

## 4 Leitungswellen (TEM)

Im NF-Bereich werden 2-Draht Leitungen verwendet. Im HF-Bereich, ab etwa 100 kHz bis 1 GHz wird die Koaxialleitung verwendet, darüber Hohlleiter und Streifenleiter. Daneben gibt es dielektrische Leiter und Lichtwellenleiter und spezielle Leiterstrukturen, die bei Antennen die Überführung der Leitungswelle in eine Raumwelle ermöglichen.

Um eine günstige Übertragung von Signalen zu ermöglichen ist es notwendig

- die Übertragung über die Leitung verzerrungsfrei zu gestalten
- den Generator (die Quelle) und den Verbraucher an die Leitung anzupassen.

Ist der Verbraucher nicht reflexionsfrei an die Leitung angepaßt, so kommt es längs der Leitung durch Überlagerung der hinlaufenden und reflektierten Wellen zu ausgeprägten Maxima und Minima in Strom und Spannung.

Wir betrachten zunächst eine homogene Leitung, deren Eigenschaften unabhängig vom Ort sind. -> keine Stützen, Übergänge, Querschnittsänderung, reflexionsfreier Abschluß (oder unendlich lang)

### 4.1 Leitungstypen

#### 4.1.1 2-Draht Leitung

Die Felder erzeugen bei ihrer Ausbreitung in den Leitern - bzw. bei höheren Frequenzen wegen des Skin-Effektes an der Oberfläche der Leiter - einen Transport von Ladungen. Diese Ladungen führen dazu, daß die Stärke der Felder  $E$  und  $H$  am größten im Raum zwischen den Leitern ist und mit zunehmendem Abstand von den Leitern abnimmt. Man sagt, die Felder werden durch die Leiter in deren unmittelbarer räumlichen Umgebung konzentriert bzw. festgehalten. Ein Teil der Welle dringt jedoch in den Leiter ein. Die elektrische Feldstärke steht deshalb nicht genau senkrecht auf der Leiteroberfläche, sondern sie besitzt eine, wenn auch kleine, Komponente in Ausbreitungsrichtung. Die Anregung der Ströme im Leiter erfordert Energie, die der Welle entzogen wird. Die Welle wird deshalb gedämpft. Vorausgesetzt wird allerdings, daß die Leitung sich in ausreichend großem Abstand von anderen Leitungen und leitenden Flächen (z. B. Erdboden) befindet. Sonst kann es zur Beeinflussung der anderen Leiter, einer Überkopplung kommen. Wenn allerdings die Wellenlänge in den Bereich des Abstandes zwischen den Leitern kommt, dann greifen die Felder weiter in den Raum; sie können sich dann auch von den Leitern ablösen und in den Raum ausbreiten.

Eine Verbesserung der Führungseigenschaften der Leitung kann durch Umhüllung mit dielektrischem Material (Kunststoff) erzielt werden.

Ähnlich wirkt auch das Dielektrikum bei der Bandleitung und Stipline. Durch das Dielektrikum werden die Felder in dem Raum zwischen den Leitern konzentriert.

#### 4.1.2 Koaxialleitung

Ein Übergreifen der Felder auf die Umgebung wird dadurch ausgeschlossen, daß die Felder im Innenraum eines koaxialen Rohres geführt werden. Die Koaxialleitung weist geringere Dämpfung als die Zweidrahtleitung auf und ist bis in den GHz Bereich einsetzbar. Der Abstand zwischen Innen- und Außenleiter darf jedoch nicht kleiner als eine halbe Wellenlänge werden, da sonst zusätzliche Wellentypen mit longitudinalen Feldkomponenten möglich sind und die Ausbreitung von Signalen verfälschen.

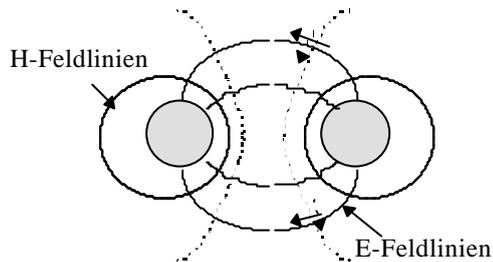


Wir werden voraussetzen, daß die Dämpfung der Welle aufgrund der Leitungsströme gering ist. Dann ist all diesen Leitungstypen (Zweidraht-, Koaxial-, Stripline und Microstripleitung) gemeinsam, daß das elektrische- wie auch das magnetische Feld wie bei der ebenen Welle (nahezu) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung gerichtet ist.

