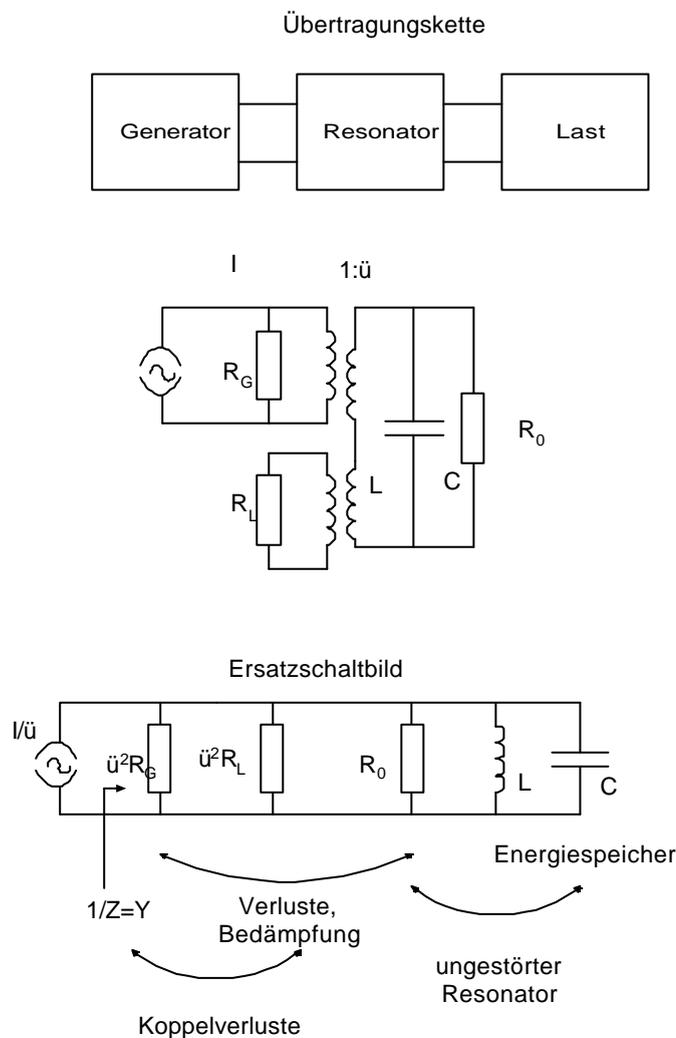


9 Resonatoren und Filter

In Resonatoren kann elektrische Schwingungsenergie gespeichert werden. Sie wirken daher auf Anregung frequenzselektiv. In eine Übertragungskette geschaltet wirken sie wie ein Bandpaßfilter. Der Resonator kann aber auch als Abschluß einer Übertragungsstrecke auftreten, oder in einem sog. Mehrtor liegen. Dann interessieren die Streu-Parameter der Anordnung. Resonanzerscheinungen können in der HF-Technik die Eigenschaften von Bauelementen und Systemen empfindlich beeinflussen oder bestimmen. Andererseits wird die Eigenschaft der Resonanz bewußt ausgenutzt in Bauteilen wie Filtern, Oszillatoren, Wellenmessern, Antennen, Anpassungsschaltungen, Kopplern, Verzweigern, Weichen, etc.

Die bei Resonatoren wesentlichen Begriffe wie Resonanzkurve, Eigen- und Koppel-Verluste, Bandbreite und Güte werden zunächst am Beispiel des aus konzentrierten Bauelementen aufgebauten LCR-Parallel Resonanzkreises zusammengestellt und erläutert.

9.1 Resonanzkreis mit konzentrierten Bauelementen



Resonanzkreis mit konzentrierten Bauelementen

Eingangsadmittanz:

$$1/Z = Y = \frac{1}{\ddot{u}^2 R_G} + \frac{1}{\ddot{u}^2 R_L} + \frac{1}{R_0} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$G = \frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{\ddot{u}^2 R_G} + \frac{1}{\ddot{u}^2 R_L} + \frac{1}{R_0}$$

$$Y = G + j\sqrt{\frac{C}{L}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = G \cdot (1 + jQ \cdot v)$$

$$\text{Resonanzkreisfrequenz: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{Verstimmung } v = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Güte

$$Q = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} = R_{ges} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

