

8 Hohlleiter

Hohlleiter dienen im Frequenzbereich zwischen 2 GHz und 200 GHz zur Übertragung von elektrischen Bandpaßsignalen höherer Leistung. Einsatz in Sende- und Empfangsanlagen im GHz Bereich, Richtfunkstrecken, bei Antennen, Radar, Mikrowellentechnik, Meßtechnik usw. In Schaltungen wird in diesem Frequenzbereich die Mikrostrip und Stripline Technik (Dickfilm und Dünnschichttechnik auf Substrat) eingesetzt.

Bei der Übertragung mit der Koaxialleitung wird bei hohen Frequenzen die Dämpfung (und die damit verbundenen Verzerrungen des Signals) zu groß. Auch sind wegen der kleinen Wellenlänge bei konventionellen Kabeln zusätzlich zur TEM-Welle höhere Wellentypen (Moden) möglich.

Die Hohlleitertechnik ist aufwendig und teuer. Es werden Standard-Rechteckhohlleiter und für Spezialanwendungen Rundhohlleiter verwendet.

Hohlleiter sind **Bandpaß-Übertragungssysteme**, d.h. die Leitung überträgt erst ab einer gewissen unteren Grenzfrequenz, die von den Querschnitts-Abmessungen des Hohlleiters abhängen. Auch nach oben gibt es eine Grenze für den Betrieb, die dadurch zustande kommt, daß ab einer gewissen oberen Grenzfrequenz zusätzlich zu dem ausbreitungsfähigen **Grundwellentyp** noch weitere Wellentypen angeregt werden können, die eine eindeutige Signalübertragung verhindern würden. Standard-Rechteckhohlleiter mit einem Seitenverhältnis von $b/a = 1,4$ gibt es für etwa 10 aneinander grenzende Frequenzbänder mit Abmessungen von cm bis mm und einer relativen Bandbreite von etwa 50 %, z. B. X-Band mit $a = 1,4$ cm für 8-12 GHz (H_{10} -Mode).

Bei den bisher behandelten Leitungen (Zweidraht, Koaxialleitung, Stripline und Mikrostripleitung) für den Frequenzbereich bis 2 GHz (für Stripline und Mikrostripleitung bis 100 GHz) wurde die Energie in Form von TEM-Wellen bzw. Quasi-TEM -Wellen (Stripline und Mikrostripleitung) übertragen. Diese Wellenformen sind in Hohlleitern nicht mehr ausbreitungsfähig. Es gibt jedoch hier einfache Grundwellentypen, die je nach Bedingungen einzeln oder auch gemischt angeregt werden können. Wellen, bei denen die elektrischen Feldstärkekomponenten transversal zur Ausbreitungsrichtung verlaufen, die aber in Ausbreitungsrichtung H Feldstärkekomponenten besitzen, werden **TE- Wellen oder H-Wellen** genannt.

Wellen, bei denen die magnetischen Feldstärkekomponenten transversal zur Ausbreitungsrichtung verlaufen, die aber in Ausbreitungsrichtung E Feldstärkekomponenten besitzen, werden **TM- Welle oder E-Wellen** genannt.

Die Dämpfung der Wellen erfolgt über **Wandstromverluste**. Meist sind die Hohlleiterwände aus poliertem Messing gefertigt. Die Innenwände können auch versilbert oder vergoldet (ab 40 GHz) sein.

8.1 Quasioptische Ableitung der Felder der Hohlleiterwellen

Die Eigenschaften der Hohlleiterwellen kann man sich wie folgt aus denen einer ebenen Welle ableiten: Die Hohlleiterwelle ergibt sich, wenn eine ebene Welle schräg zur Hohlleiterachse in den Hohlleiter einfällt und über Reflexionen an den Wänden weitergeleitet wird. Dies ist nur für ganz bestimmte Winkel möglich.



TE- Wellen.

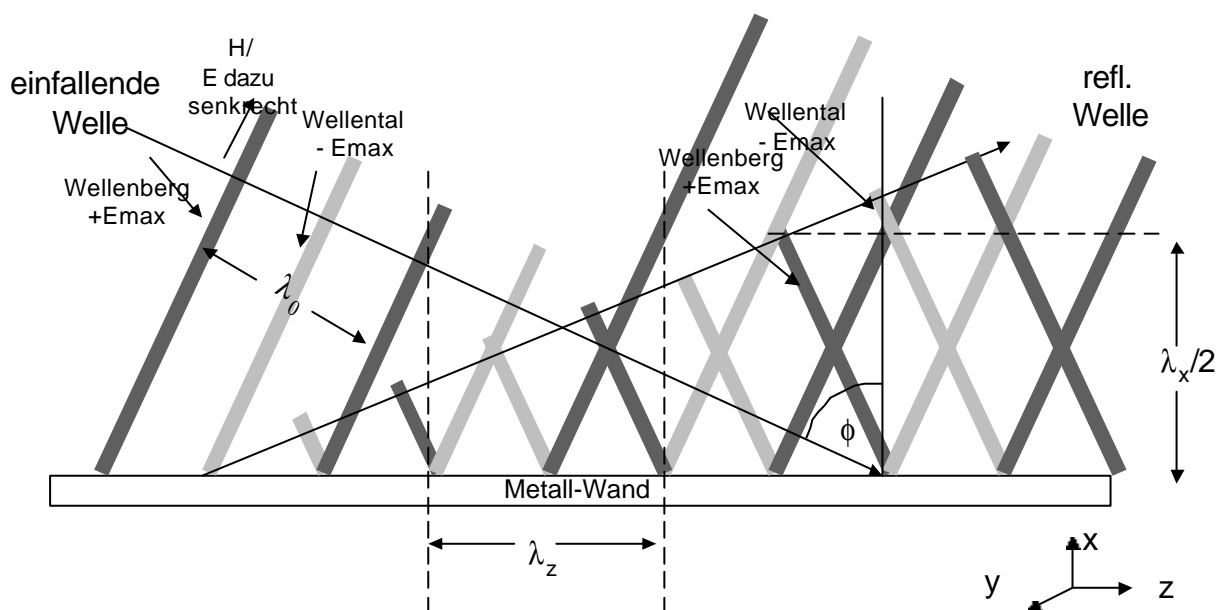
Man betrachte zunächst die **Reflexion der ebenen Welle an einer Metallwand**, wobei $E \parallel$ Wand **und schräger Einfall**. An der Metallwand ist $E_{\text{Tang}} = 0$. Deswegen erfährt die Welle bei der Reflexion einen Phasensprung von π . In der Abb. sind für einen gewissen Zeitpunkt die Wellenfronten der einfallenden und reflektierten Welle für $+E_{\text{max}}$ und $-E_{\text{max}}$ eingezeichnet. Man erkennt, daß sich im Abstand

$$I_x = \frac{I_0}{\cos j}$$

durch Überlagerung der einfallenden und reflektierten Welle für E Auslöschung ergibt. Insbesondere sieht man das an der Überlagerung der positiven Wellenfront der einfallenden Welle, die dort mit der negativen Wellenfront der reflektierten Welle zusammen trifft. Die **Wellenlänge in Ausbreitungsrichtung** beträgt

$$I_z = \frac{I_0}{\sin j}$$

Beim Voranschreiten der Zeit verschiebt sich das in der Abb. gezeichnete Bild nach rechts.



