Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.

DAVID HILBERT

Einleitung

Bevor wir beginnen, über das »Unendliche« und seine Geschichte nachzudenken, ist es notwendig, uns wenigstens ungefähr darüber zu verständigen, was wir mit den Bezeichnungen »unendlich« und »Unendlichkeit« meinen. Es gibt dazu nämlich sehr unterschiedliche Auffassungen.

Jeder weiß, dass die meisten Dinge einen Anfang und ein Ende besitzen, manche aber nicht. Eine dreidimensionale Kugel zum Beispiel besitzt zwar senkrecht zu ihrer Oberfläche, in radialer Richtung also, durchaus ein Grenze; bewegt man sich aber auf der zweidimensionalen Kugeloberfläche, in tangentialer Richtung also, so kann der Weg immer weiter fortgesetzt werden, ohne jemals durch eine Schranke beschränkt, durch eine Grenze begrenzt oder durch ein Ende beendet zu werden. Dasselbe gilt für den eindimensionalen Kreis in einer zweidimensionalen Fläche oder für einen dreidimensionalen gekrümmten Raum, den man als Oberfläche einer Kugel in einem vierdimensionalen Raum interpretieren kann. Ein Beispiel dafür bietet unser Universum: Innerhalb der uns bekannten Dimensionen könnten wir uns unbegrenzt geradeaus bewegen, ohne jemals an ein Ende zu stoßen.

Diese Art der Endlosigkeit soll uns im Folgenden nur wenig beschäftigen, denn der Abstand der Kugeloberfläche vom Kugelmittelpunkt bleibt immer beschränkt und damit endlich, und das gilt analog für die anderen genannten Beispiele. Der interessantere Fall des Unendlichen ist aber in den genannten Beispielen auch schon enthalten: Der Weg auf der Kugel, gemessen als Zahl der zurückgelegten Kilometer, nimmt ständig zu; die Anzeige entfernt sich immer weiter vom Ausgangswert, vorausgesetzt, dass wir »unendlich« lange Zeit haben und die Anzeige »unendlich« große Zahlen wiedergeben kann. Diese über alle Grenzen wachsenden Größen bieten ein Beispiel für das *potentiell* Unendliche. Wir können darunter die Beschreibung einer Richtung verstehen. Etwa so, wie man auf der Erdoberfläche immer nach Westen fahren kann, ohne jemals von dieser Richtung abweichen zu müssen und ohne jemals an ein Ziel zu gelangen.

Daneben existiert der Begriff des *aktual* Unendlichen. Es soll eine wirkliche Größe, eine Quantität, eine Zahl beschreiben, auch wenn für diese Zahl andere Rechengesetze gelten als für gewöhnliche Zahlen. Dieser aktuell realisierten Unendlichkeit wollen wir im Mikrokosmos und im Makrokosmos, in der Zeit und in Gott nachspüren; ihre eigentliche Domäne ist aber die Mathematik, die Lehre von den unendlichen Mengen; dort werden wir sogar verschieden große Unendlichkeiten untersuchen und dabei viele interessante Gedanken und Ergebnisse kennenlernen.

Die Mathematik ist die Wissenschaft des Unendlichen, ihr Ziel ist das symbolische Erfassen des Unendlichen mit menschlichen, d.h. endlichen Mitteln.

HERMANN WEYL

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk.

LEOPOLD KRONECKER

I Natürlich unendlich

Stellt man die Frage nach dem Unendlichen, so wird als naheliegende Antwort das Universum, die Ewigkeit oder Gott genannt, seltener wohl die Mathematik. Und doch findet das Unendliche in keiner anderen Wissenschaft eine so umfassende und eingehende Würdigung. Kein Wissenschaftler – abgesehen vielleicht vom Theologen – verbündet sich damit so intim wie der Mathematiker, der es zuweilen als Fundament eines ganzen Denkgebäudes wählt. Wir werden das in diesem Buch immer wieder bestätigt finden. Der erste Berührungspunkt zwischen der Mathematik und dem Unendlichen ist aber jedem Leser bereits bekannt, es ist die unendliche Folge der natürlichen Zahlen.

Das Zählen ist die älteste Art der Beschäftigung des Menschen mit Zahlen. Seit bei Mengenangaben der quantitative und vom Individuellen abstrahierende Aspekt Bedeutung gewann, wurden Zahlen benötigt. Das begann vermutlich vor etwa 5000 Jahren. Es ist bekannt, dass die Zahlwörter für die Zahlen von 1 bis 100 auch in unserem Kulturkreis schon vor der Trennung der indogermanischen Sprachen um etwa 2000 v. Chr. ausgeprägt waren. Folgendes Beispiel zeigt die enge Verwandtschaft der ähnlich lautenden Bezeichnungen für die Zahl 2 in einigen indogermanischen Sprachen: da, deux, два, δυο, due, duo, dvi (dve), to, tva, twa, two, zwei (zwo).

Die zum Zählen von unzerteilten, ganzen Objekten verwendeten ganzen Zahlen heißen heute natürliche Zahlen. Sie waren die Grundlage des Rechnens in den alten Kulturen Ägyptens, Vorderasiens und Chinas, und sie bildeten den Ausgangspunkt, als die Mathematik im Griechenland des sechsten vorchristlichen Jahrhunderts ins Dasein trat.

Obwohl THALES VON MILET (624 – 545) schon die Sonnenfinsternis vom 28. Mai 585 v. Chr. zutreffend voraussagen konnte, die Strahlensätze und natürlich den THALES-Satz kannte und als einer der sieben Weisen Griechenlands geehrt wurde, beginnt die Mathematik doch erst mit dem von der Nachbarinsel Samos stammenden PYTHAGORAS (570 – 500). »PYTHAGORAS war der erste Mathematiker« schrieb EUDEMOS, ein Schüler des ARISTOTELES im ersten Mathematikerverzeichnis. Der sagenumwobene, vom Sonnengott Apollon gezeugte und von einer Jungfrau geborene PYTHAGORAS gründete eine Schule und lehrte im damals zu Großgriechenland gehörenden, heute unteritalienischen Kroton. Er hatte die Anregung zu seinem berühmten Satz vermutlich auf einer seiner vielen Reisen bei den Seilspannern, den Harpedonapten, in Ägypten kennengelernt. Sie konnten mit Hilfe von Seilstücken im Längenverhältnis 3 : 4 : 5 einen rechten Winkel konstruieren und so das Land nach der alljährlichen Nilschwemme neu vermessen. Aber die gelehrten Pythagoreer, die Mathematiki, und ihre

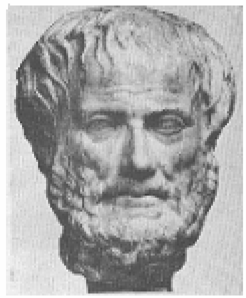
Schüler, die Akusmatiki, erkannten erstmals die Notwendigkeit des Beweises. PYTHAGORAS persönlich hat keine Aufzeichnungen hinterlassen, doch neben dem berühmten Satz hat auch sein philosophisches Prinzip die Jahrhunderte überdauert. Es lautet: »Alles ist Zahl.« Unter einer Zahl verstanden die alten Griechen dabei nur die natürlichen Zahlen, und zwar ohne die Eins, die lediglich als Ursprung der daraus abzuleitenden Zahlen galt. Natürliche Zahlen also und daraus abgeleitete Proportionen bestimmen demnach das Grundgefüge der Welt und aller darin existierenden Dinge. Gegensatzpaare wie Böses – Gutes, Gerades – Ungerades, Linkes – Rechtes, Weibliches – Männliches waren für die Pythagoreer ebenso real und zahlbehaftet wie der Aufbau von Knochen aus 3 Teilen des Elementes Feuer und 2 Teilen des Elementes Erde; der Gerechtigkeit wurde die Zahl $2 \cdot 2 = 4$ zugeordnet, der günstigen Gelegenheit die Zahl 7. Besondere Bedeutung besaßen die vollkommenen Zahlen, wie z. B. die 6, deren Teilersumme (ohne die Zahl selbst) die Zahl ergibt:

PYTHAGORAS

$$1 + 2 + 3 = 6$$

PLATON (427 – 348), ein Schüler des Pythagoreers TIMAIOS VON LOKRI, interpretiert den Satz so, dass die Zahl als Symbol gewisser Ordnungsmächte, als Ordnungszahl, Reihenfolge, Rang, als Raumbestimmung und schließlich in der mathematischen Formel Bedeutung besitzt. Sein Schüler ARISTOTELES (384 – 322), der Lehrer Alexanders, des Großen, erläutert: Alle Dinge verdanken ihre Existenz den Zahlen. Die Elemente der Zahlen und der Dinge sind gleich. Dinge sind nach Zahlen aus den Elementen zusammengesetzt.

Von ARISTOTELES, dem Universalgelehrten, hören wir erstmals etwas über verschiedene Auffassungen vom Unendlichen, denn er bezieht Position im XI. Buch seiner Metaphysik, Kapitel 10: *Das Unendliche existiert potentiell; es gibt kein vollendetes Unendliches.* Es gibt nur endliche Zahlen. Das Endliche würde vom Unendlichen, wenn dieses existierte, aufgehoben und zerstört werden. Im Mittelalter wird diese Auffassung von den meisten Scholastikern als unumstößlicher Lehrsatz vertreten: *Infinitum actu non datur*.



ARISTOTELES

EUKLID (325 – 275) wirkte am Museion von Alexandria, *der* antiken Universität. Mit der Bibliothek von 600000 handschriftlich verfassten Büchern und einem der sieben Weltwunder, dem 130 m hohen Leuchtturm, war die von Alexander gegründete Stadt Mittelpunkt der Gelehrsamkeit des Altertums. EUKLIDS Hauptwerk, »die Elemente« (στοιχεια), bildet die vollendete Zusammenfassung des mathematischen Wissens seiner Zeit. Es enthält erstmals die euklidische Form mit Definition, Satz und Beweis und der berühmten Schlussformel »was zu beweisen war«, in der lateinischen Übersetzung »quod erat demonstrandum« heute zur Allgemeinbildung zählend. Das Werk hat etwa 1500 gedruckte Auflagen erlebt und ungezählte handschriftliche Kopien vor Erfindung des Buchdruckes. Frühere Lehrbücher hatte es zwar gegeben, sie konnten sich aber nicht gegen »die Elemente« behaupten und sind allesamt verschollen.

EUKLID

Im neunten der insgesamt 13 Bücher seiner Elemente behandelt EUKLID die vollkommenen Zahlen und die ebenfalls sehr angesehenen Primzahlen. Das sind Zahlen wie 3 oder 5, die außer 1 und sich selbst keinen weiteren Teiler besitzen. Je größer eine Zahl ist, umso größer ist auch die Wahrscheinlichkeit, dass sie einen Teiler besitzt. Man könnte also vermuten, dass ab einer gewissen Größe keine Primzahl mehr existiert. In den höheren Regionen kommen sie auch tatsächlich immer seltener vor. EUKLID beweist aber, dass die Menge der Primzahlen unendlich ist. Er formuliert allerdings vorsichtiger: »Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen umfasst.« Dieser Beweis erfolgt durch Widerspruch, d. h. EUKLID nimmt an, dass es nur eine endliche Menge $P = \{p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}$ von Primzahlen gäbe, wobei n eine feste natürliche Zahl ist, und folgert daraus, dass es noch eine weitere Primzahl p_{n+1} gibt. Sei

$$\Pi = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$$

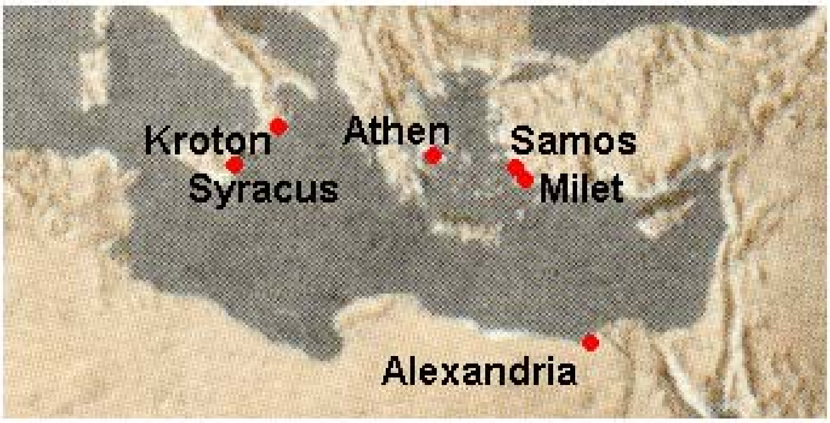
das Produkt aller Primzahlen. Π ist also durch jede Primzahl ohne Rest teilbar. Dagegen wird die Zahl $\Pi + 1$ durch keine dieser Primzahlen geteilt, denn es bleibt immer der Rest 1. Also ist $\Pi + 1$ entweder unteilbar und damit selbst Primzahl, oder es ist teilbar, aber nicht durch eine Primzahl der Menge P, sondern höchstens durch eine darin nicht enthaltene Primzahl wie p_{n+1}. Ein Beispiel ist

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 \ = 59 \cdot 509.$$

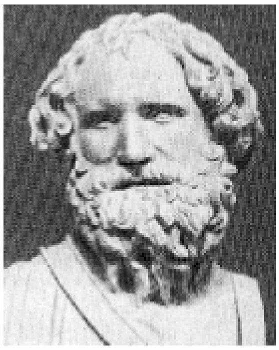
Mit der Zahl $\Pi - 1$ und dem Rest $(p - 1)$ würde der Beweis ebenfalls funktionieren

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 - 1 = 30029,$$

aber man müsste die nur aus einer Primzahl bestehende Menge $\{2\}$ ausschließen, weil die Eins heute nicht mehr zu den Primzahlen gerechnet wird; zu EUKLIDs Zeit galt sie nicht als Zahl, also auch nicht als Primzahl.



Landkarte mit den wichtigsten Stätten altgriechischer Gelehrsamkeit.



ARCHIMEDES

ARCHIMEDES (287 – 212) war der größte Mathematiker, Physiker und Techniker des griechischen Altertums. Er entwickelte unter anderem so ausgeklügelte Kriegsmaschinen, dass man sagte, er habe Syrakus im zweiten punischen Krieg zwei Jahre lang ganz allein gegen die römischen Belagerer verteidigt. Hier soll sein Beitrag zum Unendlichen vorgestellt werden. Dabei geht es zwar nur um endliche, aber bis zu seiner Zeit im Wortsinne unerhörte Zahlen.

In seiner berühmten Sandrechnung heißt es: »Viele Leute glauben, o König Gelon, die Zahl der Sandkörner sei von unbegrenzter Größe. Andere meinen, dass ihre Zahl zwar nicht unbegrenzt sei, aber niemals eine so große Zahl genannt werden könne. Aber ich werde versuchen zu zeigen, dass unter den Zahlen, die ich schon angegeben habe, solche sind, welche die Zahl der Sandkörner übertreffen, in einem Sandhaufen nicht nur von der Größe der Erde, sondern auch wenn das ganze Universum mit Sand gefüllt wäre.«

ARCHIMEDES führt nun eine Abschätzung durch, wobei er annimmt, dass eine Myriade (= 10000) Sandkörner auf die Größe eines Mohnkorns gehen. (Deswegen spricht man auch scherzhaft von der »Staubrechnung« des ARCHIMEDES.) 40 Mohnkörner gehen auf eine Fingerbreite, also passen in eine Kugel von einer Fingerbreite Durchmesser 64000 Mohnkörner. In eine Kugel von 100 Fingerbreiten Durchmesser passen 100 Myriaden Kugeln von einer Fingerbreite Durchmesser usw. Im damals bekannten Kosmos von einer Myriade Erddurchmessern finden weniger als 10^{63} Sandkörner Platz. Er schließt: »Es gibt Zahlen bis 10^{63}, *und man kann noch weiter gehen*«. ARCHIMEDES kam noch weiter, nämlich bis $10^{8\cdot 10^{16}}$ (das ist eine Eins mit 80 Billiarden Nullen), aber ohne Exponenten und natürlich auf griechisch:

ai myriakismyriostas periodou myriakismyrioston arithmon myriai myriades.

Der hauptsächliche Grund, ARCHIMEDES hier besonders zu erwähnen, ist allerdings das sogenannte archimedische Axiom: *Zu jeder Zahl kann man eine größere natürliche Zahl finden.* Daraus folgt explizit die Unbeschränktheit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, die Existenz des potentiell Unendlichen.

Die größte Zahl mit einem eigenen Namen war lange Zeit die im Buddhismus auftretende Zahl Asankhyeya 10^{140}. Die größte moderne Zahl ist das Googol 10^{100}; daraus lassen sich leicht größere Zahlen ableiten wie das Googolplex $10^{10^{100}}$ mit einem Googol Nullen. Doch was können wir uns darunter vorstellen? Schon die größte Zahl, die sich im Dezimalsystem mit drei Ziffern schreiben lässt, nämlich 9^{9^9}, ist jeder alltäglichen Erfahrung vollkommen entrückt. Merke: $9^{9^9} = 9^{(9^9)} = 9^{387420489} \gg (9^9)^9 = 9^{9\cdot 9} = 9^{81}$.

Wenn wir gar noch das Ausrufungszeichen zulassen, das aus der Zahl *n* ein Produkt *n*! (lies *n*-Fakultät) mit *n* Faktoren macht

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-1)\cdot n \tag{1.1}$$

und schon 5 zu 5! = 120 erhebt, so streikt der für alle alltäglichen Rechnungen ausreichende Taschenrechner bereits bei 70! Die Zahl 1000! entzieht sich gänzlich unserer Vorstellung, und dem Potenzturm 9^{9^9} verlieh CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855) nicht ganz ohne Grund den Orden »messbare Unendlichkeit«.

Eine Vorstellung von der Größe eines Landes gewinnt man am ehesten auf dem Fußmarsch. Ähnlich ist es mit großen Zahlen. Für einen beschaulichen Spaziergang haben wir zwar zu wenig Zeit, aber durch ständiges Beschleunigen können wir die Dauer verkürzen, ohne ganz das Gefühl für den Weg zu verlieren. Wir beginnen bei der Eins, zählen aber nicht wie gewöhnlich 1, 2, 3, ..., sondern 1, 10, 100, ... und versuchen, die Zahlen, solange es eben geht, mit begreifbaren Objekten zu vergleichen. Nehmen wir also an, wir hätten eine Menge von Sandkörnern, die sich nach Ablauf einer Sekunde verzehnfacht. In der folgenden Tabelle ist links die abgelaufene Zeit und rechts ein Vergleich mit der erreichten Anzahl angegeben. Wie lange müssen wir warten, trotz der rasanten Beschleunigung, die nach 4 Sekunden alle mit bloßem Auge sichtbaren Sterne und nach 11 Sekunden alle Sterne unserer Milchstraße egalisiert, um 1000! zu erreichen oder das Googolplex?