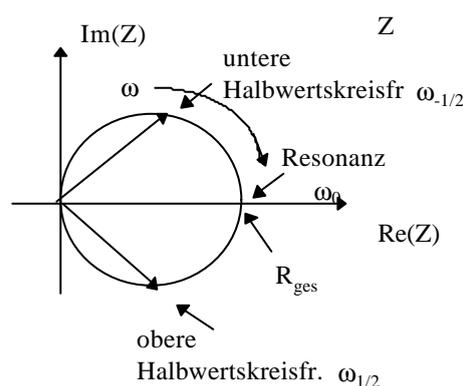
$$Q_0 = R_0 \sqrt{\frac{C}{L}}, Q_L = \ddot{u}^2 R_L \sqrt{\frac{C}{L}}, Q_G = \ddot{u}^2 R_G \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_G}$$

Eingangsimpedanz

$$Z = \frac{1}{G \cdot (1 + jQ \cdot v)}$$

Ortskurve der Eingangsimpedanz



Die in den Schwingkreis eingespeiste Energie schwingt zwischen elektrischer und magnetischer Energie hin und her, sie wird abwechseln vom Kondensator und der Spule gespeichert. Die gesamte gespeicherte Energie ist deswegen

$$W_0 = \frac{1}{2} C \hat{U}^2$$



Resonanzkreis mit konzentrierten Bauelementen

Aufgrund der Eigenverluste des Schwingkreises und der Koppelverluste geht pro Periode die folgende Energie verloren

$$\Delta W = P_0 \cdot T = \frac{1}{2} G \hat{U}^2 \frac{2P}{\omega_0}$$

$$P_0 = \frac{1}{2} G \hat{U}^2 = \frac{1}{2} R_{ges} \left(\frac{\hat{I}}{\hat{u}} \right)^2$$

Man erkennt, daß das Verhältnis aus der im Kreis gespeicherten Energie zu der pro Periode verlorengangenen Energie $1/(2\pi)$ mal der Güte des Kreises ist.

$$\frac{W_0}{\Delta W} = \frac{1}{2P} \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{2P} \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2P} Q$$

oder anders geschrieben: $\frac{\omega_0 W_0}{P_0} = Q$

Die Güte bestimmt die Halbwertsbreite der Resonanzkurve:

$$\omega \neq \omega_0:$$

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z) \left(\frac{\hat{I}}{\hat{u}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{G \cdot (1 + (Q \cdot v)^2)} \left(\frac{\hat{I}}{\hat{u}} \right)^2$$

In der Nähe der Resonanzfrequenz ist die Verstimmung klein und man kann folgendermaßen nähern:

$$\omega = \omega_0 + \Delta \omega$$

$$v = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \cdot \omega_0} = \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega \cdot \omega_0} \approx \frac{2\Delta \omega}{\omega_0}$$

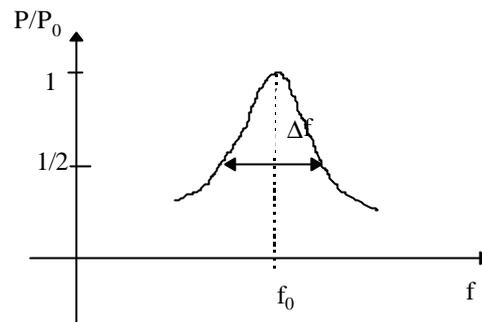
$$1 + (Q \cdot v)^2 \approx 1 + \left(Q \cdot \frac{2\Delta \omega}{\omega_0} \right)^2 = 1 + \left(Q \cdot 2 \frac{f - f_0}{f_0} \right)^2$$

$$P(f) = \frac{1}{G \left(1 + \left(Q \cdot 2 \frac{f - f_0}{f_0} \right)^2 \right)} \left(\frac{\hat{I}}{\hat{u}} \right)^2$$

