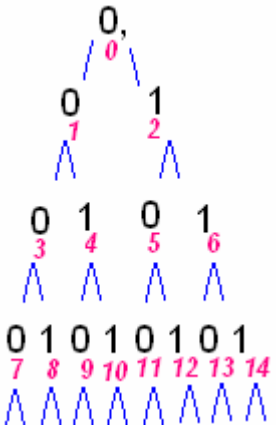
Hochschule Augsburg, Fakultät für Allgemeinwissenschaften, Prof. Dr. W. Mückenheim

Prüfung: Die Geschichte des Unendlichen, 8. Juli 2010

Prüfungsdauer 60 Minuten, keine Hilfsmittel.

1) Wie entstand vermutlich der Mond? Kollision der Erde mit einem Planeten (Theia). Giant Impact Hypothesis.
2) Wodurch wurden vermutlich die Saurier ausgerottet? Einschlag eines Riesenmeteoriten auf Yukatan vor 65 Mio. Jahren, oder Vulkanismus in Indien bei der Verschmelzung mit Asien. Atomarer Winter.
3) Was ist die gegenwärtige Vermutung über die Zukunft des Universums? Unbegrenzte Ausdehnung, Kein Big Crunch.
4) Was ist das Paradoxon des Rotationshyperbolids? Das Volumen ist beschränkt, so dass für einen Anstrich der unendlichen Fläche von innen nur endlich viel Farbe verwendet werden könnte. Außen würde dagegen unendlich viel Farbe benötigt (aber nur, *wenn die Farbe überall mit derselben Dicke aufgetragen würde*).
5) Was ist eine transzendente Zahl? (Nennen Sie zwei Beispiele.)
Eine Zahl, die niemals Wurzel eines Polynoms ist. Ganz viele Beispiele: π, 2π, 3π, ...
6) Erklären Sie den Unterschied zwischen potentiell unendlich und aktual unendlich. Potentiell unendlich ist eine Richtung. Eine Größe ist stets endlich, ihr Wachstum aber nicht beschränkt. Eine Vollständigkeit kann nicht erreicht werden
Aktual unendlich ist eine unendliche Menge wie die unendliche Menge aller natürlichen Zahlen, zu der keine natürliche Zahl mehr hinzugefügt werden kann.
7) Nennen Sie drei Gelehrte, die das aktual Unendliche ablehnen Gauß, Poncaré, Zeilberger **und drei, die es akzeptieren.** Bolzano, Cantor, Zermelo.
8) Was versteht man unter "abzählbar unendlich"? Die Elemente einer abzählbar unendlichen Menge sind nummerierbar. Es existiert eine Bijektion mit $\mathbb{N}$.
9) Was ist die Potenzmenge einer Menge? (Beispiel)
Die Potenzmenge Pot(M) enthält als Elemente alle Teilmengen von M.
M = {1, 2}, Pot(M) = {{ }, {1}, {2}, {1, 2}}
10) Beschreiben Sie den Überabzählbarkeitsbeweis von Hessenberg.
In einer Bijektion $\mathbb{N} \to \mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ müsste auch eine natürliche Zahl n auf die Menge M derjenigen natürlichen Zahlen abgebildet werden, die nicht in ihren Bildern enthalten sind. Gehört n zu dieser Menge, so darf n nicht in M sein, aber dann gehört n nicht zu dieser Menge und muss in M sein.
11) Beschreiben Sie die Konstruktion, Sinn und Zweck des Binären Baums.
Der Binäre Baum enthält alle reellen Zahlen aus dem Intervall [0, 1] als unendliche Pfade d.h. Folgen von Knoten wie 0,000... oder 0,111.... Die Menge aller Knoten ist abzählbar. Wie z. B. das Spiel "wir erobern den Binären Baum" zeigt, kann die Menge der Pfade nicht größer als die der Knoten sein. (Wenn jeder Knoten des Binären Baums durch einen eigens dafür gedachten Pfad erzeugt worden ist, dann bleibt kein Knoten mehr übrig, um einen weiteren Pfad von den bereits benutzten zu unterscheiden.) Daher ist die Aussage der Mengenlehre, wonach die Menge aller reellen Zahlen überabzählbar sei, falsch.



12) Was wissen Sie über Anaxagoras?
Dieses Thema war angekündigter Schwerpunkt zum Selbststudium.