Zeit	**Anzahl**
4 s	Myriade – weißt du wieviel Sternlein stehen? deutlich weniger!
11 s	100 Mrd. – alle Sterne unserer Milchstraße
22 s	10 Trd. – alle Sterne im ganzen Weltall
38 s	größte *von Menschenhand* ermittelte Primzahl $2^{127} - 1$
64 s	Sandkörnerzahl des Archimedes übertroffen
80 s	alle Protonen im Weltall
43 min	1000! übertroffen
11 a 261 d	9^{9^9}
2,5 Mrd. a	$10^{8\cdot10^{16}}$
$3\cdot10^{92}$ a	Googolplex $10^{10^{100}}$
	messbare Unendlichkeit $9^{9^{9^9}}$
	$9^{9^9}!$

Mrd. = Milliarde, Trd. = Trilliarde, a = Jahr, d = Tag, min = Minute, s = Sekunde

Die letzten Zeitangaben fehlen, denn sie wären nicht instruktiver als die rechts eingetragenen Zahlen. $9^{9^9}!$ übertrifft übrigens noch die »messbare Unendlichkeit«, und zwar wesentlich drastischer, als aus dem scheinbar geringfügigen Unterschied zwischen $\lg\lg(9^{9^9}!)$ = 369.693.108,2 und $\lg\lg 9^{9^{9^9}}$ = 369.693.099,6 (s. S. 9) hervorzugehen scheint. Diese Potenztürme lassen sich beliebig vergrößern; auch kann man mehrere Ausrufungszeichen kombinieren und noch wirkungsvollere Abkürzungen verwenden. Trotzdem gibt es natürliche Zahlen, die niemals ein Mensch oder sonst jemand kennen und konstruieren wird, weil alle in unserem Universum verfügbaren Mittel nicht ausreichen, um sie – selbst in kürzester Schreibweise – eindeutig von anderen Zahlen unterscheidbar darzustellen. *Die kleinste derartige Zahl* wird zwar durch den Beginn dieses Satzes genannt, ist deswegen aber nicht bekannt und konstruiert. Wäre dies der Fall, so würde die nächstgrößere Zahl an ihre Stelle treten.

Berechnung großer Zahlen

Eine positive Zahl z können wir außer durch ihre Größe auch mit Hilfe ihres dekadischen Logarithmus eindeutig identifizieren; das ist der Exponent, mit dem die Basis 10 potenziert werden muss, um z zu ergeben.

$z = 10^{\lg z}$ Beispiel: $10.000 = 10^{\lg 10.000} = 10^4 \Rightarrow \lg 10.000 = 4$

In der linken Spalte der Tabelle sind also lediglich die dekadischen Logarithmen der rechts erläuterten Zahlen eingetragen. (Wir könnten auch jede andere positive Zahl außer 1 als Basis wählen. Die Logarithmen zur Basis 2 hätten in unserer Tabelle nicht die Verzehnfachung, sondern die Verdopplung beschrieben: $4 = \log_2 16$.)

Die Anweisungen »10 hoch« und lg heben sich gegenseitig auf (lg wäre eigentlich besser mit »10 tief« bezeichnet) und können daher nach Belieben eingeschaltet werden.

$z = 10^{10^{\lg\lg z}}$ Beispiel: $10.000.000.000 = 10^{10^{\lg\lg 10.000.000.000}} = 10^{10^{\lg 10}} = 10^{10^{1}}$

Aus der Regel für das Potenzrechnen $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$ (Bsp.: $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$)

entnimmt man die Regeln des Logarithmierens, die vor der Einführung des Taschenrechners große Bedeutung für das praktische Rechnen besaßen.

$$\lg(10^a \cdot 10^b) = \lg 10^{a+b} = a + b = \lg 10^a + \lg 10^b \Rightarrow \lg(x \cdot y) = \lg x + \lg y \qquad (1.2)$$

$$\lg(z \cdot z \cdots z) = \lg z + \lg z + \cdots + \lg z \Rightarrow \lg z^n = n \cdot \lg z \qquad (1.3)$$

Bei der Berechnung von solchen Monstern wie $\lg\lg 9^{9^9}$ oder $\lg\lg(9^{9^9}!)$ versagen sogar clevere Mathematik-Programme auf leistungsstarken Rechnern. Wenden wir aber zunächst (1.3) an, sodann (1.2) und schließlich nochmals (1.3), so wird die »messbare Unendlichkeit« von jedem Taschenrechner bezwungen

$$\lg\lg 9^{9^9} = \lg(9^{9^9} \cdot \lg 9) = \lg 9^{9^9} + \lg\lg 9 = 9^9 \cdot \lg 9 + \lg\lg 9 \approx 369.693.099{,}6.$$

Es besteht keine Chance, $9^{9^9}!$ direkt auszurechnen. Die Definition der Fakultät (1.1) führt zwar auf Faktoren, die mit (1.2) zu Summanden umgeformt werden können

$$\lg\lg(9^{9^9}!) = \lg\lg(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (9^{9^9} - 1) \cdot 9^{9^9}) = \lg(\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \cdots + \lg(9^{9^9} - 1) + \lg 9^{9^9}),$$

aber die Summation scheitert an den noch immer zu großen Zahlen. Daher müssen wir zu stärkeren Mitteln greifen. Eine von dem schottischen Mathematiker JAMES STIRLING (1692 – 1770) gefundene Formel lautet in leicht verkürzter, aber für unsere Zwecke vollkommen ausreichender Form $\lg(n!) \approx n \cdot \lg n$. Mit (1.2) und (1.3) ergibt das

$$\lg\lg(9^{9^9}!) \approx \lg(9^{9^9} \cdot \lg 9^{9^9}) = \lg 9^{9^9} + \lg\lg 9^{9^9} = 9^9 \cdot \lg 9 + \lg(9^9 \cdot \lg 9) \approx 369.693.108{,}2.$$

Außer der geometrischen Reihe existiert in der ganzen Mathematik keine einzige unendliche Reihe, deren Summe genau bestimmt worden wäre.

NIELS HENRIK ABEL

II Gegen Unendlich

Im mathematischen Sinne bedeutet *Folge* lediglich eine Aufzählung von Zahlen (wobei man sich meist auf reelle Zahlen beschränkt), die durch Kommata voneinander getrennt hingeschrieben werden. 1, 2, 3 ist z. B. eine endliche Folge. Uns sollen hier aber dem Thema entsprechend nur Folgen mit unendlich vielen Gliedern beschäftigen, und zwar solche, bei denen die Glieder mit zunehmender Gliednummer immer näher an eine feste reelle Zahl, den Grenzwert der Folge, heranrücken. Die Folge der natürlichen Zahlen

$$(n) = 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

tut das offenbar nicht. (In Klammern steht das allgemeine Glied der Folge. Die drei Pünktchen hinter der Aufzählung symbolisieren, dass es immer so weiter geht, nach einem Schema, das sich aus den angegebenen Zahlen leicht erraten lassen muss.) Die Folge der Stammbrüche dagegen, die sogenannte harmonische Folge,

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ... \to 0$$

kommt dem Grenzwert 0 beliebig nahe. Man bezeichnet allgemein die reelle Zahl a als Grenzwert der Folge (a_n), wenn es zu jeder noch so kleinen positiven Zahl ε eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass alle Folgenglieder mit Indizes $n \geq n_0$ einen Abstand $|a_n - a| < \varepsilon$ von a besitzen. Man sagt, die Folge konvergiert (hier gegen den Limes 0), und beschreibt diesen Sachverhalt durch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{hier} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Die Schreibweise »$n \to \infty$« bedeutet, dass n über alle Grenzen wächst, aber immer eine natürliche – und damit endliche – Zahl bleibt. $1/n$ wird beliebig klein, verschwindet aber für keine endliche Gliednummer n. Der Grenzwert wird normalerweise nicht von den Gliedern der Folge angenommen. Alle besitzen endliche Gliednummern. Allerdings gibt es auch Folgen, die ihren Grenzwert einmal oder beliebig oft annehmen. Ein Beispiel dafür ist die Folge

$$\frac{1}{1}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, ... \to 0$$

Sie nimmt ihren Grenzwert sogar unendlich oft an.

Stellt man die Glieder von zwei konvergenten Folgen paarweise zusammen und addiert sie, so erhält man eine Folge, die wieder konvergent ist und den Grenzwert besitzt, der sich aus der Summe der beiden einzelnen Grenzwerte ergibt. Wird die konvergente Folge 1, 1, 1, ... → 1 mit dem Grenzwert 1 zu der harmonische Folge mit dem Grenzwert 0 addiert, so ergibt sich der Grenzwert 1 der Summenfolge als Summe der Grenzwerte 1 und 0.

Ähnliche Überlegungen kann man bezüglich Subtraktion, Multiplikation und anderen Rechenarten anstellen. Man kann also hier mit dem Unendlichen, den erst für unendlich große – jede natürliche Zahl n übersteigende – Gliednummer exakt sich ergebenden Zahlen rechnen. Es ist aber darauf hinzuweisen, dass die Gleichung $n = \infty$ nicht hingeschrieben werden sollte, weil sie grundsätzlich falsch ist, denn die Gliednummer n ist immer eine natürliche Zahl und als solche stets endlich, also $n < \infty$.

Neben der harmonischen Folge ist die geometrische Folge von besonderer Bedeutung – in der Mathematik allgemein und auch in unserem Kontext. Ihr Bildungsgesetz ist besonders einfach: Eine beliebige Zahl wird gewählt und dann immer wieder mit demselben Faktor q multipliziert. Alle Produkte werden als Glieder der Folge hingeschrieben. Ein Beispiel mit dem Anfangsglied 1 und dem Faktor $q = 2$ ist: 1, 2, 4, 8, 16, ... Diese Folge ist divergent, denn sie nähert sich keinem Grenzwert.

Die Addition aller Glieder einer Folge ergibt eine *Reihe*. Schon EUKLID beschreibt im neunten Buch seiner Elemente die endliche geometrische Reihe, denn ihre Summe ist nützlich beim Aufsuchen der vollkommenen Zahlen. Wenn diese Summe nämlich eine Primzahl ist, wie 1 + 2 = 3, und mit dem letzten Glied der Folge multipliziert wird, so ergibt sich eine vollkommene Zahl, im Beispiel 2·3 = 6.

Die endliche geometrische Reihe besitzt die Summenformel

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

wie man leicht aus der folgenden Anordnung erkennt, wo die linke Seite der obigen Gleichung mit dem Nenner $(1 - q)$ multipliziert den Zähler ergibt

$$\begin{array}{lll} & 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n & \\ & \quad -(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n)\cdot q & \\ = 1 & \qquad\qquad - & \qquad q^{n+1}. \end{array}$$

Nur für $|q| < 1$ besitzt die *Folge* (q^{n+1}) einen endlichen Grenzwert, nämlich 0. Die unendliche geometrische *Reihe* besitzt somit nur dann einen Grenzwert, und zwar

$$1 + q + q^2 + ... = \frac{1}{1-q},$$

wenn der Faktor q größer als (-1) und kleiner als 1 ist: $(-1) < q < 1$. Für das Anfangsglied 1 und den Faktor q = 1/2 rechnet man leicht nach

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+... = 2.$$

Schon ARCHIMEDES kannte und verwendete die unendliche geometrischen Reihe mit dem Faktor q = 1/4 zur Berechnung der Parabelfläche mit seinem Exhaustionsverfahren (S. 34f), einem Vorläufer der Integralrechnung.

Seit dem siebzehnten Jahrhundert werden konvergente unendlichen Folgen und Reihen eingehend untersucht, obwohl der Konvergenzbegriff sich erst langsam entwickelt hat. Heute ist man im Besitz von zahlreichen Werkzeugen zur Klassifikation unendlicher Folgen und Reihen. Das bekannteste und am häufigsten verwendete Konvergenzkriterium für *Reihen*, das sogenannte Quotientenkriterium, ist direkt von der geometrischen Reihe abgeleitet. Die *Reihe* ist konvergent, wenn die Glieder der Stamm*folge* (a_n), deren Summe die Reihe bildet, die Bedingung

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1 \qquad \text{für} \quad n \to \infty \tag{2.1}$$

erfüllen. Das Verhalten aller Glieder »im Endlichen«, d. h. bis zu einer beliebig großen Gliednummer n_0, spielt für das Konvergenzverhalten keine Rolle. Der Konvergenzbeweis ist erst dann erbracht, wenn festgestellt ist, dass die Ungleichung (2.1) für *alle* Gliednummern $n \geq n_0$ erfüllt ist. Das fest zu wählende n_0 kann dabei beliebig groß sein. Deshalb darf die Bedingung auch in der Form »für $n \to \infty$« geschrieben werden.

Eine Voraussetzung für die Konvergenz einer Reihe ist, dass ihre Stammfolge den Grenzwert 0 besitzt. Diese leicht einsehbare Bedingung ist notwendig aber nicht hinreichend. Ein Beispiel dafür bietet die harmonische Reihe; der französische Bischof NICOLE VON ORESME (1323 – 1382) fand den ersten Beweis für ihre Divergenz:

$$\frac{1}{1} + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \ldots = \infty .$$

Jeder Klammerinhalt beträgt mindesten 1/2. Da es genügend Stammbrüche gibt, um ihre Anzahl in einer Klammer immer wieder zu verdoppeln, können unendlich viele Klammerausdrücke gebildet und so unendlich viele Summanden $\geq 1/2$ addiert werden. In Formel (2.1) ergibt sich zwar für jede endliche Gliednummer ein Quotient $q < 1$, aber q wächst an, und der Grenzwert der Folge der Quotienten ist

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1}) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1 .$$

Werden übrigens alle Glieder entfernt, die mindestens eine Ziffer 9 enthalten, so ist die restliche Reihe konvergent mit einem Grenzwert zwischen 22,4 und 23,3, wie FRANK IRVIN 1916 fand.

Manche Reihen konvergieren nicht absolut, sondern nur, wenn die Vorzeichen der Glieder alternieren. Dann lässt sich stets eine Umordnung der Glieder angeben, die zu einem anderen Grenzwert oder sogar zu einer divergenten Reihe führt. Ein Beispiel dafür ist die alternierende harmonische Reihe. Es existiert ein Grenzwert; wie man sich leicht überzeugt, kann er nur zwischen 1/2 und 1 liegen. Es ist der »natürliche Logarithmus« der Zahl 2, $\log_e 2 \approx 0{,}693$, auch mit ln2 abgekürzt. (Zur Ableitung siehe den Kasten »EULERs Logarithmenrechnung« auf S. 20.)

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+-\ldots = \ln 2 \qquad (2.2)$$

halbiert

$$\frac{1}{2} \quad - \quad \frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{6} \quad - \quad \frac{1}{8}+-\ldots = \frac{1}{2}\ln 2$$

und addiert ergibt sich eine Reihe mit einem anderen Grenzwert

$$\frac{1}{1} \quad + \quad \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5} \quad + \quad \frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots = \frac{3}{2}\ln 2.$$

Sie besitzt aber dieselben Glieder wie (2.2); lediglich die Reihenfolge ist verändert.

Summation der harmonischen Reihe bis 100

Wieviel Zeit benötigt ein Supercomputer, um durch Ausführung der Addition der k ersten Glieder der harmonischen Reihe die Summe $S = 100$ zu erreichen? Zur Abkürzung schreibt man auch

$$S = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}.$$

Es ist zwar nicht unbedingt erforderlich, diese Abkürzung zu kennen und zu benutzen, sie schlägt aber sehr bequem den Bogen zum Integral, das wir jetzt benötigen.

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \approx \int_1^k \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln k - \ln 1 = \ln k = \lg k / \lg \mathrm{e} \approx 2{,}3 \cdot \lg k$$

$$k = 1000 \Rightarrow S \approx 7$$
$$k = 10^6 \Rightarrow S \approx 14$$
$$k = 10^9 \Rightarrow S \approx 21$$
$$k = 10^{12} \Rightarrow S \approx 28$$
$$S = 100 \Rightarrow k \approx 10^{43}$$

Bei 10^6 Additionen in der Sekunde werden 10^{37} Sekunden gebraucht. Die Addition dauert damit etwa 100.000.000.000.000.000.000 Mal solange wie das gegenwärtige Alter des Universums beträgt; es existiert seit ca. 10^{17} Sekunden.

Das erste unendliche Produkt stammt von dem französischen Mathematiker FRANCOIS VIÈTE (1540 – 1603), der seinen Namen nach Sitte der Gelehrten seiner Zeit zu VIETA latinisierte.

FRANCOIS VIETE (VIETA)

Er fand und benutzte die Zerlegung eines Sinus in zwei Faktoren, um durch wiederholte Anwendung ein unendliches Produkt für die Berechnung der Zahl π zu gewinnen.

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

VIETAs unendliches Produkt

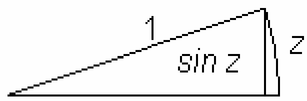
$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \cos x/2 \cdot \sin x/2 \\ &= 2 \cos x/2 \cdot 2 \cos x/4 \cdot \sin x/4 \\ &= 2 \cos x/2 \cdot 2 \cos x/4 \cdot 2 \cos x/8 \cdot \sin x/8 \\ &= \cos x/2 \cdot \cos x/4 \cdot \cos x/8 \cdot 2^3 \cdot \sin x/2^3 \end{aligned}$$

Auf diese Weise kann man fortfahren und erhält für beliebig großes $n \in \mathbb{N}$

$$\sin x = \cos x/2^1 \cdot \cos x/2^2 \cdots \cos x/2^n \cdot 2^n \cdot \sin x/2^n ,$$

$$\sin x = x \cdot \cos x/2^1 \cdot \cos x/2^2 \cdots \cos x/2^n \cdot [2^n/x \cdot \sin x/2^n] .$$

Damit wird $z = x/2^n$ beliebig klein, und in der eckigen Klammer kann die Formel $(\sin z) / z = 1$ für $z \to 0$ angewandt werden. Sie ergibt sich aus der L'HOSPITALschen Regel (S. 40) oder aus der Abbildung rechts. Mit $x = \pi/2$ folgt $\sin \pi/2 = 1$ und weiter



$$1 = \pi/2 \cdot \cos \pi/2^2 \cdot \cos \pi/2^3 \cdot \cos \pi/2^4 \cdots$$

$$2/\pi = \cos \pi/2^2 \cdot \cos \pi/2^3 \cdot \cos \pi/2^4 \cdots$$

Die Behauptung folgt aus den Umformungen

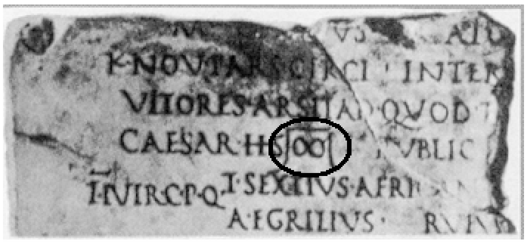
$$2\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2+2\cos\alpha}$$

$$2 \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \quad 2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \ldots$$

Auch ein unendliches Produkt kann also zu einem endlichen Ergebnis führen.

JOHN WALLIS

JOHN WALLIS (1616 – 1703), hat das noch heute für das potentiell Unendliche gebräuchliche Symbol ∞ erstmals benutzt. Eine mögliche Quelle ist das römische Zahlzeichen für 100 Millionen.