$$P(f) = \frac{P_0}{1 + \left(Q \cdot 2 \frac{f - f_0}{f_0} \right)^2}$$



Leitungsresonator



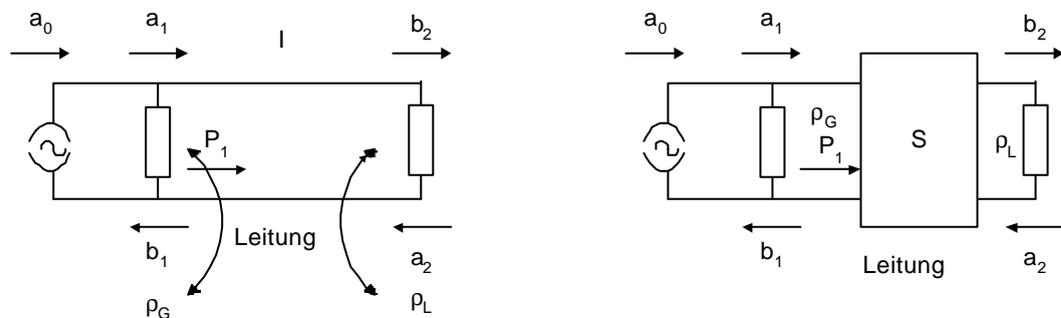
$$P(f_0) = P_0 \quad P(f_{\pm 1/2}) = \frac{1}{2} P_0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(Q \cdot 2 \frac{f_{1/2} - f_0}{f_0}\right)^2 = 1$$

$$\left(Q \cdot 2 \frac{f_0 - f_{-1/2}}{f_0}\right)^2 = 1$$

$\text{Halbwertsbreite } \Delta f = f_{1/2} - f_{-1/2}$ $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$
--

9.2 Leitungsresonator



Im Leitungsresonator wird die vom Generator kommende Welle zwischen den beiden Enden hin und her reflektiert, wobei jedesmal ein kleiner Teil der Energie durch ohmsche Verluste und ein weiterer Teil durch Auskoppelverluste verloren geht. Es entsteht ein Gleichgewicht, bei dem die zugeführte Energie gleich der abfließenden Energie wird. Die Überlagerung der hin- und zurücklaufenden Wellen wird i.a. zu einer Zerstörung der Schwingung innerhalb des Resonators führen (destruktive Interferenz), bei der kaum Energie im Resonator gespeichert wird. Nur wenn sich alle hin- und zurücklaufenden Wellen an jedem Ort gleichphasig überlagern kommt es zu einem Aufschaukeln der Schwingung. Die Amplitude dieser Schwingung ist dann nur mehr durch die Verluste begrenzt (Resonanz). Es kommt zur Ausbildung einer 'stehenden Welle'. Dies ist der Fall, wenn die halbe



Leitungsresonator

Wellenlänge - oder Vielfache davon - mit der Länge des Resonators übereinstimmen, oder lax ausgedrückt, wenn die Welle in den Resonator paßt. Mit zunehmender Abweichung der Wellenlänge (Frequenz) von der Resonanzwellenlänge (Resonanzfrequenz) nimmt die im Resonator gespeicherte Energie dann gemäß den Verlusten ab (Resonanzkurve).

Im folgenden wird die eingespeiste Leistung mit den Leistungswellen und S-Parametern hergeleitet. Dieses Konzept beschreibt die Vielfachreflexionen der Wellen.

Leistungswellen:

$$b_2 = a_1 e^{-a l} e^{-j b l}$$

$$b_1 = a_2 e^{-a l} e^{-j b l}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-a l} e^{-j b l} \\ e^{-a l} e^{-j b l} & 0 \end{pmatrix}$$

eingekoppelte Leistung = ausgekoppelte Leistung + Verlustleistung

$$P_1 = \frac{1}{2} |a_1|^2 - \frac{1}{2} |b_1|^2 = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |\mathbf{r}_1|^2)$$

$$\text{mit } a_1 = \frac{1}{1 - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_G} a_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_1 = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \mathbf{r}_L}{1 - S_{22} \mathbf{r}_L} = e^{-2 j b l} \mathbf{r}_L, P_{Gen} = (1 - |\mathbf{r}_1|^2) \Rightarrow$$

$$= (1 - |\mathbf{r}_1|^2) \frac{(1 - |\mathbf{r}_L|^2)}{|1 - e^{-2 a l} e^{-j 2 b l} \mathbf{r}_G \mathbf{r}_L|^2} = P_{Gen} \frac{(1 - |\mathbf{r}_L|^2)}{1 - 2 |\mathbf{r}_G| |\mathbf{r}_L| e^{-2 a l} \cos(\mathbf{j}_G + \mathbf{j}_L - 2 b l) + e^{-4 a l} |\mathbf{r}_G|^2 |\mathbf{r}_L|^2}$$

da $\mathbf{r}_G \approx -1$ $\mathbf{r}_L \approx -1$ folgt

$$P_1 \approx P_{Gen} \frac{(1 - |\mathbf{r}_L|^2)}{1 - 2 e^{-2 a l} |\mathbf{r}_G| |\mathbf{r}_L| \cos(-2 b l) + e^{-4 a l} |\mathbf{r}_G|^2 |\mathbf{r}_L|^2}$$

