

8.3 Moden in Rechteck- und Rundhohlleitern

Zur genaueren Behandlung der Vielzahl möglicher Wellen in Hohlleitern muß man über die einführend gegebene anschauliche Darstellung hinausgehen und die geeigneten Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen unter den gegebenen Randbedingungen aufsuchen. Innerhalb der Hohlleiter ist die Stromdichte $S = 0$ und es gibt auch keine Ladungen bzw. Raumladungsdichte $\rho = 0$. Bei den meisten Anwendungen ist das Innere der Hohlleiter ohne Dielektrikum: $\epsilon_r = 1$. Die Wände mögen zunächst beliebig gute Leitfähigkeit besitzen.

Aufgrund der Ähnlichkeit der Maxwell'schen Gleichungen findet man, daß es **duale Felder** geben muß. Vertauscht man nämlich in den Maxwell'schen Gleichungen (s.u.) das elektrische Feld mit dem magnetischen Feld und vertauscht auch noch die elektrische Feldkonstante mit der magnetischen, so werden die Maxwell'schen Gleichungen in sich selbst übergeführt.

Daraus ergibt sich: Ist eine Lösung für E und H bekannt, so sind auch die durch die Transformation $H' = E$ und $E' = -H$ erzeugten Felder Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen (dabei ist in den Ausdrücken für die dualen Felder ϵ durch μ und μ durch ϵ zu ersetzen). Dies führt zu der Einteilung in die Grund- Hohlleitermoden mit transversalem elektrischen Feld (TE Wellen) und solchen mit transversalem magnetischen Feld (TM Wellen). Diese Wellen haben jeweils magnetische Feldstärkekomponenten bzw. elektrische Feldstärkekomponenten in Ausbreitungsrichtung (H-Wellen, E-Wellen).

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}(x, y, z)e^{j\omega t}, & \vec{H}(x, y, z, t) &= \vec{H}(x, y, z)e^{j\omega t} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_r, & \mathbf{m} &= \mathbf{m}_0 \\ \text{rot} \vec{E} &= -j\omega \vec{H} \\ \text{rot} \vec{H} &= j\omega \vec{E} \\ \text{div} \vec{H} &= 0 \\ \text{div} \vec{E} &= 0\end{aligned}$$

Der Lösungsweg gestaltet sich unter Verwendung der in Kap. 2.7 eingeführten Potentiale ϕ und \vec{A} wie folgt:

1.) Lösung der Wellengleichung für das **Vektorpotential** unter den gegebenen Randbedingungen und der Annahme, daß \vec{A} nur eine Komponente in Ausbreitungsrichtung der Welle hat.

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (0, 0, A) \\ \Delta A + \mathbf{w}^2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} \cdot A &= 0\end{aligned}$$

Dabei ist Δ der Laplace Operator in den geeigneten Koordinaten.

2. Berechnung der **TM- Wellen- Felder** (E-Wellen):

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{\mathbf{m}} \text{rot} \vec{A} \\ \vec{E} &= -j\omega \vec{A} - \text{grad} \phi\end{aligned}$$

Das elektrische Potential kann aufgrund der Lorenzbedingung durch das Vektorpotential ersetzt werden.



$$\operatorname{div} \vec{A} + j \omega \epsilon \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\vec{E} = -j \omega \vec{A} - \frac{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A})}{j \omega \epsilon}$$

3. Berechnung der **TE-Wellen (H-Wellen)** aufgrund der **Dualität**

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\vec{H} = -j \omega \vec{A} - \frac{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A})}{j \omega \epsilon}$$

8.3.1 Rechteckhohlleiter

$$\vec{A} = A(x, y, z) \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \mathbf{b}_0^2 A = 0$$

wobei: $\mathbf{w}^2 \epsilon = \left(\frac{\mathbf{w}}{c}\right)^2 = \mathbf{b}_0 = \left(\frac{2\mathbf{P}}{I_0}\right)^2$ $I_0 = \text{Freifeldwellenlänge}$

TM-Wellen:

$$H_x = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial A}{\partial y} \quad E_x = \frac{1}{j \omega \epsilon} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z}$$

$$H_y = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial A}{\partial x} \quad E_y = \frac{1}{j \omega \epsilon} \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}$$

$$H_z = 0 \quad E_z = \frac{1}{j \omega \epsilon} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \mathbf{b}_0^2 A \right)$$

TE-Wellen:

$$E_x = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial A}{\partial y} \quad H_x = \frac{1}{j \omega \epsilon} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z}$$

$$E_y = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial A}{\partial x} \quad H_y = \frac{1}{j \omega \epsilon} \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}$$

$$E_z = 0 \quad H_z = \frac{1}{j \omega \epsilon} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \mathbf{b}_0^2 A \right)$$

Randbedingungen: $E_{\tan g} = 0$, $H_{norm} = 0$ an den Wänden

Lösungsansatz: Produkt aus Funktionen, die nur von einer Koordinate abhängen (Separationsansatz):

$$A(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Eingesetzt in die Wellengleichung liefert das für jede Funktion eine unabhängige Differentialgleichung:



$$\frac{d^2 X}{dx^2} YZ + \frac{d^2 Y}{dy^2} XZ + \frac{d^2 Z}{dz^2} XY + \mathbf{b}_0^2 XYZ = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \mathbf{b}_0^2 = 0$$

Der erste Term hängt nur von x ab, der zweite nur von y und der dritte nur von z. Die obige Gleichung kann deshalb nur bestehen wenn alle drei Terme konstant und ≤ 0 sind. Die drei später noch näher zu bestimmenden Konstanten nennen wir $-\beta_x^2$, $-\beta_y^2$ und $-\beta_z^2$.