Allerdings wurde das Zeichen schon bei den alten Griechen zur Beschreibung der Schleifen der scheinbaren Planetenbahnen verwendet. Sie nannten es anschaulich »hippopede« (Pferdefessel). In seinem 1655 erschienen Buch *Arithmetica Infinitorum* veröffentlichte WALLIS außerdem ein unendliches Produkt zur Berechnung der Zahl π:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots}$$

WALLIS' Produkt

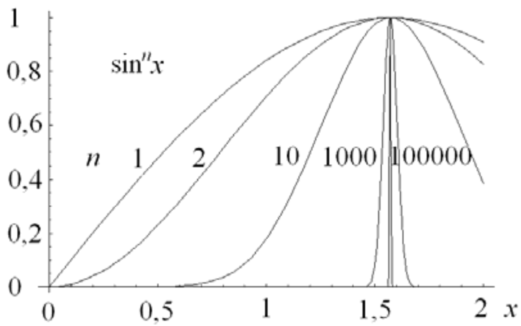
Mit Hilfe von partieller Integration bestätigt man leicht die folgende Rekursionsformel und erhält durch ihre wiederholte Anwendung für gerade und ungerade *n*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{n+2} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x \,\mathrm{d}x = \frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} \int_0^{\pi/2} \sin^0 x \,\mathrm{d}x = \frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{11} x \,\mathrm{d}x = \frac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3} \int_0^{\pi/2} \sin^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}1.$$

Für $n \to \infty$ werden die Integrale des Sinus mit geradem und ungeradem Exponenten gleich, wie man anschaulich anhand der Flächen in folgender Abbildung erkennt.



Damit können die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen (für $n \to \infty$) gleichgesetzt werden, und es ergibt sich unmittelbar WALLIS' Produkt.

JAMES GREGORY (1638 – 1675) war bereits in der Lage, alle natürlichen Logarithmen positiver Zahlen zu berechnen. Er fand die TAYLOR-Reihe zur Approximation analytischer Funktionen lange vor BROOK TAYLOR (1685 – 1731), und er fand 1671 die Reihe von LEIBNIZ (1646 – 1716) zur Berechnung der Zahl π, drei Jahre vor diesem.

JAMES GREGORY

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - ...$$

Die Reihe von GREGORY und LEIBNIZ

Zur Ableitung erinnern wir uns an die Summenformel der geometrischen Reihe für den Faktor $|q| < 1$

$$\frac{1}{1-q} = (1-q)^{-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ ... \ .$$

Versehen wir jedes q mit dem Faktor (-1), so bleibt wegen $1 = (-1)^2 = (-1)^4$ ...

$$\frac{1}{1+q} = (1+q)^{-1} = 1 - q + q^2 - q^3 +- \ ... \ .$$

Für ein Quadrat $x^2 = q$ ergibt das

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 +- \ ... \ . \tag{2.3}$$

Ein Satz aus der Integralrechnung lautet

$$\arctan 1 - \arctan 0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x .$$

Ersetzen wir den Integranden mit Hilfe von (2.3), so wird die Integration einfach

$$\arctan 1 - \arctan 0 = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - ... \right]_0^1$$

und mit $\tan \pi/4 = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \pi/4$ sowie $\tan 0 = 0 \Rightarrow \arctan 0 = 0$ ergibt sich

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - ... \ .$$

Diese Reihe konvergiert viel zu langsam, um für die praktische Berechnung der Zahl π/4 tatsächlich von Nutzen zu sein, aber es zeigt sich, auf wieviel verschiedene Weisen man die irrationale und sogar transzendente Zahl π (s. Kap. III und Kap. X) mit einfachen Reihen berechnen kann.

Intermezzo

Die Reihe von GREGORY-LEIBNIZ kann auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+-\ldots=\frac{3}{1\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{5\cdot 7}-\frac{5}{5\cdot 7}+\frac{11}{9\cdot 11}-\frac{9}{9\cdot 11}+-\ldots=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{9\cdot 11}+\ldots$$

Fügen wir hier Zwischenglieder ein, so ergibt sich eine umständliche Darstellung der Zahl 1:

$$\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+\frac{2}{9\cdot 11}+\ldots=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\ldots=1$$

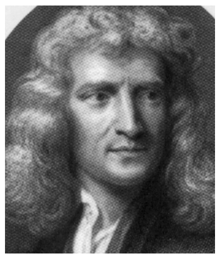
Eine ähnlich Darstellung der Zahl 1 ergibt sich aus:

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3\cdot 4},\ \ldots$$

Dies führt auf eine sogenannte Teleskop-Formel: $\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}-a_k=a_{n+1}-a_1$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+-\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\ \Rightarrow\ 1=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$$

ISAAC NEWTON (1642 – 1727) war einer der bedeutendsten Physiker und Mathematiker (s. Kap. IV). Er entdeckte viele unendliche Reihen, wie



ISAAC NEWTON

$$\exp x=\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\ldots$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\ldots$$

Er fand auch die unendliche Reihe zur Berechnung jeder Potenz p eines binomischen Ausdruckes der Form $(1 + x)^p$ mit $|x| < 1$.

$$(1+x)^p=1+\frac{p}{1}x+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716), Jurist, Politiker, Historiker, Philosoph, Mathematiker, Erfinder: einer der letzen Universalgelehrten, rechnete bewusst mit der divergenten harmonischen Reihe: »... so kann die Differenz zwischen zwei harmonischen Reihen, mögen sie auch unendlich sein, doch eine endliche Größe bilden.« Aufgrund der viel strengeren Kriterien wäre das heute nicht mehr erlaubt, doch der Erfolg gibt LEIBNIZ Recht. Die Addition der inversen Quadratzahlen gelang ihm zwar nicht, aber die Brüche mit um jeweils 1 vermindertem Nenner konnte er summieren.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots=\frac{3}{4}$$

Summation von LEIBNIZ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots &= \sum_{k\geq 2}\frac{1}{k^2-1}\\
&= \sum_{k\geq 2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k+1}\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots\right)\\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

JAKOB BERNOULLI (1654 – 1705) entstammt einer schweizer Familie, die in der Mathematik etwa so bekannt ist wie die Bachs in der Musik. Er beschäftigte sich bereits mit der unendlich wiederholten Anwendung von Exponenten und Wurzeln.

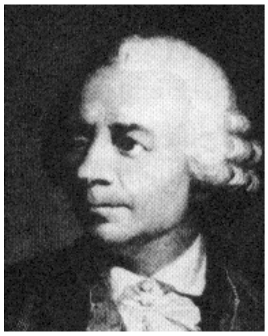
$$x=\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}}$$

$$x^2=a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}$$

$$x^2=a\cdot x$$

$$x=a$$

JAKOB BERNOULLI



Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707 – 1783), als Schüler und Freund mit den Bernoullis verbunden, war einer der fruchtbarsten Mathematiker überhaupt. Ausgehend von der Reihe für $\sin x$ konnte er 1748 die Reihe der inversen Quadrate und höherer Potenzen berechnen (Leibniz und die Bernoullis hatten es vergeblich versucht). Diese sogenannten Zeta-Reihen führen abermals auf Vielfache der Zahl π

$$\zeta(2) = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots = \pi^2/6,$$
$$\zeta(4) = 1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \ldots = \pi^4/90,$$
$$\zeta(6) = 1 + 1/2^6 + 1/3^6 + 1/4^6 + \ldots = \pi^6/945,$$
$$\ldots .$$

Die Reihenwerte für ungerade Exponenten hat Euler vergeblich gesucht. Bislang hat sie auch noch niemand sonst gefunden. Numerische Werte sind mit großer Genauigkeit berechnet worden. Man weiß überdies, dass $\zeta(3)$ irrational ist (Apery, 1979) und dass mindestens eine der Zahlen $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ irrational ist (Zudilin, 2001). Vermutlich sind sogar alle transzendent (s. Kap. X).

Euler fand auch einen weiteren Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen. Die Summe der Kehrwerte der Primzahlen $\Sigma 1/p$ ist nämlich eine divergente Reihe; und das ist nur möglich, wenn sie nicht endlich ist. Da die Reihe $\zeta(2)$ konvergiert, folgt, dass die Primzahlen dichter liegen als die Quadratzahlen.

Für unendliche Ausdrücke schrieb Euler das letzte Glied mit hin, meistens i für *numerus infinitus*. Das können wir heute nicht mehr tun, weil i allgemein als Abkürzung der imaginären Einheit ($\sqrt{-1}$) dient. Euler verwendete daneben das liegende S und später das Zeichen ∞ von Wallis, immer aber steht es in konkreter Anwendung wie eine gewöhnliche Zahl: 2∞, $\infty(\infty+1)/2$, $\log \infty$. Mit dem Zeichen von Wallis lautet Eulers Gleichung für die Exponentialfunktion

$$e^x = (1+\frac{x}{\infty})^\infty = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\frac{x^\infty}{\infty!}.$$

Euler hat, wie seine Zeitgenossen auch, divergente Reihen bedenkenlos eingesetzt. Lässt man in der Gleichung für die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-q} = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^\infty$$

die Konvergenzbedingung $|q| < 1$ fallen und setzt z. B. $q = (-1)$, so ergibt sich die divergente, weil ständig zwischen den Teilsummen 1 und 0 wechselnde Reihe

$$\frac{1}{1-(-1)} = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots ,$$

$$½ = 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots .$$

Auch LEIBNIZ hielt diesen Schluss für korrekt. Der Mönch GRANDI nahm ihn als Beweis für Gottes Möglichkeit der Schöpfung aus dem Nichts:

$$0 = 0 + 0 + ... = (1 - 1) + (1 - 1) + \; ... \; = \; 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + ... \; = 1 + 0 + 0 + ... = 1$$

Setzt man gar $q = 2$, so ergibt sich rein formal das offensichtlich falsche Resultat

$$\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 + ... = -1.$$

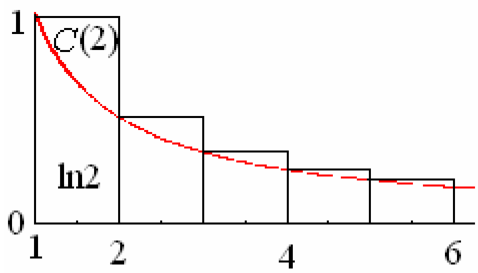
Mit WALLIS hat auch EULER angenommen: 1/3 < 1/2 < 1/1 < 1/0 < 1/(-1)

EULER gibt aber erstmals ein Konvergenzkriterium an: Der Reihenrest nach dem »unendlichsten« Glied muss unendlich klein werden.

EULERs Logarithmenrechnung

Mit einer elementaren Formel aus der Integralrechnung

$$\int_1^m \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln m\,,$$



der aus der Abbildung rechts hervorgehenden Formel

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} = \ln m + C(m)$$

für $m \geq 2$ und der im Kasten »Berechnung großer Zahlen« (S. 9) abgeleiteten Formel

$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y$$

erhält EULER, da $C(m)$ konvergiert, also wegen $C(\infty) = C(2\infty)$ unten entfällt,

$$\begin{aligned}\ln 2 = \ln 2\infty - \ln\infty &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \; ... \; + \frac{1}{2\infty - 1} + \frac{1}{2\infty} \\ &\quad -1 \qquad - \frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{3} - ... \qquad\qquad - \frac{1}{\infty} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - ... + \frac{1}{2\infty - 1} - \frac{1}{2\infty}\end{aligned}$$

und analoge Reihen für

$$\ln 3 = \ln 3\infty - \ln\infty = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + - ... \qquad - \frac{2}{3\infty}$$

und die Logarithmen weiterer natürlicher Zahlen.

EULERS ζ-Reihen

Ein Polynom kann als Summe seiner Terme $a_\nu x^\nu$ oder als Produkt der Linearfaktoren $(x - \alpha_\nu)$ mit den Nullstellen α_ν dargestellt werden:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$$

Das absolute Glied a_0 ist, wie man leicht erkennt,

$$a_0 = a_n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n (-1)^n.$$

Umgeformt ergibt sich, falls $a_0 \neq 0$,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = a_0 (1 - \frac{x}{\alpha_1})(1 - \frac{x}{\alpha_2})\ldots(1 - \frac{x}{\alpha_n}).$$

Das Vorzeichen wird dabei durch Vertauschung aller n Klammerinhalte kompensiert. Dieses Verfahren wird auf NEWTONS Reihe für die Sinusfunktion angewandt:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \ldots \tag{2.4}$$

Nullstellen der Funktion sin x liegen bei 0 und $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ... Für sin$x$ / x entfällt die erste, $\alpha = 0$, und nach (2.4) ist $a_0 = 1$. EULER wurde kritisiert, weil er nicht bewiesen hatte, dass außer den reellen Nullstellen keine weiteren existieren, und weil er einen Formalismus von endlichen Polynomen auf eine unendliche Reihe übertrug. Aber es stellte sich schließlich heraus, dass seine Intuition nicht getrogen hatte. Wegen

$$(1 - x/n\pi)(1 + x/n\pi) = 1 - x^2/n^2\pi^2$$

ist das Produkt der Linearfaktoren

$$\frac{\sin x}{x} = (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}) \ldots \tag{2.5}$$

Vergleicht man die Glieder mit x^2 in (2.4) und (2.5), so ergibt sich die $\zeta(2)$-Reihe.

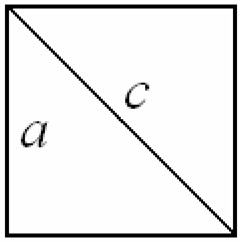
$$\frac{x^2}{3!} = \frac{x^2}{\pi^2} + \frac{x^2}{4\pi^2} + \frac{x^2}{9\pi^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

Vergleiche der höheren Potenzen von x führen auf die höheren ζ-Reihen.

... so erschaffen wir eine neue, eine irrationale Zahl.
RICHARD DEDEKIND

III Alogos



Obwohl nach dem Grundsatz der Pythagoreer alles durch natürliche Zahlen oder Verhältnisse derselben beschrieben werden kann, erkannten sie doch bald die Existenz von Verhältnissen, die nicht durch rationale Zahlen ausgedrückt werden können, also irrational sind. Sie nannten diese Zahlen »alogos«, das heißt unaussprechlich. Der Satz des PYTHAGORAS für die Diagonale des Quadrates oder das gleichschenklige Dreieck $2a^2 = c^2$ hatte sie vermutlich auf die Irrationalität von a/c geführt. Allerdings sollte dieses geheime Wissen nicht nach außen dringen. HIPPASOS, der erste Ausplauderer wurde deshalb der Sage nach an den Ort der Entstehung versetzt, ertränkt und in Abwesenheit lebendig begraben. Es ist eine Ironie der Geschichte, dass die Pythagoreer ausgerechnet das gleichseitige Fünfeck, auch Pentagon oder Drudenfuß genannt, als ihr Symbol gewählt hatten, denn darin sind fast alle Verhältnisse »nicht Zahl«, wie weiter unten (S. 27) genauer erläutert wird.

Nach PLATON (427 – 348) besaß THEODOROS VON KYRENE Irrationalitätsbeweise für die nicht ganzzahligen Quadratwurzeln aller natürlichen Zahlen bis 17. Dessen Schüler THEAITETOS (410 – 368) bewies für alle natürlichen Zahlen: Wenn die Wurzel nicht selbst eine ganze Zahl ist, so ist sie auch keine rationale Zahl (ein Bruch aus zwei ganzen Zahlen).

Der Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 ist einer der ersten Beweise durch Widerspruch. Man nimmt an, dass $\sqrt{2}$ zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gehört, also ein Element dieser Menge ist, und schließt daraus, dass es nicht so ist, kurz $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Wir nehmen also an

$$\sqrt{2} = p/q \tag{3.1}$$

mit zwei ganzen Zahlen, dem Zähler p und dem Nenner q. Die Zahlen sollen teilerfremd sein. Falls sie einen gemeinsamen Teiler besitzen, so kürzen wir den Bruch, bis es nicht mehr geht. Dann erheben wir Gleichung (3.1) ins Quadrat.

$$2 = p^2/q^2$$

$$2q^2 = p^2 \tag{3.2}$$

Nun ergibt eine gerade Zahl immer ein gerades Quadrat und eine ungerade Zahl immer ein ungerades Quadrat. Die gerade Zahl 2z mit $z \in \mathbb{N}$ besitzt das ebenfalls durch 2 teilbare Quadrat $(2z)^2 = 4z^2$, die ungerade Zahl $(2z + 1)$ besitzt das bei Division durch 2 immer den Rest 1 ergebende Quadrat $(2z + 1)^2 = 4z^2 + 4z + 1$.

Die linke Seite von (3.2) ist durch 2 teilbar. Damit ist p^2 und also auch p gerade. Schreiben wir $p = 2z$, so wird $p^2 = 4z^2$ und

$$2q^2 = 4z^2$$

oder

$$q^2 = 2z^2.$$

q^2 ist gerade und damit auch q. Sowohl p als auch q sind durch den gemeinsamen Teiler 2 teilbar. Ein solches Paar teilerfremder Zahlen, wie wir es vorausgesetzt haben, gibt es nicht.

EUKLID (325 – 275) behandelt im Buch 10 der Elemente die Lehre von den inkommensurablen Zahlen; das sind solche, die nicht gemeinsam messbar sind, wie die Länge von Seite und Diagonale des Quadrates. Es gibt für sie keinen noch so kleinen gemeinsamen Maßstab. Die Summe zweier Inkommensurablen ist zu den Summanden wiederum inkommensurabel, z. B. gibt es keinen gemeinsamen Maßstab für zwei der drei Zahlen $\{1, \sqrt{2}, (1 + \sqrt{2})\}$.

Warum beschäftigen wir uns in diesem Buch mit den irrationalen Zahlen? Weil sie »unendlich lang sind«. Man benötigt unendlich viele Stellen, um sie als Dezimalzahlen hinzuschreiben. Selbst wenn man sich, wie bei den unendlichen Folgen und Reihen, mit Pünktchen behelfen wollte: es nützt nichts. Es ist unmöglich, die weggelassenen Stellen einer Irrationalzahl aus den vorhergehenden zu erraten. Man muss jede berechnen (es sei denn, man kennt sie bereits anderweitig). Es existiert keine Periodizität.

Alle Brüche sind als periodische Dezimalzahlen darstellbar. Bei Division einer ganzen Zahl durch n sind $(n - 1)$ verschiedene nicht verschwindende Reste möglich. Wenn eine Periodizität auftritt, so kann die Periodenlänge höchstens $(n - 1)$ sein, denn spätestens nach allen anderen kommt ein bereits aufgetretener Rest wieder dran, und dann läuft dasselbe Schema der Division abermals ab. 20 geteilt durch 3 ergibt 6 und lässt den Rest 2. Der nächste Schritt lautet wieder 20 geteilt durch 3 und führt zum selben Rest. Der bei Division durch 3 ebenfalls mögliche Rest 1 kommt hier gar nicht vor, die Division geht auch niemals auf. Infolgedessen besitzt 20/3 = 6,666... nur die Periodenlänge 1. Abbrechende Dezimalzahlen wie 0,1 besitzen immer die Periodenlänge 1. Man kann man sie nämlich zu der Form 0,1 = 0,1000... ergänzen oder als nicht abbrechende Folge darstellen; z. B. ist 1,000... = 0,999..., denn

$$9 \cdot 0{,}999... = 10 \cdot 0{,}999... - 1 \cdot 0{,}999... = 9{,}999... - 0{,}999... = 9 \;\Rightarrow\; 0{,}999... = 1{,}000... \,.$$

Alle periodischen Dezimalzahlen sind als Brüche darstellbar, z. B. $0{,}\overline{123}$

$$123 = 123{,}\overline{123} - 0{,}\overline{123} = (1000 - 1) \cdot 0{,}\overline{123} \;\Rightarrow\; 0{,}\overline{123} = 123/999.$$

Also gilt der Satz: *Alle Brüche sind periodische Dezimalzahlen, und alle periodischen Dezimalzahlen sind Brüche*. Daher können die irrationalen Zahlen, die ja nicht als Brüche darstellbar sind, auch keine periodischen Dezimalzahlen sein. Sie besitzen eine unendliche Folge nicht periodischer Dezimalstellen.