Vor der Wand ergibt sich ein Wellenfeld, das im Abstand von $\lambda_x/2 = \lambda_0 / \cos \phi$ Knoten aufweist ($E = 0$) und sich mit der **Phasengeschwindigkeit** :

$$v_{ph} = \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{b}_z} = I_z f = \frac{I_0}{\sin j} f = \frac{c_0}{\sin j} \quad \text{da} \quad \mathbf{b}_z = \frac{2\mathbf{p}}{I_z} = \frac{2\mathbf{p}}{I_0} \sin j$$

nach rechts fortpflanzt.

Die **Phasengeschwindigkeit** ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der sich die Phasenfronten einer monochromatischen Welle ausbreiten. Sie ist jedoch nicht die Signalausbreitungsgeschwindigkeit. Die Geschwindigkeit, mit der Signale übertragen werden, ist kleiner als die Lichtgeschwindigkeit und durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit gegeben, mit der sich die Hüllkurve einer Schwebung aus zwei Schwingungen mit eng benachbarten Frequenzen $f - \Delta f/2$ und $f + \Delta f/2$ fortbewegt.

Diese Geschwindigkeit, die sog. **Gruppen-Geschwindigkeit**, ergibt sich (siehe Übungsaufgabe Blatt 5 Nr.1 f) zu

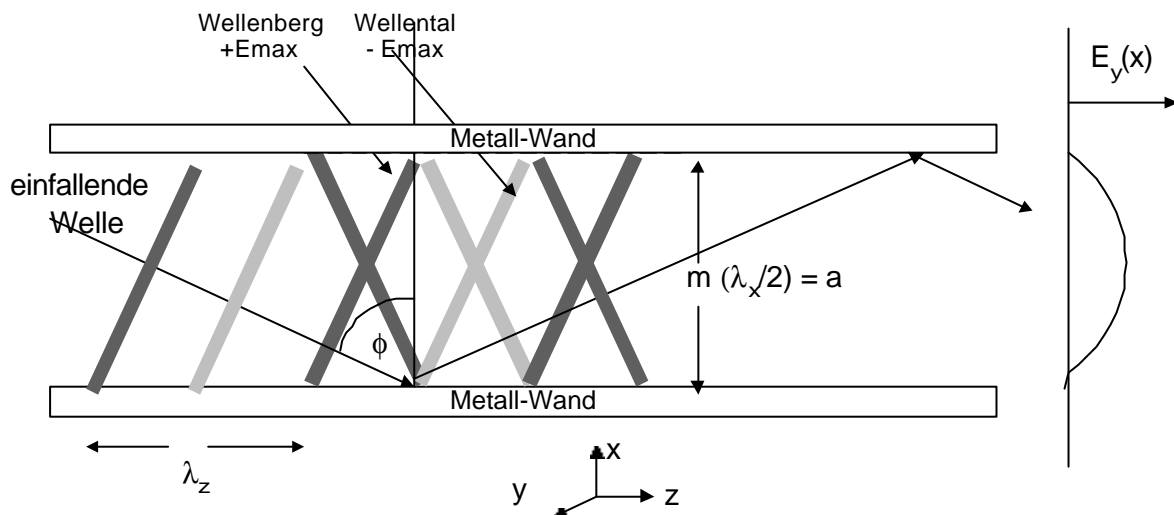


$$v_{gr} = c_0 \sin \mathbf{j}$$

Bei senkrechtem Einfall ($\varphi = 0$) ergibt sich vor der Wand eine stehende Welle ohne Energietransport nach rechts. Eine Weiterleitung der Energie von links nach rechts erfolgt nur für $0 < \varphi < \pi/2$. $\Rightarrow \lambda_z = \lambda_0 / \sin \varphi > \lambda_0$.

Bringt man im Abstand $a = m \cdot \frac{\lambda_x}{2}$ $m = 1, 2, 3, \dots$ vor der Wand eine zweite parallele Metallwand an, so wird das Wellenfeld nicht gestört und die Welle kann durch Reflexion in dem Kanal

weitergeleitet werden. Man kann die Welle zusätzlich durch zwei senkrechte Wände parallel zur xz -Ebene begrenzen (E steht ja senkrecht zu diesen Wänden, so daß die Randbedingungen $E_{\text{tang}} = 0$ automatisch erfüllt ist). Der Abstand kann beliebig gewählt werden, in der Praxis wird er etwa halb so groß wie die Abstand der anderen Wände gewählt: $b = 0,4 a$). Dadurch wird die Welle jetzt ganz im Hohlleiter mit dem Querschnitt $A = axb$ weitergeleitet.



Für $m = 1$ ergibt sich die **Grundmode, die TE_{10} oder H_{10} -Mode**, mit transversaler elektrischer Feldstärke und einer Magnetfeldstärke, die auch eine Komponente in Ausbreitungsrichtung hat. Die E-Feldstärke quer zur Ausbreitungsrichtung (in x -Richtung) variiert dabei nach einer Sinusfunktion ($E_y(x) \propto \sin(\beta_x a)$) über eine halbe Periode.

Für $m = 2, 3, \dots$ ergeben sich weitere mögliche Wellenformen (**TE_{20} , TE_{m0} -Moden**), die durch Aneinandersetzen der für $m=1$ beschriebenen Wellenform in y Richtung entstehen. Die elektrische Feldstärke variiert in Richtung y nach einer Sinusfunktion über eine, bzw. $1/2$ Perioden. Die **TE_{20} Mode** hat auf der Hälfte der Hohlleiterbreite (in der Mitte des Hohlleiters) eine Knotenebene der elektrischen Feldstärke, die **TE_{30}** besitzt zwei Knotenebenen, eine bei $1/3$ und eine weitere bei $2/3$ der Hohlleiterbreite.

TE_{mn} -Moden: Der erste Index gibt die Zahl der E-Bäuche in x -Richtung und der zweite, die Zahl der Bäuche in y -Richtung an.



