

# Analytische und Polygonale Flächen

Eldar Sultanow

eldar.sultanow @hpi.uni-potsdam.de  
Hasso-Plattner-Institut an der Universität Potsdam

**Zusammenfassung.** Analytische und Polygonale Flächen sind geometrische Flächen. Analytische Flächen sind definiert durch mathematische Funktionen wie beispielsweise algebraische Flächen. Polygonale Flächen dagegen stellen lediglich eine Sammlung von Dreiecksflächen oder Vierecksflächen dar. Analytische Flächen lassen sich auf polygonale Flächen abbilden. Den polygonalen Flächen liegt eine mathematische Funktion zu Grunde nämlich jene, die die entsprechende analytische Fläche definiert. Bekannte Vertreter analytischer Flächen sind Kugel, Zylinder, Kegel und Torus. Zu den polygonalen Flächen zählen beispielsweise die polygonalen Netze, wobei wir offene von geschlossenen Netzen unterscheiden. Zu den geschlossenen Netzen gehören zum Beispiel die Polyeder. Will man analytische Flächen mit dem Computer darstellen, bildet man unter Verwendung von Algorithmen diese auf polygonale Flächen ab. So können Flächen, die durch nichttriviale mathematische Funktionen definiert sind, mithilfe von polygonalen Netzen illustriert werden. Sie sind dabei Mittel zum Zweck für die Veranschaulichung der analytischen Flächen.

**Keywords:** analytische Flächen, Kugel, Torus, algebraische Fläche, Bézierflächen, Polygon, polygonale Flächen, polygonale Netze, Polyeder.

## 1 Einführung

Das Wort Geometrie kommt aus dem Griechischen und heißt Erdvermessung [8]. Geometrische Erkenntnisse gab es in allen Kulturen, aber erst im antiken Griechenland wurde daraus eine Wissenschaft in unserem heutigen Sinn, eine systematische Art der Gewinnung gesicherter Erkenntnisse [8]. Schon Theaetetus (414 - 368 v. Chr.) bewies, dass es nicht mehr als fünf reguläre Polyeder gibt. Sehr viel später mit dem Werk des irischen Mathematikers Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865) begann das Studium der Vektoren. Er entdeckte am 16. Oktober 1843 die Quaternionen, die man als Vorläufer der Vektoren betrachten kann. Das 1881 erschienene Buch *Vector Analysis* von Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903) war die eigentliche Geburtsstunde des Vektorbegriffs.

### 1.1 Affiner Raum

Der affine Raum  $V_A$  ist das Tripel  $(A, V, +)$ , wobei  $A$  eine Menge von Punkten,  $V$  ein Vektorraum und  $+$  eine Operation ist, die Punkte und Vektoren addiert. Das Ergebnis dieser Operation sind wieder Punkte.  $V$  kann ein Vektorraum über einem beliebigen Körper sein und beschränkt sich nicht nur auf reelle Zahlen. Die Dimension  $n$  von  $V$  ist beliebig, selbst die Dimension  $\infty$  ist zugelassen. Wir definieren den affinen Raum ohne Auszeichnung des Ursprungs,

gehen aber davon aus, dass seine Elemente aus  $V$  transitiv operieren. Deshalb muss entsprechend noch die Operation  $+$  genauer beschrieben werden.

$$+ : A \times V \rightarrow A$$

Sei  $P$  ein Punkt aus  $A$  und  $u, v$  Vektoren aus  $V$ . Es gelten folgende Axiome:

1.  $(P + u) + v = P + (u + v)$
2.  $P + u = P + v \rightarrow u = v$
3. Zu zwei Punkten  $P, Q$  existiert genau ein Vektor  $w \in V$  mit  $Q = P + w$ .  $w$  heißt Verschiebungsvektor von  $P$  nach  $Q$ .

Wenn  $V$  eine endliche Basis  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  besitzt und wenn  $O$  ein Punkt aus  $A$  ist, dann ist  $(O, e_1, e_2, \dots, e_n)$  ein  $n$ -Bein unseres affinen Raums. Des weiteren sei  $X \in A$  mit  $X = O + u$

und  $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , dann heißen  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Koordinaten von  $X$  bezüglich  $(O, e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

Ein  $k$ -dimensionaler linearer Teilraum des affinen Raumes  $V_A$  ist eine Teilmenge der Punkte von  $V_A$ , deren Verbindungsvektoren einen  $k$ -dimensionalen Vektorunterraum des  $V$  aufspannen. Jeder  $(n-1)$ -dimensionale lineare Teilraum wird als Hyperebene bezeichnet [1].

### 1.2 Hyperebene

Eine lineare Gleichung in den Variablen  $x_1, x_2, x_3$  bestimmt im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  eine

Teilmenge, die man Ebene nennt. In Erweiterung dieses Sachverhalts nennt man die Gesamtheit aller Elemente  $x$  eines linearen Raumes, die einer Gleichung  $f(x) = \alpha$  genügen, eine Hyperebene  $H$ . Dabei bedeuten  $f(x)$  ein lineares, stetiges Funktional und  $\alpha$  eine Zahl [2]. Eine Hyperebene eines Vektorraumes  $V$  ist ein Unterraum dieses Raumes, dessen Dimension um Eins niedriger ist als die Dimension von  $V$ . Und dies lässt sich entsprechend für die Hyperebene eines affinen Raumes übertragen. Man spricht also von einer Hyperebene sowohl bei Vektorräumen als auch bei affinen Räumen.

### 1.3 Fernpunkte, Projektionsgeraden

Der französische Festungsbaumeister Gerard Desargues (1591 - 1661) hatte die Idee, dass es im perspektivischen Bild eine Gerade gibt, nämlich den Horizont, auf der sich die Bilder paralleler Geraden treffen [8]. Dem Horizont entspricht aber keine Gerade einer abgebildeten Ebene. Es wurde die Urbildebene um neue, "im Unendlichen liegende" Punkte, die man als Urbilder der Horizontpunkte ansehen könnte erweitert. Diese Punkte heißen Fernpunkte und bilden zusammen eine neue Gerade, die Ferngerade, das Urbild des Horizonts [8]. Damit ist man den Sonderfall der affinen Geometrie los, dass zwei Geraden einer Ebene nicht immer einen Schnittpunkt haben, sondern manchmal parallel sind. Diese parallelen Geraden treffen sich eben in den Fernpunkten. Diese Erweiterung der üblichen affinen Geometrie nannte man projektive Geometrie [8]. Der französische Mathematiker Jean Victor Poncelet (1788 - 1867) entwickelte systematisch die Gesetze dieser Geometrie während er als Soldat unter Napoleon 1812 in russische Kriegsgefangenschaft geriet [8]. Jeder Punkt  $P$  der Urbildebene bestimmt ja genau eine Gerade  $G(O, u) = \{O + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  durch das Projektionszentrum  $O$ , und sein Bildpunkt ist der Schnitt dieser Geraden mit der Bildebene  $B$  (Abbildung 1). Eigentlich können wir die Punkte  $P$  der Urbildebene ganz vergessen und durch ihre Projektionsgeraden ersetzen [8]. Eine Menge von Projektionsgeraden, deren Bilder (Schnitte mit  $B$ ) auf einer gemeinsamen Geraden in  $B$  liegen, sind in einer gemeinsamen Ebene enthalten, nämlich der von der Bildgeraden und dem Projektionszentrum aufgespannten Ebene. Daher kann man in diesem Zusammenhang sagen, dass Punkte Projektionsgeraden und Geraden Ebenen durch  $O$  entsprechen [8]. Aber einige Geraden durch  $O$  treffen die Urbildebene  $U$  gar nicht, nämlich die zu  $U$  parallelen. Ihnen

entsprechen also keine Punkte von  $U$ . Das sind die Fernpunkte, die auf der Ferngeraden liegen, denn sie sind ja alle in der zu  $U$  parallelen Ebene durch  $O$  enthalten [8].

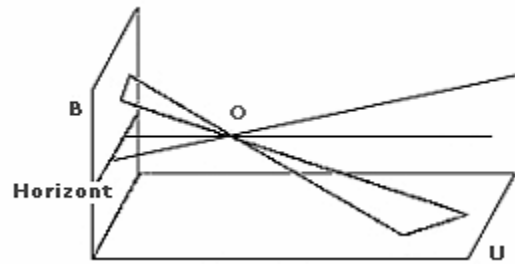


Abbildung 1. Urbildebene, Bildebene und Horizont<sup>1</sup>

Die ebene Projektive Geometrie ist daher nichts anderes als die Geometrie des "Büschels" der Geraden durch einen festen Punkt  $O$  im Raum [8]. Wenn wir den affinen Raum mit dem ausgezeichneten Punkt  $O$  wieder als Vektorraum mit Ursprung  $O$  auffassen, dann ist dieses Geradenbüschel nichts anderes als die Menge aller eindimensionalen linearen Unterräume [8].