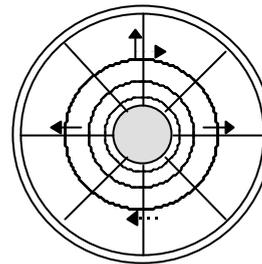
sog. transversale elektromagnetische Wellen: TEM-Wellen (für  $\kappa \rightarrow \infty$ )

### 4.1.3 Feldlinienbilder

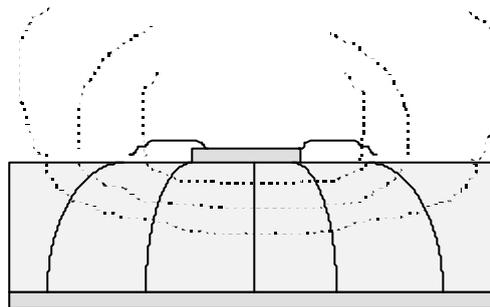
E- und H-Feldlinien bei der Zweidrahtleitung



E- und H-Feldlinien bei Koaxialleitung



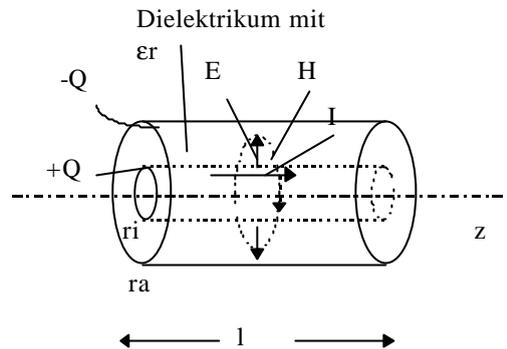
E- und H-Feldlinien bei der Stipline-Leitung



## 4.2 Leitungsparameter in quasistatischer Näherung

Zur Ableitung der Wellen verwenden wir die sog. quasistatische Näherung. Wir berechnen die Felder für Gleichstrom und ersetzen die Leitung dann durch eine Kette von kurzen Abschnitten ( $\Delta l \ll \lambda$ ), in denen wir die Leitung durch konzentrierte Bauelemente ersetzen.

## Beispiel: Koaxialleitung



## Zylinderkoordinaten

Gauß'scher Satz:

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

$$\oint_{O(V)} \mathbf{e}\vec{E} \cdot d\vec{A} = Q \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\mathbf{p}\mathbf{e} \cdot l \cdot r}$$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E(r) dr = \frac{Q}{2\mathbf{p}\mathbf{e} \cdot l} \ln \frac{r_a}{r_i} = \frac{Q}{C} \Rightarrow \dot{U} = \frac{I}{C}$$

Durchflutungs und Induktionsgesetz:

$$\vec{H} = H(r)\vec{e}_\phi$$

$$\oint_{C(A1)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I \Rightarrow H(r) = \frac{I}{2\mathbf{p}r}$$

$$\Phi = \int_A \mathbf{m}\vec{H} \cdot d\vec{A} = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\mathbf{m}\mathbf{i}}{2\mathbf{p}r} l dr = \frac{\mathbf{m}\mathbf{i} \cdot l}{2\mathbf{p}} \ln \frac{r_a}{r_i} = LI$$

$$U_{ind} = -\dot{\Phi} = -LI$$

Bei der Berechnung des Widerstandes wird der Skinneffekt berücksichtigt:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{l}{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{A_i} + \frac{1}{A_a} \right) = \frac{l}{2\mathbf{p}\mathbf{k}d_s} \left( \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a} \right), \quad d_s = \sqrt{\frac{2}{\mathbf{m}\mathbf{w}\mathbf{k}}}$$

Außerdem berücksichtigen wir Verluste, die als Leckstrom durch das Dielektrikum vom Außenleiter zum Innenleiter fließen können.

$$R_q = \frac{1}{\mathbf{k}_q} \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{2\mathbf{p}l} = \frac{1}{\mathbf{k}_q} \frac{1}{2\mathbf{p}l} \ln \frac{r_a}{r_i} \Rightarrow G = \frac{I}{U} = \frac{\mathbf{k}_q 2\mathbf{p}l}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

Entsprechend können für die übrigen Leitungstypen für statischen Betrieb konzentrierte Bauelemente bestimmt werden.



