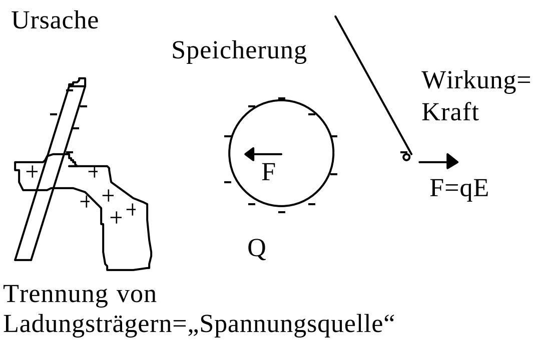
2 Grundlagen zu den Feldern

Die Elektrizitätslehre beschäftigt sich mit den Wechselwirkungen zwischen elektrischen Ladungen. Die Wechselwirkungen werden über die Felder beschrieben.
Die Aufstellung der Begriffsbildungen und Gesetze erfolgte historisch auf der Basis von experimentellen Ergebnissen. Dabei wurden Abstraktionen vorgenommen, d.h. es wurde auf das Wesentliche reduziert und bei verschiedenen Einflußfaktoren sortiert.
Im folgenden werden die Gesetze an einfachen experimentellen Anordnungen erläutert.
In den experimentellen Anordnungen werden bewußt ideale Situationen hergestellt (homogenes Feld, ebene Geometrie, unendlich ausgedehntes Medium ...).

2.1 Elektrisches Feld

Experiment: Kunststoffstab mit Katzenfell reiben. Es entsteht durch Reibung eine Ladungstrennung. Die Ladungen können durch Berührung auf eine isolierte Metallkugel übertragen werden. Dort verteilen sie sich gleichmäßig auf die Oberfläche. Ein kleines, an einem Faden aufgehängtes Kunststoff-Kügelchen wird ebenfalls über den aufgeladenen Kunststoffstab aufgeladen. Nähert man diese Probeladung der geladenen Metallkugel, so kann man die Kraft zwischen den Ladungen sichtbar machen. Diese Kraft wird durch das elektrische Feld beschrieben. Man deutet die Kraft zwischen den elektrischen Ladungen als eine Eigenschaft des Raumes, die dadurch entstanden ist, daß man Ladungen getrennt bzw. verschoben hat. Die (mechanische) Arbeit, die aufgewendet wurde um die Ladungen zu trennen, findet sich im Raume wieder und kann dort wieder entnommen werden, indem eine Probeladung eingebracht wird. Diese Probeladung wird verschoben, es wird an ihr Arbeit geleistet.



Zusammengefaßt:
elektrisches Feld
beschreibt Energie im Raum, die durch Hineinbringen der Ladungen erzeugt wurde. An der Quelle wurde Energie aufgewendet (Kraft mal Weg). Man kann das elektrische Feld über seine Kraftwirkung auf eine Probeladung definieren. Das elektrische Feld in einem bestimmten Raumpunkt ist wie die Kraft durch einen Vektor gegeben.
Coulomb'sches Gesetz (Kugelkoordinaten, Ursprung: Kugel mit felderzeugenden Ladungen):

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{e}_r = q\vec{E} \qquad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{e}_r$$

Die Materialkonstante $\varepsilon_r \geq 1$ zeigt an, daß das elektrische Feld durch Materie in den meisten Fällen geschwächt wird.

Die Größe D= $\varepsilon_0\varepsilon_r$ E wird elektrische Flußdichte genannt. Integriert man die elektrische Flußdichte über eine Hüllfläche (z.B. Kugeloberfläche), so erhält man den von der Quelle mit der Ladung Q ausgehenden elektrischen Fluß . Er ist quantitativ verknüpft mit der Ladung der in der Hüllfläche eingeschlossenen Ladungen (Gauß'scher Satz).

$$\oint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q(V)$$

elektrische Feldenergie:

Beim Verschieben von Ladungen im Feld muß eine Kraft aufgewendet werden → es muß Arbeit geleistet werden. Dabei ändert sich der Feldzustand. Diese Energie ist im Feld gespeichert. Wir betrachten die Aufladung eines ebenen Plattenkondensators mit homogenem Feld. Der Kondensator sei schon bis zu einer Ladungsmenge q aufgeladen. Die Erhöhung der Ladung auf den Wert q + dq erfordert, daß von der Batterie die Ladung dq auf die Platte transportiert wird. Das Ergebnis ist offenbar gleichwertig damit, daß auf der neg. Platte des Kondensators eine neutrale Ladungsmenge, bestehend aus den Teilladungen +dq und – dq , getrennt wird und der Teil +dq im Feld zur positiven Platte transportiert wird. Dabei ist die folgende Arbeit zu leisten.