### 1.4 Projektiver Raum

Sei  $V_A = (A, V, +)$  ein affiner Raum, wobei  $V$   $n$ -dimensional ist. Und sei  $O$  ein beliebiger aber fest gewählter Punkt dieses Raumes. Die Menge

$$V_p = \{G(O, u) \mid u \in V\}$$

aller Geraden durch  $O$  wird als projektiver Raum bezeichnet. Wir definieren also den projektiven Raum  $V_p$  als die Menge der eindimensionalen linearen Unterräume von  $V$ . Sei  $H$  eine beliebige Hyperebene von  $V_A$ :

$$H = \{P_0 + x_1 u_1 + \dots + x_{n-1} u_{n-1} \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$

$P_0$  ist ein Punkt von  $A$  und  $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$  ist eine Menge linear unabhängiger Vektoren von  $V$ . Die Punkte von  $V_p$ , das heißt die Geraden  $G(O, u)$ , die einen Schnittpunkt mit  $H$  besitzen, sind durch diesen Schnittpunkt eindeutig bestimmt. Es gibt aber Geraden, die zu  $H$  parallel sind, und die daher keinen Schnittpunkt mit  $H$  besitzen. Man spricht von diesen Geraden in  $V_p$  als "unendlich ferne Punkte von  $H$ ". Diese bilden die projektive Hyperebene, die wir die zu  $H$  gehörige Fernhyperebene nennen [8].

<sup>1</sup> [8]

## 1.5 Homogene Funktion

Eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $n$  unabhängigen Variablen nennt man homogen vom Grad  $k$  bezüglich der Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , wenn bei Multiplikation jeder einzelnen unabhängigen Variablen mit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  der Funktionswert mit  $\lambda^k$  multipliziert erscheint. Das heißt, es gilt:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$k$  ist dabei der Homogenitätsgrad. Ganzrationalen homogenen Funktionen heißen homogenen Polynome. Ein homogenes Polynom vom Grad  $k$  wird häufig auch als Form vom Grad  $k$  bezeichnet. Ist  $k=2$ , so spricht man von quadratischen Formen, bei  $k=3$  von kubischen Formen. Im Falle  $k=1$  wird ein solches Polynom eine Linearform genannt. Beispiele für homogene Polynome sind

1.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
2.  $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2$
3.  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$

Für homogene Polynome gilt der Satz:

Das Produkt von homogenen Polynomen ist wieder ein homogenes Polynom, dessen Grad die Summe der Grade der einzelnen Polynome ist. Das Nullpolynom wird dabei ausgeschlossen.

### 1.5.1 Homogenisierung

Zunächst wollen wir uns den Begriff der Homogenisierung am Beispiel der allgemeinen quadratischen Funktion klar machen. Sei

$$q(x) = \sum_{\substack{i \leq j \\ i, j \in [0, n]}} d_{i,j} x_i^{\text{sgn} i} x_j^{\text{sgn} j}$$

eine allgemeine quadratische Funktion. Diese lässt sich so hinschreiben, dass man drei wesentlich verschiedene Anteile voneinander trennt. Wir unterscheiden dabei einen quadratischen, linearen und einen konstanten Anteil.

$$q(x) = \sum_{\substack{i \leq j \\ i, j \in [1, n]}} a_{i,j} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i x_i + c$$

Und für die Koeffizienten gilt folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \forall_{i \neq 0} d_{i,j} &= a_{i,j} & \forall_{i \neq 0} d_{0,i} &= b_i \\ d_{0,0} &= c \end{aligned}$$

Vereinfachend schreiben wir nun  $q = q_2 + q_1 + q_0$ , wobei der quadratische Anteil  $q_2(x) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j$

und der lineare Anteil  $q_1(x) = \sum_i b_i x_i$  und der konstante Anteil  $q_0 = c$  ist. Die drei Anteile verhalten sich offensichtlich unterschiedlich, wenn wir  $x$  durch ein Vielfaches  $\lambda x$  ersetzen:  $q_2(\lambda x) = \lambda^2 q_2(x)$ ,  $q_1(\lambda x) = \lambda q_1(x)$  und  $q_0(\lambda x) = q_0(x)$ . Demnach sind also  $q_0, q_1, q_2$  homogen vom Grad  $0, 1, 2$ . Jedes Polynom ist Summe von homogenen Polynomen. Setzen wir nun für  $\lambda = \frac{1}{\xi}$  mit  $\xi \neq 0$ . Dann folgt für die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= q\left(\frac{x}{\xi}\right) = q_2\left(\frac{x}{\xi}\right) + q_1\left(\frac{x}{\xi}\right) + q_0\left(\frac{x}{\xi}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\xi^2} q_2(x) + \frac{1}{\xi} q_1(x) + q_0(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow q_2(x) + \xi q_1(x) + \xi^2 q_0(x) = 0 \end{aligned}$$

Die linke Seite der letzten Gleichung,  $\hat{q}(x, \xi) = q_2(x) + \xi q_1(x) + \xi^2 q_0(x)$  ist ein homogenes Polynom vom Grad 2 in den  $(n+1)$  Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n, \xi$ . Diesen Übergang von  $q$  zu  $\hat{q}$  nennt man Homogenisierung [8]. Aus einem Polynom  $f$  vom Grad  $d$  in  $n$  Variablen wird ein homogenes Polynom  $\hat{f}$  vom selben Grad  $d$  aber in  $n+1$  Variablen. Dazu zerlegt man  $f$  zuerst in seine homogenen Bestandteile,  $f = \sum_{k=0}^d f_k$ , wobei  $f_k$  homogen vom Grad  $k$  ist. Dann multipliziert man  $f_k$  mit der  $(d-k)$ -ten Potenz einer neuen Variablen  $\xi$  oder  $x_{n+1}$  und erhält ein Polynom  $\hat{f}$  in  $n+1$  Veränderlichen, die wir zu einer neuen Variablen  $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  zusammenfassen:

$$\hat{f}(\hat{x}) = \sum_{k=0}^d (x_{n+1})^{d-k} f_k(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

In der Tat ist  $\hat{f}$  homogen vom Grad  $d$  [8], denn

$$\hat{f}(\lambda \hat{x}) = \sum_k (\lambda x_{n+1})^{d-k} f_k(\lambda x) = \lambda^d \hat{f}(\hat{x}).$$

## 2 Analytische Flächen

### 2.1 Definition

Analytische Flächen sind mathematisch beschriebene Oberflächen. Sie werden durch ihre analytischen Parameter definiert, wie zum Beispiel eine Kugel durch ihren Mittelpunkt und Radius. Sie lassen sich entweder in expliziter Form

definieren, also die Spezifikation einer Variablen durch die anderen wie in

$$z = \sqrt{x+y},$$

in impliziter Form als Nullstellen einer Funktion zum Beispiel

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

oder in Parameterform, also für den  $d$ -dimensionalen Fall mit  $d$  Funktionen, die von  $(d-1)$  Parametern abhängen, wie am Beispiel einer Kugeloberfläche

$$x(u, v) = \cos u \cos v$$

$$y(u, v) = \sin u \cos v$$

$$z(u, v) = \sin v$$

$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2].$$

Jede dieser Darstellungsformen hat ihre Vor- und Nachteile. Deshalb sind oft für die Bearbeitung eines Problems alle drei Formen erforderlich. Häufig muss dann die eine Form in die andere umgewandelt werden. Zum Beispiel eignet sich die Parameterform für die Berechnung von Vektoren beziehungsweise Punkten im  $d$ -dimensionalen Raum. Aber die mathematische Natur des Durchdringungsproblems ist sehr einfach, falls eine Fläche implizit und die andere in Parameterdarstellung gegeben ist. So lassen sich die Schnittfiguren alleine durch gegenseitiges Einsetzen der zwei Formen ermitteln.

## 2.2 Algebraische Flächen

Eine algebraische Fläche  $X$  ist ein integrales, normales, zweidimensionales Schema vom endlichen Typ über  $\mathbb{C}$  [3]. Algebraische Flächen von Grad  $n$  im  $\mathbb{R}^3$  sind implizit durch homogene Polynomfunktionen

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y, z, w) = \sum_{i+j+k+l=n} a_{ijk} x^i y^j z^k w^l$$

definierte Flächen. Bekannt sind beispielsweise die Kegelschnitte im  $\mathbb{R}^2$ :

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y, w) = \sum_{i+j+k=2} a_{ijk} x^i y^j w^k.$$

Jede nichtalgebraische Fläche heißt transzendent.