Der Fundamentalsatz der Zahlentheorie, wonach jede natürliche Zahl auf eindeutige Weise in Primzahlen zerlegt werden kann, spielt im Folgenden eine wichtige Rolle.

.

Der Fundamentalsatz der Zahlentheorie

Die Zerlegung einer Zahl in ihre Primfaktoren ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.

Der Satz scheint eine »Denknotwendigkeit« zu sein, doch dieser Eindruck täuscht. Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist durchaus nicht trivial, sondern eine Besonderheit der Menge der natürlichen Zahlen. Um dies einzusehen, betrachten wir die Menge der geraden Zahlen. Hier ist $8 = 2 \cdot 4$ in gerade Faktoren zerlegbar. Dagegen ist $6 = 2 \cdot 3$ nicht in ausschließlich gerade Faktoren zerlegbar, entspricht also *in den geraden Zahlen* einer Primzahl, ebenso wie 2, 10 oder 30. Da sich diese Zahlen aber in anderen Eigenschaften von den Primzahlen unterscheiden, wollen wir sie Basiszahlen nennen. Die Zahl 60 ist in den geraden Zahlen auf zwei verschiedene Weisen in Basiszahlen zerlegbar, nämlich $60 = 30 \cdot 2 = 10 \cdot 6$.

Zum Beweis des Fundamentalsatzes betrachten wir zunächst die kleinsten natürlichen Zahlen. Sofern sie keine Primzahlen sind, ist hier die Zerlegung in der Tat eindeutig: $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$ usw. Es gelingt uns nicht in endlicher Zeit, eine Zahl mit zwei verschiedenen Zerlegungen zu finden. Das bedeutet aber nicht, dass es eine solche nicht gibt. Nehmen wir nun an, dass eine oder mehrere solcher natürlichen Zahlen existierten; dann wäre eine von ihnen sicher die kleinste, denn jede Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein kleinstes Element. Diese kleinste Zahl enthalte den Primfaktor p in der einen Zerlegung und den Primfaktor q in der anderen.

$$p \cdot P = q \cdot Q$$

Gleiche Faktoren können links und rechts nicht vorkommen, denn nach Kürzung hätten wir eine kleinere Zahl mit unterschiedlichen Zerlegungen, im Widerspruch zu unserer Annahme. Eine der beiden Zahlen, p oder q, muss notwendig kleiner als die andere sein. Nennen wir sie q. Dann können wir folgende Rechnung durchführen:

$$(p - q) \cdot P = p \cdot P - q \cdot P = q \cdot Q - q \cdot P = q \cdot (Q - P) < q \cdot Q \tag{3.3}$$

Damit haben wir eine Zahl $(p - q) \cdot P = q \cdot (Q - P)$ mit zwei verschiedenen Zerlegungen: einmal mit dem Faktor q und einmal ohne ihn, weil q nach Voraussetzung nicht in P enthalten ist und weil für Primzahlen sicher $p - q \neq nq$. $q \cdot (Q - P)$ ist aber kleiner als $q \cdot Q$, was im Widerspruch zur Annahme steht.

Warum greift der Beweis nicht für die geraden Zahlen? Setzen wir die Basiszahlen von 60 einfach ein:

$$(30 - 10) \cdot 2 = 30 \cdot 2 - 10 \cdot 2 = 10 \cdot 6 - 10 \cdot 2 = 10 \cdot (6 - 2) = 40$$

Die Differenz zweier verschiedener Primzahlen ist niemals durch eine der beiden teilbar, weil aus $(p - q)/q = n$ sofort $p/q = (n + 1)$ folgt. Daher können wir in (3.3) sicher sein, dass die Primzahl q nicht in $(p - q)$ steckt, die beiden Zerlegungen also verschieden sind. In den geraden Zahlen gilt das aber nicht. $30 - 10$ ist durch die Basiszahlen 2 und 10 teilbar, $(6 - 2)$ durch 2. $(30 - 10) \cdot 2$ und $10 \cdot (6 - 2)$ sind keine verschiedenen Zerlegungen sondern gleich, nämlich $10 \cdot 2 \cdot 2$.

Nun sollen einige leichte Irrationalitätsbeweise vorgestellt werden. Der Anschaulichkeit wegen sind feste Zahlen gewählt. Es bleibt dem Leser überlassen, andere Zahlen zu finden, für die dasselbe gilt.

Sei $\sqrt{7} = p/q$ mit teilerfremden Zahlen p und q. Dann ist $7qq = pp$. Das ist ein Widerspruch nach dem Fundamentalsatz: Die linke Zerlegung enthält eine ungerade Anzahl des Primfaktors 7, die rechte Seite eine gerade Anzahl (z. B. keinen).

Warum funktioniert dies Argument nicht bei der Quadratwurzel aus 9? Sei $\sqrt{9} = p/q$. $9qq = 3q3q = pp$. Beide Seiten enthalten eine gerade Anzahl des Primfaktors 3.

Sei $\sqrt{10} = p/q$, also $10q^2 = p^2$. Wie man sich leicht überlegt, besitzt das Quadrat einer ganzen Zahl immer eine gerade Anzahl von Nullen am Ende der Dezimalentwicklung. Für $p = 3$ ist $p^2 = 9$, für $p = 20$ ist $p^2 = 400$. $10q^2$ besitzt eine ungerade Anzahl von Nullen am Ende der Dezimalentwicklung. Links steht eine ungerade Anzahl Nullen, rechts eine gerade, was bei einer Gleichung nicht sein kann. Ein analoges Argument für Kubikwurzeln verwendet Kuben und deren stets durch 3 teilbare Anzahl von Nullen.

Wäre $log_{10}5 = p/q$ so bestände die Gleichung $5 = 10^{p/q}$ oder $5^q = 10^p$. Links steht eine ungerade Zahl, rechts eine gerade, was bei einer Gleichung nicht sein kann.

Wurzeln von Polynomen

Eine große Zahl von einzelnen Beweisen, z. B. all jene, die dem THEAITETOS (S. 22) bekannt waren, können durch einen einzigen allgemeinen ersetzt werden. Das Polynom

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

mit den ganzzahligen Koeffizienten a_ν heißt normiert, wenn $a_n = 1$. Alle Nullstellen (man spricht auch von Wurzeln) eines solchen Polynoms sind ganzzahlig oder irrational. Auch dies kann durch einen Widerspruchsbeweis gezeigt werden. Nehmen wir an, es gäbe eine rationale Nullstelle $\alpha = p/q$ mit teilerfremden ganzen Zahlen p und q, so bestände die Gleichung

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\frac{p^2}{q^2} + ... + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \frac{p^n}{q^n} = 0.$$

Nach Multiplikation mit q^{n-1}

$$a_0q^{n-1} + a_1pq^{n-2} + ... + a_{n-1}p^{n-1} + \frac{1}{q}p^n = 0$$

sind alle Terme außer dem letzten ganzzahlig. q teilt p nicht, also teilt es auch nicht p^n. Rechts steht eine ganze, links keine ganze Zahl.

Betrachtung des speziellen Polynoms $-a_0 + x^n = 0$ führt auf $x = \sqrt[n]{a_0}$ und lehrt, dass alle nichtganzzahligen n-ten Wurzeln (im gewöhnlichen Sinne) ein Spezialfall dieses Satzes sind.

Aus bekannten Irrationalzahlen kann man leicht weitere erzeugen. Als Beispiel betrachten wir $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Nach dem binomischen Satz ist $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$, und das ist nach EUKLID eine irrationale Zahl. Quadrate oder höhere ganze Potenzen von Brüchen sind stets wieder Brüche, zum Beispiel ist $(3/4)^2 = 3{\cdot}3 / 4{\cdot}4$. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ kann also kein Bruch sein, weil das Quadrat kein Bruch ist.

Eine der berühmtesten irrationalen Zahlen ist die Zahl ϕ der *stetigen Teilung*, wohl erstmals von LUCA PACIOLI (1446 – 1517) oder LEONARDO DA VINCI (1452 – 1519) auch *sectio divina* genannt; Martin Ohm (1792 – 1872) sprach 1835 vom *goldenen Schnitt*. Diese in Natur und Kunst häufig anzutreffende Zahl entsteht, wenn eine Strecke *a* so geteilt wird, dass sie zum größeren Teil *b* im selben Verhältnis steht wie der größere Teil *b* zum kleineren Teil (*a* – *b*).

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \equiv \phi$$

Verlängerung einer stetig geteilten Strecke um ihren größeren Abschnitt ergibt wieder eine stetig geteilte Strecke: $(a + b)/a = a/b$.

Unmittelbar aus der Definition resultieren einige merkwürdige Gleichungen.

$$\phi = 1/(\phi - 1) \quad \Rightarrow \quad 1/\phi = \phi - 1 \quad \text{oder} \quad \phi = 1 + 1/\phi$$

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi^2 - 1 = (\phi - 1)(\phi + 1)$$

Die einzige positive Lösung dieser quadratischen Gleichung ist

$$\phi = \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618.$$

Aus $\phi^2 = 1 + \phi$ folgt eine Darstellung als unendliche Wurzel

$$\phi = \sqrt{1+\phi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}\ ,$$

wie sofort klar wird, wenn man beide Seiten zum Quadrat erhebt.

$\phi = 1 + 1/\phi$ suggeriert unmittelbar eine Darstellung als unendlicher Kettenbruch.

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

Beide Darstellungen bestechen durch ihre Einfachheit im Wortsinne, denn sie enthalten nur Einsen.

JOHANNES CAMPANUS VON NOVARRA war Kanonikus in Paris und Kaplan von Papst Urban IV., dessen Pontifikat von 1261 bis 1264 währte. Als EUKLID-Übersetzer hatte er profunde mathematische Kenntnisse. Auf ihn geht der erste heute noch bekannte Irrationalitätsbeweis für die stetige Teilung zurück.

Seien a und b rationale Zahlen bzw. durch rationale Zahlen messbare Strecken der stetigen Teilung. Durch Multiplikation mit dem gemeinsamen Hauptnenner gewinnen wir zwei natürliche Zahlen n_1 und $n_2 < n_1$. Sie geben an, wie oft ein gemeinsamer Maßstab in den Strecken a und b steckt.

$$(n_1 + n_2)/n_1 = n_1/n_2$$
$$1 + n_2/n_1 = n_1/n_2$$
$$n_2/n_1 = n_1/n_2 - 1 = n_1/n_2 - n_2/n_2 = (n_1 - n_2)/n_2$$

Bildung der Kehrwerte führt auf

$$n_1/n_2 = n_2/(n_1 - n_2).$$

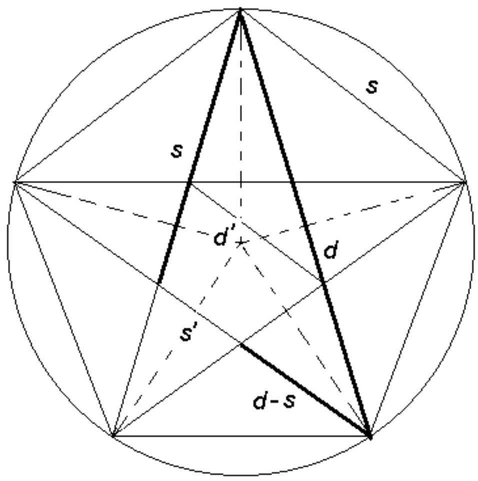
Mit der Abkürzung $(n_1 - n_2) \equiv n_3 \in \mathbb{N}$, wobei $n_3 < n_2 < n_1$, ergibt sich

$$(n_2 + n_3)/n_2 = n_2/n_3.$$

Das ist genau die Ausgangsgleichung, aber mit kleineren Zahlen. Wird also die Ausgangsgleichung von zwei Zahlen n_1 und n_2 erfüllt, so wird sie auch von zwei kleineren Zahlen n_2 und n_3 erfüllt. Dieses Verfahren kann ad infinitum fortgesetzt werden. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist aber nach unten beschränkt. Jeder Abstieg darin muss irgendwann enden. Also ist die Annahme eines gemeinsamen Maßstabes und seiner Vielfachen n_1 und n_2 falsch.

Die stetige Teilung finden wir in vielen Verhältnissen am Pentagon, dem »Logo« der Pythagoreer. Wie man unter Beachtung der Hilfslinie d' leicht erkennt, stehen Diagonale d und Seite s im Verhältnis

$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d - s} = \phi.$$



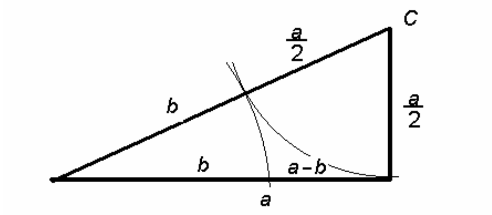
Dieses Verhältnis tritt sogar unendlich oft auf, denn die Diagonalen bilden ein kleineres Pentagon mit der Seitenlänge $s' = (2s - d)$, das wiederum mit Diagonalen $d' = (d - s)$ ausgestattet werden kann, die abermals ein Pentagon bilden usw. ad infinitum.

$$\frac{d - s}{2s - d} = \frac{d'}{s'} = \frac{s'}{d' - s'} = \phi.$$

Viele irrationale Verhältnisse lassen sich streng geometrisch mit Zirkel und Lineal mit beliebiger Genauigkeit konstruieren. Das gilt für die Diagonale des Quadrates ebenso wie für die Quadratwurzeln natürlicher Zahlen, für Umfang und Fläche des Einheitskreises ebenso wie für die stetige Teilung und das Pentagon.

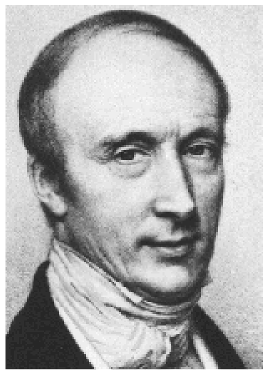
Zur Konstruktion der stetigen Teilung teilt man eine Einheitsstrecke a ab und errichtet in einem Endpunkt das Lot, auf dem man die Strecke $a/2$ abträgt (s. Abb.) Um den Punkt C schlägt man einen Kreis mit dem Radius $a/2$. Auf der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks verbleibt die restliche Länge b.

$$(b + a/2)^2 = a^2 + (a/2)^2$$
$$b + a/2 = (a/2)\sqrt{5}$$
$$b = (a/2)(-1 + \sqrt{5})$$
$$b/a = (-1 + \sqrt{5})/2 = \phi - 1 = 1/\phi$$
$$a/b = \phi$$



Zur Konstruktion des Pentagons teilt man nun die Basisstrecke $s = b$ ab und schlägt um jeden der beide Endpunkte einen Kreis mit dem Radius $d = a$. Ein Schnittpunkt der beiden Kreise ist die der Basisstrecke s gegenüberliegende Ecke des Pentagons. Kreise mit dem Radius $s = b$ um diese Ecke und die Endpunkte der Basisstrecke führen auf die übrigen Ecken des Pentagons.

Irrationale Verhältnisse existieren also unleugbar, zumindest in der idealisierten Vorstellung. Wie kann man sie aber durch Dezimalzahlen beschreiben und wie diese Dezimalzahlen mit beliebiger Genauigkeit darstellen? Eine Antwort auf diese Frage kennen wir bereits: Die Zahl e ist eine Irrationalzahl, wie wir am Ende dieses Kapitels sehen werden, und sie kann nach der NEWTONschen Reihenentwicklung beliebig genau berechnet werden. Auch andere in Kapitel II vorgestellte Reihen führen auf irrationale Zahlen. Reihen können wiederum als Grenzwerte ihrer Partialsummenfolgen aufgefasst werden. (Das n-te Glied der Partialsummenfolge ist die Summe der ersten n Reihenglieder.) AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789 – 1857), mit etwa 800 Abhandlungen ein ungewöhnlich produktiver und vielseitiger Mathematiker, hat Folgen zur Definition der irrationalen Zahlen benutzt, indem er alle reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Grenzwerten konvergenter Folgen rationaler Zahlen definierte. (Auch die moderne Fassung des Konvergenzbegriffes verdankt man CAUCHY.) Es gibt konvergente Folgen, die einen rationalen Grenzwert besitzen; wir haben in Kapitel II schon die harmonische Folge mit dem Grenzwert $0 \in \mathbb{Q}$ kennengelernt. Auch die Partialsummenfolge der geometrischen Reihe mit dem Grenzwert 2 besitzt zweifellos einen rationalen Grenzwert. Andere Folgen oder Reihen besitzen keine rationalen Grenzwerte, z. B. die alternierende harmonische Reihe oder die Reihe von GREGORY-LEIBNIZ. CAUCHY hat nun ein Konvergenzkriterium gefunden, wonach auch diese Folgen konvergieren. Ist der Grenzwert keine rationale Zahl, so wird durch die Folge eine irrationale Zahl definiert.



AUGUSTIN LOUIS CAUCHY

Als Beispiel wollen wir eine einfache Folge rein rationaler Zahlen mit dem irrationalen Grenzwert $\sqrt{n}$ konstruieren (wo n keine Quadratzahl sein soll). Wir setzen $x = \sqrt{n}$, also $x^2 = n$ und addieren auf beiden Seiten x^2

$$2x^2 = x^2 + n.$$

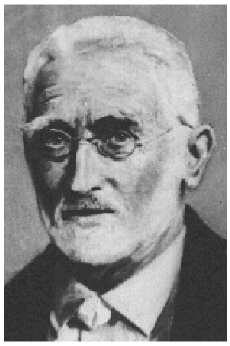
Nun versuchen wir die Gleichung rekursiv zu lösen und dividieren dazu durch $2x$, so dass links nur ein x stehenbleibt:

$$x = \frac{x}{2} + \frac{n}{2x}$$

$$x_{\nu+1} = \frac{x_\nu}{2} + \frac{n}{2x_\nu}$$

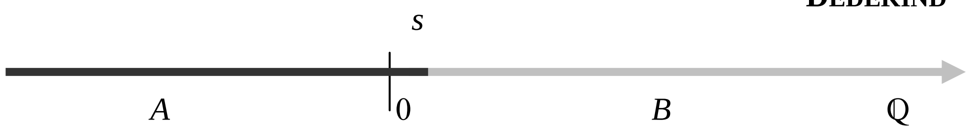
Zur Lösung setzen wir für $\nu = 1$ einen Schätzwert x_1 ein und rechnen die rechte Seite aus. Ergibt sich dabei der eingesetzte Schätzwert, so sind wir fertig. Da das aber nicht passiert (es sei denn, n wäre doch eine Quadratzahl, z. B. 4 und $x_1 = 2$), setzen wir das Ergebnis als x_2 wieder rechts ein und rechnen x_3 aus. Das Ergebnis, stets eine rationale Zahl, wird sich dem gesuchten Wert $\sqrt{n}$ immer stärker annähern.