Aus der Bedingung, daß $0 \leq \varphi \leq \pi$ ergibt sich die Wellenlänge, unterhalb derer keine Ausbreitung mehr möglich ist, und damit eine Formel für die **Hohlleiterwellenlänge** als Funktion der **Betriebswellenlänge** (= Freifeldwellenlänge) und der **Grenzwellenlänge**:

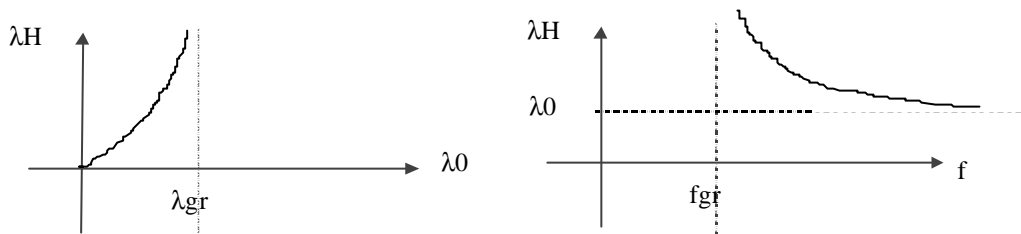
Hochpaß

$$\frac{2a}{m} = \frac{\mathbf{I}_0}{\cos \mathbf{j}} \quad \Rightarrow$$

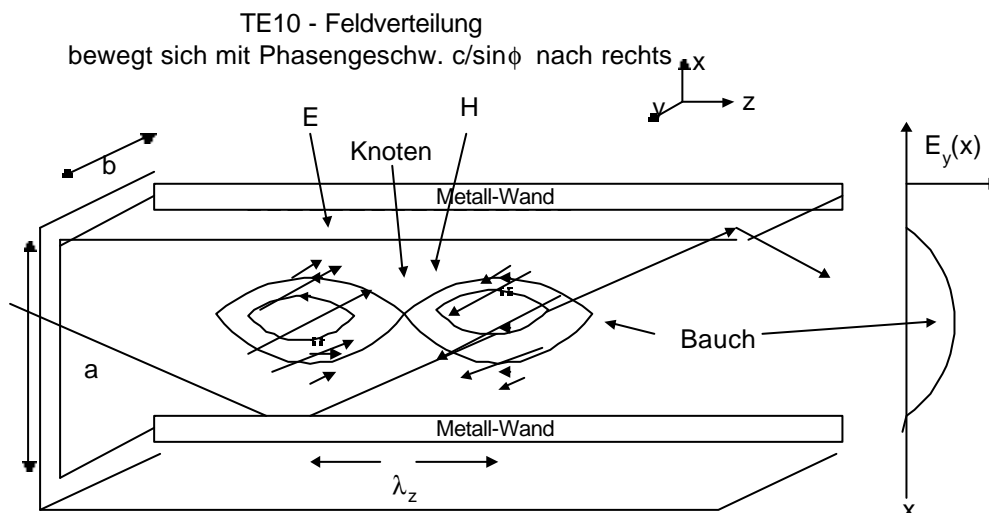
$$\mathbf{I}_0 < \frac{2a}{m} =: \mathbf{I}_{gr} \quad (\mathbf{j} = 0)$$

$$f > \frac{m \cdot c_0}{2a} = f_{gr} \quad (\text{Hochpaß})$$

$$\mathbf{I}_z = \frac{\mathbf{I}_0}{\sin \mathbf{j}} = \frac{\mathbf{I}_0}{\sqrt{1 - \cos^2 \mathbf{j}}} = \frac{\mathbf{I}_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{I}_0}{\mathbf{I}_{gr}}\right)^2}}$$



In der folgenden Abb. ist die Feldverteilung der TE_{10} Welle, der Grundmode, gezeichnet. E- und H stehen lokal jeweils senkrecht aufeinander : Die E-Feldlinien-Bündel sind durch ringförmige H-Feldlinienbündel umschlossen :



Die folgende Abbildung zeigt die Wandströme bzw. die Wandstromdichte für die TE_{10} Mode. Die Wandstromdichte ergibt sich aus der Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke an der

Wandoberfläche. Der Wandstrom verläuft parallel zur Wandoberfläche, ist aber senkrecht zur magnetischen Feldstärkekomponente orientiert.

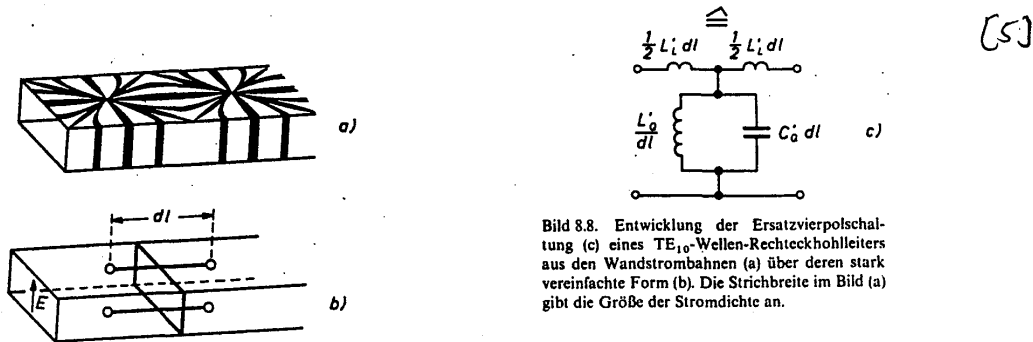


Bild 8.8. Entwicklung der Ersatzvierpolschaltung (c) eines TE_{10} -Wellen-Rechteckhohlleiters aus den Wandstrombahnen (a) über deren stark vereinfachte Form (b). Die Strichbreite im Bild (a) gibt die Größe der Stromdichte an.

Man erkennt, daß der Wandstrom auf der Boden- und Deckwand in der Mitte in Ausbreitungsrichtung der Welle fließt, während er zum Rand hin senkrecht dazu fließt (Querströme). Dieser Strom schließt sich einerseits über die Seitenwände und andererseits über den Verschiebungsstrom in der Mitte des Hohlleiters, dort wo die E-Feldstärke maximal ist. Aus der Berechnung der Wandströme (Flächenintegral über die Wandstromdichte) läßt sich die Dämpfungskonstante der Hohlleiterwelle ermitteln.

Für die H_{10} -Welle (Rechteck) ergibt sich:

$$\alpha = \frac{1}{k l_s Z_0 b} \frac{1 + \frac{2a}{b} \left(\frac{I_0}{2a} \right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{2a} \right)^2}}$$

Als Funktion der Frequenz fällt die Dämpfungskonstante zunächst, durchläuft dann ein Minimum bei $f/f_{gr} = 2$ und nimmt für $f \gg f_{gr}$ wegen des Skin效ektes proportional zur Wurzel aus der Frequenz zu. Deswegen wird der Rechteckhohlleiter mit $a = 2b$ erst ab einer Frequenz von $1,3 f_{gr}$ betrieben.