## 2.3 Parameterdarstellung

Wir geben uns in einer  $(u, v)$ -Parameterebene ein Gebiet  $G$  etwa der Form

$$a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d$$

vor [6]. Durch die stetig differenzierbare, injektive Abbildung  $G \rightarrow \Phi$  werde jeder Punkt  $(u, v)$  von

$G$  in  $\mathbb{R}^3$  abgebildet. Jeder Punkt der Bildmenge  $\Phi$  kann dann durch die reelle Vektorfunktion  $\vec{f}(u, v) = X(u, v)$  beschrieben werden.  $X(u, v)$  heißt eine Parameterdarstellung der Fläche  $\Phi$  und  $u, v$  heißen die Parameter dieser Darstellung (siehe Abbildung 2) [6]. Die Linien  $u = \text{const.}$  beziehungsweise  $v = \text{const.}$  beschreiben auf der Fläche  $\Phi$  das Netz der Parameterlinien [6]. Da bei dreidimensionalen Flächen  $x, y, z$  nicht voneinander unabhängig sind, benötigt man diese zwei Parameter  $u$  und  $v$ , womit dann ein Punkt auf der Fläche  $\Phi$  beschrieben werden kann.

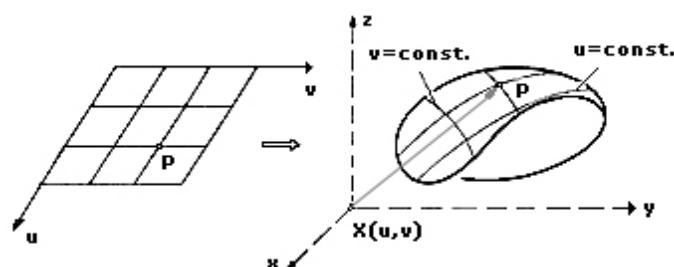


Abbildung 2. Parameterdarstellung<sup>2</sup>

### 2.3.1 Überführen einer Parameterdarstellung in implizite Form am Beispiel der Kugel

Wir versuchen aus der Parameterdarstellung einer Kugel

$$\vec{f}(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \sin u \cos v \\ r \sin v \end{pmatrix}$$

eine Darstellung durch eine Gleichung herzuleiten. Zunächst gilt:

$$x = r \cos u \cos v \quad \text{und} \quad y = r \sin u \cos v.$$

Quadriert man beide Ausdrücke und addiert sie, so folgt wegen

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1 \quad \text{dann} \quad x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 v.$$

Nun quadriert man  $z = r \sin v$  und addiert dies zum eben erhaltenen Zwischenergebnis, so erhält man wegen  $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$  die bekannte Kugelgleichung

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

## 2.4 Parametertransformation

Die Parameterdarstellung einer Fläche ist nicht eindeutig. Aber bei verschiedenen Parameterdarstellungen der selben Fläche lässt sich jeweils die eine Darstellung auf die andere zurückführen.

<sup>2</sup> [6]

### 2.4.1 Parametertransformation am Beispiel der Kugel

Es stellen die beiden Parameterdarstellungen

$$\vec{f}(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \sin u \cos v \\ r \sin v \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \begin{pmatrix} r \cos \tilde{u} \\ r \sin \tilde{u} \cos \tilde{v} \\ r \sin \tilde{u} \sin \tilde{v} \end{pmatrix}$$

dieselbe Kugel um den Ursprung mit dem Radius  $r$  dar. Die eine Darstellung kann durch eine Parametertransformation in die andere übergeführt werden. Diese Parametertransformation ist durch die Beziehungen:

$$(i) \quad \cos \tilde{u} = \cos u \cos v$$

und

$$(ii) \quad \cos \tilde{v} = \frac{\sin u \cos v}{\sqrt{\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v}}$$

bestimmt. Im folgenden überzeugen wir uns von der Korrektheit dieser Parametertransformation. Es muss lediglich gezeigt werden, dass die drei Gleichungen

1.  $r \cos u \cos v = r \cos \tilde{u}$
2.  $r \sin u \cos v = r \sin \tilde{u} \cos \tilde{v}$
3.  $r \sin v = r \sin \tilde{u} \sin \tilde{v}$

gelten. Die erste Gleichung gilt, das geht allein aus Beschreibung der Parametertransformation hervor. Die zweite Gleichung gilt wegen

$$\frac{\sin^2 v \cos^2 u + \sin^2 u}{\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v} = 1,$$

denn stellen wir die erste Gleichung nach  $\cos \tilde{u}$  beziehungsweise  $\sin \tilde{u}$  um, so ergibt sich

$$(iii) \quad \sin \tilde{u} = \sqrt{1 - \cos^2 u \cos^2 v}$$

und in der zweiten Gleichung ist wegen (ii) und (iii) das Produkt  $\sin \tilde{u} \cdot \cos \tilde{v}$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 u \cos^2 v} \cdot \frac{\sin u \cos v}{\sqrt{\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos^2 u \cos^2 v}{\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v}} \sin u \cos v$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2 v \cos^2 u + \sin^2 u}{\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v}} \sin u \cos v$$

Untersuchen wir abschliessend die dritte Gleichung. Dazu stellen wir zunächst die zweite

Gleichung nach  $\cos \tilde{v}$  um, und erhalten nach einsetzen von (iii) dann

$$\cos \tilde{v} = \frac{\sin u \cos v}{\sqrt{1 - \cos^2 u \cos^2 v}}$$

Der Satz des Pythagoras angewendet auf Winkelfunktionen am Einheitskreis („trigonometrischer Pythagoras“) liefert dazu die Gleichung für  $\sin \tilde{v}$

$$\sin \tilde{v} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u \cos^2 v}{1 - \cos^2 u \cos^2 v}} = \sqrt{\frac{\sin^2 v}{1 - \cos^2 u \cos^2 v}}$$

Nochmals Verwenden von (iii) ergibt schliesslich

$$\sin \tilde{u} \cdot \sin \tilde{v} = \sqrt{1 - \cos^2 u \cos^2 v} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 v}{1 - \cos^2 u \cos^2 v}}$$

Also gilt damit auch die dritte Gleichung  $\sin \tilde{u} \cdot \sin \tilde{v} = \sin v$ .

## 2.5 Beispiele für Analytische Flächen

Es gibt unendlich viele Beispiele für analytische Flächen, da es unendlich viele Möglichkeiten für die Komposition mathematischer Funktionen gibt. Bekannt sind vor allem die Kugel, der Torus, Zylinder, Kreiskegel und Bezierflächen.

### 2.5.1 Die Kugel

Die Kugel ist ein spezieller Ellipsoid. Für Ellipsoide gilt folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Setzt man nun  $a = b = c = r$ , so ergibt sich eine Kugel mit dem Radius  $r$ . Neben Mittelpunkt und Radius gibt es noch die Möglichkeit, den Vervollständigungswinkel als Parameter zur Beschreibung der Kugel einzuführen. Dieser Winkel gibt an wie weit die Kugelhülle vervollständigt wird beziehungsweise wie gross eine Öffnung in der Kugelhülle ist.

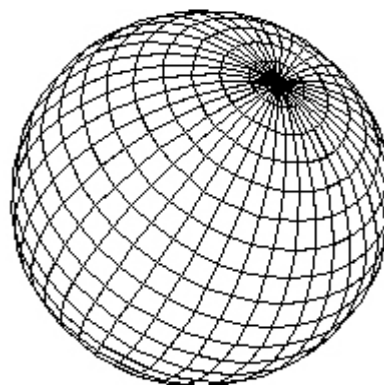


Abbildung 3. Kugel dargestellt durch 762 Punkte und 800 Polygone

Beträgt der Winkel  $360^\circ$ , wie in Abbildung 3, so ist die Kugelhülle vollständig also keine Öffnung vorhanden. Beträgt er  $180^\circ$  ergibt sich eine Halbkugel wie in Abbildung 4.