$dA = dW = KraftxWeg = F \cdot d = dq \cdot E \cdot d$

Das elektrische Feld im Plattenkondensator läßt sich nach dem Gauß'schen Satz berechnen:

$$e_0 e_r EA = q \qquad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{e_0 e_r A} = \frac{q}{C \cdot d} \quad \text{mit} \qquad C = e_0 e_r \frac{A}{d}$$

Damit wird

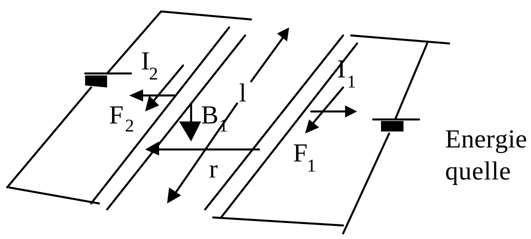
$$dW = \frac{qdq}{C} \quad \Rightarrow \quad W = \int_0^Q \frac{qdq}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(e_0 e_r AE)^2}{\frac{e_0 e_r A}{d}} = \frac{1}{2} e_0 e_r E^2 \cdot V \quad \text{mit} \quad V = Ad$$

Somit wird die Energiedichte

$$w_{el} = \frac{1}{2} e_0 e_r E^2$$

2.2 Magnetisches Feld

Zwei parallele vom Strom I_1 bzw. I_2 durchflossene Drähte üben aufeinander eine Kraft aus. Diese Kraft wird durch die Feldfunktion der magnetischen Kraftflußdichte B beschrieben. Der Transport der Ladungen bedeutet eine Veränderung der Orte der Ladungen im Raum. Dafür ist an der Quelle eine Energie (Kraft mal Weg) aufzuwenden.



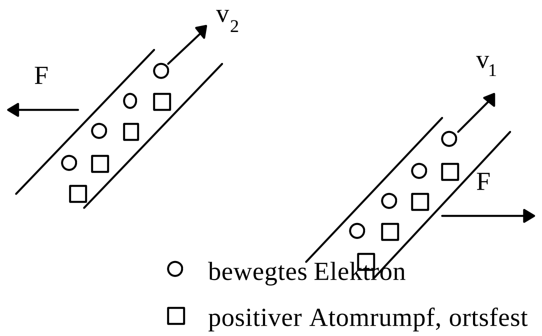
Biot-Savart'sches Gesetz (Zylinder-Koordinaten mit Achse in Leiter 1)

Es wird vorausgesetzt, daß das Feld des vom Strom durchflossenen Leiters 2 hinreichend klein gegenüber dem Feld des Leiters 1 ist.

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 \mu_r \cdot l \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi r}\vec{e}_r = I_2 \vec{l} \times \vec{B}_1 \qquad \Rightarrow \quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \mu_r I_1}{2\pi r}\vec{e}_\varphi = \mu_0 \mu_r \vec{H}_1$$

$$\vec{H}_1 = \frac{I_1}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$

Einen tieferen Einblick in das Wesen des magnetischen Feldes gestattet die **Einstein'sche Relativitätstheorie**. Danach hängen elektrisches und magnetisches Feld eng miteinander zusammen. Elektromagnetische Signale können sich nur mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Daher sind Raum und Zeit miteinander verknüpft. Bewegt sich ein Gegenstand, so erscheinen für einen ruhenden Beobachter die Abmessungen des bewegten Gegenstandes gegenüber dem ruhenden Bezugssystem verkürzt. Bewegt sich der Gegenstand gar mit nahezu Lichtgeschwindigkeit, so werden die Abmessungen des Gegenstandes im ruhenden Bezugssystem beliebig klein.



Betrachtet man die sich bewegenden Elektronen im Leiter vom Standpunkt eines ruhenden Beobachters aus, so sind deren mittlere Abstände gegenüber den Abständen der ortsfesten positiven Atomrümpfe im Metall verkürzt. Als Folge des im Leiter fließenden Stromes wird die negative Ladungsdichte gegenüber der positiven erhöht. Dadurch erscheinen für den ruhenden Beobachter beide Leiter negativ aufgeladen. Die Leiter stoßen sich ab. Dieses elektrische Feld definieren wir als Magnetfeld.

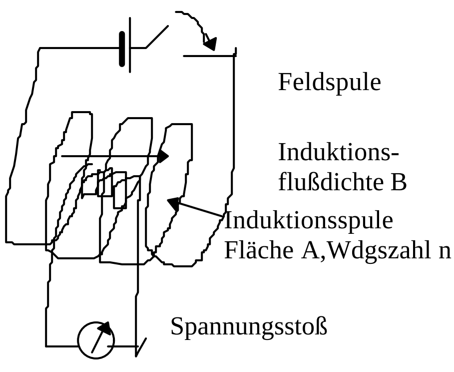
Der Zusammenhang des magnetischen mit dem elektrischen Feld kommt darin zum Ausdruck, daß die Maßkonstanten für magnetisches und elektrisches Feld über die Lichtgeschwindigkeit zusammenhängen.

$$c_0{}^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

2.3 Verknüpfung der Felder

Induktionsgesetz

Im nebenstehend gezeigten **Experiment** wird in einer „Feldspule“ ein Magnetfeld erzeugt. Während des Aufbaus des Magnetfeldes wird mit der „Induktionsspule“ eine induzierte Spannung nachgewiesen.