Einen ganz anderen Zugang zu den irrationalen Zahlen hat RICHARD DEDEKIND (1831 – 1916) gefunden. Er promovierte 1852 in Göttingen bei C. F. GAUSS (1777 – 1855) und war aufgrund eines regen Briefwechsels mit GEORG CANTOR (1845 – 1918) direkt an dessen Formulierung der Mengenlehre beteiligt.



RICHARD DEDEKIND

Alle rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sollen auf zwei Mengen, A und B, aufgeteilt werden, von denen jede mindestens ein Element enthalten soll, also keine leer ist. Für jedes $a \in A$ und jedes $b \in B$ soll gelten: $a < b$, d. h. die Mengen könnten auf der Zahlengeraden wie abgebildet angeordnet sein. Dabei sind drei Fälle denkbar:



Aufteilung der rationalen Zahlen in zwei Mengen A und B

1) A enthält eine größte Zahl, z. B. $A = \{a \mid a \le 2\}$, $B = \{b \mid b > 2\}$
2) B enthält eine kleinste Zahl: $A = \{a \mid a < 2\}$, $B = \{b \mid b \ge 2\}$
3) A enthält keine größte und B keine kleinste Zahl: $A = \{a \mid a < \pi\}$, $B = \{b \mid b > \pi\}$

($a \le \pi$ oder $b \ge \pi$ kann nicht gesetzt werden, da π keine rationale Zahl ist.)

Die im Prinzip vorhandene vierte Möglichkeit, dass nämlich A eine größte *und* B eine kleinste Zahl enthält, scheidet aus, da es sich wegen $a < b$ nicht um dieselbe Zahl handeln darf, zwischen zwei verschiedene Zahlen a und b aber weitere Zahlen liegen, die dann weder zu A noch zu B gehören würden.

Die Teilungselemente nennt man DEDEKINDsche Schnitte oder Schnittzahlen. Alle Schnittzahlen der dritten Art bilden die Menge der irrationalen Zahlen.

DEDEKIND betrachtet die irrationalen Zahlen als eine Schöpfung des menschlichen Geistes: »Jedesmal nun, wenn ein Schnitt vorliegt, welcher nicht durch eine rationale Zahl hervorgebracht wird, so erschaffen wir eine neue, eine irrationale Zahl ...« Dadurch unterscheiden sie sich aber nicht wesentlich von den rationalen Zahlen, denn in seinem Aufsatz *Was sind und was sollen die Zahlen?* schreibt DEDEKIND über Zahlen allgemein: »Meine Hauptantwort auf die im Titel dieser Schrift gestellte Frage lautet: die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen.«

Kettenbrüche bilden eine weitere Methode, irrationale Zahlen darzustellen. Das Prinzip der Kettenbruchentwicklung sollte an folgendem Schema und den beiden Beispielen klar werden. Für die positive Zahl $a < 1$ mit $n < 1/a < n + 1$ wird

$$a = \frac{1}{1/a} = \frac{1}{n+a'} = \frac{1}{n+\frac{1}{1/a'}}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \qquad \frac{3}{11} = \frac{1}{\frac{11}{3}} = \frac{1}{3+\frac{2}{3}} = \frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

Endliche Kettenbrüche (aus rationalen Zahlen) wie die obigen sind selbst rationale Zahlen, unendliche Kettenbrüche (aus rationalen Zahlen) sind irrationale Zahlen. Ein Beispiel haben wir bereits bei der stetigen Teilung ϕ kennengelernt, zwei andere berühmte Kettenbruchentwicklungen betreffen die Zahl π:

Lord BROUNCKER

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2+\frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+\frac{7^2}{2+\ddots}}}}$$

LEONHARD EULER

$$\frac{\pi}{2} = 1+\frac{1}{1+\frac{1\cdot 2}{1+\frac{2\cdot 3}{1+\frac{3\cdot 4}{1+\ddots}}}}$$

Lord WILLIAM BROUNCKER (1620 – 1684) war Gründer und erster Präsident der Royal Society of London. 1655 lieferte er den obigen Kettenbruch, 1668 die Integration der Hyperbel mit der Berechnung von ln 2 (vgl. S. 17 u. S. 20):

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\ldots = \ln 2$$

Es würde hier zu weit führen und zuviel Platz beanspruchen, diese Entwicklungen im Einzelnen darzustellen. Als Tipp zur Herangehensweise ist der Beginn von EULERs Ableitung des *Kehrwertes* $\pi/4$ von BROUNCKERs Kettenbruch im nächsten Kasten angegeben. Ihr liegt die Reihe von GREGORY und LEIBNIZ zugrunde, ein Spezialfall der Arcustangensreihe.

LORD WILLIAM BROUNCKER

EULERs Ableitung des Kettenbruchs von Lord BROUNCKER

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{3}\left(1 - \frac{3x^2}{5}\left(1 - \frac{5x^2}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.\right.$$

$$\frac{\pi}{4} = 1\left(1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.\right.$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.\right.}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.}{1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.}{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{3 - \left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.}{\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{-1 + \dfrac{3}{\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{-1 + \dfrac{3}{\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.} + 3 - \dfrac{3\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.}{\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{3 - 1 + \dfrac{\frac{9}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.}{\left(1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{9\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.}{\left(5 - 3\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.}}}$$

$$\frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{9}{\dfrac{\left(5 - 3\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.\right.}{\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.}}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{9}{-3 + \dfrac{5}{\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.}}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{9}{-3 + \dfrac{5}{\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.} + 5 - \dfrac{5\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.}{\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.}}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{9}{5 - 3 + \dfrac{\frac{25}{7}\left(\ldots\right.}{\left(1 - \frac{5}{7}\left(\ldots\right.\right.}}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{9}{2 + \dfrac{25\left(\ldots\right.}{\left(7 - 5\left(\ldots\right.\right.}}}}$$

...

Den ersten Beweis für die Irrationalität der Zahl π erbrachte der universell gelehrte Autodidakt: Mathematiker, Physiker, Astronom und Philosoph, JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728 – 1777) in seinem Aufsatz *Vorläufige Kenntnisse für alle die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen*. Er zeigte, dass die Kettenbruchentwicklung von tan*x* für rationales *x* niemals abbricht, wogegen tan(π/4) = 1. LEONHARD EULER bewies die Irrationalität der Zahl e, ebenfalls mit Hilfe einer Kettenbruchentwicklung. Ein einfacher Beweis dafür soll dieses Kapitel abschließen.

JOHANN HEINRICH LAMBERT

Die Irrationalität der Zahl e

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 2{,}7182818284590\ldots$$

Sei $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p und q. Da e nicht ganzzahlig ist, ist $q \geq 2$.

Summiert man nur bis zum q-ten Glied, so bleibt der Rest

$$\begin{aligned} R &= \mathrm{e} - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} \\ &= \frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}) = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + \ldots \end{aligned}$$

$q!$ ist Hauptnenner der linken Seite, also muss $q! \cdot R$ eine positive ganze Zahl sein. Multiplizieren wir die rechte Seite mit $q!$, so ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} q! \cdot R &= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots \\ &< \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots \end{aligned}$$

und das ist eine geometrische Reihe mit Anfangsglied $\frac{1}{q+1}$ und Faktor $\frac{1}{q+1}$.

Mit der Summenformel der geometrischen Reihe führt die Abschätzung auf

$$q! \cdot R < \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q} < 1$$

also sicher keine positive ganze Zahl. Daher muss die Annahme $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$ falsch sein.

They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them the ghosts of departed quantities?

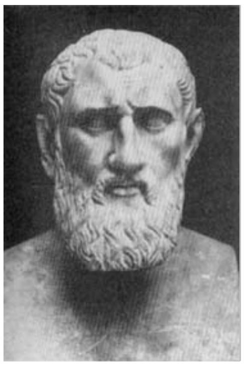
GEORGE BERKELEY

IV Infinitesimal

Die Erfassung des Kontinuums, anschaulich: der Zahlengerade, der Fläche, des Raumes, ist eines der tiefgründigsten und umstrittensten mathematischen Probleme.

ARISTOTELES (384 – 322) erkannte, dass die Kontinuumslehre zu Problemen bei der Bewegung führt. Im Anfangspunkt müsste Ruhe und beginnende Bewegung zugleich sein. Das ist ein Widerspruch, da ein und dasselbe ist und gleichzeitig nicht ist. Mit EUDOXOS VON KNIDOS (408 – 355) und PARMENIDES VON ELEA (515 – 445) lehnt ARISTOTELES die Zusammensetzung des Kontinuums aus Unteilbaren ab. Die Grenzen benachbarter Teilstücke müssten zusammenfallen. Die Unteilbaren haben aber keine Enden und Teile. Somit kann auch nichts zu einem Kontinuum zusammenwachsen. Das Kontinuum kann nur in stets wieder teilbare Stücke geteilt werden (potentielle Unendlichkeit). Hier (nicht jedoch bei der konkreten Materie) folgt ARISTOTELES ANAXAGORAS, dessen Leitmotiv war: Von dem Kleinen gibt es kein Allerkleinstes, sondern immer noch ein Kleineres (S. 49).

ZENON (490 – 430), der Philosoph aus dem großgriechischen, heute unteritalienischen Elea lehrte, dass Raum, Vielheit und Teilbarkeit nicht widerspruchsfrei in Begriffe zu fassen seien.



ZENON VON ELEA

1) Es müssen notwendig gerade so viele Dinge sein, als eben wirklich sind, weder mehr noch weniger. Wenn aber so viele Dinge sind, als eben sind, dann sind sie der Zahl nach begrenzt.

2) Es gibt stets andere Dinge zwischen diesen Dingen und wieder andere zwischen jenen. Und damit sind die seienden Dinge der Zahl nach unbegrenzt.

ZENONs Schluss: Das wahre Sein entzieht sich dem messenden Erfassen.

Um diese Erkenntnis zu untermauern, hat er schon im fünften Jahrhundert v. Chr. die Mathematiker und Philosophen mit seinen Paradoxien zur Verzweiflung gebracht. Es gibt keine Bewegung, denn bevor eine Strecke vollendet ist, muss die Hälfte zurückgelegt sein; das gilt aber für jede Hälfte jedes noch so kleinen Teilstückes. Deswegen kann überhaupt keine Bewegung existieren. Der homerische Held Achilles, der seinen Widersacher Hektor viermal um Trojas Mauern hetzte, bevor er ihn tötete, kann eine Schildkröte im Wettlauf nicht besiegen, wenn sie einmal einen noch so geringen Vorsprung besitzt. Denn wenn er an dem Punkt angekommen ist, an dem sich die Schildkröte beim Start befand, so hat die Schildkröte bereits wieder einen kleinen Vorsprung gewonnen usw. Es gibt keine Geräusche. Ein einzelnes fallendes Hirsekorn erzeugt kein Geräusch. Weil aber die Summe von Nichtsen wieder ein Nichts ergibt, kann auch ein ganzer Sack voller Hirsekörner beim Fallen kein Geräusch erzeugen. Diese Paradoxien können beliebig vermehrt werden: Man kann niemals ein Glas Wasser austrinken, denn vorher muss man die Hälfte getrunken haben, davor die Hälfte von der Hälfte usw. Der paradoxe Charakter verschwindet erst mit der Erkenntnis, dass das Zurücklegen der Hälfte des Weges s auch nur die Hälfte der Zeit t beansprucht, also endgültig mit der Einführung des Differentialquotienten

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

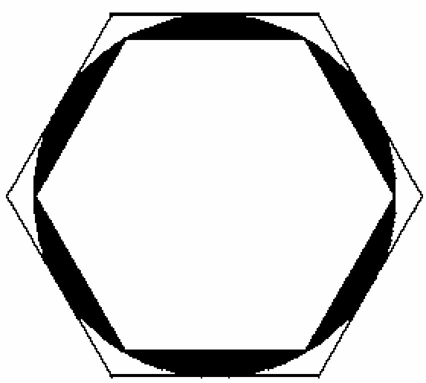
Der Astronom und Mathematiker EUDOXOS VON KNIDOS (408 – 355), ein Schüler PLATONS, trat mit Beiträgen zur Proportionenlehre unter Einbeziehung des Irrationalen hervor, gilt aber vor allem als Erfinder des Exhaustionsverfahrens. Ihm gelang durch »Ausschöpfung« die Volumenbestimmung von Pyramide und Kegel. Einzelheiten dazu sind verlorengegangen. Auch der Atomist DEMOKRIT VON ABDERA (460 – 375) soll schon im Besitz der Formel für das Kegelvolumen gewesen sein. Das Exhaustionsverfahren dient zur Quadratur einer Fläche oder eines Körpers durch Zerlegung in unendlich viele Ausschnitte, deren jeder kleiner als ein äußerer, größer als ein innerer ist. ARCHIMEDES (287 – 212) führte das Verfahren zur Vollendung und berechnete damit das Kugelvolumen, was er als eine seiner größten Leistungen ansah. Das Verhältnis von 1 : 2 : 3 zwischen Kegel-, Kugel- und Zylindervolumen (mit Radius r und Höhe $2r$)

$$(2/3)\pi r^3 : (4/3)\pi r^3 : 2\pi r^3$$

wurde denn auch teilweise auf seinem Grabstein verewigt. CICERO (106 – 43), Quästor von Sizilien, hat ihn anhand dieses Merkmales 75 v. Chr. noch identifizieren können: »Des ARCHIMEDES Grab, den Syrakusanern unbekannt, rings umgeben und überdeckt von Hecken und Dornengestrüpp, habe ich aufgespürt – eine Säule, die nicht viel aus den Dornen herausragte, auf der sich die Figur einer Kugel und eines Zylinders befand.« Heute ist das Grabmal nicht mehr vorhanden.

ARCHIMEDES gelang die zu seiner Zeit genaueste Berechnung der Zahl π. Dazu hat er durch Verfeinerung der abgebildeten Sechsecke dem Kreis ein 96-Eck einbeschrieben und umbeschrieben und gefunden

$$3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7,$$
$$3{,}1408 < 3{,}1416 < 3{,}1429.$$



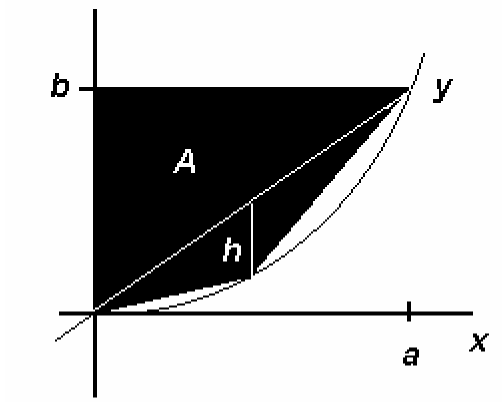
Zur genauen Berechnung wäre ein Unendlich-Eck erforderlich – eben der Kreis.

Einen instruktiven Einblick in das Exhaustionsverfahren liefert ARCHIMEDES' Berechnung der Parabelfläche, wobei schon von der Summation der unendlichen geometrischen Reihe Gebrauch gemacht wird.

Eine einfache Parabel (die Bezeichnung stammt auch von ihm) wird durch die Kurve

$$y = x^2$$

beschrieben, also ist in der Abbildung rechts



$$b = a^2$$

und damit die Fläche des großen Dreiecks

$$A = ab/2 = a^3/2.$$

Den Rest der Fläche zerlegen wir in zwei Dreiecke, die bei $x = a/2$ in h aneinander grenzen, und einen weiteren Rest. Die Hypotenuse des Dreiecks A verläuft nach der Gleichung

$$z = x{\cdot}b/a = x{\cdot}a.$$

Die Höhe h der Dreiecke zwischen dieser Hypotenuse und der Parabelkurve ist damit

$$h = z(a/2) - y(a/2) = (a/2)a - (a/2)^2 = a^2/4.$$

Die Fläche der beiden kleineren Dreiecke zusammen ist, wie man durch Scherung leicht sieht,

$$ah/2 = a^3/8 = A/4.$$

Füllt man die verbleibende Fläche wieder mit Dreiecken aus, so trägt die nächste Generation die Fläche $A/16$ bei, die übernächste die Fläche $A/64$ usw. Die Fortsetzung ins unendlich Kleine liefert die exakte Fläche des Parabelabschnittes. Wegen

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

ergibt sie sich zu $(4/3)A = (2/3)a^3$. Die Fläche *unter* der Kurve würde man heute per Integralrechnung zu

$$\int_0^a x^2 \mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}$$

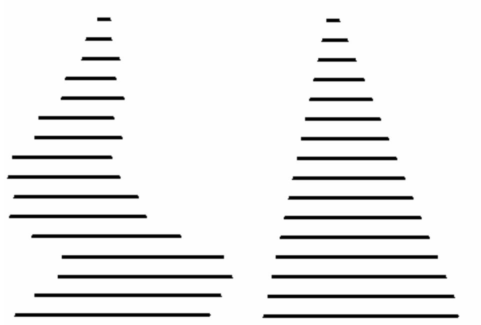
ausrechnen; das ist genau der zur Vervollständigung des Rechtecks

$$a{\cdot}b = a^3$$

fehlende Teil.

Das Rechnen mit unendlich klein werdenden Flächen- und Raumstücken setzte dann für viele hundert Jahre aus, so wie auch die ganze Mathematik (mit Ausnahme einiger Leistungen der Araber und Inder) zum Erliegen kam.

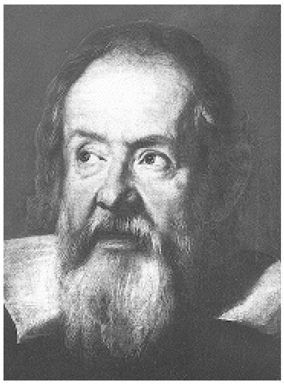
Erst nach der Renaissance erfolgte auch auf diesem Gebiet eine Wiedergeburt und Fortentwicklung. Die Methode der Indivisiblen (Unteilbaren) wurde von GALILEO GALILEI (1564 – 1642), JOHANNES KEPLER (1572 – 1630) und vor allem von BONAVENTURA CAVALIERI (1598 – 1647) in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts zur Bestimmung zahlreicher Flächen und Körper entwickelt (gleiche Höhe, gleiche Breiten ⇒ gleiche Fläche).



Nach GALILEI besteht das Kontinuum aus »non vacui« und »vacui«. Es besteht aktual aus unendlich vielen Unteilbaren (non quanti), neben denen der Geometrie (z. B. den Punkten und Linien) und der Materie (den Atomen) auch solchen des Vakuums, wie er in den *Discorsi e dimonstrationi mathematiche intorno a due nuove scienze* (Mechanik und Fallgesetze betreffend) schreibt.

CAVALIERI, Mitglied des Jesuatenordens (nicht Jesuit), schreibt stets sehr respektvoll an GALILEI, geht aber weit über diesen hinaus und legt mit seiner *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635) die erste systematische Grundlage. Er betrachtet die Indivisiblen als homogene Bestandteile des Objektes, also als vom selben Charakter wie das Objekt selbst:

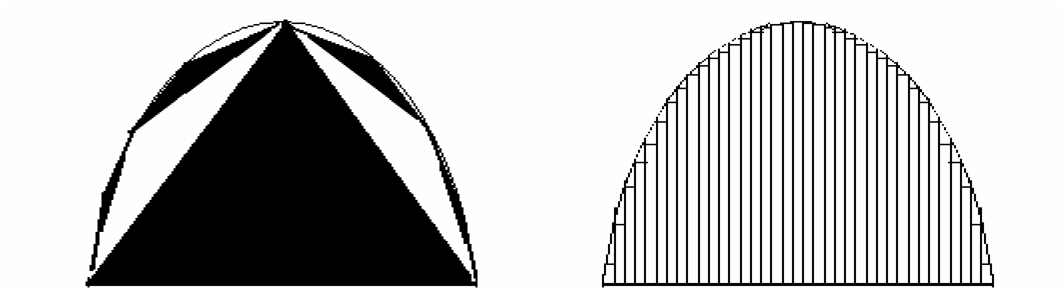
Indivisiblen von Linien sind Linien.
Indivisiblen von Flächen sind Flächen.
Indivisiblen von Körpern sind Körper.