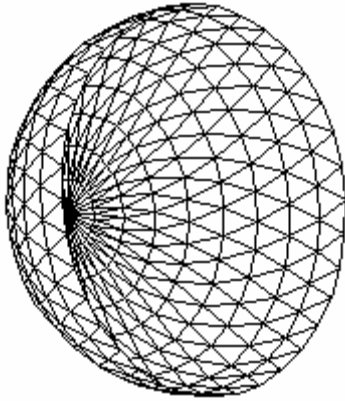


Abbildung 4. Halbkugel, eine Kugel dessen Vervollständigungswinkel  $180^\circ$  beträgt

### 2.5.2 Der Torus

In der  $x$ - $z$ -Ebene

$$E_{xz} : y = 0$$

wird ein Kreis mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $M = (R, 0, 0)$  durch folgende Vektorfunktion beschrieben:

$$\vec{f}(\varphi) = \begin{pmatrix} R + r \cos(\varphi) \\ 0 \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt demzufolge auf der  $x$ -Achse und sein Abstand zum Ursprung ist  $R$ :

$$|\overline{OM}| = R, \quad R \geq r.$$

Dieser Kreis werde um die  $z$ -Achse gedreht, wodurch ein Ring mit kreisförmigen Querschnitt (Torus) entsteht. Die Rotation um die  $z$ -Achse wird beschrieben durch die Matrix

$$A_z(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Also ist der Torus gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{g}(\varphi, \vartheta) &= \vec{f}(\varphi) A_z(\vartheta) = \begin{pmatrix} x(\varphi, \vartheta) \\ y(\varphi, \vartheta) \\ z(\varphi, \vartheta) \end{pmatrix} = \dots \\ &= \begin{pmatrix} (R + r \cos \varphi) \cos(\vartheta) \\ (R + r \cos \varphi) \sin(\vartheta) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi, \vartheta \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Quadriert man  $x, y$  und addiert, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 = (R + r \cos \varphi)^2 = R^2 + 2Rr \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi$$

So ergibt sich  $x^2 + y^2 - R^2 - r^2 \cos^2 \varphi = 2Rr \cos \varphi$  und daraus folgt dann durch Quadrieren  $(x^2 + y^2 - R^2 - r^2 \cos^2 \varphi)^2 = 4R^2 r^2 \cos^2 \varphi$ .

Desweiteren ist  $z^2 = r^2 \sin^2 \varphi = r^2(1 - \cos^2 \varphi)$

also  $\cos^2 \varphi = \frac{r^2 - z^2}{r^2}$ . Setzt man nun für  $\cos^2 \varphi$

ein, so erhalten wir als Gleichung der Fläche:  $[x^2 + y^2 - R^2 - (r^2 - z^2)]^2 = 4R^2(r^2 - z^2)$ ,

$0 < r < R$ . Zur Veranschaulichung ist hierzu in Abbildung 5 eine Torusfläche dargestellt.

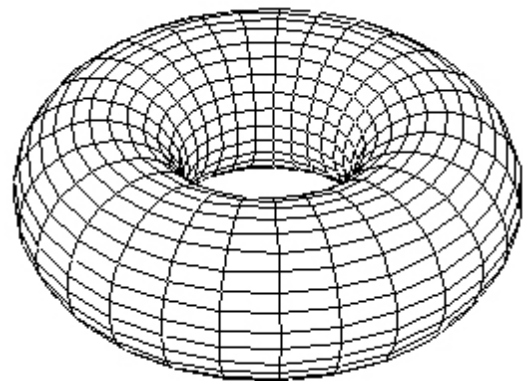


Abbildung 5. Torus

Wir haben aus der Parameterdarstellung vom Torus die implizite Form bestimmt. Nun geben wir noch die Auflösungsfunktion  $x = x(y, z)$  in einer Umgebung eines Toruspunktes  $(x, y, z)$  mit  $x > 0, x^2 + y^2 < R^2$  explizit an:

$$f(x, y, z) = 0$$

$$\Leftrightarrow [x^2 + y^2 - R^2 - (r^2 - z^2)]^2 - 4R^2(r^2 - z^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow [x^2 + (y^2 - R^2 - r^2 + z^2)]^2 = 4R^2(r^2 - z^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y^2 - R^2 - r^2 + z^2) = \pm 2R\sqrt{r^2 - z^2}$$

(denn  $a^2 = b^2 \rightarrow a = b \vee a = -b$ )

$$\Leftrightarrow x^2 = R^2 \pm 2R\sqrt{r^2 - z^2} + r^2 - z^2 - y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \left( R \pm \sqrt{r^2 - z^2} \right)^2 - y^2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\left( R \pm \sqrt{r^2 - z^2} \right)^2 - y^2}, \quad \text{da } x > 0$$

Die letzte Gleichung ist die explizite Form des Torus. Neben den beiden Radien  $R, r$  und dem Mittelpunkt gibt es wie bei der Kugel einen Vervollständigungswinkel als weiteren Parameter.

Er gibt an, wie weit in unserem Fall der in  $E_{xz}$  befindliche Kreis, den wir am Anfang des Abschnitts beschrieben haben, um die  $z$ -Achse gedreht wird (Abbildung 6).

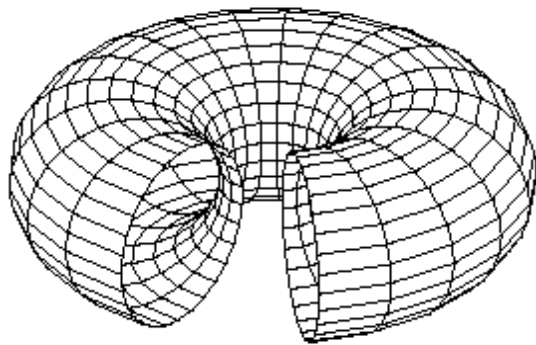


Abbildung 6. Torus, dessen Vervollständigungswinkel kleiner als  $360^\circ$  ist

### 2.5.3 Die Wellenfunktion

Ein Kreis in der  $x$ - $y$ -Ebene mit dem Radius  $r$  und Mittelpunkt  $M = (0, 0, 0)$  wird durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

beschrieben. Wir ergänzen den Kreis um einen Parameter, der den Radius variiert:

$$r = b \cdot t$$

Die Wellenfläche kann man sich als eine Menge konzentrischer zu  $E_{xy}$  paralleler Kreise vorstellen, deren Mittelpunkt sich auf der  $z$ -Achse innerhalb eines geschlossenen Intervalls  $I$  periodisch ändert. Der Parameter  $b$  streckt beziehungsweise staucht diese Welle

$$x^2 + y^2 - (b \cdot t)^2 = 0 \rightarrow t = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{b^2}}$$

Nun legen wir die Grenzen des Intervalls  $I$  fest:

$$I = [-a, a]$$

Dann ist  $a$  ein Parameter, welcher die maximale Höhe der Welle also die Amplitude angibt. Und die Form der Welle ist durch die Sinusfunktion definiert:

$$z = a \cdot \sin(t + c)$$

Hierbei ist  $c$  ein Startwert bezüglich des Parameters  $t$ . Den Parameter  $t$  kann man auch als die "Zeit" interpretieren. In Abhängigkeit von  $c$  verschieben sich die Wellenberge mit den Wellentälern. Schliesslich erhalten wir nach Einsetzen von  $t$  in die Sinusfunktion eine explizite Form der in Abbildung 7 dargestellten Wellenfläche.

$$z = a \cdot \sin\left(\frac{1}{b} \sqrt{x^2 + y^2} + c\right)$$

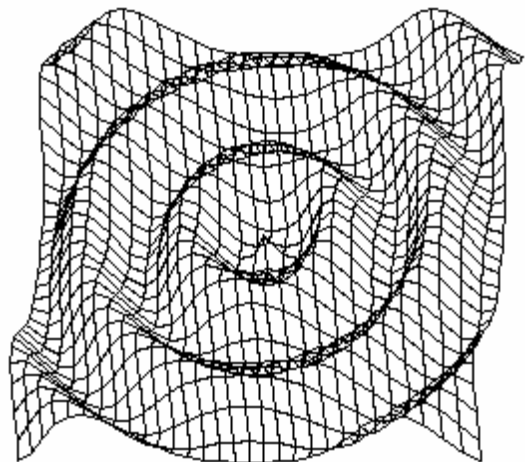


Abbildung 7. Wellenfläche dargestellt durch 961 Punkten 1860 Kanten

### 2.5.4 Bézierdarstellung von parametrisierten Kurven und Flächen

Seit 1958 finden Freiformflächen Anwendung im CAD-Bereich insbesondere im Automobil-Karosseriebau. Pierre Bézier (Renault) und P. de Casteljau (Citroen) entwickelten etwa zeitgleich jeweils eine Methode, die bei der Entwicklung von Autoformteilen eingesetzt wurde beziehungsweise heute noch eingesetzt wird. Die Bézierdarstellung ist eine parametrische Repräsentation auf der Basis von Bernstein-Polynomen.