$$\int U_{ind}\, dt = n[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)] \qquad \Phi = B \cdot A$$

$$U_{ind} = -n\frac{d\Phi}{dt}$$

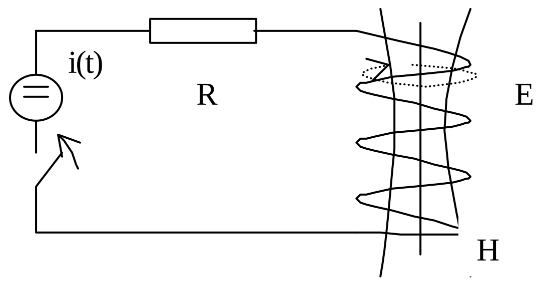
In diesem Gesetz kommen nur integrale Feldgrößen vor, die elekrische Spannung und der magnetische Fluß.
Die induzierte Spannung (elektrische Zirkulation) ist Folge eines elektrischen Wirbelfeldes, das im Zusammenhang mit dem sich aufbauenden (zeitlich sich ändernden) Magnetfeld auftritt.
Verallgemeinert lautet das Induktionsgesetz: ein sich zeitlich ändernder magnetischer Fluß ist mit einem elektrischen Wirbelfeld verbunden.
Dabei ist die elektrische Ringspannung um eine beliebige geschlossene Kurve (Rand der Fläche A: C(A)) (elektrische Zirkulation) durch die Geschwindigkeit gegeben, mit welcher sich der magnetische Fluß durch diese Fläche zeitlich ändert.(zeitliche Ableitung des magnetischen Flusses durch Fläche A)

$$\Rightarrow \quad \oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A \frac{\P\vec{B}}{\P t} \cdot d\vec{A}$$

Wenn man das Gesetz nur auf die Felder bezieht, so kann man auch sagen:
Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.

Magnetische Feldenergie

Wir betrachten die Erzeugung eines homogenen magnetischen Feldes, das durch Anlegen einer Spannungsquelle an eine Spule entsteht.



n = Zahl der Spulenwindungen, l = Spulenlänge, A= Spulenquerschnitt.
Nach Einschalten des Stromes wird durch das sich aufbauende Magnetfeld ein zirkulares elektrisches Feld induziert

$$U_{ind} = n\oint Eds = -n\frac{d\Phi}{dt} \qquad \Phi = BA = m_0 m_r HA \qquad H = \frac{n \cdot i(t)}{l} \qquad i(t) = \frac{l \cdot H(t)}{n}$$

$$dW = KraftxWeg = dq\oint Eds \quad \Rightarrow \quad \frac{dW}{dt} = i(t)U_{ind} = i(t)n\frac{d\Phi}{dt} = i(t)nm_0 m_r \frac{\partial H}{\partial t} A = m_0 m_r H \frac{\partial H}{\partial t} l \cdot A$$

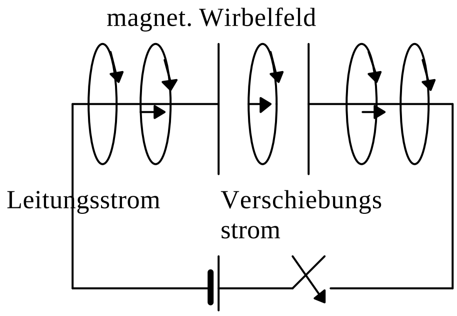
$$W = m_0 m_r \int_0^H H \frac{\partial H}{\partial t} dt \cdot V = \frac{1}{2} m_0 m_r H^2 V$$

Damit wird die magnetische Energiedichte

$$w_{mang} = \frac{1}{2} m_0 m_r H^2$$

Verallgemeinertes Ampere'sches Gesetz (Verschiebungsstrom)

Experiment: Ein Plattenkondensator wird über eine Spannungsquelle aufgeladen. Während dieses Vorgangs ist der Leitungsstrom von einem magnetischen Wirbelfeld umgeben. Zusätzlich findet man, daß das magnetische Wirbelfeld am Kondensator nicht aufhört, sondern auch im Kondensator besteht. Man schreibt dieses Magnetfeld dem Verschiebungsstrom zu, dessen Dichte durch das sich zeitlich ändernde elektrische Feld gegeben ist.



Integrale Formulierung

Ein elektrischer Strom und ein Verschiebungsstrom sind mit einem magnetischen Wirbelfeld verbunden. Die Verschiebungsstromdichte wird durch die zeitliche Änderungsgeschwindigkeit der elektrischen Feldstärke, multipliziert mit der Dielektrizitätskonstante (absoluten und relativen) gegeben. Ist in einem Medium eine elektrische Strömung von Ladungsträgern vorhanden und /oder ein sich zeitlich änderndes elektrische Feld, so bildet sich ein magnetisches Wirbelfeld aus. Die Zirkulation dieses Magnetfeldes um eine beliebige Fläche ist gegeben durch den durch diese Fläche hindurchtretenden Leitungs- und Verschiebungsstrom.

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_L(A) + I_V(A)$$

$$I_L(A) = \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

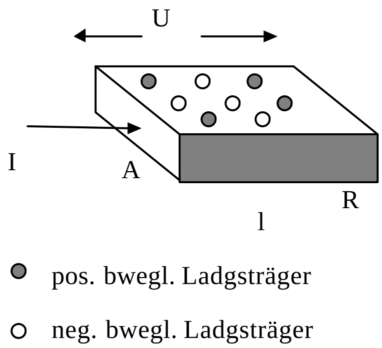
$$I_V(A) = \int_A \frac{\partial(\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E})}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Die so formulierten Gesetze gelten unter der Voraussetzung, daß es sich um Raumbereiche mit homogener Materie handelt. An den Grenzflächen zwischen Medien lassen sich die Gesetze jedoch auch anwenden.

2.4 Materieeinfluß

Leitfähigkeit k

Aufgrund von beweglichen Ladungsträgern in der Materie. Wichtige Stoffgruppen: Metalle, Halbleiter , Ionenkristalle, Elektrolyte, schwach leitende Materie, Plasmen.