Bis zu einer Frequenz von $f = 1,8 f_{gr}$ ($f_{gr} = c_0/\lambda_{gr}$; $\lambda_{gr} = 2a$) ist nur die TE_{10} Mode ausbreitungsfähig
 \Rightarrow Betriebsbereich Rechteckhohlleiter mit $a = 2b$:

$$\boxed{c_0/2,6a < f < c_0/3,6a}$$

Bei Hohlrohrwellen kann die Definition von Strom und Spannung nicht mehr wie bei TEM-Wellen vorgenommen werden. Man definiert hier die Spannung über die maximale elektrische Feldstärke (bei TE_{10} in der Mitte des Hohlleiters) und den Strom über die maximale Tangentialkomponente des magnetischen Feldes. Dann läßt sich für **Strom und Spannungswellen** längs der Leitung ein ähnliches Bild wie bei den TEM-Wellen auf der Koaxialleitung entwerfen, nur daß hier der Mittelleiter fehlt.

Durch eine analoge Betrachtung wie sie eingangs angestellt wurde, lassen sich auch die Wellenformen für **TM_{n0} -Wellentypen** ableiten und veranschaulichen. Dabei läßt auf eine metallische Wand eine



ebene Welle, deren magnetische Feldstärke parallel zur Wand orientiert ist, unter schrägem Winkel einfallen. Die Eigenschaften der reflektierten Welle ergeben sich aus der Randbedingung $H_{\text{norm}} = 0$.

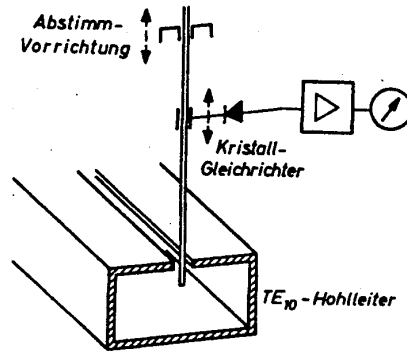
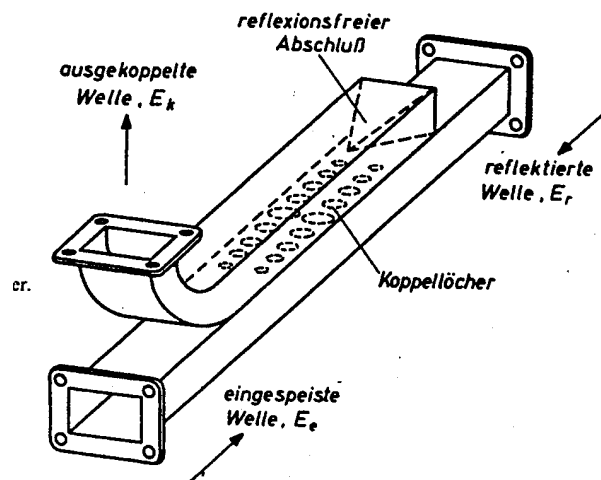


Bild 8.21. Hohlrohr-Meßleitung mit abstimmbarer Stiftsonde, Gleichrichter, Verstärker und Anzeigegerät.

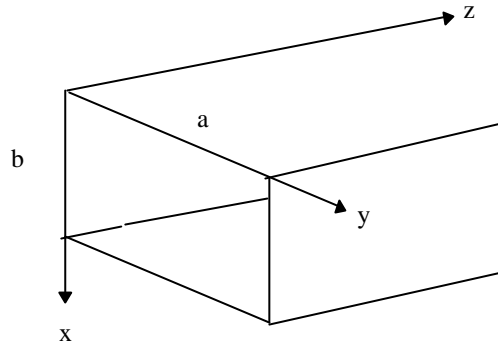
aus Meyer Pottel [5]



Richtkoppler aus Meyer Pottel [5]

8.2 Ableitung der Felder für die Grundmode im Rechteckhohlleiter

Die Felder für die TE₁₀-Mode im Rechteckhohlleiter sollen nun direkt aus den Maxwell'schen Gleichungen unter den gegebenen Randbedingungen bestimmt werden.



$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z)e^{j\omega t}, \quad \vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}(x, y, z)e^{j\omega t}$$

$$\text{rot}\vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H}$$

$$\text{rot}\vec{H} = j\omega\epsilon_0\vec{E}$$

einfachster Ansatz : $\vec{E}(x, y, z) = E_x(y, z)\vec{e}_x$ also $\frac{\mathcal{I}\dots}{\mathcal{I}x} = 0$

$$\text{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \frac{\mathcal{I}\dots}{\mathcal{I}y} & \frac{\mathcal{I}\dots}{\mathcal{I}z} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \vec{e}_y \frac{\mathcal{I}E_x}{\mathcal{I}z} - \vec{e}_z \frac{\mathcal{I}E_x}{\mathcal{I}y} = -j\omega\mu_0(H_y\vec{e}_y + H_z\vec{e}_z)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \frac{\mathcal{I}\dots}{\mathcal{I}y} & \frac{\mathcal{I}\dots}{\mathcal{I}z} \\ H_y & H_z & \dots \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\mathcal{I}H_z}{\mathcal{I}y} - \frac{\mathcal{I}H_y}{\mathcal{I}z} \right) = j\omega\epsilon_0 E_x \vec{e}_x \Rightarrow$$

$$\frac{\mathcal{I}E_x}{\mathcal{I}z} = -j\omega\mu_0 H_y$$

$$\frac{\mathcal{I}E_x}{\mathcal{I}y} = j\omega\mu_0 H_z$$

$$\frac{\mathcal{I}H_z}{\mathcal{I}y} - \frac{\mathcal{I}H_y}{\mathcal{I}z} = j\omega\epsilon_0 E_x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{j\omega\mu_0} \left(\frac{\mathcal{I}^2 E_x}{\mathcal{I}y^2} + \frac{\mathcal{I}^2 E_x}{\mathcal{I}z^2} \right) = j\omega\epsilon_0 E_x \Rightarrow$$

Wellengleichung für E:



$$\frac{\nabla^2 E_x}{\nabla y^2} + \frac{\nabla^2 E_x}{\nabla z^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_x = 0$$

Lösungsansatz:

$$E_x(y,z) = \hat{E} \sin\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z}$$

$$\mathbf{b}_0 = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{I}_0} \quad \mathbf{b}_H = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{I}_H}$$

Einsetzen in Wellengleichung :

$$-\left(\frac{\mathbf{p}}{a}\right)^2 + (-j\mathbf{b}_H)^2 + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 = 0 \quad \frac{\omega}{c_0} = \mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_H^2 = \mathbf{b}_0^2 - \left(\frac{\mathbf{p}}{a}\right)^2 \quad \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{I}_H} = \sqrt{\left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{I}_0}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{p}}{a}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\mathbf{I}_H} = \frac{1}{\mathbf{I}_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{I}_0}{2a}\right)^2}$$

$$\mathbf{I}_H = \frac{\mathbf{I}_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{I}_0}{2a}\right)^2}} \quad \mathbf{I}_{gr} = 2a$$