#### 2.5.4.1. Bézierkurven

Zur Beschreibung von Bézierkurven bedienen wir uns zunächst der Parameterdarstellung. Der Punkt einer Kurve wird als Vektor wie folgt dargestellt:

$$F(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix}.$$

Zur Darstellung von Kurven in drei Dimensionen genügt lediglich die Erweiterung um eine dritte Komponente

$$F(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{pmatrix}.$$

Pierre Bézier verwendete zur Definition einer Bézierkurve  $F_B(u)$  mit  $n+1$  Kontrollpunkten  $P_0, P_1, \dots, P_n$  folgende Funktion:

$$B_{i,n}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

wobei

$$F_B(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(u).$$

Die Funktionskomponenten  $B(i, n)$  können als Formfunktionen aufgefasst werden. Sie nehmen Einfluß eines Kontrollpunktes auf die Kurve im Verlauf von  $u$  bei  $0 \leq u \leq 1$ . Um bei der Darstellung von Bézierkurven im interaktiven Betrieb einen möglichst schnellen Aufbau zu haben, muss man sich ein paar Gedanken zum Ablauf der Berechnung machen. Da es sich bei Bézierkurven um Polynome vom Grad  $n$  handelt, bietet sich zur schnellen Berechnung das Horner-Schema an:

$$\begin{aligned} h(x) &= (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots) + a_0 \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

Nach der oben gegebenen Schreibweise ist das Polynom in expliziter Form gegeben und muss entsprechend umgewandelt werden. Wir wissen bereits:

$$F_B(u) = \sum_{i=0}^n P_i \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

Auf  $(1-u)^{n-i}$  wenden wir den Binomischen Satz an, ersetzen demzufolge diesen Term durch die Summe

$$\sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} 1^{n-i-k} (-u)^k = \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-1)^k u^k$$

und erhalten dann

$$F_B(u) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} (-1)^k P_i u^{i+k}$$

Untersuchen wir abschliessend Bézierkurven für den Fall  $n=3$ . Das sind also Kurven mit vier Kontrollpunkten.

$$B_{i,3}(u) = \binom{3}{i} u^i (1-u)^{3-i}$$

$$F_B(u) = \sum_{i=0}^3 P_i B_{i,3}(u) = (P_0 P_1 P_2 P_3) \begin{pmatrix} B_{0,3}(u) \\ B_{1,3}(u) \\ B_{2,3}(u) \\ B_{3,3}(u) \end{pmatrix}$$

Die vier Polynome  $B_{0,3}(u), B_{1,3}(u), B_{2,3}(u), B_{3,3}(u)$  heißen Bernstein-Polynome. Sie sind die Gewichtungsfunktionen für Bézierkurven. In  $u=0$  ist alleine  $B_{0,3}$  von Null verschieden und die Kurve geht durch  $P_0$ . In  $u=1$  ist entsprechend nur  $B_{3,3}$  von Null verschieden, die Kurve geht durch  $P_3$ .

$$F_B(u) = (P_0 P_1 P_2 P_3) \begin{pmatrix} (1-u)^3 \\ 3u(1-u)^2 \\ 3u^2(1-u) \\ u^3 \end{pmatrix}$$

$$F_B(u) = (P_0 P_1 P_2 P_3) \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die oben in der letzten Gleichung vorkommende  $4 \times 4$ -Matrix ist die Bézier-Basismatrix  $M_B$ . Man erkennt leicht, dass für die Bernstein-Polynome folgender Zusammenhang gilt:

$$B_{0,3}(u) = B_{3,3}(1-u) \text{ und } B_{1,3}(u) = B_{2,3}(1-u)$$

Wir zeigen das für den allgemeinen Fall:

$$B_{i,n}(u) = B_{n-i,n}(1-u)$$

$$\rightarrow \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} = \binom{n}{n-i} (1-u)^{n-i} (1-(1-u))^{n-(n-i)}$$

$$\rightarrow \binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$

#### 2.5.4.2. Bézierflächen

Auch hier greifen wir auf die Parameterform zurück:

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

Man kann aus der Definition der Bézierkurven durch Bildung des kartesischen Produktes aus zwei Bézierkurven die Darstellung einer Bézierfläche herleiten:

$$F_B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v)$$

Durch die Umformung unter Verwendung des Binomischen Satzes analog zur Vorgehensweise bei Bézierkurven erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} F_B(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} \binom{n}{i} \left( \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-1)^k u^{i+k} \right) \dots \\ &\dots \left( \binom{m}{j} \left( \sum_{l=0}^{m-j} \binom{m-j}{l} (-1)^l v^{j+l} \right) \right) \end{aligned}$$

Abschliessend für Bézierflächen untersuchen wir wieder den Fall  $n=3$ , also Bézierflächen mit 16 Kontrollpunkten. Sei  $G$  eine vierelementige



Matrix geometrischer Bedingungen. Die geometrischen Bedingungen sind einfach die Festlegungen, welche die Fläche definieren. Wir bezeichnen  $G$  als die Geometriematrix. Sie besteht in unserem Fall aus 16 Kontrollpunkten.

$$G = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{pmatrix}$$

In  $G_x$  sind dann die  $x$ -Komponenten zusammengefasst und  $G_y$  beziehungsweise  $G_z$  sind analog definiert:

$$G_x = \begin{pmatrix} P_{0,0_x} & \cdots & P_{0,3_x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{3,0_x} & \cdots & P_{3,3_x} \end{pmatrix}$$

Weiterhin ist

$$U = (u^3, u^2, u, 1) \text{ und } V = (v^3, v^2, v, 1).$$

Dann formulieren wir für bikubische Bézierflächen

$$x(u, v) = U \cdot M_B \cdot G_x \cdot M_B^T \cdot V^T$$

$$y(u, v) = U \cdot M_B \cdot G_y \cdot M_B^T \cdot V^T$$

$$z(u, v) = U \cdot M_B \cdot G_z \cdot M_B^T \cdot V^T$$

Hierbei ist  $M_B$  wieder die Bézier-Basismatrix wie sie bereits für Bézierkurven definiert wurde. In Abbildung 8 ist ein Beispiel zwei miteinander gekoppelter Bézierflächen dargestellt.

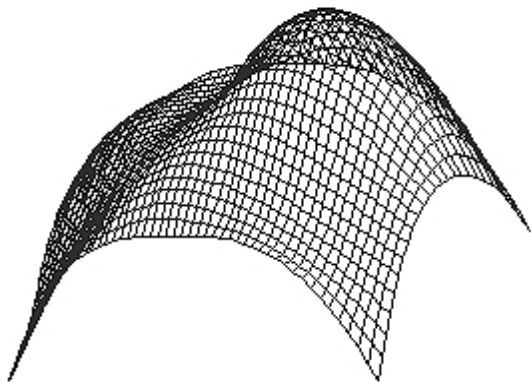


Abbildung 8. Zwei Bézierflächen, 12 und 16 Kontrollpunkte, dargestellt durch 2400 Kanten

### 3 Polygonale Strukturen

#### 3.1 Polygone

Allgemein nennen wir für eine Menge  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  von Punkten im zwei- oder

dreidimensionalen Raum die Menge  $Q = \{(P_0, P_1), (P_1, P_2), \dots, (P_{n-1}, P_n)\}$  ein Polygon [4]. Dabei sind die Paare von Punkten jeweils Kanten des Polygons. Liegen alle Kanten eines Polygons in einer Ebene, wird das Polygon planar genannt. Im Fall von  $P_n = P_0$  wird von einem geschlossenen Polygon gesprochen. Ein einfaches Polygon liegt vor, wenn der Schnitt von jeweils zwei Kanten entweder die leere Menge oder ein Punkt  $P_i$  ist und jeder Endpunkt einer Kante höchstens zu zwei Kanten des Polygons gehört (Abbildung 9). Ein ebenes geschlossenes und einfaches Polygon zerlegt die Ebene in mehrere Gebiete und zwar in mehrere innere und ein äusseres, das unbegrenzt ist.

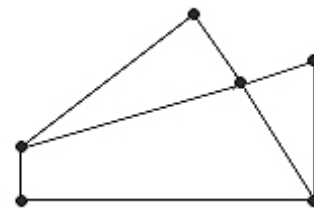


Abbildung 9. Ein einfaches, geschlossenes Polygon

Polygone können konvex oder nicht-konvex (konkav) sein. Ein konvexes Polygon hat die Eigenschaft, dass zwei beliebige, innerhalb des Polygons gelegene Punkte mit einer Geraden verbunden werden können, die vollkommen innerhalb des Polygons verläuft (Abbildung 10). Nicht-konvexe Polygone können in konvexe Teilpolygone zerlegt werden. Viele geometrische Algorithmen, die auf Polygonen operieren, sind für eine effiziente Arbeitsweise auf Konvexität angewiesen.