P_1 wird maximal für die Resonanzbedingung :

$$2 \mathbf{b}_{res} l = n \cdot 2 \mathbf{p} \quad \text{oder}$$

$$l = n \frac{\mathbf{l}_{res}}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$P_{1 \max} = \frac{(1 - |\mathbf{r}_L|^2)}{(1 - e^{-2 a l} \mathbf{r}_G \mathbf{r}_L)^2} P_{Gen} \approx \frac{(1 - |\mathbf{r}_L|^2)}{(2 \mathbf{a})^2} P_{Gen} \quad \mathbf{a} \ll 1, \quad \mathbf{r}_G \approx -1 \quad \mathbf{r}_L \approx -1$$

Resonanzkurve:

Bei geringer Abweichung von der Resonanzfrequenz läßt sich die Resonanzkurve wie folgt annähern:

$$f = f_{res} + \mathbf{d}f = f_{res} \left(1 + \frac{\mathbf{d}f}{f_{res}}\right)$$

$$P_1 = P_{1 \max} \frac{1}{1 + \left(2Q \frac{\mathbf{d}f}{f_{res}}\right)^2}$$



Leitungsresonator

$$Q \approx \frac{b}{2a} \quad \text{falls} \quad a \ll 1$$

Die Güte läßt sich aus der Halbwertsbreite der Resonanzkurve und der Resonanzfrequenz bestimmen.

$$Q = \frac{f_{res}}{\Delta f} \quad \Delta f = f_{+1/2} - f_{-1/2}$$

Es läßt sich nachweisen, daß die Güte Q das Verhältnis der im Resonator gespeicherten Energie zu der in der Zeit $1/\omega_{res}$ verloren gegangenen Energie ist.

$$Q = \frac{w_{res} W_0}{\Delta P}$$

Beweis:

Die in die Leitung eingespeiste Leistung nimmt auf ihrem Wege zum Resonatorende exponentiell ab, wobei die Abnahme durch die Dämpfungskonstante α gegeben ist

$$P(x) = P_0 e^{-2\alpha x}$$

Wenn die Welle den Resonator einmal durchlaufen hat, so geht die Leistung

$$\Delta P = \frac{dP}{dx} l = -2\alpha P l$$

verloren. Andererseits ist die im Resonator gespeicherte Energie: Leistung mal die Zeit, welche die Welle braucht, um vom Anfang zum Ende des Resonators zu laufen.

$$W_0 = P t = P \frac{l}{c}$$

Damit wird die Güte

$$Q = \frac{w_{res} W_0}{\Delta P} = \frac{w_{res} P \frac{l}{c}}{2\alpha P l} = \frac{w_{res}}{2\alpha} = \frac{b}{2a}$$

Bsp.: Koaxialleitung mit dielektrischer Füllung, hohe Frequenzen.

$$a_D = \sqrt{\epsilon_r} \frac{p f}{c_0} \tan d \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{b c_0}{2\sqrt{\epsilon_r} p f \tan d} = \frac{1}{\tan d}$$

$$Q = \frac{1}{\tan d}$$



9.3 Hohlraumresonatoren

Der Hohlleiter wird mit leitenden Abschlußflächen versehen. Wenn die Länge des Resonators ein ganzes Vielfaches der halben Hohlleiterwellenlänge ist, kommt es zur Ausbildung einer stehenden Welle. Für gegebene Abmessungen des Resonators sind nur bei ganz bestimmten Frequenzen solche Resonanzen möglich, die dann den entsprechenden Hohlleitermodentypen zugeordnet werden. Wenn beispielsweise ein an beiden Enden geschlossener Rechteckhohlleiter eine Länge hat, die gleich der halben Wellenlänge der H_{10} -Welle ist, so wird die anregbare Eigenschwingung die H_{101} -Mode genannt.