Stoffkonstante κ nach mikroskopischem Modell, Zusammenhang von integralen und lokalen Feldgrößen:
n =Zahl der neg. Ladungsträger pro Vol, p = Zahl der pos Ladungsträger pro Vol,

e = Elementarladung,
v_n = Driftgeschwindigkeit der neg. Ladungsträger, v_p = Driftgeschwindigkeit der pos. Ladungsträger,
μ_n , μ_p Beweglichkeiten, Die weiteren Begriffe verstehen sich von selbst:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{enAdx + epAdx}{dt} = e(nv_n + pv_p)A = e(nm_n + pm_p)A\frac{U}{l}$$

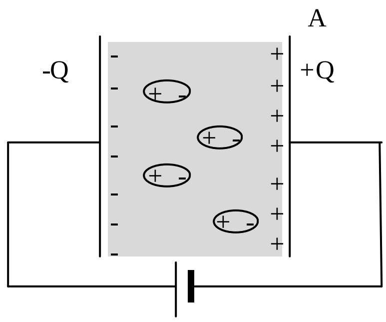
wobei $v_{n,p} = m_{n,p}E = m_{n,p}\frac{U}{l}$

man erkennt, daß $I = \frac{U}{R}$ mit $R = \frac{1}{k}\frac{A}{l}$ $\quad k = e(nm_n + pm_p)$

und $\frac{I}{A} = S = kE$

Elektrische Stoffkonstante e_r

In den meisten Isolatoren und schwachen Leitern wird das äußere elektrische Feld aufgrund Polarisation geschwächt. (siehe Abb: Materie in einem Plattenkondensator). Der Vektor der dielektrischen Verschiebungsdichte D gibt dabei an, wie groß das elektrische Feld aufgrund der Quellen im Raum ohne Materie wäre.



$$\vec{E} = \frac{Q}{e_0 e_r A}\vec{e}_x = \frac{\vec{D}}{e_0 e_r}$$

$$\frac{\vec{D}}{e_0} = \text{elektrisches Feld nach Entnahme der Materie}$$

Der Materieeinfluß wird durch die relative Dielektrizitätskonstante (engl.: permittivity) gekennzeichnet Bei Anregung mit einem Wechselfeld kann es zu einer Phasenverschiebung zwischen D und E kommen. Das wird dann mit einer komplexen Dielektrizitätskonstante beschrieben.

$$\underline{e} = e' - je'' = |e|e^{-jd_e} \qquad \tan d_e = \frac{e''}{e'}$$

Wird der von der Leitfähigkeit herrührende Anteil in den komplexen Dielektrizitätskonstante separat aufgeführt, so ist

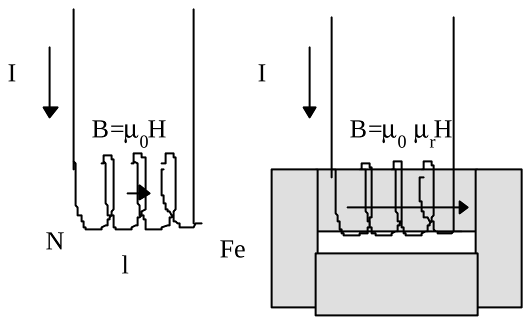
$$e^* = e_0[e' - j(e'' + \frac{k}{e_0 w})]$$

Magnetische Stoffkonstante m_r

Eine starke Beeinflussung des magnetischen Feldes durch Materie erfolgt nur in den Ferromagnetika und in speziellen ferrimagnetischen Werkstoffen .
Urache für Magnetfelder in Materie sind elementare Kreisströme, insbesondere der Elektronenspin.

Ferromagnetika enthalten Bereiche, in denen die elementaren Magnete gleichgerichtet sind. Die magnetische Orientierung der Bereiche ist aber statistisch wahllos, so daß nach außen kein magnetisches Moment resultiert.
Ferrimagnetika sind Stoffe mit Bereichen gleichgerichteter Elementarmagneten, jedoch mit geringer elektrischer Leitfähigkeit.
Bei Anlegen eines äußeren Magnetfeldes werden die magnetischen Bereiche in der Materie gegen einen Widerstand in die Richtung des Feldes gedreht. Dadurch entsteht eine Verstärkung der anregenden magnetischen Kraftflußdichte.
In der Abb. ist die Quelle des äußeren Magnetfeldes der Strom in der Wicklung der Feldspule .
Ohne Materie ist die magnetische Kraftflußdichte in der Spule gegeben durch

$$\vec{B}_0 = m_0 \frac{NI}{l} = m_0 \vec{H}$$



Durch Einbringen eines magnetischen Stoffes erhöht sich die Kraftflußdichte um das μ_r-fache auf

$$\vec{B} = m_r m_0 \frac{NI}{l} = m_r m_0 \vec{H}$$

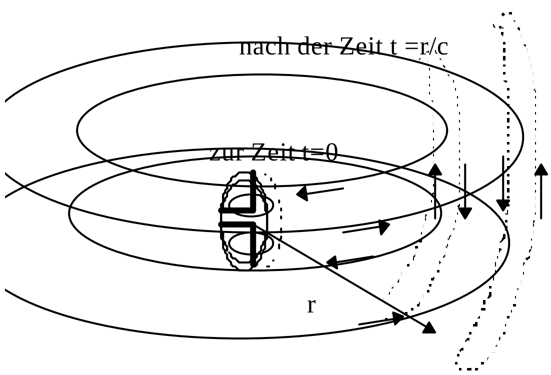
Die Stoffkonstante μ_r heißt relative Permeabilität und ist bei Ferromagnetika eine Funktion der Vorgeschichte und der Stärke des anregenden Magnetfeldes (Gegeben durch I). --> Hysteresiskurve.
Für Wechselfelder kann es zu einer Phasenverschiebung zwischen B und H kommen---> magnetische Relaxation , magnetische Verluste---> komplexe Permeabilität.