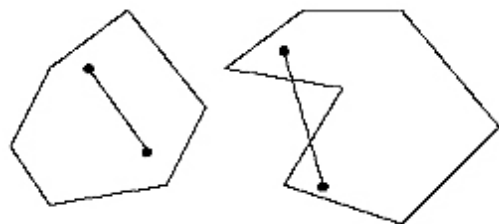


Abbildung 10. Konvexes (links) und nicht-konvexes Polygon (rechts)

Dasselbe gilt auch für weitere Polygone mit besonderen Eigenschaften wie Polygone mit Loch und Polygone mit Selbstschnitt (Abbildung 11). Diese lassen sich aber genauso wie konkave Polygone immer in einfache Polygone zerlegen.

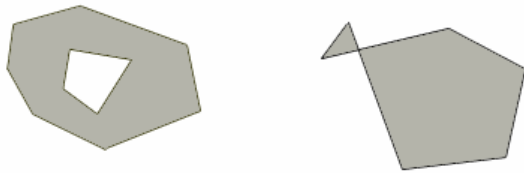


Abbildung 11. Polygon mit Loch (links) und Polygon mit Selbstschnitt (rechts)

### 3.2 Polygonmodell

Viele Objekte bestehen nur aus ebenen polygonalen Flächen. Auch gekrümmte Flächen lassen sich innerhalb eines annehmbaren Toleranzbereiches durch ein Netz von kleinen ebenen polygonalen Facetten darstellen. Um realistische Bilder von dreidimensionalen Objekten zu erzeugen, wobei versteckte Flächen nicht dargestellt werden und die Flächen in Abhängigkeit verschiedener Lichtquellen schattiert werden, sind Informationen über die Polygone erforderlich. Deshalb werden in den meisten Fällen Polygonmodelle verwendet. Zwei Typen von Informationen werden über das jeweilige Objekt gespeichert. Das sind die geometrische Information wie in Form von Punktkoordinaten und die topologische Information, welche beschreibt, wie die geometrischen Entitäten in Beziehung zueinander stehen, zum Beispiel, welche zwei Punkte miteinander verbunden sind. In Abbildung 12 sind diese Informationen am Beispiel des Hexaeders (Würfel) dargestellt.

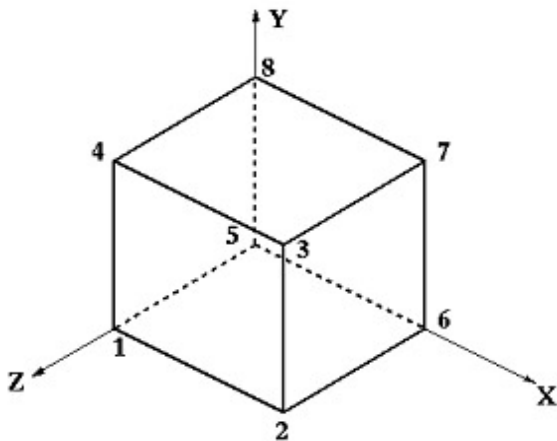


Abbildung 12. Indexierung der Punkte vom Polygonmodell eines Hexaeders

Diese Struktur ist grundlegend und das minimal Erforderliche für die polygonale Beschreibung von Objekten. Um das Objekt zu transformieren, genügt lediglich der Zugriff auf die Punktliste, es brauchen nur die Punktkoordinaten transformiert

werden. Es verändern sich nicht die Verbindungen zwischen den Punkten bei Skalierung, Rotation oder Translation. Die Skalierung ist aber hier ein Sonderfall, weil sich zwar nicht die Verbindungen zwischen den Punkten des Objektes aber seine Geometrie verändert. Will man das Bild schattieren, wird die Polygonliste benötigt, da die in ihr enthaltenen Informationen es erlauben, jede Fläche einzeln zu zeichnen. Desweiteren wird die Polygonliste für die Berechnung der Flächennormalen verwendet. Das Modell kann man um zusätzliche Informationen erweitern, somit können zum Beispiel Farbeigenschaften oder Texturdaten gespeichert werden. Die geometrische Information wird durch eine Liste aller Punkte dargestellt, in der sowohl die den Punkten eindeutig zugeordneten Indizes als auch die Koordinaten der Punkte festgehalten werden (Tabelle 1). Die topologische Information liegt in Form einer Polygonliste vor, wo die nummerierten Polygone, Anzahl sowie Indizes der zum jeweiligen Polygon gehörenden Punkte erfasst werden (Tabelle 2).

Index	X	Y	Z
1	0	0	1
2	1	0	1
3	1	1	1
4	0	1	1
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	1	0
8	0	1	0

Tabelle 1: Punktliste vom Hexaeder.

Index	Zahl d. Punkte	Indizes d. Punkte			
		1	2	3	4
1	4	1	2	3	4
2	4	2	6	7	3
3	4	4	3	7	8
4	4	6	5	8	7
5	4	5	1	4	8
6	4	5	6	2	1

Tabelle 2: Polygonliste vom Hexaeder.

Die Reihenfolge der Indizes von den Punkten, die zum jeweiligen Polygon gehören ist so gewählt, dass immer zwei aufeinander folgende Indizes zu zwei benachbarten Punkten des Polygons gehören und damit eine Kante des Polygons bilden. Bei geschlossenen Polygonen gehören der erste und letzte Index auch zweier benachbarter Punkte im Polygon an und bilden die „abschließende“ Kante analog zu einer geschlossenen Vektorkette.

## 4 Polygonale Flächen

### 4.1 Definition

Eine polygonale Fläche ist eine stückweise-lineare Fläche in 3 Dimensionen, die durch eine Menge von Polygonen, meist Dreiecksflächen definiert ist. Gegenüber analytischen Flächen ist ihre Geometrie nur durch Eckeninformation beschrieben, nicht durch mathematische Funktionen. Sie stellen lediglich eine Ansammlung von Dreiecksflächen dar.

### 4.2 Polygonale Netze

Ein polygonales Netz ist eine polygonale Fläche mit besonderen Eigenschaften. Eine Menge von geschlossenen, ebenen und einfachen Polygonen nennen wir polygonales Netz, sofern die folgenden Forderungen erfüllt sind:

- Je zwei Polygone haben entweder keinen Punkt oder eine Ecke oder eine ganze Kante gemeinsam. Der Schnitt zwischen zwei verschiedenen Polygonen ist entweder leer, ein Eckpunkt eines Polygons oder eine Kante.
- Jede Kante eines Polygons gehört zu einem oder höchstens zwei Polygonen.
- Die Menge aller Kanten, die nur zu einem Polygon gehören, ist entweder leer oder bildet ein einziges, geschlossenes und einfaches Polygon.

Ist die Menge aller Kanten, die nur zu einem Polygon gehören, leer, dann ist das Netz geschlossen. Sonst ist das Polygon, das von diesen Kanten gebildet wird, der Rand des polygonalen Netzes. Der Hexaeder ist ein Beispiel für ein geschlossenes polygonales Netz. Zu jedem geschlossenen polygonalen Netz existiert ein Grundriss des Netzes, vergleichbar einem „Bauplan“. Dieser Grundriss heißt planarer Graph und entsteht durch „Aufschneiden“ an einer Kante und „Ausrollen“ in die Ebene (Abbildung 13).

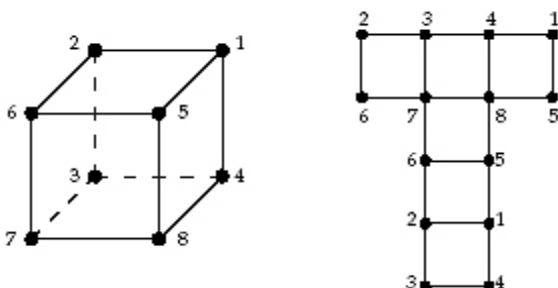


Abbildung 13. Hexaeder und der zugehörige planare Graph

Die Euler'sche Formel für planare Graphen liefert einen numerischen Zusammenhang zwischen Anzahl von Ecken, Kanten und Facetten. Sie sagt

aus, dass die um Anzahl der Kanten verringerte Summe aus Ecken und Facetten konstant ist

$$Ecken - Kanten + Facetten = 2.$$

#### 4.2.1 reguläre, irreguläre Netze

Ein Knoten beziehungsweise ein Punkt, welcher Kanten des polygonalen Netzes verbindet heißt regulär, falls die Anzahl der Kanten die er verbindet 4 oder 6 ist. Ein Netz oder ein Teil eines Netzes heißt regulär, wenn es nur reguläre Knoten enthält. Ein Netz heißt semi-regulär, wenn es aus regulären Teilnetzen besteht, die sich in möglicherweise irregulären Knoten treffen [5]. Der Vorteil von regulären Netzen besteht in der Einfachheit einer algorithmischen Indexierung seiner Knoten. Insbesondere für Vierecksnetze wird dazu noch ein Algorithmus vorgestellt.