GALILEO GALILEI

JOHANNES KEPLER

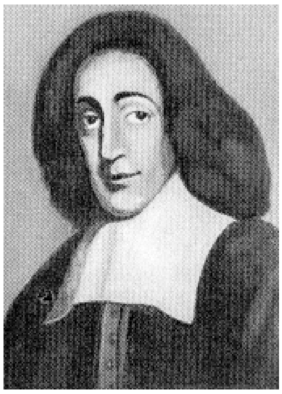
Die Methode basiert auf der Annahme von unendlich vielen diskreten Indivisiblen, also »Atomen« der Fläche oder des Volumens in Analogie zur Untersumme der Integralrechnung.



Zum Vergleich zwischen Exhaustion und Indivisiblen.

CAVALIERIS Unteilbare bilden eine (echte oder unechte?) Untermenge des Kontinuums. Das Kontinuum wird durch Bewegung seiner Unteilbaren erzeugt. Das Kontinuum wird als der »Fluxus« der Indivisiblen bezeichnet. Diese fluentistische Auffassung geht nach ARISTOTELES auf die Pythagoreer zurück; sie wurde auch von DESCARTES (1596 – 1650), TORRICELLI (1608 – 1647) und insbesondere von NEWTON vertreten.

BARUCH DE SPINOZA (1632 – 1677) – niederländischer Philosoph, wegen seiner häufigen Wendung »Die Natur oder Gott ...« und der Ablehnung eines Schöpfungsaktes 1656 aus der jüdischen Religionsgemeinschaft ausgestoßen – definiert das Unendliche als das, was nicht vermehrbar ist. Er verurteilt Atomismus und Indivisiblen. »Und in der Tat ist es nicht minder widersinnig, zu behaupten, dass die körperliche Substanz aus Körpern oder Teilen zusammengesetzt, als dass der Körper aus Flächen, die Flächen aus Linien, die Linien endlich aus Punkten zusammengesetzt seien.«



BARUCH DE SPINOZA

Die Indivisiblen werden später zu den infinitesimalen Größen, den Differentialen, die »gegen Null streben«. Diese Form des unendlich Kleinen wurde vielfach scharf angegriffen. Der mathematisch sehr gebildete Bischof GEORGE BERKELEY (1685 – 1753) polemisierte in Form des einleitenden Zitates über Differentiale.

Die Differentialrechnung, als deren Väter in der Regel NEWTON und LEIBNIZ genannt werden, hat viel tiefer liegende Wurzeln. Der große französische Amateurmathematiker PIERRE DE FERMAT (1601 – 1665), im Hauptberuf Jurist, berühmt geworden als Begründer der modernen Zahlentheorie, behandelte schon 1629 Extremwertaufgaben folgender Art:

PIERRE DE FERMAT

B ist in zwei Teile zu zerlegen, welche das größte Produkt ergeben, *A* und $B - A$. Vermehren wir *A* um *E* so verbleibt für den zweiten Faktor $B - A - E$. Im Falle des Extremwertes muss für ein beliebig kleines *E* gelten:

$$A(B-A) = (A+E)(B-A-E)$$
$$0 = E(B-2A-E)$$
$$0 = B-2A-E = B-2A \quad \text{für} \quad E \to 0$$

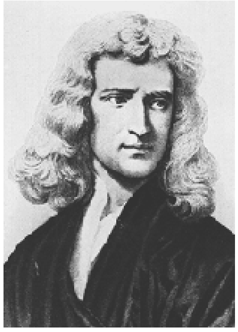
Im Ergebnis ist das die Erfindung des Differentialquotienten

$$\{[f(A+E) - f(A)] \,/\, E\}_{E=0} = 0 \;\text{ oder }\; \mathrm{d}f(A)/\mathrm{d}A = 0.$$

35 Jahre vor NEWTON. Der historisch gewordene hässliche Prioritätsstreit um die Erfindung der Differentialrechnung zwischen NEWTON und LEIBNIZ war also ganz unbegründet. NEWTON hat die Infinitesimalrechnung, den sogenannten Calculus in weitaus umfassenderer Form ausgearbeitet und LEIBNIZ hat ohne Kenntnis von NEWTONs Ergebnissen die Erfindung wiederholt und eine Bezeichnungsweise geschaffen, die so zweckmäßig ist, dass sie sich überall durchgesetzt hat. Aber die Wurzeln liegen schon bei FERMAT und anderen Mathematikern seiner Generation.

Sir ISAAC NEWTON (1642 – 1727) – einer der bedeutendsten Physiker, Begründer der Mechanik, der Optik und des Gravitationsgesetzes, aber auch Alchemist und Religionsforscher – nahm nicht kleinste Teilchen d*x* an, sondern ein Wachstum wie in der Natur, wobei die Ableitung durch einen Punkt, die Integration durch einen Strich bezeichnet wurde (was zu häufigen Verwechslungen führte):

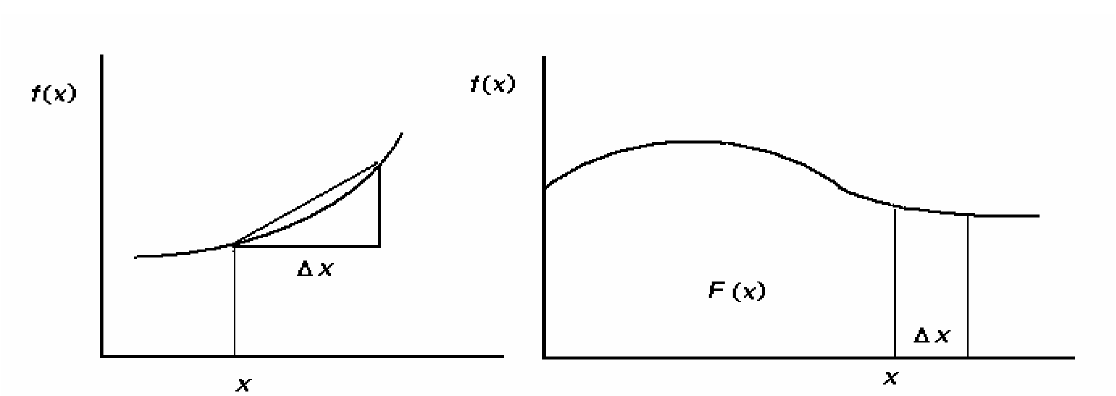
$$\dot{f} = [f(x + o) - f(x)] / o$$



ISAAC NEWTON

NEWTONs fluentistische Auffassung schlägt sich auch in den Bezeichnungen nieder. Die Punkte einer Kurve $f(x,y) = 0$ werden von den Fluenten $x(t)$ und $y(t)$ erzeugt, deren zeitliche Änderung die Fluxionen sind. Er erfand die Differential- und Integralrechnung, das NEWTON-Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstellen von Polynomen, er berechnete die Krümmungen und Wendepunkte sehr vieler Kurven, war allerdings noch nicht im Besitz von Produktregel und Quotientenregel und schrieb seine grundlegenden physikalischen Werke ohne Verwendung der Infinitesimalrechnung.

Definition von Differentiations- und Integrationsprozess



$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} F(x+\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} [F(x) + \Delta x \cdot f(x)]$$

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716) fand und veröffentlichte (1684) die Grundzüge der Differential- und Integralrechnung unabhängig von NEWTON. Nebenbei führte er auch den Doppelpunkt als Divisionszeichen und viele Symbole der Logik ein. Die für den Kundigen leicht verständlichen Formeln im obigen Kasten waren noch nicht entwickelt, doch stammen sie vornehmlich von LEIBNIZ. Im Briefwechsel mit JOHANN BERNOULLI (1667 – 1748), Bruder des JAKOB BERNOULLI, schreibt LEIBNIZ erstmals dy/dx und $\int y$dx, 1686 erscheint das Integralzeichen $\int$ im Druck, ein gestrecktes S als Abkürzung für die unendliche Summe, 1695 folgen schließlich die allgemeinen Regeln

$$\mathrm{d}(x^n) = nx^{n-1}\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \mathrm{d}(a^x) = a^x \ln a \, \mathrm{d}x.$$

Nach LEIBNIZ gibt es zwei berühmte Labyrinthe, in denen sich die menschliche Vernunft oft verwirrt. Das eine betrifft die große Frage der Freiheit und Notwendigkeit, das andere besteht in der Erörterung der Kontinuität, womit auch das Problem des Unendlichen eng zusammenhängt. Er definiert drei Grade der Unendlichkeit:

1) Was größer ist als jede nennbare Größe.
2) Was in seiner Gattung das Größte ist.
3) Gott.

Zum ersten Punkt (dazu gehört auch das mathematische ∞) gibt er Erklärungen auf drei verschiedenen Niveaus:

1.1) *pour tout le monde*: Vergleich: Ätherpartikel, Sandkorn, Erdkugel, Firmament.
1.2) für den Mathematiker: Jede Zahl ist endlich und bestimmbar. Die Infiniten und Infinitesimalen sind Fiktion ... sie ermöglichen eine vorteilhafte Sprechweise. Es handelt sich aber nicht um willkürliche, sondern um wohlbegründete Fiktionen. Im praktischen Gebrauch kann man sie so verwenden, als ob sie wirklich existierten.
1.3) für den Philosophen: Fiktionen mit einem *fundamentum in re*, wie auch $\sqrt{-1}$.

Der zweite Punkt wird anhand von Beispielen erläutert: Vom Ausgedehnten das Größte ist der ganze Raum, vom Aufeinanderfolgenden das Größte ist die Ewigkeit.

Gott bedarf keiner Erklärung.

Weil LEIBNIZ das Unendliche als Fiktion ansieht, fordert er, dass die Regeln des Endlichen im Unendlichen Geltung behalten. Damit bewältigt er sowohl den Gebrauch des unendlich Kleinen (Infinitesimalrechnung) als auch den des unendlich Großen (wie die Summe der harmonischen Reihe).

Diese Einstellung findet man auch noch bei dem deutschen Philosophen GEORG WILHELM FRIEDRICH HEGEL (1770 – 1831): »Das Unendlichgroße und Unendlichkleine sind daher Bilder der Vorstellung, die bei näherer Betrachtung sich als nichtiger Nebel und Schatten zeigen.« HEGEL würdigt ARISTOTELES' potentielles Unendlich und kritisiert den französischen Philosophen PIERRE BAYLE (1647 – 1706), der die aktuale Existenz des Unendlichen für möglich hält (S. 50). »... vielmehr ist schon die Teilbarkeit selbst nur eine Möglichkeit, nicht ein Existieren der Teile.«


GEORG WILHELM FRIEDRICH HEGEL

Das Problem der Indivisiblen und Differentiale führt er in Zenonscher Manier ad absurdum:

1. Die einzelnen Einheiten, aus denen sich die Vielheit zusammensetzt, dürfen keine Größe haben.

2. Wenn sie keine Größe haben, existieren sie nicht.

3. Da aber ihre Existenz angenommen wird, müssen sie eine Größe haben. Die Vorderseite muss einen Abstand von der Rückseite haben. Dies gilt aber auch für die Vorder- bzw. Rückseite selbst, also gibt es weiter nach vorn bzw. hinten liegende Teile – ad infinitum.

4. Akzeptiert man die Annahme von Vielheiten, so folgt daraus, dass die Einheiten einerseits so klein sind, dass sie keine Größe haben, andererseits so groß, dass sie unbegrenzt sind.

Guillaume de l'Hospital

Der Marquis de l'Hospital (1661 – 1704) schrieb nach Unterricht bei Johann Bernoulli mit seiner *Analyse des infinement petits* (1696) das erste Lehrbuch der Infinitesimalrechnung. Darin findet sich die nach ihm benannte l'Hospitalsche Regel, die eine Berechnung von unbestimmt werdenden Quotienten erlaubt. Der Ausdruck 0/0 ist grundsätzlich nicht definiert und daher mathematisch nicht zulässig. Nehmen jedoch Zähler und Nenner im Quotienten zweier Funktionen gleichzeitig den Wert Null an, so kann das Ergebnis endlich sein. Ein Beispiel ist der Quotient $\sin x / x$, der an der Stelle $x = 0$ unbestimmt wird. Hier kann man statt der Funktionen $\sin x$ und x ihre Ableitungen $\cos x$ und 1 einsetzen, wodurch sich der endliche Wert $\sin x / x = 1$ für $x \to 0$ in Übereinstimmung mit dem anschaulichen Beispiel aus Kapitel II (S. 14) ergibt.

Für Leonhard Euler (1707 – 1783) ist Unendlich eine Größe, zu der man durch ohne Ende angehäufte Zuwächse gelangt. In den *Institutiones calculi differentialis* (1755) behandelt er das Rechnen mit endlichen Differenzen Δx und bezeichnet die Differentialrechnung als Spezialfall für unendlich kleines $\Delta x = \mathrm{d}x$. Dabei unterscheidet er zwischen arithmetischer Gleichheit $a - b = 0$ und geometrischer Gleichheit $a/b = 1$. $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ sind arithmetisch gleich, denn $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = 0$, aber geometrisch meistens ungleich, weil $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \neq 1$. $a/\mathrm{d}x^2$ ist eine »quantitas infinita infinities maior quam $a/\mathrm{d}x$«, also größer als $a/\mathrm{d}x$, was sich im Verschwinden des letzteren gegenüber ersterem niederschlägt:

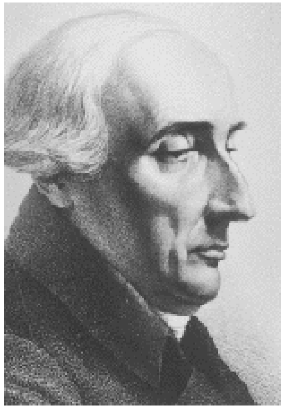
$$\frac{\dfrac{a}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{a}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{a}{\mathrm{d}x^2}} = 1$$

Euler trat auch in der philosophischen Debatte um das Unendliche hervor. In seinem Aufsatz *Rettung der Göttlichen Offenbahrung gegen die Einwürffe der Freygeister* von 1747, einer Kampfschrift gegen die vom Philosophen Wolff angeführten Monadisten, lehnt er unendlich kleine Bestandteile für den wirklichen Raum und die wirkliche Zeit ab und verwirft Leibniz' Monaden ausdrücklich deshalb, weil ihre Annahme voraussetze, dass der Körper schon wirklich ins Unendliche in seine einfachen Teile geteilt sei, da doch die Teilbarkeit gerade sagt, dass die Teilung nie vollendet werden kann, also keine einfachen Teile möglich sind.

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), bahnbrechend auf nahezu allen Gebieten der Mathematik und theoretischen Physik, seit 1766 Eulers Nachfolger an der Berliner Akademie, stellte 1784 die Preisfrage:

> Bekanntlich verwendet die höhere Mathematik ständig unendlich große und unendlich kleine Größen. Nichtsdestoweniger haben die antiken Geometer und auch die alten Analytiker sorgsam alles vermieden, was dem Unendlichen nahekommt; und einige große moderne Analytiker meinen, dass der Ausdruck »unendliche Größe« ein Widerspruch in sich ist. Die Akademie wünscht daher, dass erklärt werde, wie so viele richtige Sätze aus einer widersprüchlichen Annahme hergeleitet werden konnten, und dass ein Prinzip umrissen werde, welches sicher, klar, kurz gesagt, echt mathematisch ist, und das in angemessener Weise als Ersatz für das Unendliche dient.

Übliche Aufgabenstellungen für Preisfragen waren *konkrete Anwendungen* der Mathematik. Aufgrund des sehr unbefriedigendes Ergebnisses wendete sich LAGRANGE enttäuscht von diesem Thema ab. In seiner *Théorie des fonctions analytiques* (1797) versucht er mit Hilfe von Reihenentwicklung alles unendlich Kleine zu eliminieren.



JOSEPH LOUIS LAGRANGE

$$f(x + i) = f(x) + ip(x) + i^2q(x) + ...$$

Hier bedeutet i einen Wert, der immer so klein angenommen werden kann, dass ein beliebiges Glied der Reihe größer als die Summe aller folgenden ist.

AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789 – 1857) hat zwar *quantités infinement petites* benutzt – übrigens zunächst faktisch gezwungenermaßen aufgrund von Vorschriften der Unterrichtskommission der Ecole Polytechnique – aber er hat sie nicht als Größen, sondern als Variablen aufgefasst (Folgen mit dem Grenzwert Null, s. Kap. II, S. 10).

IMMANUEL KANT (1724 – 1804) deutscher Philosoph des Idealismus, lehrt in seiner Kritik der reinen Vernunft: »Die Eigenschaft der Größen, nach welcher an ihnen kein Theil der kleinstmögliche ist, heißt Continuität derselben. Raum und Zeit sind quanta continua.«

IMMANUEL KANT

JOHANN SCHULTZ (1739 – 1805), Theologe und Mathematiker, persönlich mit KANT befreundet, hat das unendlich Kleine als nicht existent abgelehnt, aber ab 1780 das aktual unendlich Große als realen mathematischen Begriff zugelassen, um das Parallelenpostulat (S. 45) mit unendlich großen Winkelflächen zu beweisen. Diese Auffassung wurde ab 1800 unter den Mathematikern weitgehend anerkannt. SYLVESTRE FRANC LACROIX (1765 – 1843) bezeichnete einen solchen Beweis in seinem sehr einflussreichen Lehrbuch von 1799 als den einzig strengen. Aber für ihn ist das Unendliche nur eine unerreichbare Grenze.