2.5 Ausbreitung elektromagnetischer Felder

Die Vorgänge bei der Ausbreitung elektromagnetischer Felder sollen an einigen Beispielen qualitativ veranschaulicht werden.

2.5.1 Abstrahlung von einer Dipolantenne im freien Raum

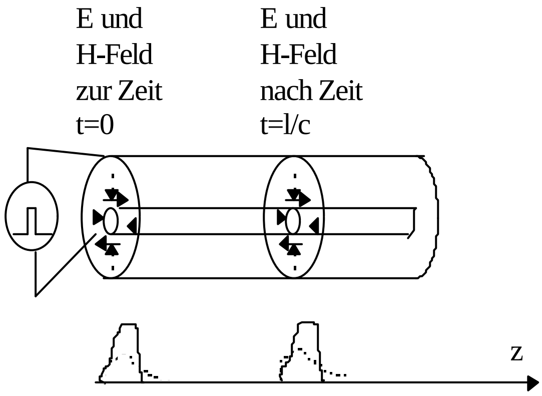
Die Antenne werde von einem kurzen Strompuls durchflossen. Dabei bildet sich ein magnetisches Feld, dessen Feldlinien geschlossene Kreise um die Leiterachse bilden und nach Aufladung der Leiterenden ein elektrisches Feld, dessen Feldlinien von einem Dipolende zum anderen gerichtet sind. Der Strom fließe dann wieder zurück und klinge dabei aus. Diese Feldschwankung (Feldschwingung) breitet sich im Raum mit Lichtgeschwindigkeit aus und erreicht nach einer Laufzeit t = r/c einen Abstand



r von der Quelle. Die Ausbreitung erfolgt in den dreidimensionalen Raum hinein als Kugelwelle. Dabei nimmt die Energiedichte mit wachsendem Abstand von der Quelle ab, weil die von der Welle transportierte Energie immer mehr im Raum verteilt wird.

2.5.2 Geführte Ausbreitung von Wellen in einer Leitung

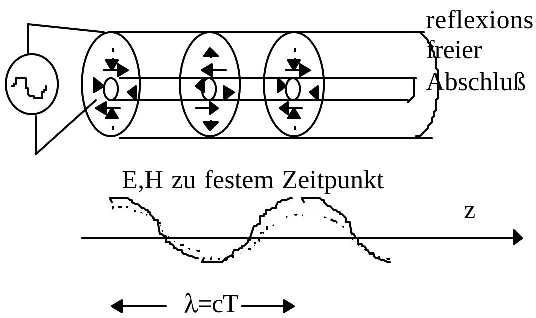
a) bei **Anregung mit kurzem Puls**.
Feldzustand breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit im Raum zwischen Innen- und Außenleiter in Richtung Leitungsende aus. Energiedichte bleibt gleich. (evtl. Abnahme durch ohmsche Verluste in Wänden): Energietransport erfolgt im Raum zwischen Innen- und Außenleiter - nicht im Metall!



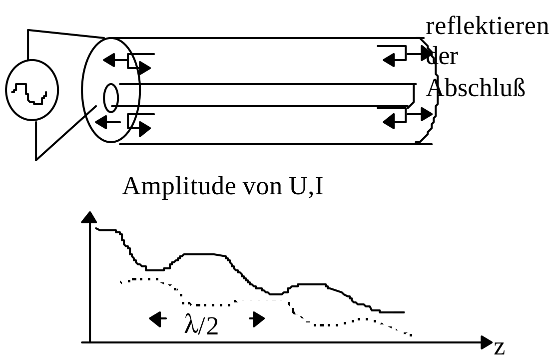
b) bei Anregung mit **harmonischer Schwingung** mit Periode T. Bei reflexionsfreiem Abschluß nur Welle in Richtung Leitungsende, kaum Dämpfung.
An jedem Ort sinusförmige Schwingung der Feldstärken oder der daraus abgeleiteten integralen Feldgrößen, dem Strom und der Spannung

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E ds, \quad I = \oint H ds \, ,$$

Die Phase der Schwingungen nimmt von links nach rechts proportional zum Abstand von der Quelle ab.



c) **Geführte Welle in Leitung; harmonische Anregung; reflektierender Abschluß**; **Dämpfung durch Wandstromverluste**
Die hin- und rücklaufenden Wellen überlagern sich zu einem Interferenzwellenfeld mit Schwingungsmaxima und Minima. Als Ortsfunktionen sind die Amplituden von Strom und Spannung gezeichnet. Energieabnahme aufgrund Wandstromverlusten und Verlusten im Abschluß.