#### 4.2.2 Dreiecksnetze

Das Dreieck ist aus verschiedenen Gründen die zentrale Form. Erstens ist bei einem Dreieck immer sicher, dass das Polygon planar ist, denn drei Punkte bestimmen eine Ebene und zweitens gibt es für die Speicherung von Dreiecksnetzen sehr effiziente Datenstrukturen. Im Folgenden soll das Verhältnis zwischen der Anzahl der Eckpunkte und der Dreiecke für große Netze ermittelt werden. Um dazu eine Aussage zu treffen, gehen wir davon aus, dass das Dreiecksnetz  $M$  ein offenes polygonales Netz ist. Es gibt also eine Menge von Kanten  $K_1$ , die nur zu einem Dreieck gehören und die restlichen Kanten  $K_2$  gehören genau zu zwei Dreiecken. Die Randkanten  $K_1$  bilden einen geschlossenen Polygonzug. Die Ecken, die von diesem Polygonzug durchlaufen werden, bilden die Menge der äußeren Ecken  $P_1$ , alle anderen inneren Ecken liegen in der Menge  $P_2$ . Da der Rand ein geschlossener Polygonzug ist, gilt

$$|K_1| = |P_1|.$$

Pro Dreieck gibt es 3 Kanten, und wenn wir davon alle äußeren Kanten weg nehmen, dann gilt

$$3|M| - |P_1| = 2|K_2|.$$

Wir können die Euler'sche Formel nach der Anzahl der Dreiecke  $|M|$  auflösen:

$$\begin{aligned} |P| - |K| + |M| &= 2 \rightarrow |M| = 2 - |P| + |K| \\ \rightarrow 2|M| &= 4 - 2|P| + 2|K| = 4 - 2|P| + 2|K_1| + 2|K_2| \\ \rightarrow 2|M| &= 4 - 2|P| + 2|K_1| + 3|M| - |P_1| \\ \rightarrow |M| &= 2|P| + |P_1| - 2|K_1| - 4 \\ \rightarrow |M| &= 2|P| - |P_1| - 4 \end{aligned}$$

Unter Annahme von  $|P_1| \ll |P_2|$  folgt  $|M| \approx 2|P|$ . Das Verhältnis zwischen der Anzahl der Ecken und der Anzahl der Dreiecke bei sehr großen Dreiecksnetzen beträgt im Mittel 2. Um die Menge redundanter Informationen für die Definition von Dreiecksnetzen möglichst gering zu halten, gibt es verschiedene Ansätze. Optimal wäre es, für ein gegebenes Dreiecksnetz mit jedem übertragenen neuen Punkt ein neues Dreieck zu definieren. Eine Möglichkeit, dieser Forderung nahe zu kommen, bildet ein Triangle Strip. Beim Triangle Strip sowie beim Triangle Fan definieren  $n+2$  Eckpunkte  $n$  Dreiecke und das Verhältnis zwischen Eckpunkten und damit repräsentierten Dreiecken ist folglich  $(n+2)/2$ . Für große  $n$  kommt dieser Bruch der Optimalforderung eines Verhältnisses von 1 recht nahe. Die Folge  $(0,1,2,3,4,5)$  definiert ein Triangle Strip wie in Abbildung 14. Wenn die Nummerierung der Eckpunkte den Durchlaufsinn festlegt, dann alterniert der Durchlaufsinn in diesem Triangle Strip. Das Dreieck  $(0,1,2)$  wird gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, das darauf folgende mit dem Uhrzeigersinn und so weiter.

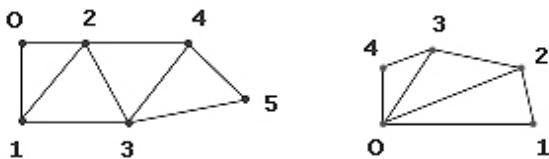


Abbildung 14. Triangle Strip (links) und Triangle Fan (rechts)

#### 4.2.3 Vierecksnetze

Vierecksnetze sind geeignet als Kontrollgitter für Freiformflächen. Sehr häufig stellt man derartige Flächen mithilfe von Vierecksnetzen dar (Abbildung 15). Vierecksnetze lassen sich verwenden für Flächen, die aus mindestens einer Teilfläche bestehen, deren Projektion in die Ebene ein Viereck ergibt, wie beispielsweise die Mantelfläche vom Zylinder.

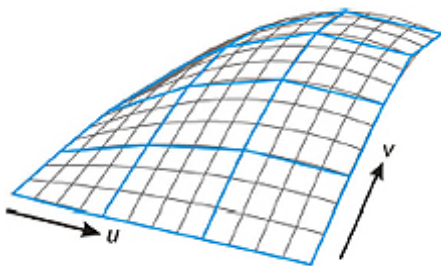


Abbildung 15. Bézierfläche dargestellt durch ein Vierecksnetz

Es ist sehr einfach die Punkte aus dem Polygonmodell von Vierecksnetzen zu indexieren. Ein Quadrat, das in neun identische kleinere Quadrate unterteilt ist stellt ein quadratisches Gitter aus vier Zeilen und vier Spalten dar. Es enthält somit 16 Punkte und 9 Polygone. Wir nummerieren die Punkte jeweils von links nach rechts, von oben nach unten durch. Der Punkt in der ersten Zeile und Spalte also der linke obere Eckpunkt trägt die Nummer 0, der rechte obere Eckpunkt hat dann die Nummer 3, der Punkt in der vierten Zeile und ersten Spalte also der linke untere Eckpunkt trägt die Nummer 12, der letzte Punkt unten rechts hat die Nummer 15. Die Polygone des Gitters, die neun Quadrate werden nach dem selben Prinzip nummeriert. Das Quadrat oben links hat die Nummer 0, das oben rechts die Nummer 2, jenes unten links trägt die Nummer 6 und entsprechend hat das letzte Quadrat unten rechts die Nummer 8. Abbildung 16 zeigt eine solche Nummerierung am Beispiel des Gitters mit 30 Punkten und 20 Polygonen.

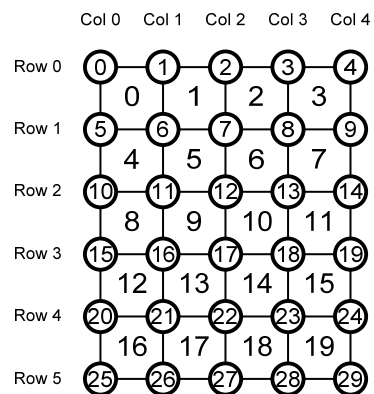


Abbildung 16. Indexierung eines Vierecksnetzes

Nun wird ein Algorithmus vorgestellt, der diese Indexierung eines Gitters von  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten durchführt. Das Gitter von  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten ist dann ein Vierecksnetz bestehend aus  $m \times n$  Punkten und  $(m-1) \times (n-1)$  Polygonen. Im folgenden Pseudo-Code benennen wir die Anzahl der Zeilen  $m$  mit *rows* und die Anzahl der Spalten  $n$  mit *columns*.

```

procedure initPointsOfMesh( rows, columns ) begin
  for each  $r \in \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n < \text{rows}\}$  do
    for each  $c \in \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n < \text{columns}\}$  do
       $i \leftarrow c + r \cdot \text{columns}$ 
       $P_i \leftarrow (\lambda_x c, \lambda_y r, \lambda_z f(c, r))$ 
    end
  end
end

```

Wenn man beabsichtigt, dass die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten aller Punkte  $P_i$  des Gitters im

Intervall  $[0,1]$  liegen, wählt man dementsprechend die Faktoren

$$\lambda_x = \frac{1}{columns - 1} \text{ und } \lambda_y = \frac{1}{rows - 1}.$$