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\mathbf{b}_x^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\mathbf{b}_y^2 \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\mathbf{b}_z^2$$

Allgemeine Lösungen:

$$X(x) = A_1 \cos \mathbf{b}_x x + A_2 \sin \mathbf{b}_x x$$

$$Y(y) = B_1 \cos \mathbf{b}_y y + B_2 \sin \mathbf{b}_y y$$

$$Z(z) = C_1 e^{-j\mathbf{b}_z z} + C_2 e^{+j\mathbf{b}_z z}$$

Für die hinlaufende Welle ergeben sich **vier mögliche Lösungsansätze**:

$$A_1(x, y, z) = A_1 \cos(\mathbf{b}_x x) \cdot B_1 \cos(\mathbf{b}_y y) C_1 e^{-j\mathbf{b}_z z}$$

$$A_2(x, y, z) = A_2 \sin(\mathbf{b}_x x) \cdot B_2 \sin(\mathbf{b}_y y) C_1 e^{-j\mathbf{b}_z z}$$

$$A_3(x, y, z) = A_1 \cos(\mathbf{b}_x x) \cdot B_2 \sin(\mathbf{b}_y y) C_1 e^{-j\mathbf{b}_z z}$$

$$A_4(x, y, z) = A_2 \sin(\mathbf{b}_x x) \cdot B_1 \cos(\mathbf{b}_y y) C_1 e^{-j\mathbf{b}_z z}$$

Bestimmung von \mathbf{b}_x , \mathbf{b}_y , $\mathbf{b}_z = \mathbf{b}_H$ aus den Randbedingungen:

$$E_x = 0 \text{ für } y = 0 \text{ und } y = b$$

$$E_y = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = a \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{b}_x = \frac{m\mathbf{p}}{a}; \quad \mathbf{b}_y = \frac{n\mathbf{p}}{b};$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

in Wellengleichung ergibt Wert für $\mathbf{b}_z = \mathbf{b}_H$

$$-\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\mathbf{p}}{b}\right)^2 - \mathbf{b}_H^2 + \mathbf{b}_0^2 = 0$$

$$\mathbf{b}_{gr}^2 := \left(\frac{m\mathbf{p}}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\mathbf{p}}{b}\right)^2 = \left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{I}_{gr}}\right)^2$$

$$\mathbf{b}_H^2 = \mathbf{b}_0^2 - \mathbf{b}_{gr}^2$$

$$\left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{I}_H}\right)^2 = \left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{I}_0}\right)^2 + \left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{I}_{gr}}\right)^2$$



$$\mathbf{I}_H = \frac{\mathbf{I}_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{I}_0}{\mathbf{I}_{gr}}\right)^2}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{I}_{gr,mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

Berechnet man aus den Potentialen nach der eingangs beschriebenen Vorschrift die Felder, so findet man, daß nur für zwei der obigen vier Ansätze die damit erhaltenen Felder die Randbedingungen erfüllen, nämlich

$$\text{TM-Wellen: } A^{(m)} = \sin\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) C^{(m)} e^{-j\mathbf{b}_H z}$$

$$\text{TE-Wellen: } A^{(e)} = \cos\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) C^{(e)} e^{-j\mathbf{b}_H z}$$

TM-Wellen:

$$E_z = \hat{E} \sin\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$E_x = -\hat{E} \frac{j\mathbf{b}_H \mathbf{b}_x}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \cos\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$E_y = -\hat{E} \frac{j\mathbf{b}_H \mathbf{b}_y}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \sin\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$H_x = \hat{E} \frac{j\omega \mathbf{b}_y}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \sin\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$H_y = -\hat{E} \frac{j\omega \mathbf{b}_x}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \cos\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

TE-Wellen:

$$H_z = \hat{H} \cos\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$H_x = \hat{H} \frac{j\mathbf{b}_H \mathbf{b}_x}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \sin\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$H_y = \hat{H} \frac{j\mathbf{b}_H \mathbf{b}_y}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \cos\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$E_x = \hat{H} \frac{j\omega \mathbf{b}_y}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \cos\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$E_y = -\hat{H} \frac{j\omega \mathbf{b}_x}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \sin\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$



einige Bilder aus Ramo[7]

Table 8.7
Summary of Wave Types for Rectangular Guides*

TE_{10}	TE_{11}	TE_{21}
TE_{20}	TM_{11}	TM_{21}

* Electric field lines are shown solid and magnetic field lines are dashed.

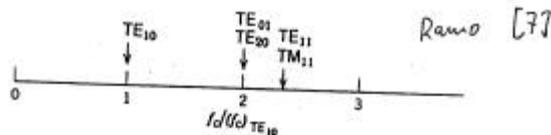


Fig. 8.7b Relative cutoff frequencies of waves in a rectangular guide ($b/a = 1$).

8.8 The TE_{10} Wave in a Rectangular Guide

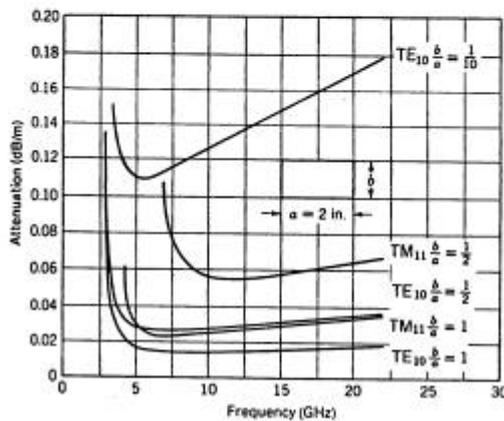


Fig. 8.7c Attenuation due to copper losses in rectangular waveguides of fixed width.