2.6 Feldgleichungen

Die Grundgesetze für die Theorie der Elektrizität (elektromagnetische Feldtheorie) sind in den Maxwell'schen Gleichungen zusammengefaßt. Sie wurden empirisch gefunden. Aus diesen Gesetzen können die elektromagnetischen Erscheinungen lückenlos (zum Mindesten theoretisch) abgeleitet werden. Die in der Natur vorkommenden Erscheinungen lassen sich daraus erklären und ableiten. Ebenso können für technische Systeme die Felder theoretisch vorausberechnet werden.
Die Maxwell'schen Gleichungen beschreiben die Zusammenhänge zwischen den Ursachen und Wirkungen der Elektrizität, den Ladungen und den Strömen und den Feldern, sowie die Kopplungen zwischen den Feldern und ihre Wechselwirkung mit Materie.
In der integralen Formulierung handelt es sich um Zusammenhänge zwischen Zirkulation und Flüssen bestimmter Feldgrößen. Werden diese Gesetze auf kleine Gebiete angewendet, d.h. für die nahe Umgebung eines beliebigen, aber festen Raumpunktes ausgewertet, so kommt man zu Differentialgleichungen zwischen den Feldgrößen. Aus diesen lokalen Festlegungen läßt sich für die jeweilige Situation die Wellengleichung ableiten, deren Lösung unter den gegebenen Randbedingungen die Felder und deren Zeitverhalten liefert.

2.6.1 Integrale Formulierung

Gauß'scher Satz : Im Raum mögen sich elektrische Ladungen mit einer durch die Raumladungsdichtefunktion ρ(r) = Ladung pro Volumen am Ort r gegebenen Verteilung befinden (Es können Ladungen beiderlei Vorzeichens enthalten sein : ρ= ep+ (-e)n ; n = Zahl der positiven Ladungsträger pro Vol., p = Zahl der negativen Ladungsträger pro Volumen). Dann entsteht im Raum ein elektrisches Feld E. Grenzt man ein geschlossenes Raumgebiet ab (sog. Volumen V, es kann Ladungen enthalten oder auch nicht), so ist der aus dem Volumen austretende elektrische Fluß (bzw.- das Oberflächenintegral von D über die geschlossene Hüllfläche O(V)) gegeben durch die im Volumen eingeschlossene Gesamtladungsmenge Q(V).

$$\oint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho(r)\, dV$$

Quellenfreiheit der magnetischen Induktion:
Besteht in einem Raumgebiet ein magnetisches Feld mit der magnetischen Kraftflußdichte B, so gilt für jede in dieses Raumgebiet gelegte gedachte Hüllfläche, daß der Gesamtfluß von B aus dieser Hüllfläche gleich Null ist, oder was das gleiche ist, daß das Oberflächenintegral von B über diese Hüllfäche gleich Null ist.

$$\oint_{O(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Induktionsgesetz:
Ein sich zeitlich ändernder magnetischer Fluß ist mit einem elektrischen Wirbelfeld verbunden. Dabei ist die elektrische Ringspannung um eine beliebige geschlossene Kurve (Rand der Fläche A: C(A)) (Zirkulation von E um Kurve C(A)) durch die Geschwindigkeit gegeben, mit der sich der magnetische Fluß durch diese Fläche ändert (zeitliche Ableitung des magnetischen Flusses durch Fläche A) :

$$\Rightarrow \quad \oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Magnetfeld eines Stromes und Verschiebungsstromes.
Ist in einem Medium eine Strömung von elektrische Ladungsträgern vorhanden und /oder ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld, so bildet sich ein magnetisches Wirbelfeld aus. Die Zirkulation dieses Magnetfeldes um eine beliebige Fläche ist gegeben durch den durch diese Fläche hindurch tretenden Leitungs- und Verschiebungsstrom.

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_L(A) + I_V(A)$$

$$I_L(A) = \int_A (\vec{S}_0 + \vec{S}) \cdot d\vec{A}$$

$$I_V(A) = \int_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Dabei wurde zwischen den eingeprägten Strömen (Quellen) (Stromdichte So) und den Strömen (Stromdichte S) aufgrund der Leitfähigkeit des Materials unterschieden.

Materialgleichungen und Maßkonstanten:

$$\vec{S} = \kappa \vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_r \mu_0,$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\, F/m$$

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\, H/m = \frac{1}{\varepsilon_0 c_0{}^2}$$

$$c_0 = 3 \cdot 10^8\, m/\sec$$

2.6.2 Differentielle Form der Maxwell'schen Gleichungen

Reduziert man die Aussage der Gesetze auf die unmittelbare Nachbarschaft eines Raumpunktes, indem man zu infinitesimal kleinen Flächen übergeht, so erhält man Differentialgleichungen, welche die Felder und ihre Quellen enthalten. Sind die Zeit- und Ortsfunktionen für die Quellen gegeben, so können damit die Feldstärken auch für die nahe Umgebung zu diesem Raumpunkt und zu einem benachbarten Zeitpunkt berechnet werden und so fort, bis sie im ganzen Raum zu jedem Zeitpunkt ermittelt sind. Manchmal ist es günstig für die Feldstärken gewisse Ansätze zu machen und die Bedingungen herauszufinden, unter denen diese Ansätze Lösungen der Differentialgleichungen sind.