JACOB FRIEDRICH FRIES (1773 – 1843), im Gegensatz zu vielen Philosophen ein guter Mathematiker, las über Analysis in Heidelberg neunmal und übernahm zusätzlich die Physikprofessur. 1806, zu Beginn seiner mathematischen Studien schrieb er: »Der einzige mir bekannte gründliche Beweis des 11. Axioms von EUKLID ist der SCHULTZesche.« Doch schon kurz darauf kam er zu der Überzeugung »SCHULTZes Beweis hält auch nicht Stich, denn er nimmt das Unendliche für ein vollendetes Ganzes, was sich im Begriff widerspricht.« Und 1822 hatte er seine diesbezügliche Auffassung gefestigt: »Eine unendliche Größe oder Kleinheit darf nie als ein gegebenes Ganzes angesehen werden.«

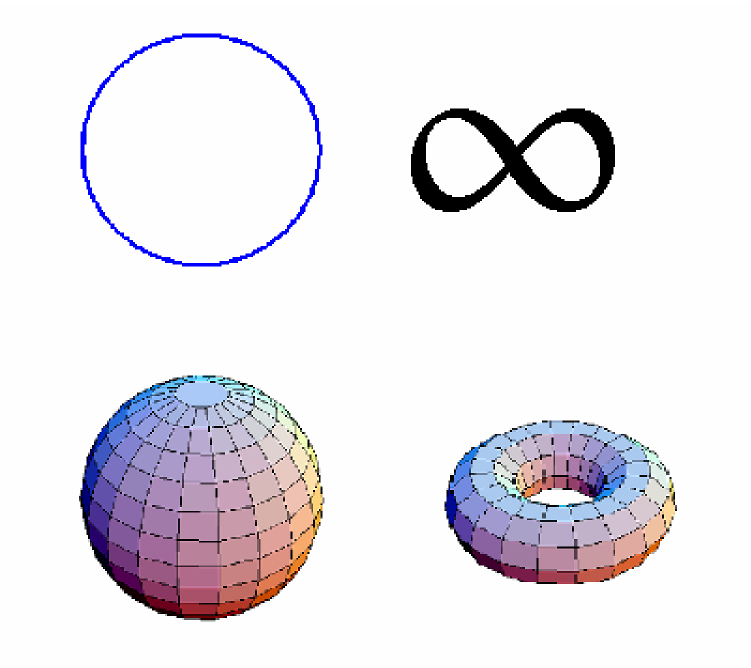
Es hat aber die Betrachtung über das Unbegrenzte eine Schwierigkeit; denn es ergibt sich viel Unmögliches, mag man aufstellen, dass es nicht existiere oder dass es existiere.

ARISTOTELES

V Unbegrenzt

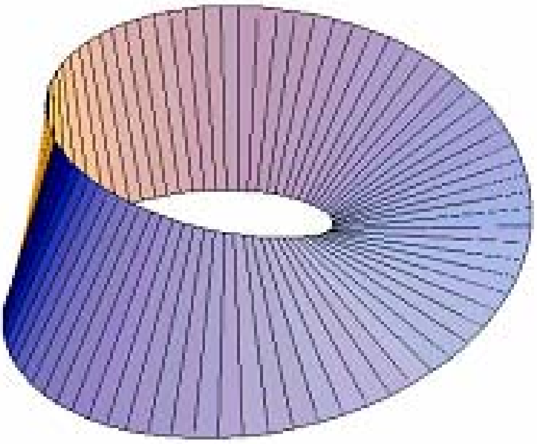
Die einfachste unbegrenzte Figur ist der mathematische Punkt. Nach EUKLID ist ein Punkt das, was keine Teile hat. Ein Punkt ist kompromisslos. Weil er keine Teile und damit auch keine Grenze besitzt, sondern höchstens eine solche darstellt, kann er auch nicht an einen anderen Punkt stoßen; entweder ist er mit ihm identisch oder ihm völlig fremd. Ein Punkt hat also keinen nächsten Nachbarn. Das führt zu einem der schwierigsten Probleme der Mathematik, dem oben schon wiederholt angesprochenen Kontinuum. Die Struktur des Kontinuums ist eine auch heute noch weitgehend ungelöste Frage. Wir werden in den folgenden Kapiteln immer wieder darauf stoßen und sie im XI. Kapitel von einem gänzlich neuen Blickwinkel aus untersuchen.

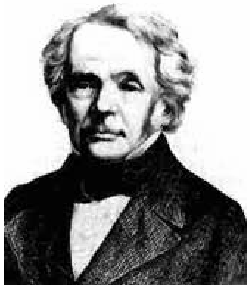
Andere, in zumindest einer Richtung unbegrenzte Gebilde sind in der folgenden Abbildung dargestellt.



Kann eine Schlange sich selbst auffressen? Es geht – bis zu einem gewissen Grad. Kann man eine unendliche Melodie, einen unendlichen Text schreiben? Auch das ist möglich: Ich schreibe, dass ich schreibe, dass ... . »Ich denke, also bin ich«, *cogito ergo sum*, wurde von RENÉ DESCARTES (1596 – 1650) als Existenz- und Gottesbeweis angesehen. »Ich denke, dass ich denke, dass ich denke, dass ...« nahm der tschechischen Theologe und Mathematiker BERNARD BOLZANO (1781 – 1848) als Beweis für die Existenz des Unendlichen (s. Kapitel XI, S. 94).

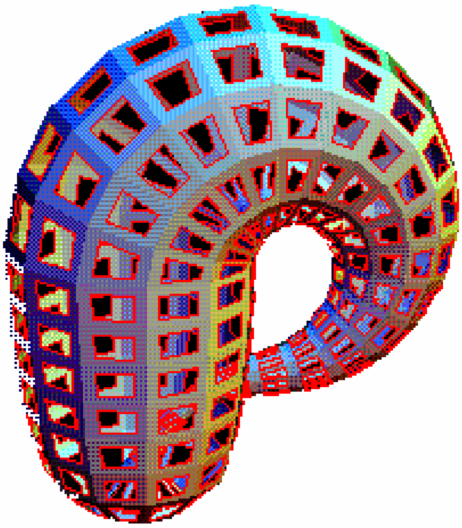
Nach Ansicht der Pythagoreer ist die Grenze das Wesen des Gegenstandes, denn die Fläche kann ohne Körper, der Körper aber nicht ohne Oberfläche sein. Folglich ist die Fläche mehr (d. h. von größerer Bedeutung) als der Körper, die Linie mehr als die Fläche, der Punkt mehr als die Linie.





AUGUST FERDINAND MÖBIUS

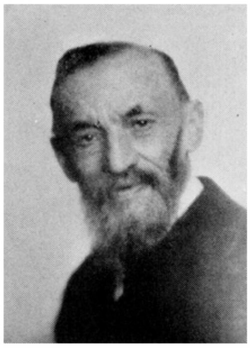
Ihnen müsste ein Gebilde besonders gefallen haben, das nur eine einzige Fläche besitzt, quasi daraus besteht. AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790 – 1868), deutscher Mathematiker und Astronom, erfand 1865 diese einseitig orientierte Fläche, das MÖBIUS-Band (links oben). Bewegt man sich darauf vorwärts, so bleibt keine Seite unbetreten. Zerschneidet man ein MÖBIUS-Band der Länge nach, so erhält man ein zwar zusammenhängendes aber zweiseitig orientiertes Band, weil es nicht nur einmal, sondern zweimal in sich verdreht ist.



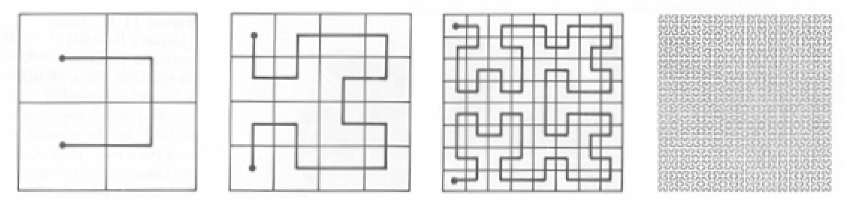
CHRISTIAN FELIX KLEIN

Das räumliche Analogon ist ein in sich selbst zurückgestülpter Schlauch, die von CHRISTIAN FELIX KLEIN (1849 – 1925) erfundene KLEINsche Flasche.

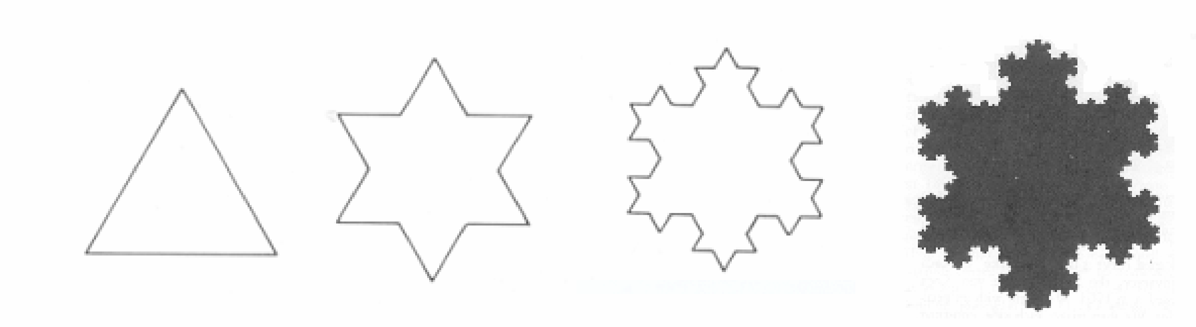
Eine andere Art des Unendlichen ist in räumlich begrenzten linearen Gebilden zu finden. GUISEPPE PEANO (1858 – 1932), Mitbegründer der symbolischen Logik und Schöpfer der PEANO-Axiome der natürlichen Zahlen, beschrieb 1890 die PEANO-Kurve, eine Kurve unendlicher Länge, die jedem Punkt einer gegebenen Fläche beliebig nahe kommt. Das folgende Beispiel hat DAVID HILBERT 1891 konstruiert. Man verbindet die Mittelpunkte der vier Viertel eines Quadrates, teilt dann jedes Viertel in vier Teile auf und verbindet deren $4^2 = 16$ Mittelpunkte usw.



GUISEPPE PEANO



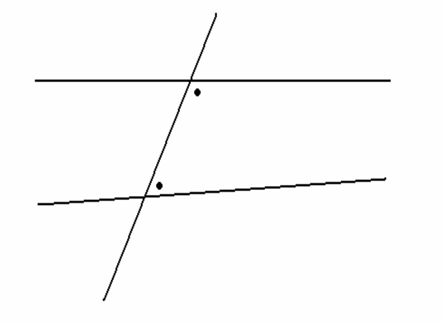
Der schwedische Mathematiker HELGE V. KOCH (1870 – 1924) erfand 1904 die berühmte Schneeflocken-Kurve, das erste Fraktal. Bei jeder Einfügung einer Zacke in die Strecke wächst die Kurvenlänge auf 4/3 ihres ursprünglichen Wertes. Die gesamte Grenze der Schneeflocke und schon die Länge zwischen zwei beliebig dicht benachbarten Punkten wächst so ins Unendliche.



Die in den bisher betrachteten Gebilden zutage tretenden Unbegrenztheiten betreffen nur die Grenzen der Figuren. Sie alle haben die gemeinsame Eigenschaft, dass jeder ihrer Punkte im Raum von einem anderen aus leicht erreichbar ist, eine endliche Entfernung von ihm besitzt. Wir wollen nun das Unbegrenzte im Verein mit dem Wachstum über alle Grenzen hinaus ins Auge fassen. Das einfachste Beispiel dafür ist die mathematische Gerade. Sie besitzt keinen Anfang und kein Ende und enthält Punkte, die auf »ewig« unerreichbar sind. Wir können sie mit der Leiter der positiven und negativen ganzen Zahlen vergleichen. Schon wesentlich komplizierter gestaltet sich die Figur zweier Geraden, die immer in demselben Abstand voneinander verlaufen.

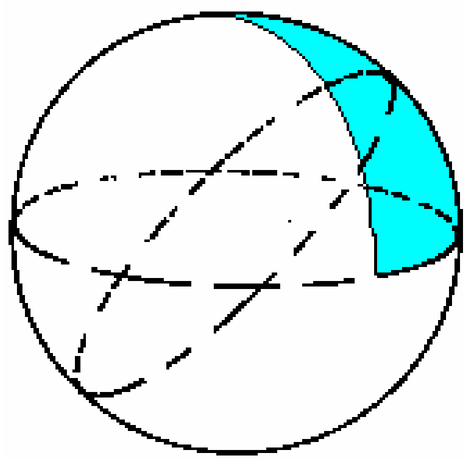
Treffen sich diese Parallelen in einem Punkt »im Unendlichen«, wie man zu sagen pflegt? Existieren sie überhaupt? Die Antwort auf diese Frage hat die Mathematiker 2000 Jahre lang beschäftigt. Schon EUKLID bereitete sie Unbehagen, denn das Parallelenpostulat zu Beginn seiner *Elemente* ist im Gegensatz zu den anderen Postulaten und Axiomen nicht prägnant und unmittelbar einsehbar, sondern sehr lang und umständlich, und EUKLID hat die Anwendung vermieden, solange es ging.

Postulat 5 bzw. Axiom 11: »Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.«



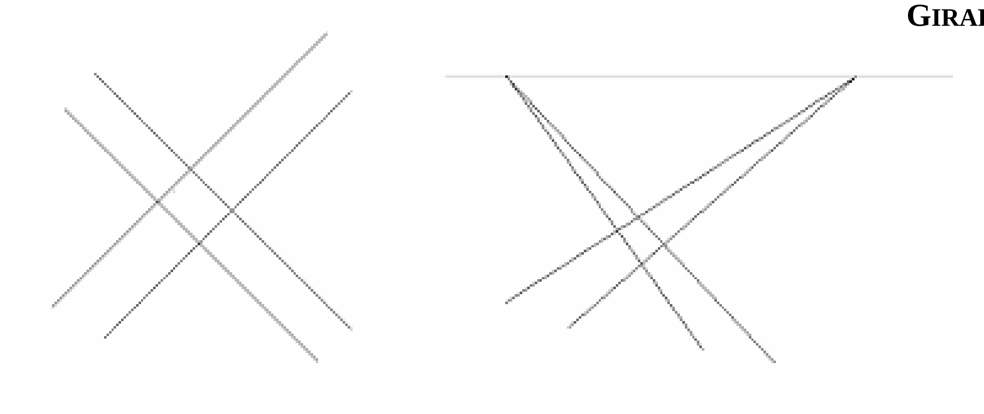
Man hat viele Jahrhunderte lang versucht, dieses Postulat zu beweisen, d. h. es aus den übrigen Axiomen EUKLIDS abzuleiten. Schon der Mathematiker und Astronom CLAUDIUS PTOLEMAIOS (85 – 165) ist daran gescheitert. Immer hat sich herausgestellt, dass in den Beweis unzulässigerweise neue, zum Parallelenpostulat äquivalente Annahmen eingeflossen sind, z. B. die, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, oder die von JOHN WALLIS aufgestellte Forderung, dass stets zwei ähnliche, aber nicht kongruente Dreiecke existieren. *Euclides ab omni naevo vindicatus*, EUKLID von jedem Makel gereinigt, heißt eine Schrift des Jesuitenpaters GIROLAMO SACCHERI (1667 – 1733), der aus der Annahme, das Parallelenpostulat sei falsch, scheinbar einen Widerspruch folgerte und es so bewies. ADRIEN MARIE LEGENDRE (1752 – 1833) lieferte 1833 für die Académie des Sciences eine Zusammenfassung der Beweise des Parallelenpostulats: Sechs seiner Auffassung nach strenge Beweise, von denen drei mit unendlichen Flächen arbeiten. Indessen hatten einige Mathematiker, als erste wohl CARL FRIEDRICH GAUSS, NIKOLAI IWANOWITSCH LOBATSCHEVSKI (1792 – 1856) und JANOS BOLYAI (1802 – 1860), um diese Zeit bereits erkannt, dass auch ohne das 5. Postulat widerspruchsfreie Geometrien möglich sind, die sogenannten nichteuklidischen Geometrien.

Geraden sind kürzeste Verbindungen ihrer Punkte. Geht man von der ebenen, »euklidischen« Fläche zur Oberfläche einer Kugel über, so findet man keine zwei Geraden, die sich nicht schneiden. In nebenstehender Abbildung besitzt das getönte Dreieck zwei rechte Winkel am Äquator, wozu noch der Winkel am Nordpol tritt. Die Winkelsumme im Dreieck ist auf der Kugeloberfläche stets größer als 180°, und sie hängt von der Größe des Dreiecks ab. Im Grenzfalle verschwindender Seitenlänge ergibt sich die euklidische Geometrie. Auf der Kugeloberfläche gibt es keine einzige Parallele zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt. Eine sattelartige Fläche erlaubt dagegen die Existenz von mehr als einer Parallelen durch einen nicht auf der Geraden liegenden Punkt. Die Frage nach der Existenz von unendlich langen Parallelen ist also nicht klar mit Ja oder Nein zu beantworten; vielmehr hängt die Antwort vom zugrundegelegten Substrat der Geometrie ab.

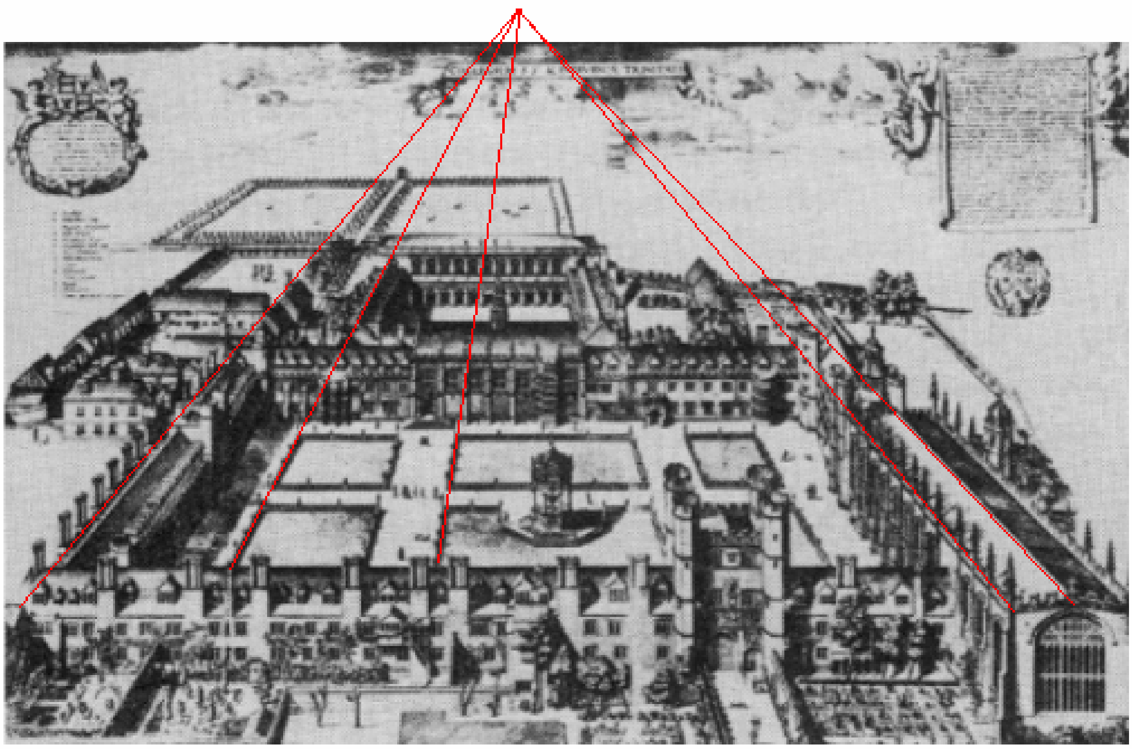


Der französische Mathematiker GIRARD DESARGUES (1593 – 1662) begründete die projektive Geometrie (die aber schon vorher von Zeichnern und Malern angewandt worden war). Alle Parallelen streben zu einem Punkt der Unendlichkeitslinie, wie man das auch aus der Anschauung von Straßen oder Eisenbahnschienen kennt, die schnurgerade bis zum Horizont verlaufen. Derart angelegte Bilder geben einen realistischen Eindruck des Winkelabstandes zwischen entfernten Punkten.