### 4.3 Komplexe Ausbreitungskonstante und Wellenwiderstand der Leitungswellen

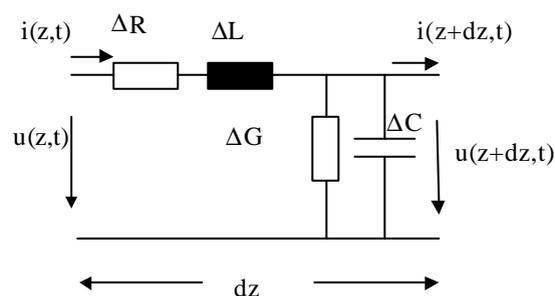
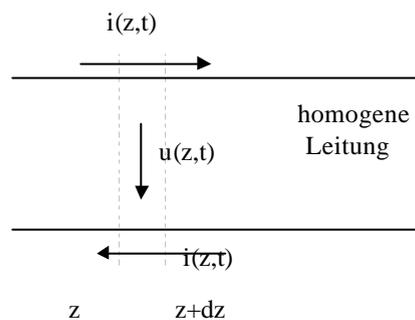
Vorausgesetzt wird eine homogene Leitung, auf der sich näherungsweise eine TEM-Welle ausbreitet. Die Leitung ersetzen wir durch eine Kette von Leitungsstückchen, deren Länge klein gegen die Wellenlänge ist. Dann können wir jedes Leitungsstück ersatzweise durch konzentrierte Bauelemente ersetzen (siehe Abb.).

Die Feldstärken werden durch die integralen Größen Spannung und Strom charakterisiert. Dadurch kann man die Stärke der ortsabhängigen Vektorfelder durch einfache skalare Parameter messen, was eine wesentliche Vereinfachung bedeutet.

$$U = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

Der Integrationsweg verläuft in x-y-Ebene, senkrecht zur Leitungsachse (= z-Achse).

Der Einfachheit halber zeichnen wir die Leitung meist schematisch als Zweidrahtleitung. Das Schema gilt aber genauso für eine Koaxialleitung, eine Stripline oder eine Mikrostrip-Leitung, auf der eine TEM-Welle ausbreitungsfähig ist. Wir werden sogar später die Ergebnisse und Konzepte auch auf Hohlleiter und Antennen ausweiten.



Die Maschenregel und Knotenregel liefert:

$$u(z,t) = \Delta R \cdot i(z,t) + \Delta L \frac{\mathcal{I} i(z,t)}{\mathcal{I}} + u(z+dz,t)$$

$$i(z,t) = \Delta G \cdot u(z,t) + \Delta C \frac{\mathcal{I} u(z,t)}{\mathcal{I}} + i(z+dz,t)$$

Daraus findet man ein System von Differentialgleichungen für  $u(z,t)$  und  $i(z,t)$ :



$$\begin{aligned}
 -\frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}z} &= R' \cdot i + L' \frac{\mathcal{I}i}{\mathcal{I}t} \\
 -\frac{\mathcal{I}i}{\mathcal{I}z} &= G' \cdot u + C' \frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}t} \\
 R' &= \frac{\Delta R}{\Delta z}, L' = \frac{\Delta L}{\Delta z}, G' = \frac{\Delta G}{\Delta z}, C' = \frac{\Delta C}{\Delta z}
 \end{aligned}$$

Darin sind die gestrichelten Größen die langenzugehörigen Werte des Widerstandes, der Induktivität, des Leitwertes und der Kapazität der Leitung.

Die Differentialgleichungen für  $u$  und  $i$  haben dieselbe Form wie die Dgl. für  $E$  und  $H$  für die ungebundenen ebenen elektromagnetischen Wellen im freien Raum (siehe Kap. 3). Wir können daher die Ergebnisse von dort direkt übernehmen.