Bestimmung der Frequenzen der Eigenschwingungen (Resonanzfrequenzen):

Die Leitungslänge l_H muß ein ganzzahliges Vielfaches der halben Hohlleiterwellenlänge sein. Bei Rechteckhohlleitern wird die Leitungslänge häufig mit c bezeichnet, bei Rundhohlleitern mit d oder h .

$$l_H = \frac{p \mathbf{l}_H}{2} = \frac{p}{2} \frac{\mathbf{l}_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{l}_0}{\mathbf{l}_{gr,m,n}} \right)^2}} \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

f_{mnp} ergibt sich aus:

$$\mathbf{l}_0 = \frac{c_0}{f_{mnp}}$$

9.3.1 Rechteckhohlraumresonator

$$\mathbf{l}_{gr,mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m\mathbf{p}}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\mathbf{p}}{b} \right)^2}} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Daraus folgt nach kurzer Umrechnung:

$$\left(\frac{1}{\mathbf{l}_{mnp}} \right)^2 = \left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2 + \left(\frac{p}{2c} \right)^2$$

$$f_{mnp} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{p}{c} \right)^2}$$



Hohlraumresonatoren

Beisp.:

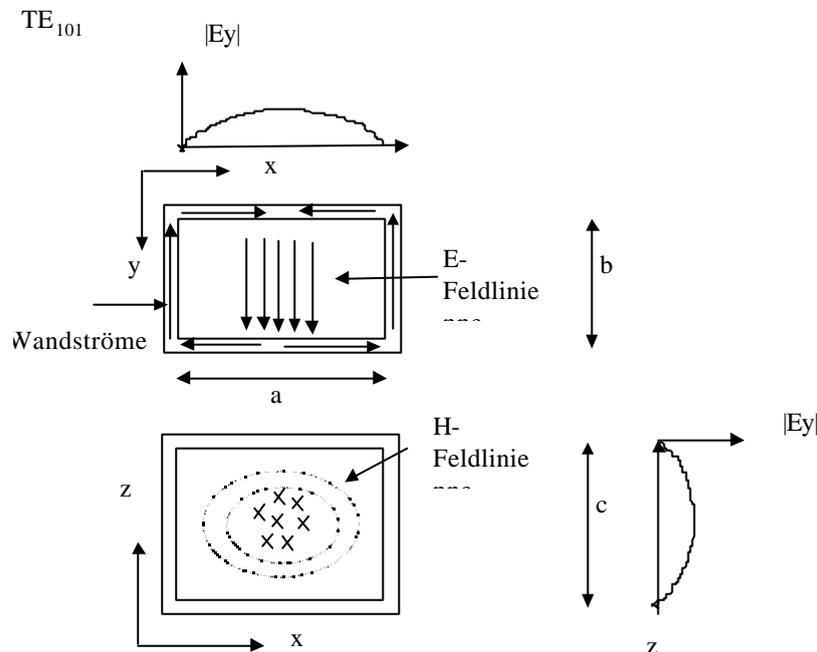
Die H_{101} Mode ($m=1, n=0, p=1$) hat die folgende Resonanzfrequenz, die durch die Höhe und die Breite des Resonators bestimmt wird.

$$\left(\frac{1}{\lambda_{101}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2c}\right)^2$$

$$f_{101} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}$$

Feldverteilung:

Überlagerung der hinlaufenden und reflektierten TE₁₀-Welle des Rechteckhohlleiters unter Berücksichtigung der Randbedingungen an den Enden ergibt stehende Welle. In z-Richtung wird die Amplitude der E-Feld Schwingung durch eine halbe Periode einer Sinusfunktion beschrieben.