H-Feld : E einsetzen in Induktionsgesetz (1. Maxwell'sche Gl. s.o.)

$$E_x(y,z) = \hat{E} \sin\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z}$$

$$-j\mathbf{b}_H \hat{E} \sin\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z} = -j\omega\mu_0 H_y$$

$$H_y = \hat{E} \frac{\mathbf{b}_H}{\omega\mu_0} \sin\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z}$$

$$H_y = Z_H \hat{E} \sin\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z} \quad \text{mit} \quad Z_H = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{I}_0}{2a}\right)^2}}$$

$$\hat{E} \left(\frac{\mathbf{p}}{a}\right) \cos\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z} = j\omega\mu_0 H_z$$

$$H_z = -j \frac{\hat{E}}{\omega\mu_0} \left(\frac{\mathbf{p}}{a}\right) \cos\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z}$$

$$H_z = -j \frac{\hat{E}}{Z_0} \frac{\mathbf{I}_0}{2a} \cos\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z}$$



Ableitung der Felder für die Grundmode im Rechteckhohlleiter

$$E_x(y, z) = \hat{E} \sin\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z}$$

$$-j \mathbf{b}_H \hat{E} \sin\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z} = -j \mathbf{w} \mathbf{m}_0 H_y$$

$$H_y = \hat{E} \frac{\mathbf{b}_H}{\mathbf{w} \mathbf{m}_0} \sin\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z}$$

$$H_y = Z_H \hat{E} \sin\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z} \quad \text{mit} \quad Z_H = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{I}_0}{2a}\right)^2}}$$

$$\hat{E} \left(\frac{\mathbf{p}}{a}\right) \cos\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z} = j \mathbf{w} \mathbf{m}_0 H_z$$

$$H_z = -j \frac{\hat{E}}{\mathbf{w} \mathbf{m}_0} \left(\frac{\mathbf{p}}{a}\right) \cos\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z}$$

$$H_z = -j \frac{\hat{E}}{Z_0} \frac{\mathbf{I}_0}{2a} \cos\left(\frac{\mathbf{p}}{a} y\right) e^{-j \beta_H z}$$

die folgenden Bilder sind aus Sinnema [11] entnommen:

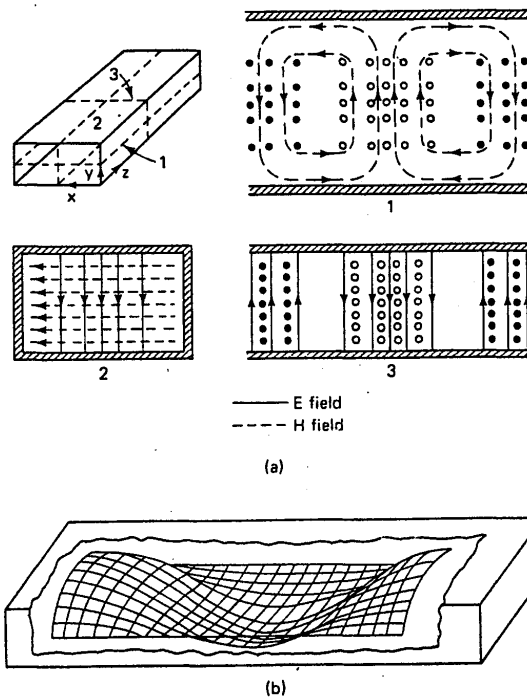


Figure 7-10 Field configuration for the TE₁₀ mode in a rectangular waveguide. (a) Closeness of line spacing indicates the strength of the field. Dots represent field lines coming out of the plane of the paper. Small circles represent lines going into paper. [From S. Ramo, J. R. Whinnery, and T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics* (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1965), Table 8.02, p. 423.] (b) Three-dimensional view of the electric field.



8.3 Moden in Rechteck- und Rundhohlleitern

Zur genaueren Behandlung der Vielzahl möglicher Wellen in Hohlleitern muß man über die einführend gegebene anschauliche Darstellung hinausgehen und die geeigneten Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen unter den gegebenen Randbedingungen aufsuchen. Innerhalb der Hohlleiter ist die Stromdichte $S = 0$ und es gibt auch keine Ladungen bzw. Raumladungsdichte $\rho = 0$. Bei den meisten Anwendungen ist das Innere der Hohlleiter ohne Dielektrikum: $\epsilon_r = 1$. Die Wände mögen zunächst beliebig gute Leitfähigkeit besitzen.

Aufgrund der Ähnlichkeit der Maxwell'schen Gleichungen findet man, daß es **duale Felder** geben muß. Vertauscht man nämlich in den Maxwell'schen Gleichungen (s.u.) das elektrische Feld mit dem magnetischen Feld und vertauscht auch noch die elektrische Feldkonstante mit der magnetischen, so werden die Maxwell'schen Gleichungen in sich selbst übergeführt.

Daraus ergibt sich: Ist eine Lösung für E und H bekannt, so sind auch die durch die Transformation $H' = E$ und $E' = -H$ erzeugten Felder Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen (dabei ist in den Ausdrücken für die dualen Felder ϵ durch μ und μ durch ϵ zu ersetzen). Dies führt zu der Einteilung in die Grund- Hohlleitermoden mit transversalem elektrischen Feld (TE Wellen) und solchen mit transversalem magnetischen Feld (TM Wellen). Diese Wellen haben jeweils magnetische Feldstärkekomponenten bzw. elektrische Feldstärkekomponenten in Ausbreitungsrichtung (H-Wellen, E-Wellen).

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}(x, y, z)e^{j\omega t}, & \vec{H}(x, y, z, t) &= \vec{H}(x, y, z)e^{j\omega t} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_r, & \mathbf{m} &= \mathbf{m}_0 \\ \text{rot} \vec{E} &= -j\omega \vec{H} \\ \text{rot} \vec{H} &= j\omega \vec{E} \\ \text{div} \vec{H} &= 0 \\ \text{div} \vec{E} &= 0\end{aligned}$$

Der Lösungsweg gestaltet sich unter Verwendung der in Kap. 2.7 eingeführten Potentiale ϕ und \vec{A} wie folgt:

1.) Lösung der Wellengleichung für das **Vektorpotential** unter den gegebenen Randbedingungen und der Annahme, daß \vec{A} nur eine Komponente in Ausbreitungsrichtung der Welle hat.

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (0, 0, A) \\ \Delta A + \mathbf{w}^2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} \cdot A &= 0\end{aligned}$$

Dabei ist Δ der Laplace Operator in den geeigneten Koordinaten.

