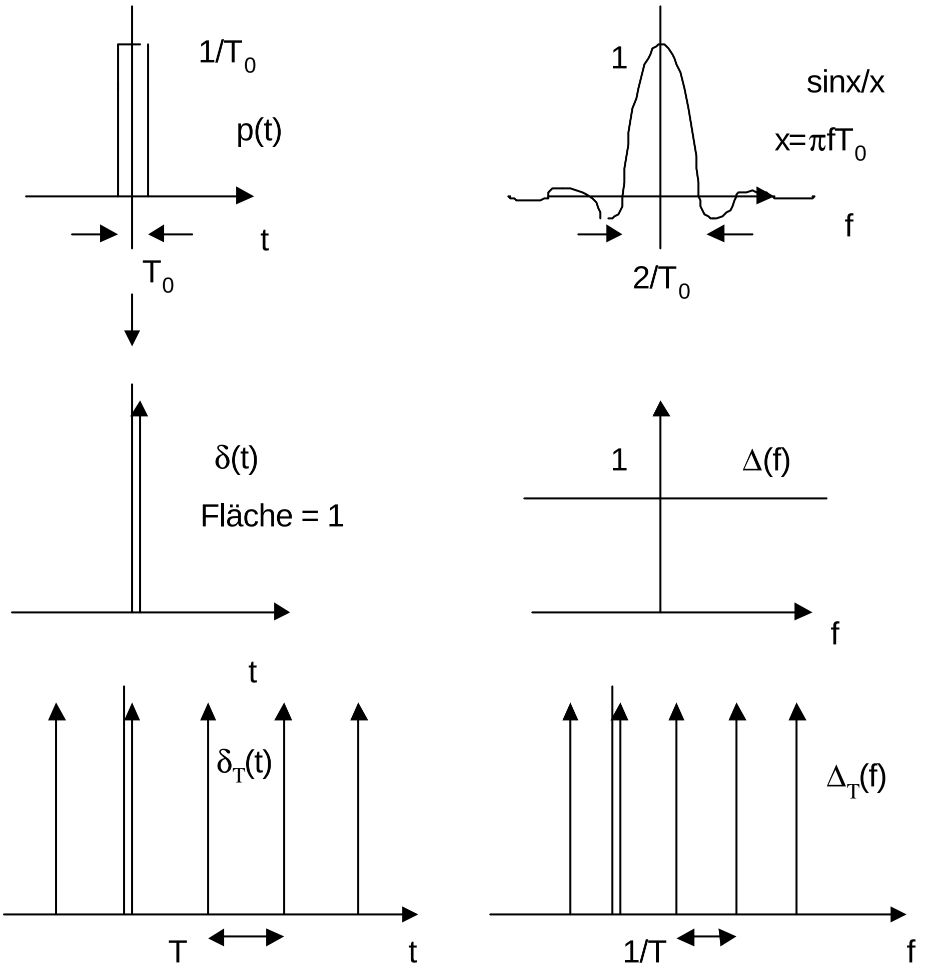


Abbildung 2-2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

Ausblendeigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\,dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

δ-Pulsfolge (Abtastpulse) :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad \circ\!-\!-\!\bullet \quad \Delta_T(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta(f-kf_1) \qquad f_1 = 1/T$$

$$x(t) = \hat{X} e^{j2\pi\cdot f_1\cdot t} \quad \circ\!-\!-\!\bullet \quad X(f) = \hat{X}\delta(f-f_1)$$