$$div \vec{D} = \rho \tag{2.1}$$

$$div \vec{B} = 0 \tag{2.2}$$

$$rot \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \tag{2.3}$$

$$rot \vec{H} = \vec{S}_0 + \vec{S} + \dot{\vec{D}} \tag{2.4}$$

in kartesischen Koordinaten mit Nabla Operator: $\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{S}_0 + \vec{S} + \dot{\vec{D}}$$

2.7 Allgemeine Lösung der Maxwellschen Gleichungen

Die differentielle Form der Maxwell'schen Gleichungen stellt ein System von linearen, gekoppelten Differentialgleichungen dar, die unter gewissen Randbedingungen durch die realen Felder erfüllt werden. Nimmt man an, das die Anregungsfunktionen S_0 und ρ gegeben sind, so sind Lösungen für die unbekannten Vektoren E, D, B, und H als Funktionen des Ortes und der Zeit unter gewissen Rand- und Anfangsbedingungen zu bestimmen.
Zwei dieser Funktionen, nämlich D und B, werden durch die Materialgleichungen eliminiert, so daß nur mehr E und H verbleiben. Aus den restlichen Gleichungen kann durch Elimination von H eine inhomogene partielle Dgl. 2. Ordnung für E abgeleitet werden. Eliminiert man E aus den Gleichungen, so erhält man auf dieselbe Weise die entsprechende Gleichung für H.

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.5}$$

$$div\vec{H} = 0 \tag{2.6}$$

$$rot\vec{E} = -\mu\dot{\vec{H}} \tag{2.7}$$

$$rot\vec{H} = \vec{S}_0 + \kappa\vec{E} + \varepsilon\dot{\vec{E}} \tag{2.8}$$

$$\Rightarrow rotrot\vec{E} = grad(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = grad(\frac{\rho}{\varepsilon}) - \Delta E = -\mu rot\dot{\vec{H}} = -\mu\dot{\vec{S}}_0 - \mu\kappa\dot{\vec{E}} - \mu\varepsilon\ddot{\vec{E}}$$

Daraus folgt die Differentialgleichung für E

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\ddot{\vec{E}} - \mu\kappa\dot{\vec{E}} = grad(\frac{\rho}{\varepsilon}) + \mu\dot{\vec{S}}_0}$$

dabei ist $\Delta\vec{E}$,: Laplace - Operator angewandt auf jede einzelne Komponente von $\vec{E}$.
analog erhält man die Differentialgleichung für H:

$$\boxed{\Delta\vec{H} - \mu\varepsilon\ddot{\vec{H}} - \mu\kappa\dot{\vec{H}} = -rot\vec{S}_0}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind unter gewissen Bedingungen elektromagnetische Felder, die sich als Wellen ausbreiten. Man nennt daher diese Gleichungen oft auch Wellengleichungen.
Auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehen Ausdrücke mit den Anregungsfunktionen. Man nennt daher auch diese Wellengleichungen die inhomogenen Wellengleichungen.
Die Lösung der Gleichungen gestaltet sich einfacher, wenn man gewisse Hilfsfunktionen (Zwischenfunktionen), die sog. Potentiale einführt. Damit läßt sich einmal erreichen, daß die Gleichungen für die Potentiale als Störfunktionen (inhomogner Term) die Größen S_0 und ρ direkt und nicht in Form von Ableitungen -wie oben- enthalten. Zum anderen erleichtert sich die Berechnung der Felder aus den allgemeinen Ausdrücken für die Potentiale.
Aufgrund der Gleichung

$$div\vec{B} = 0$$

kann man eine Potentialfunktion A einführen, aus der sich H durch Rotationsbildung berechnen läßt.

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu} rot\vec{A}} \tag{2.9}$$

Mit dieser Funktion A ist die Gleichung (2.2) erfüllt, denn es ist:

$$div\vec{B} = divrot\vec{A} = 0$$

Setzt man H in Gleichung (2.3) ein, so findet man:

$$rot\vec{E} = -\dot{\vec{B}} = -rot\dot{\vec{A}} \quad \Rightarrow \quad rot(\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0 = -rot(grad\,\varphi)$$

Die Rotation eines Gradienten verschwindet immer. Also läßt sich E + dA/dt als Gradient einer skalaren Potentialfunktion φ darstellen. Die Einführung der skalaren Potentialfunktion war schon bei der Lösung elektrostatischer Probleme von Vorteil

$$\boxed{\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - grad\, \boldsymbol{j}} \qquad (2.10)$$

E und H werden nun in den Maxwell'schen Gleichungen durch ihre Potentialfunktionen ersetzt. Daraus finden wir die Differentialgleichungen für die Potentialfunktionen.

$$div(-\dot{\vec{A}} - grad\, \boldsymbol{j}) = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{e}} \qquad (2.11)$$

$$div(\frac{1}{\boldsymbol{m}} rot\vec{A}) = 0 \qquad (2.12)$$

$$rot(-\dot{\vec{A}} - grad\, \boldsymbol{j}) = -rot\dot{\vec{A}} \qquad (2.13)$$

$$rot(\frac{1}{\boldsymbol{m}} rot\vec{A}) = \vec{S}_0 + \boldsymbol{k}(-\dot{\vec{A}} - grad\, \boldsymbol{j}) + \boldsymbol{e}(-\ddot{\vec{A}} - grad\, \dot{\boldsymbol{j}}) \qquad (2.14)$$

Aus (2.11) folgt: $-\Delta \boldsymbol{j} - \frac{\P}{\P t}(div\vec{A}) = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{e}}$ (2.15)