2. Berechnung der **TM- Wellen- Felder** (E-Wellen):

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{\mathbf{m}} \text{rot} \vec{A} \\ \vec{E} &= -j\omega \vec{A} - \text{grad} \phi\end{aligned}$$

Das elektrische Potential kann aufgrund der Lorenzbedingung durch das Vektorpotential ersetzt werden.



$$\operatorname{div} \vec{A} + j \omega \epsilon_0 \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\vec{E} = -j \omega \vec{A} - \frac{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A})}{j \omega \epsilon_0}$$

3. Berechnung der **TE-Wellen (H-Wellen)** aufgrund der **Dualität**

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\vec{H} = -j \omega \vec{A} - \frac{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A})}{j \omega \epsilon_0}$$

8.3.1 Rechteckhohlleiter

$$\vec{A} = A(x, y, z) \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \mathbf{b}_0^2 A = 0$$

wobei: $\mathbf{w}^2 \epsilon_0 = \left(\frac{\mathbf{w}}{c}\right)^2 = \mathbf{b}_0^2 = \left(\frac{2\mathbf{P}}{I_0}\right)^2$ I_0 = Freifeldwellenlänge

TM-Wellen:

$$H_x = \frac{1}{\mathbf{m}} \frac{\partial A}{\partial y} \quad E_x = \frac{1}{j \omega \epsilon_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z}$$

$$H_y = -\frac{1}{\mathbf{m}} \frac{\partial A}{\partial x} \quad E_y = \frac{1}{j \omega \epsilon_0} \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}$$

$$H_z = 0 \quad E_z = \frac{1}{j \omega \epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \mathbf{b}_0^2 A \right)$$

TE-Wellen:

$$E_x = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial A}{\partial y} \quad H_x = \frac{1}{j \omega \epsilon_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z}$$

$$E_y = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial A}{\partial x} \quad H_y = \frac{1}{j \omega \epsilon_0} \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}$$

$$E_z = 0 \quad H_z = \frac{1}{j \omega \epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \mathbf{b}_0^2 A \right)$$

Randbedingungen: $E_{\tan g} = 0$, $H_{norm} = 0$ an den Wänden

Lösungsansatz: Produkt aus Funktionen, die nur von einer Koordinate abhängen (Separationsansatz):

$$A(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Eingesetzt in die Wellengleichung liefert das für jede Funktion eine unabhängige Differentialgleichung:



$$\frac{d^2 X}{dx^2} YZ + \frac{d^2 Y}{dy^2} XZ + \frac{d^2 Z}{dz^2} XY + \mathbf{b}_0^2 XYZ = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \mathbf{b}_0^2 = 0$$

Der erste Term hängt nur von x ab, der zweite nur von y und der dritte nur von z. Die obige Gleichung kann deshalb nur bestehen wenn alle drei Terme konstant und ≤ 0 sind. Die drei später noch näher zu bestimmenden Konstanten nennen wir $-\beta_x^2$, $-\beta_y^2$ und $-\beta_z^2$.

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\mathbf{b}_x^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\mathbf{b}_y^2 \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\mathbf{b}_z^2$$

Allgemeine Lösungen:

$$X(x) = A_1 \cos \mathbf{b}_x x + A_2 \sin \mathbf{b}_x x$$

$$Y(y) = B_1 \cos \mathbf{b}_y y + B_2 \sin \mathbf{b}_y y$$

$$Z(z) = C_1 e^{-j\mathbf{b}_z z} + C_2 e^{+j\mathbf{b}_z z}$$

Für die hinlaufende Welle ergeben sich **vier mögliche Lösungsansätze**:

$$A_1(x, y, z) = A_1 \cos(\mathbf{b}_x x) \cdot B_1 \cos(\mathbf{b}_y y) C_1 e^{-j\mathbf{b}_z z}$$

$$A_2(x, y, z) = A_2 \sin(\mathbf{b}_x x) \cdot B_2 \sin(\mathbf{b}_y y) C_1 e^{-j\mathbf{b}_z z}$$

$$A_3(x, y, z) = A_1 \cos(\mathbf{b}_x x) \cdot B_2 \sin(\mathbf{b}_y y) C_1 e^{-j\mathbf{b}_z z}$$

$$A_4(x, y, z) = A_2 \sin(\mathbf{b}_x x) \cdot B_1 \cos(\mathbf{b}_y y) C_1 e^{-j\mathbf{b}_z z}$$

Bestimmung von \mathbf{b}_x , \mathbf{b}_y , $\mathbf{b}_z = \mathbf{b}_H$ aus den Randbedingungen:

$$E_x = 0 \text{ für } y = 0 \text{ und } y = b$$

$$E_y = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = a \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{b}_x = \frac{m\mathbf{p}}{a}; \quad \mathbf{b}_y = \frac{n\mathbf{p}}{b};$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

in Wellengleichung ergibt Wert für $\mathbf{b}_z = \mathbf{b}_H$

$$-\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\mathbf{p}}{b}\right)^2 - \mathbf{b}_H^2 + \mathbf{b}_0^2 = 0$$

$$\mathbf{b}_{gr}^2 := \left(\frac{m\mathbf{p}}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\mathbf{p}}{b}\right)^2 = \left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}_{gr}}\right)^2$$

$$\mathbf{b}_H^2 = \mathbf{b}_0^2 - \mathbf{b}_{gr}^2$$

$$\left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}_H}\right)^2 = \left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}_0}\right)^2 + \left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}_{gr}}\right)^2$$



$$\mathbf{I}_H = \frac{\mathbf{I}_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{I}_0}{\mathbf{I}_{gr}}\right)^2}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{I}_{gr,mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

Berechnet man aus den Potentialen nach der eingangs beschriebenen Vorschrift die Felder, so findet man, daß nur für zwei der obigen vier Ansätze die damit erhaltenen Felder die Randbedingungen erfüllen, nämlich

$$\text{TM-Wellen: } A^{(m)} = \sin\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) C^{(m)} e^{-j\mathbf{b}_H z}$$

$$\text{TE-Wellen: } A^{(e)} = \cos\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) C^{(e)} e^{-j\mathbf{b}_H z}$$

TM-Wellen:

$$E_z = \hat{E} \sin\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$E_x = -\hat{E} \frac{j\mathbf{b}_H \mathbf{b}_x}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \cos\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$E_y = -\hat{E} \frac{j\mathbf{b}_H \mathbf{b}_y}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \sin\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$H_x = \hat{E} \frac{j\omega \mathbf{b}_y}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \sin\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$H_y = -\hat{E} \frac{j\omega \mathbf{b}_x}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \cos\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

TE-Wellen:

$$H_z = \hat{H} \cos\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$H_x = \hat{H} \frac{j\mathbf{b}_H \mathbf{b}_x}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \sin\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$H_y = \hat{H} \frac{j\mathbf{b}_H \mathbf{b}_y}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \cos\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$E_x = \hat{H} \frac{j\omega \mathbf{b}_y}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \cos\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$E_y = -\hat{H} \frac{j\omega \mathbf{b}_x}{\mathbf{b}_{gr,m,n}^2} \sin\left(\frac{m\mathbf{p}}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{b}y\right) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$



einige Bilder aus Ramo[7]

Table 8.7
Summary of Wave Types for Rectangular Guides*

TE_{10}	TE_{11}	TE_{21}
TE_{20}	TM_{11}	TM_{21}

* Electric field lines are shown solid and magnetic field lines are dashed.