Nun müssen noch die Polygone definiert werden:

```

procedure initPolygonsOfMesh( rows, columns ) begin
  for each  $r \in \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n < rows - 1\}$  do
    for each  $c \in \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n < columns - 1\}$  do
       $i \leftarrow c + r \cdot columns$ 
       $P_0 \leftarrow P_i$ 
       $i \leftarrow c + r \cdot columns + 1$ 
       $P_1 \leftarrow P_i$ 
       $i \leftarrow c + (r + 1) \cdot columns + 1$ 
       $P_2 \leftarrow P_i$ 
       $i \leftarrow c + (r + 1) \cdot columns$ 
       $P_3 \leftarrow P_i$ 
       $i \leftarrow c + r \cdot (columns - 1)$ 
       $Q_i \leftarrow \{(P_0, P_1), (P_1, P_2), (P_2, P_3), (P_3, P_0)\}$ 
    end
  end
end

```

#### 4.2.4 Polyeder

Ein Polyeder ist eine Menge von Punkten  $P_i$  und eine Menge von Kanten  $K$  eines polygonalen Netzes, für die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- jede Kante gehört nur genau zwei Polygonen an
- Die zu einem Polygon gehörenden Punkte lassen sich so anordnen, dass immer  $P_i$  und  $P_{i+1}$  eine gemeinsame Kante haben. Dabei vereinbaren wir  $P_{k+1} = P_0$ , falls  $k$  die Anzahl der zu einem Polygon gehörenden Punkte ist.
- Der zugehörige planare Graph ist zusammenhängend.

Polyeder werden nur von ebenen Flächen begrenzt, alle Kanten sind daher Geraden. Ebenso liefert die Durchdringung zweier Polyeder beziehungsweise der Schnitt mit einer Ebene Geraden als Schnittkurven. Bekannte Vertreter sind Prismen und Pyramiden. Polyeder werden als regulär bezeichnet, wenn alle Teilflächen aus kongruenten regelmäßigen  $n$ -Ecken bestehen. Alle regulären

Polyeder sind konvex und jedes beliebige Polyeder kann aus konvexen Polyedern zusammengesetzt werden. Die regulären Polyeder werden auch *Platonische Körper* genannt. Der griechische Philosoph Platon (429-348 v. Chr.) war Schüler des Sokrates und Aristoteles war später Platons Schüler. Diese drei haben das europäische Denken bis in unsere Zeit geprägt. Platon gründete in Athen eine Hochschule, die „Akademie“ genannt wurde. Sie war die erste Hochschule in dieser Art und bestand ca. 1000 Jahre. Die platonische Vorstellung vom Aufbau der Materie beruhte auf den vier Elementen Feuer, Luft, Erde und Wasser, denen in dieser Reihenfolge die vier platonischen Körper Tetraeder, Oktaeder, Hexaeder und Ikosaeder zugeordnet wurden. Dem fünften platonischen Körper, dem Dodekaeder wurde dann das gesamte Weltall zugeordnet. Zu jedem *Platonischen Körper* gibt es immer eine Umkugel durch alle Ecken und eine Inkugel, die alle Seitenflächenmittelpunkte des Körpers berührt. Verbindet man die Seitenflächenmittelpunkte, entsteht im innern des platonischen Körpers wieder ein platonischer Körper. Beim Tetraeder entsteht wieder ein Tetraeder, beim Hexaeder ein Oktaeder, beim Oktaeder ein Hexaeder, beim Dodekaeder ein Ikosaeder und umgekehrt. Es gibt exakt fünf *Platonische Körper*. Hierzu sind in Abbildung 17 diese fünf regulären Polyeder zusammen dargestellt.

##### 4.2.4.1. Beweis für die Existenz von nur fünf regulären Polyedern

Da reguläre Polyeder konvex sind, gilt die Euler'sche Formel:  $e - k + f = 2$ . An jeder Ecke eines Polyeders treffen  $r$  Kanten zusammen, wobei es wenigstens drei sein müssen, da sonst keine räumliche Ecke entsteht:  $r \geq 3$ . Laut Definition bestehen die Flächen des regulären Polyeders aus regelmäßigen  $n$ -Ecken, also  $n \geq 3$ . Es gilt:

- $r \cdot e = 2 \cdot k$ , denn  $r$  Kantenenden treffen in jeder der  $e$  Ecken zusammen und jede Kante hat 2 Enden
- $n \cdot f = 2 \cdot k$ , da jede der  $f$  Flächen aus  $n$  Kanten besteht und jede Kante zu zwei Flächen gehört

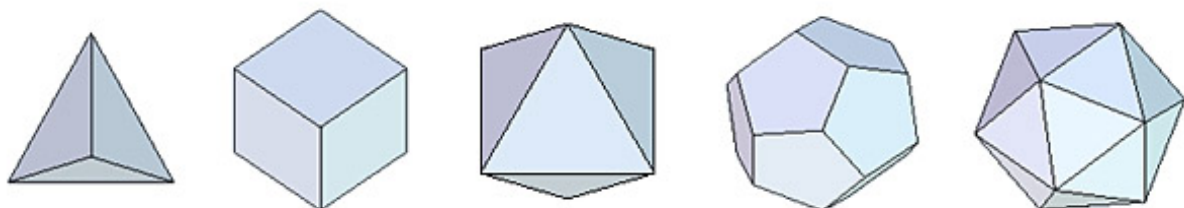


Abbildung 17. Die 5 regulären Polyeder (von links nach rechts): Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder

Daraus ergibt sich  $e = \frac{2k}{r}$  und  $f = \frac{2k}{n}$ . Dies setzen wir nun in die Euler'sche Formel ein, dividieren anschliessend durch  $2k$  und erhalten

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}.$$

Offensichtlich sind  $r \geq 3$  und  $n \geq 3$ . Beide aber können nicht zugleich größer als 3 sein, da dann die linke Seite der Gleichung nicht größer als  $1/2$  sein kann, was aber bei  $k > 0$  sein muss. Aus demselben Grund gilt für  $r = 3$  die Ungleichung  $n \leq 5$  beziehungsweise für  $n = 3$  die Ungleichung  $r \leq 5$ . Die verbleibenden fünf Fälle ergeben jeweils genau eine ganzzahlige Lösung für  $k$ .

## 5 Schlussfolgerungen

Da man sich Analytische Flächen nicht alleine durch Hinschauen auf die sie definierende mathematische Funktion vorstellen kann, ist es sinnvoll, Analytische Flächen zeichnerisch darzustellen. Analytische Flächen werden in der Industrie beispielsweise für die Herstellung von Verpackungen oder Entwurf von Autoteilen eingesetzt. Es gibt dazu eine Vielzahl von Computerprogrammen sowohl für industrielle als auch für Lehr- und Forschungszwecke, die in der Lage sind, Analytische Flächen bildhaft darzustellen und entsprechend zu bearbeiten. Die Entwicklung solcher Systeme erfordert insbesondere das Wissen der mathematischen Grundlagen, die Analytischen sowie Polygonalen Flächen zugrunde liegt. Zum Beispiel ist es erforderlich Analytische Flächen auf Polygonale Strukturen abzubilden, bevor man diese Flächen in eine Bildebene projiziert und anschliessend zeichnet. Denn viele Algorithmen für die zeichnerische Darstellung arbeiten mit Punkt- und Kanteninformationen oder Polygonen. Sie können die durch Analytische Flächen gegebene mathematische Funktion nicht direkt verarbeiten. Um detaillierte Informationen über solche Verfahren die von Computerprogrammen genutzt werden zu erhalten, gibt es die Möglichkeit, frei verfügbare Quelltexte bestimmter Programme dieser Art unendgeltlich zu erwerben und zu studieren. Dazu gehört unter anderem das *Virtual Rendering System* (VRS).

## Literatur

- [1] I.N.Bronstein, K.A.Semendjajew. Taschenbuch der Mathematik, 24. Auflage, 1989
- [2] Kleine Enzyklopädie Mathematik, 10., völlig überarbeitete Auflage 1977

- [3] Dipl.-Math. Martin Möller: Modulräume irregulär gefaseter Flächen. *Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften*, 2002
- [4] Michael Bender, Manfred Brill. Computergrafik. Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch.
- [5] Marc Alexa, Diskrete Geometrische Modellierung. TU Darmstadt. *Slides*, 2003.
- [6] Hoschek/Lasser. Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung. *Teubner Stuttgart 1992*.
- [7] Hans Walser. Sphärische Vielecke.
- [8] J.-H. Eschenburg. Geometrie, Vorlesung, Universität Augsburg, 2003

## Anhang