Aus (2.14) folgt:

$$rotrot\vec{A} = grad(div\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \boldsymbol{m}\vec{S}_0 + \boldsymbol{mk}(-\dot{\vec{A}} - grad\, \boldsymbol{j}) + \boldsymbol{me}(-\ddot{\vec{A}} - grad\, \dot{\boldsymbol{j}})$$

$$\Delta\vec{A} - \boldsymbol{me}\ddot{\vec{A}} - \boldsymbol{mk}\dot{\vec{A}} = -\boldsymbol{m}\vec{S}_0 + grad(div\vec{A}) + \boldsymbol{mk} grad\, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{me} grad\, \dot{\boldsymbol{j}}$$

$$\Delta\vec{A} - \boldsymbol{me}\ddot{\vec{A}} - \boldsymbol{mk}\dot{\vec{A}} = -\boldsymbol{m}\vec{S}_0 + grad(div\vec{A} + \boldsymbol{mk}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{me}\dot{\boldsymbol{j}}\cdot) \qquad (2.16)$$

Gleichungen (2.15) und (2.16) lassen sich weiter vereinfachen, indem man für A eine Randbedingung festlegt. Es gibt nämlich beliebig viele Vektorfunktionen, die alle die gleiche Rotation besitzen. Deswegen kann man die Divergenz von A nach zweckmäßigkeits Gesichtpunkten festlegen. Man erkennt, daß es sich hier anbietet, die Divergenz von A so zu wählen, daß der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (2.16) null wird (sog. Lorentz-Konvention):

$$\boxed{div\vec{A} = -\boldsymbol{mk}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{me}\dot{\boldsymbol{j}}\cdot} \qquad (2.17)$$

Dann vereinfachen sich die Differentialgleichungen für die beiden Potentialfunktionen zu

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta \boldsymbol{j} - \boldsymbol{me}\ddot{\boldsymbol{j}} - \boldsymbol{mk}\dot{\boldsymbol{j}} - = -\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{e}} \\ &\Delta\vec{A} - \boldsymbol{me}\ddot{\vec{A}} - \boldsymbol{mk}\dot{\vec{A}} = -\boldsymbol{m}\vec{S}_0 \end{aligned}} \qquad (2.18)$$

Lösung mit retardierten Potentialen

Setzt man zeitunabhängige Felder voraus, so gehen die Gleichungen (2.18) in die bekannte Poisson-Gleichung der Elektrostatik und die entprechende Gleichung zur Berechnung des statischen Magnetfeldes aus einem stationären Strom über.

$$\vec{E} = -grad\,\varphi \qquad \vec{B} = rot\vec{A}$$

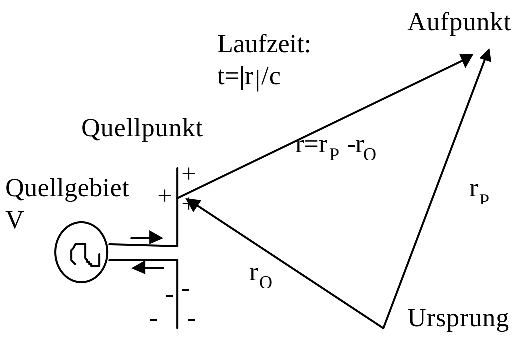
$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \Delta\vec{A} = -\mu\vec{S}_0$$

Zur Berechnung des Potentials einer Ladungsverteilung wird die Ladungsverteilung durch diskrete Einzelladungen ersetzt und das Coulomb -Potential all dieser Einzelladungen überlagert.
Daraus ergibt sich als Lösung für φ und A.

$$\varphi(\vec{r}_P) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}_Q)}{4\pi\varepsilon\left|\vec{r}_P - \vec{r}_Q\right|}\,dV_Q \qquad \vec{A}(\vec{r}_P) = \mu\int_V \frac{\vec{S}_0(\vec{r}_Q)}{4\pi\left|\vec{r}_P - \vec{r}_Q\right|}\,dV_Q$$

Diese Integrallösungen für die Maxwell‘schen Gleichungen können auch auf zeitlich veränderliche Felder übertragen werden (Voraussetzung $\kappa = 0$). Dazu ist die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, mit der sich die Energie von der Quelle ausbreitet, zu berücksichtigen. Für die Berechnung der Potentiale am Ort r_P zum Zeitpunkt t ist der Zustand der Ladungen und Ströme am Ort der Quelle r_Q zu dem um die Laufzeit der Felder zurückliegenden Zeitpunkt $t' = t - r/c$ maßgebend.

$$\boxed{\varphi(\vec{r}_P, t) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}_Q, t - \left|\vec{r}_P - \vec{r}_Q\right|/c)}{4\pi\varepsilon\left|\vec{r}_P - \vec{r}_Q\right|}\,dV_Q \qquad \vec{A}(\vec{r}_P, t) = \mu\int_V \frac{\vec{S}_0(\vec{r}_Q, t - \left|\vec{r}_P - \vec{r}_Q\right|/c)}{4\pi\left|\vec{r}_P - \vec{r}_Q\right|}\,dV_Q \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} \tag{2.20}$$



Es läßt sich nachweisen, daß diese, aufgrund einer Plausibilitätsbetrachtung gefundenen Lösungen, tatsächlich Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen sind (Voraussetzung $\kappa = 0$).