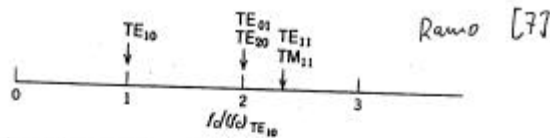


Fig. 8.7b Relative cutoff frequencies of waves in a rectangular guide ($b/a = 1$).

8.8 The TE_{10} Wave in a Rectangular Guide

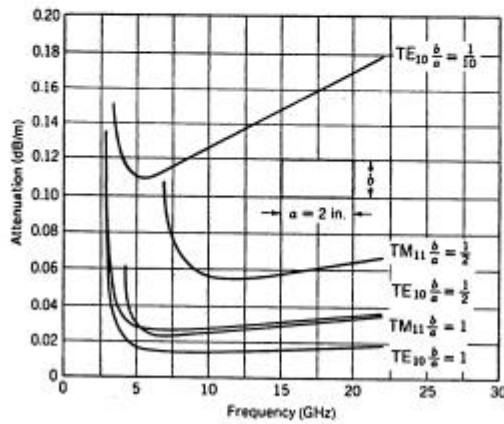


Fig. 8.7c Attenuation due to copper losses in rectangular waveguides of fixed width.

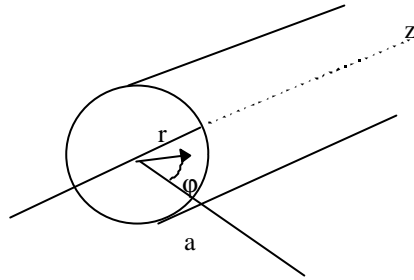


8.3.2 Rundhohlleiter

Anwendung

- bei Antennen z.B. wenn zirkular polarisierte Welle zu Antenne geführt werden muß.
- TE_{0n} - Welle hat extrem geringe Dämpfung
- wegen der geringeren Dämpfung bei Resonatoren

Die Lösung der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten führt auf die sog. Zylinderfunktionen, von denen uns die Bessel-Funktionen bereits bekannt sind. (Abb. ..)



Die Moden werden durch die Knotenflächen in der Winkelfunktion (Index m) und der Radialfunktion (Index n) gekennzeichnet.

TM-Wellen ($H_z = 0$)

Randbedingungen $H_n = 0$ bei $r = a \Leftrightarrow J_m(\mathbf{b}a) = 0$

Die 1.te Nullstelle der m -ten Besselfunktion wird mit j_{mn} bezeichnet:

$$J_m(\mathbf{b}_{gr,mn}a) = J_m(j_{mn}) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{b}_{gr,mn} = \frac{j_{mn}}{a} \quad m = 1,2,3,\dots \quad n = 1,2,3,\dots$$

$$\mathbf{b}_H^2 = \mathbf{b}_0^2 - \mathbf{b}_{gr,mn}^2$$

$$E_z = \hat{E} \cdot J_m\left(\frac{j_{mn}}{a}r\right) \cos(m\mathbf{j}) e^{j(\mathbf{w}t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$E_r = -\hat{E} \frac{j\mathbf{b}_H}{\mathbf{b}_{gr,mn}} J_m'\left(\frac{j_{mn}}{a}r\right) \cos(m\mathbf{j}) e^{j(\mathbf{w}t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$E_{\mathbf{j}} = \hat{E} \frac{j\mathbf{b}_H^n}{\mathbf{b}_{gr,mn}^2} J_m\left(\frac{j_{mn}}{a}r\right) \sin(m\mathbf{j}) e^{j(\mathbf{w}t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$H_{\mathbf{j}} = \frac{E_r}{Z_{TM}}$$

$$H_r = -\frac{E_{\mathbf{j}}}{Z_{TM}}$$

$$Z_{TM} = \frac{\mathbf{b}_H}{\mathbf{w}\epsilon}$$



TE-Wellen :

Hier ist die Randbedingung $E_{\text{tang}} = 0$ bei $r = a$ zu erfüllen. Das führt auf $\Leftrightarrow J'_m(\mathbf{b}a) = 0$
 Die 1.te Nullstelle der Ableitung der n-ten Besselfunktion wird mit j'_{nl} bezeichnet:

$$J'_m(\mathbf{b}_{gr,mn}a) = J'_m(j'_{mn}) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{b}_{gr,mn} = \frac{j'_{mn}}{a} \quad m = 1,2,3,\dots \quad n = 1,2,3,\dots$$

$$\mathbf{b}_H^2 = \mathbf{b}_0^2 - \mathbf{b}_{gr,mn}^2$$

$$H_z = \hat{H} \cdot J_m\left(\frac{j'_{mn}}{a}r\right) \cos(m\mathbf{j}) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$E_r = \hat{H} \frac{j\omega m \mathbf{b}_H}{\mathbf{b}_{gr,mn}^2} J_m\left(\frac{j'_{mn}}{a}r\right) \sin(m\mathbf{j}) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$E_{\mathbf{j}} = \hat{H} \frac{j\omega m}{\mathbf{b}_{gr,mn}} J'_m\left(\frac{j'_{mn}}{a}r\right) \cos(m\mathbf{j}) e^{j(\omega t - \mathbf{b}_H \cdot z)}$$

$$H_{\mathbf{j}} = \frac{E_r}{Z_{TE}}$$

$$H_r = -\frac{E_{\mathbf{j}}}{Z_{TE}}$$

$$Z_{TE} = \frac{\omega m}{\mathbf{b}_H}$$

aus Ramo [7]:

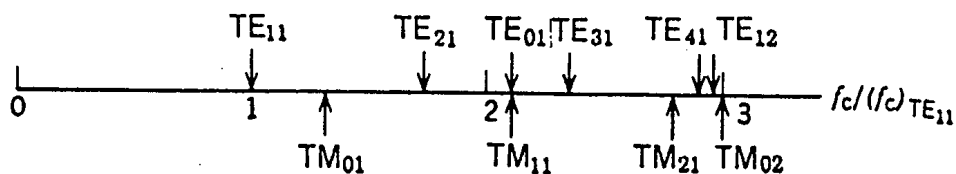


FIG. 8.9b Relative cutoff frequencies of waves in a circular guide.