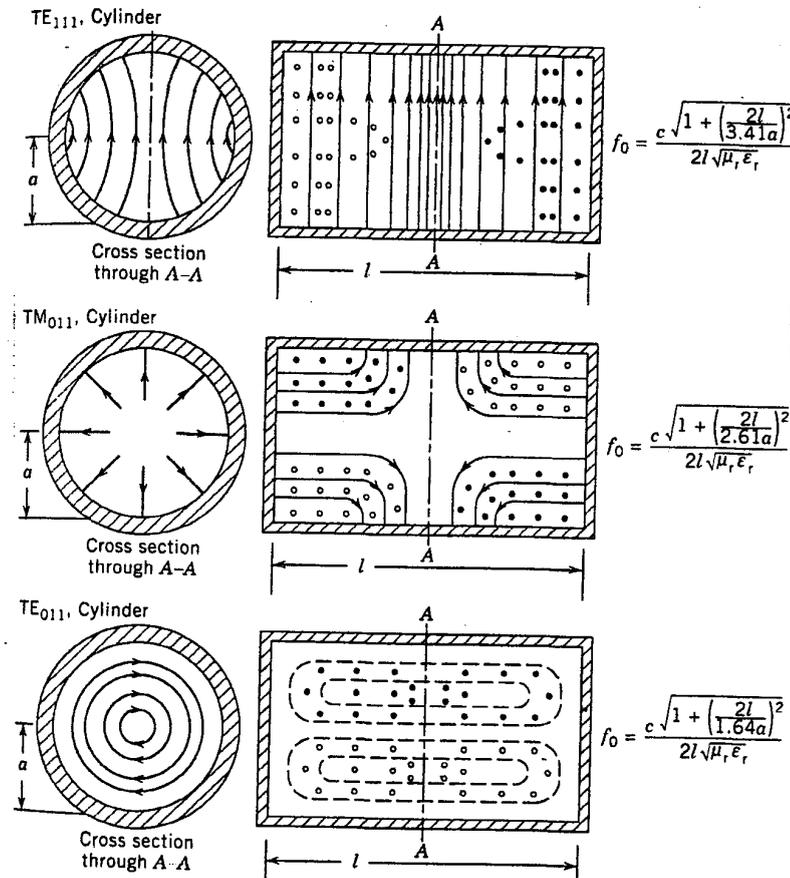


Die Energie schwingt zwischen elektrischem und magnetischem Feld hin und her. Die Wandquerströme schließen sich über den Verschiebungsstrom.

Hohlleitermodendiagramm:

9.3.2 Rundhohlleiterresonator

Höhere Moden : TE_{111} , TM_{011} , TE_{011} : einige Bilder aus Ramo [7]



Für die Praxis hat der TE_{011} Resonator besondere Bedeutung, da diese Mode die Wandströme nicht über die Kanten hinweg fließen. Bei einem abstimmbaren Resonator mit verschiebbarem Deckel ist deswegen kein Kontakt zwischen Deckel und Mantel erforderlich.

Bei gegebener Resonanzfrequenz ist ein großer Resonator vorteilhafter als ein kleiner, da in dieser Richtung das die Güte beeinflussende Verhältnis Volumen zu Oberfläche zunimmt. Andererseits nehmen aber auch die Zahl der möglichen Moden zu, die dann eng benachbart liegen können.

Schließlich ist noch eine weitere Eigenschwingung im Rundhohlleiter zu erwähnen, die nicht unmittelbar aus der Überlagerung von Rundhohlleiterwellen abgeleitet werden kann. Es handelt sich um die E_{010} -Mode, bei der die elektrische Feldstärke unabhängig von der z -Richtung ist. Dennoch kann man sich auch hier die Felder aus der Überlagerung von hin- und herlaufenden Wellen vorzustellen. Dazu stelle man sich eine Welle vor, die sich zylindersymmetrisch vom Zentrum (z -Achse) aus ausbreitet. Diese Welle wird dann an der Zylinderwand reflektiert und läuft wieder zum Zentrum zurück. Die Feldverteilung der E_{010} -Mode ist ganz ähnlich wie die der TE_{101} -Schwingung im Rechteckhohlleiter. Die Resonanzfrequenz ist jedoch unabhängig von der Höhe des Resonators. Bei der stehenden Welle schwingt hier die Energie zwischen elektrischem und magnetischen Feld hin und her. Die Ableitung der Felder aus der Wellengleichung ergibt:

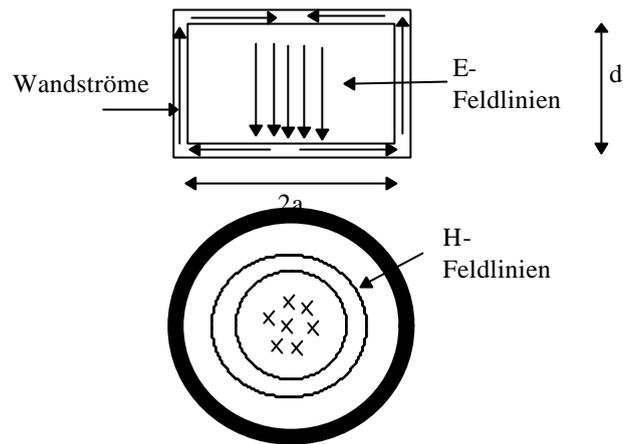
Hohlraumresonatoren

$$E_z = \hat{E} \cdot J_0(\mathbf{b}_{res} r) e^{j\omega t}$$

$$H_{\phi} = j \frac{\hat{E}}{Z_0} \cdot J_1(\mathbf{b}_{res} r) e^{j\omega t}$$

$$\frac{\omega_{res}}{c} = \mathbf{b}_{res} = \frac{j_{01}}{a} = \frac{2,405}{a}$$

$$f_{res} = \frac{2,405 \cdot c}{2\pi a}$$

E₀₁₀-Mode im Rundhohlleiter

Berechnung der Güte:

$$W_0 = d \int_0^a \frac{\mathbf{e}_0 |E_r|^2}{2} 2\pi r dr = \pi \mathbf{e}_0 d \hat{E}^2 \int_0^a r J_0^2(\mathbf{b} r) dr$$

$$P_{Wand} = 2\pi a d \frac{R_s}{2} |S_z|^2 + 2 \int_0^a \frac{R_s}{2} |S_r|^2 2\pi r dr$$

$$= \pi R_s \left[a d \frac{\hat{E}^2}{Z_0^2} J_1^2(\mathbf{b} a) + 2 \int_0^a \frac{\hat{E}^2}{Z_0^2} r J_1^2(\mathbf{b} r) dr \right]$$

Die Herleitung ergibt sich aufgrund der Tatsache, daß die Oberflächenstromdichte durch die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke an der Oberfläche gegeben ist. Die Integrale lassen sich alle geschlossen lösen, da es für die Besselfunktionen bestimmte Zusammenhänge zwischen den Funktionen und ihren Ableitungen gibt:

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

$$J_1'(x) = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x)$$

Damit ergibt sich

$$Q_{010} = \frac{\omega_{res} W_0}{P_{Wand}} = \frac{Z_0}{R_s} \frac{j_{01}}{2 \left(\frac{a}{d} + 1 \right)}$$



Hohlraumresonatoren

einige Bilder aus Ramo [7]

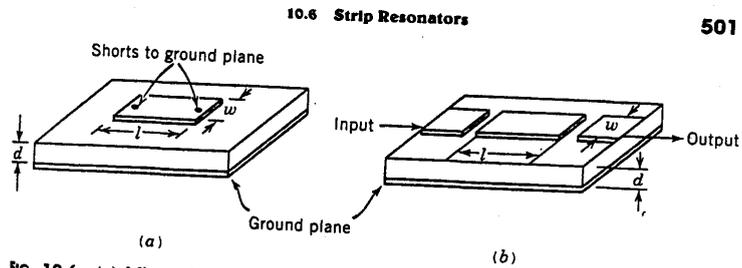


Fig. 10.6 (a) Microstrip resonator with short-circuited ends. (b) Open-circuited microstrip resonator showing capacitively coupled input and output.

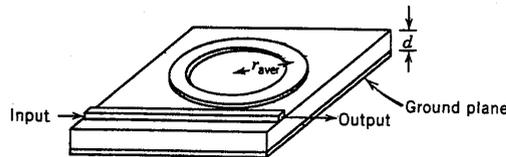


Fig. 10.6c Microstrip ring resonator with distributed coupling.

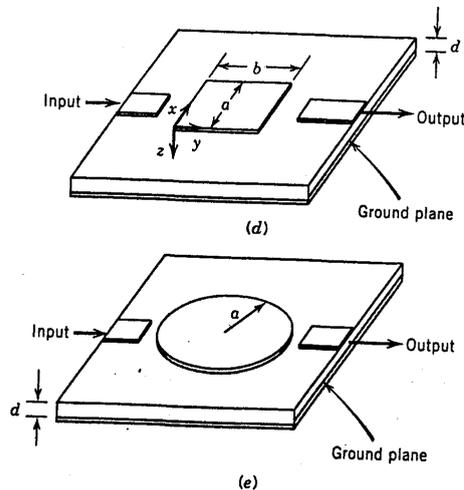


Fig. 10.6 (d) Rectangular patch resonator in microstrip technology. (e) Circular microstrip