$$\begin{aligned}
 u(z, t) &= U(z)e^{j\omega t} & i(z, t) &= I(z)e^{j\omega t} \\
 -\frac{dU}{dz} &= (R' + j\omega L')I \\
 -\frac{dI}{dz} &= (G' + j\omega C')U \\
 \frac{d^2U}{dz^2} &= (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')U, \quad \frac{d^2I}{dz^2} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')I \\
 U(z) &= \hat{U}_h e^{-g \cdot z} + \hat{U}_r e^{+g \cdot z} = U_h(z) + U_r(z) \\
 I(z) &= \frac{\hat{U}_h}{Z_L} e^{-g \cdot z} - \frac{\hat{U}_r}{Z_L} e^{+g \cdot z} = I_h(z) + I_r(z)
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die komplexe Ausbreitungskonstante und der Wellenwiderstand zu :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g} = \mathbf{a} + j\mathbf{b} &= \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \\
 Z_L &= \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}
 \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich für die verlustfreie Leitung ( $R' = G' = 0$ ):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} = \omega \sqrt{L' C'} &\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{L' C'}} \\
 Z_L &= \sqrt{\frac{L'}{C'}}
 \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit für alle TEM-Wellentypen auf verlustfreien homogenen Leitungen denselben Wert hat wie für die ungedämpfte ebene Welle. Speziell für die Koaxialleitung finden wir dieses Resultat sofort durch Einsetzen der Leitungsparameter in obige Formel.

$$c = \frac{1}{\sqrt{L' C'}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu_0 \epsilon_0}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \frac{m}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Der Wellenwiderstand hängt von der Geometrie der Leiteranordnung ab. Durch Einsetzen erhält man z.B. für die Koaxialleitung:



$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}} \frac{1}{2\mathbf{p}} \ln \frac{r_a}{r_i}} = \frac{60\Omega}{\sqrt{\mathbf{e}_r}} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

Er wird um so größer, je mehr sich die Durchmesser von Innenleiter und Außenleiter unterscheiden. Man kann zeigen, daß bei gegebenem Innenleiterradius und gegebener maximaler Durchbruchfeldstärke (ohne Dielektrikum) die maximal anlegbare Spannung (die Durchbruchspannung) bei einem Radienverhältnis von 3,6 ein relatives Maximum erreicht. Deswegen ist bei der technischen Koaxialleitung das Radienverhältnis meist durch die Norm auf diesen Wert festgelegt. Ohne Dielektrikum ist der Wellenwiderstand der Leitung  $50 \Omega$ , mit Dielektrikum (Polyethylen:  $\epsilon_r = 2,25$ ) wird er  $75 \Omega$ .

Meist sind die Verluste bei einem **HF-Kabel** nur gering ( $\mathbf{R}' \ll \mathbf{wL}'$ ,  $\mathbf{G}' \ll \mathbf{wC}'$ ). Wir berechnen für diesen Fall die Dämpfung:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{a} + j\mathbf{b} = \sqrt{(j\mathbf{w})^2 L' C' \left(1 + \frac{\mathbf{R}'}{j\mathbf{wL}'}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{G}'}{j\mathbf{wC}'}\right)} \\ &\approx j\mathbf{w}\sqrt{L' C'} \left(1 + \frac{\mathbf{R}'}{2j\mathbf{wL}'}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{G}'}{2j\mathbf{wC}'}\right) \approx j\mathbf{w}\sqrt{L' C'} \left(1 + \frac{\mathbf{R}'}{2j\mathbf{wL}'} + \frac{\mathbf{G}'}{2j\mathbf{wC}'}\right) \\ &= \frac{\mathbf{R}'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{\mathbf{G}'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}} + j\mathbf{w}\sqrt{L' C'} = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_D + j\mathbf{b} \end{aligned}$$

Wir sehen, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit bzw. Wellenlänge durch schwache Verluste kaum verändert wird. Die Dämpfung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, wobei bei tiefen Frequenzen der Einfluß der Ohm'schen Verluste ( $\alpha_R$ ) und bei hohen Frequenzen ( $\alpha_D$ ) der Einfluß der dielektrischen Verluste .

Speziell für die Koaxialleitung wird:

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} = \sqrt{\frac{f\mathbf{m}}{\mathbf{pk}}} \frac{(1 + \frac{r_a}{r_i})}{4Z_L r_a}$$

$$\mathbf{a}_D = \frac{\mathbf{G}'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad \mathbf{G}' = \frac{\mathbf{k}_q 2\mathbf{p}}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

$$\mathbf{e}' = \frac{\mathbf{k}_q}{\mathbf{e}_0 \mathbf{w}} = \mathbf{e}' \tan \mathbf{d} = \mathbf{e}_r \tan \mathbf{d}$$

$$\mathbf{a}_D = \sqrt{\mathbf{e}_r} \frac{\mathbf{P}'}{c_0} \tan \mathbf{d}$$