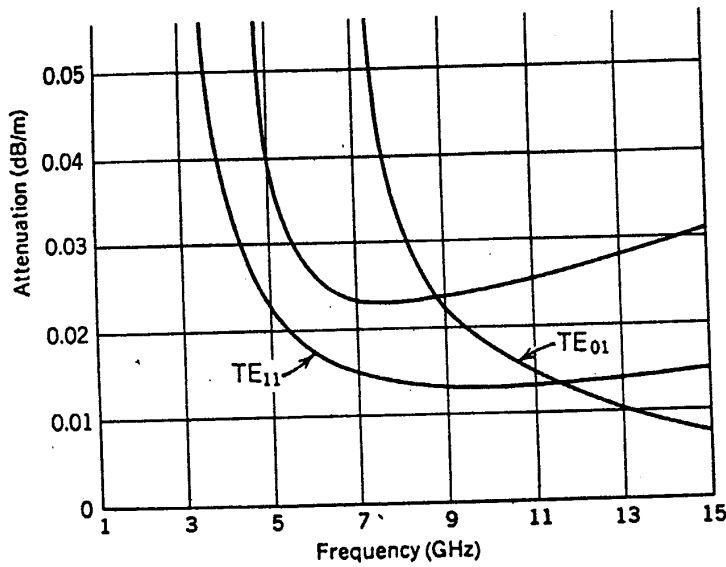
Rano [7]

Table 8.9
Summary of Wave Types for Circular Guides*

Wave Type	TM_{01}	TM_{11}	TM_{12}	TE_{01}	TE_{11}
Field distributions in cross-sectional plane, at plane of maximum transverse fields					
Field distributions along guide					
Field components present	E_z, E_r, H_θ	E_z, E_r, H_θ	$E_z, E_r, E_\theta, H_r, H_\theta$	H_z, H_r, E_θ	$H_z, H_r, H_\theta, E_r, E_\theta$
ka or ka'	2.405	5.52	3.83	3.83	1.84
$(ka)_{cr}$	$\frac{2.405}{a}$	$\frac{5.52}{a}$	$\frac{3.83}{a}$	$\frac{3.83}{a}$	$\frac{1.84}{a}$
$(ka)_{cr}$	2.61a	1.14a	1.04a	1.04a	3.41a
$(ka)_{cr}$	$\frac{0.393}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$	$\frac{0.877}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$	$\frac{0.009}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$	$\frac{0.009}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$	$\frac{0.203}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$
Attenuation due to imperfect conductors	$\frac{R_s}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-(k_c/k)^2}}$	$\frac{R_s}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-(k_c/k)^2}}$	$\frac{R_s}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-(k_c/k)^2}}$	$\frac{R_s}{a^2} \frac{(k_c/k)^2}{\sqrt{1-(k_c/k)^2}}$	$\frac{R_s}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-(k_c/k)^2}} \left[\left(\frac{k_c}{k}\right)^2 + 0.42 \right]$

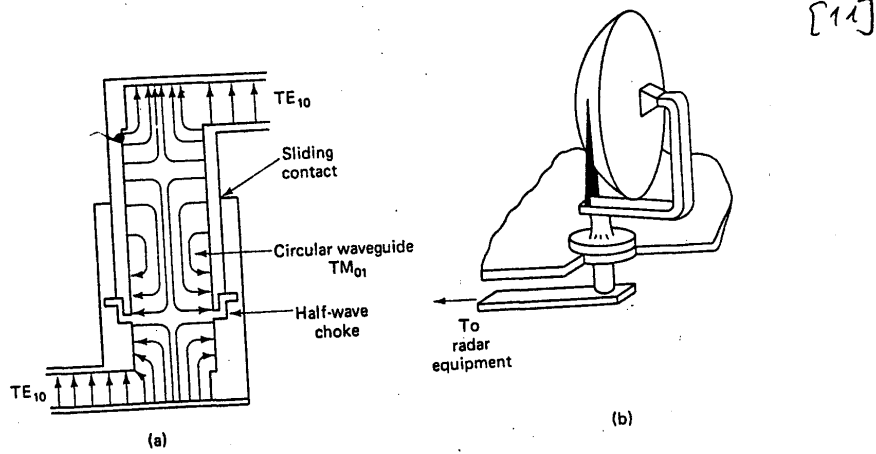
* Electric field lines are shown solid and magnetic field lines are dashed.

Rano [7]



19c Attenuation due to copper losses in circular waveguides; diameter = 2 in.





Sinnema: Figure 7-27 Rotary joint (a) used in radar application (b).

Ramo [7]

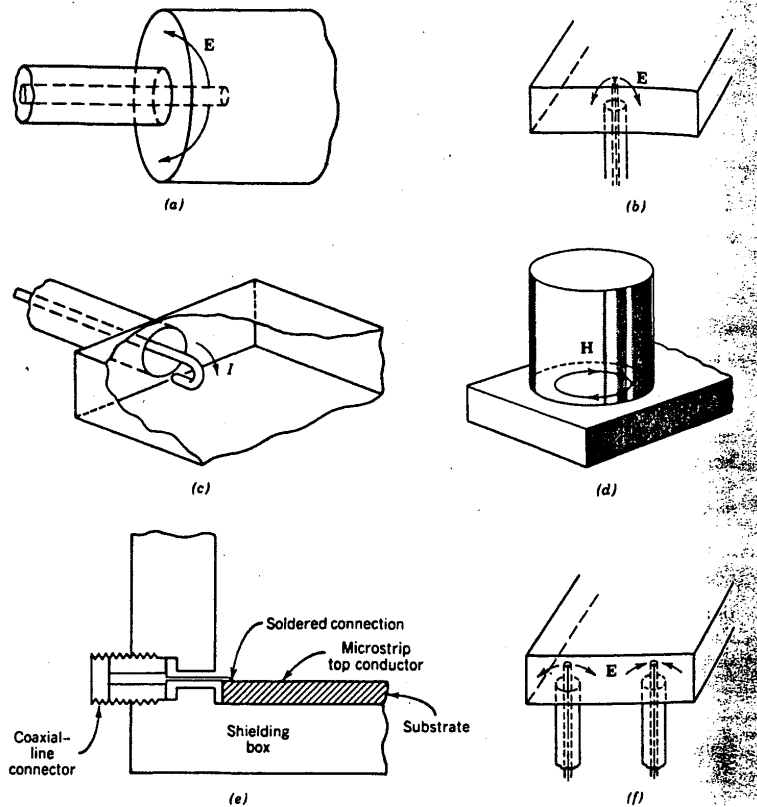


FIG. 8.11 (a) Antenna in end of circular guide for excitation of TM_{01} wave. (b) Antenna in bottom of rectangular guide for excitation of the TE_{10} wave. (c) Loop in end of rectangular guide for excitation of TE_{10} wave. (d) Junction between circular guide (TM_{01} wave) and rectangular guide (TE_{10} wave); large-aperture coupling. (e) Coaxial line coupling to microstrip. (f) Excitation of the TE_{20} wave in rectangular guide by two oppositely phased antennas.