GIRARD DESARGUES

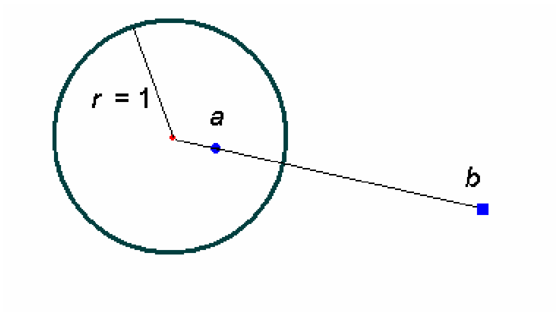


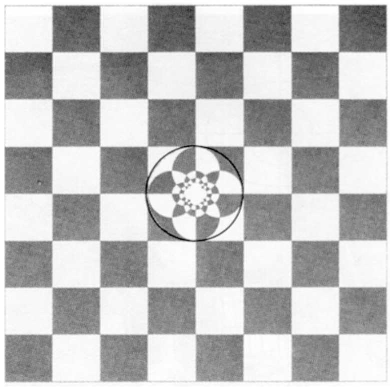
Daher wird die Technik in der realistischen Malerei angewendet. Das berühmte Trinity College, ISAAC NEWTONs Wirkungsstätte in Cambridge, ist exakt nach den Regeln der projektiven Geometrie gezeichnet.



Eine andere Darstellung des Unendlichen bietet sich durch Inversion. Spiegelung der natürlichen Zahlen an der Eins transformiert die Zahlen in ihre Stammbrüche, Spiegelung der Fläche am Einheitskreis (oder des Raumes an der Einheitskugel) überführt jede Strecke unter Beibehaltung der Richtung in ihren Kehrwert, das Unendliche auf den Nullpunkt und den Nullpunkt ins Unendliche.

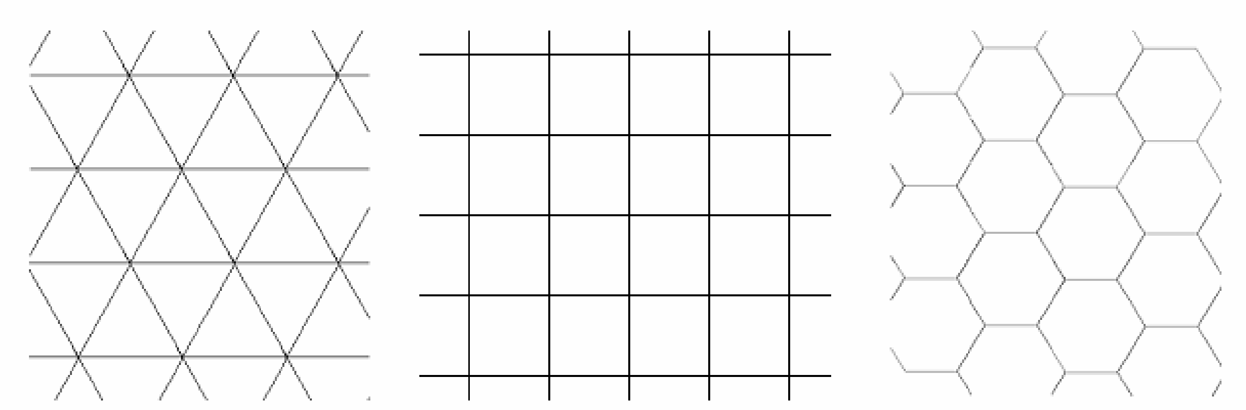
$b = 1/a \leftrightarrow 1/b = a$





Rechts ist ein endliches Schachbrett mit seiner Inversion abgebildet.

Die vollständige Parkettierung einer endlichen rechteckigen Fläche mit gleichseitigen Polygonen ist nur mit Quadraten lückenlos durchführbar, und auch nur dann, wenn Länge und Breite der Fläche in einem rationalen Verhältnis stehen. Hier wird das Problem ausnahmsweise erleichtert, wenn die Flächengröße ins Unendliche wächst. Die Parkettierung einer unendlichen Fläche ist mit gleichseitigen Dreiecken, Quadraten und Sechsecken möglich, wobei letztere wieder aus Dreiecken zusammengesetzt gedacht werden können.

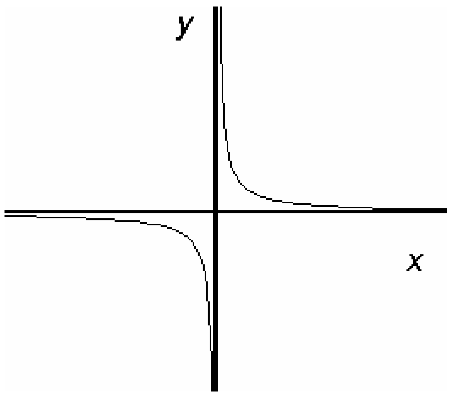


Die Sechseckstruktur besitzt dabei die im Verhältnis zur umschlossenen Fläche kürzeste Begrenzung. Bienen mit ihren sechseckigen Wabenstrukturen bauen also am ökonomischsten.

Parkettierungen unter Verwendung von verschiedenen gleichseitigen Polygonen liefern vielfältigere Muster.

Eine paradox anmutende Fläche ist die trichterförmige Oberfläche des Rotationshyperboloids. Sie ist unendlich groß. Um sie von außen anzustreichen, bräuchte man unendlich viel Farbe. Streicht man dagegen ihre Innenseite an, so kommt man mit endlich viel Farbe aus – sogar wenn man den ganzen Trichter füllt, denn das Rotationshyperboloid besitzt nur ein endliches Volumen. Das Paradoxon klärt sich dadurch auf, dass für den äußeren Anstrich stillschweigend eine konstante, endliche Dicke der Farbschicht vorausgesetzt wird – und sei sie auch noch so dünn. Der innere Anstrich dagegen wird zur Spitze hin zwangsweise immer dünner.

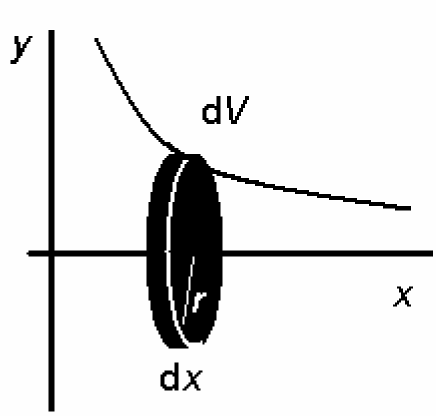
Das Paradoxon des Rotationshyperboloids



Eine Hyperbel besitzt die Gleichung $y = 1/x$. Rotation des rechten Zweiges um die x-Achse ergibt einen trichterförmigen Körper mit dem Radius

$$r = 1/x.$$

Sein Volumen erhält man aus der Integration des differentiellen Volumenelementes dV über x. Beginnt man nicht bei $x = 0$, sondern bei irgend einem größeren Wert, z. B. bei $x = 1$, so findet man ein endliches Volumen



$$\mathrm{d}V = \pi r^2 \mathrm{d}x$$

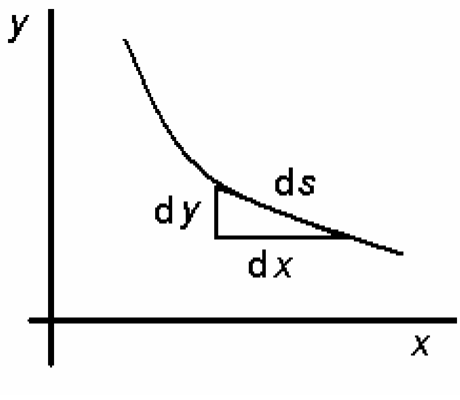
$$V = \pi\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \pi\left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = \pi.$$

Um die Größe der Mantelfläche A abzuschätzen, bestimmen wir zunächst die Bogenlänge nach PYTHAGORAS:

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$$

$$= (\mathrm{d}x)^2\,[1 + (\mathrm{d}y)^2/(\mathrm{d}x^2)]$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}s = \mathrm{d}x\sqrt{1+y'^2} \geq \mathrm{d}x$$



$$\mathrm{d}A = 2\pi r\mathrm{d}s \geq 2\pi r\mathrm{d}x$$

$$A \geq 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2\pi\left[\ln x\right]_1^\infty = \infty$$

Mir unterlag es keinem Zweifel, daß ... die letzten oder eigentlichen einfachen Elemente der Materie in aktual unendlicher Zahl vorauszusetzen und in bezug auf das Räumliche als völlig ausdehnungslos und streng punktuell zu betrachten sind.

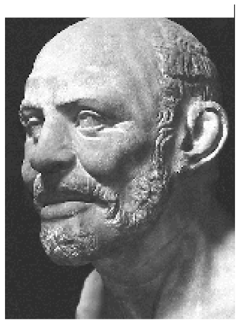
GEORG CANTOR

VI Mikroskopisch

Gibt es etwas unendlich Kleines? ANAXAGORAS (500 – 428) – Lehrer in Athen, wegen Gottlosigkeit angeklagt, musste er fliehen – verneinte dies: »Von dem Kleinen gibt es kein Allerkleinstes, sondern immer noch ein Kleineres. Denn es ist unmöglich, dass das Seiende (durch Teilung) aufhört zu sein.«

EMPEDOKLES

EMPEDOKLES (483 – 425) – griechischer Naturphilosoph, Wanderarzt und Politiker, vom Volk fast vergöttert, stürzte sich der Legende nach in den Krater des Ätna. – Er begründete die Lehre von den vier unvergänglichen Elementen (Feuer, Wasser, Luft, Erde), aus denen alles entsteht, vermittelt durch die Grundkräfte Liebe und Hass (Anziehung und Abstoßung). Entstehen und Vergehen sind hierbei im Wesentlichen sich verändernde Mischungsverhältnisse und Mischungszustände

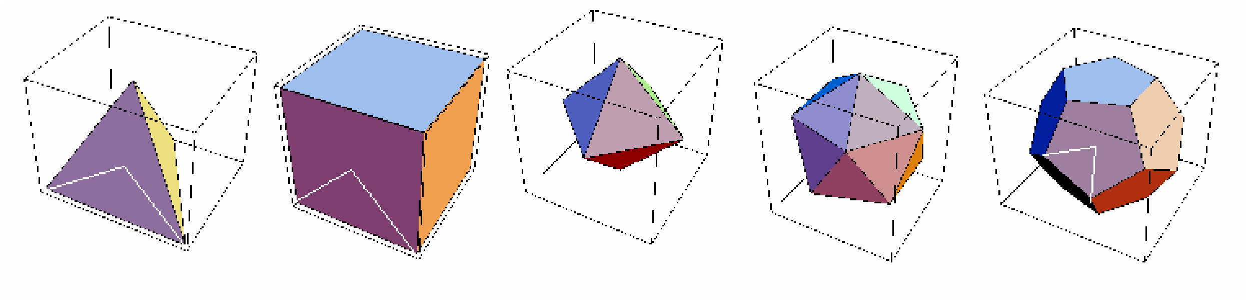


DEMOKRIT VON ABDERA

LEUKIPPOS (5. Jhdt. v. Chr.) gilt als Begründer des Atomismus und Entdecker des Kausalitätsprinzips. Sein Schüler DEMOKRIT VON ABDERA (470 – 380), einer der größten Philosophen des Altertums, stand mit ANAXAGORAS in Kontakt, löste die Frage nach dem Urgrund des Seins mit Hilfe der Annahme unendlich vieler, unteilbarer, kleinster Teilchen, die er Atome (a-tomos = »unteilbar«) nannte

Die hohe Symmetrie der fünf regelmäßigen (d. h. von gleichseitigen Polygonen begrenzten) Polyeder prädestinierte sie in den Augen der Griechen als Träger der Materie, als Formen für die Atome der vier Elemente und des alles enthaltenden Alls (oder der *quinta essentia*, des alles tragenden und umfließenden Äthers). Diese fünf regelmäßigen Polyeder werden deshalb auch kosmische Körper genannt. Es sind dies: das Tetraeder (Feuer) mit vier gleichseitigen Dreiecken als Begrenzung, das Hexaeder, also der Würfel (Erde), das Oktaeder (Luft), zwei Pyramiden, die mit der quadratischen Grundfläche gegeneinander gestellt sind, das Ikosaeder (Wasser) mit 20 gleichseitigen Dreiecken und das Dodekaeder, dessen Oberfläche von 12 gleichseitigen Pentagonen gebildet wird.

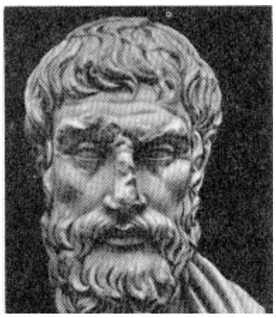
Schon EUKLID hat im 13. und letzten Buch seiner *Elemente* bewiesen, dass weitere regelmäßige Körper nicht existieren können. Zwei Flächen bilden höchstens eine Kante, aber keine Ecke. Für eine Ecke sind mindestens drei Flächen erforderlich. Und deren Winkelsumme muss kleiner als 360° sein, weil 360° schon den maximalen Winkel in einer Ebene ausmachen und daher keine Ecke bilden. (Die Würfelecke zum Beispiel besteht aus drei rechten Winkeln, also insgesamt 270°.)



Tetraeder Hexaeder Oktaeder Ikosaeder Dodekaeder

Im gleichseitigen Dreieck beträgt ein Winkel (180° – 360°/3) = 60°. (Die hier berechneten Winkel ergeben sich als Summe der beiden Basiswinkel in den durch Hilfslinien angedeuteten Dreiecken in der obigen Abbildung.) Drei, vier oder fünf solcher Dreiecke können aneinanderstoßend eine Ecke bilden (Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder). Erst mit dem sechsten wird die Winkelsumme 360° erreicht, so dass keine Ecke mehr entsteht. Der Winkel im gleichseitigen Viereck, dem Quadrat, beträgt (180° – 360°/4) = 90°; drei von ihnen können eine Ecke bilden, nämlich die Würfelecke. Der Winkel im gleichseitigen Pentagon beträgt (180° – 360°/5) = 108°. Drei Pentagone bilden eine Ecke im Dodekaeder. Der Winkel im Sechseck beträgt (180° – 360°/6) = 120°, schon drei von ihnen können sich nur in einer Ebene liegend berühren, und alle regelmäßigen Polygone mit noch mehr Ecken besitzen noch größere Winkel. Die fünf regelmäßigen Körper werden also niemals Zuwachs erhalten.

Aristoteles (384 – 322) hielt die Materie nicht für unbeschränkt teilbar. Bei der Materie muss es eine Grenze der Teilbarkeit geben. Jedes Ding hat einen bestimmten Größenbereich. Er gibt ein Beispiel: Eine Mannschaft kann ein Schiff fortschieben. Ein einzelner Mann kann es aber nicht. Die Qualität des Fortbewegens eines Schiffes duldet keine unbegrenzte Teilung.



Epikur von Samos

Epikur von Samos (341 – 270) – Philosoph, wenig beeinflusst von seinen Vorgängern Platon und Aristoteles – verhalf der Atomtheorie des Demokrit zu neuem Leben und erweiterte sie beträchtlich.

Pierre Gassendi (1592 – 1655) – Priester, Professor der Philosophie und Mathematik, zeigte, dass die Schallgeschwindigkeit von der Tonhöhe unabhängig ist, womit er Aristoteles' Meinung widerlegte – lehrte ein auf epikureischer Atomistik aufgebautes System und erneuerte so den über fast 2000 Jahre in Vergessenheit geratenen antiken Gedankens des Atomismus.

Pierre Bayle (1647 – 1706) – französischer Philosoph und führender Denker der Aufklärung, 1693 seiner Professur in Rotterdam entsetzt – hielt die Existenz des aktual Unendlichen für möglich: »Wenn die Materie ins Unendliche teilbar ist, so enthält sie wirklich eine unendliche Menge von Teilen, ein Unendliches, das real und aktual existiert.«

Pierre Bayle

Sir Robert Boyle (1627 – 1691) – überzeugter Anhänger der mechanistischen Atomistik (Atome sind homogene, vollkommen elastische Kugeln ohne innere Struktur) und Gegner der alchemistischen Lehre von den vier Elementen – definierte: »Jede nicht mehr in einfachere Bestandteile zerlegbare Substanz ist ein Element«.

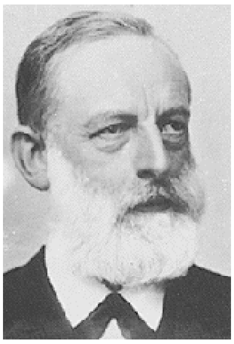
Robert Boyle

Roger Guiseppe Boscovich (1711 – 1787), Jesuit und Physiker und Astronom, hielt die Atome für punktförmige, ausdehnungslose Kraftzentren. Er prägte wesentlich den sogenannten Dynamismus, wonach nicht die Materie, sondern die Kräfte den Aufbau der Welt bestimmen.

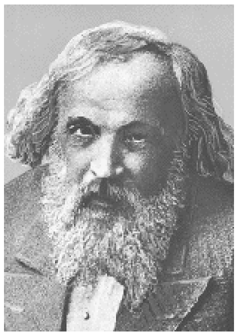
John Dalton (1766 – 1844) eignete sich als Autodidakt umfassende Kenntnisse in den Naturwissenschaften an, arbeitete bereits im Alter von 12 Jahren in Kendal hauptamtlich als Lehrer, postulierte 1803 die chemische Atomtheorie und erstellte die erste Tabelle von Atommassen (bezogen auf Wasserstoff), die sechs Elemente und 13 Verbindungen enthielt.

John Dalton

Dimitrij Iwanowitsch Mendelejew (1834 – 1907) und Julius Lothar Meyer (1830 – 1895) entdeckten 1869 unabhängig voneinander das Periodensystem der Elemente. Obwohl nach und nach unbestreitbare Evidenz für die Existenz kleinster Teilchen der Materie gesammelt worden war, gab es bis ins 20. Jahrhundert hinein noch Gegner der Atomvorstellung.



Julius Lothar Meyer



Dimitrij Iwanowitsch Mendelejew

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716): Es gibt keine zwei gleichen Blätter (im Garten von Herrenhausen), keine zwei gleichen Tropfen Milch oder Wasser. Das spricht gegen die Atomlehre. Die Regeln des Endlichen behalten im Unendlichen Geltung, wie wenn es Atome (Elemente der Natur von angebbarer fester Größe) gäbe, obgleich dies wegen der unbeschränkten Teilbarkeit der Materie nicht der Fall ist.

Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770 – 1831) zeigte als idealistischer Philosoph eine schroffe Ablehnung des Atomismus: »Die Atomisten denken zu materiell.«

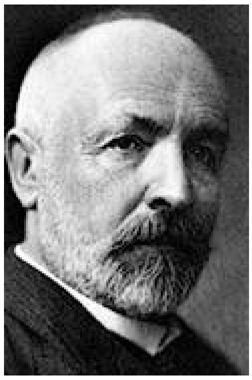
Georg Wilhelm Friedrich Hegel

Als *Positivismus* wird eine naturphilosophische Richtung bezeichnet, deren Anhänger nur Dinge anerkennen, die positiv beweisbar sind. Die früher rein hypothetische Existenz von Atomen wurde von ihnen noch gegen Ende des 19. Jahrhunderts bestritten.

ERNST MACH **WILHELM OSTWALD**

Ernst MACH (1838 – 1916), Physiker, Physiologe, Philosoph, und WILHELM OSTWALD (1853 – 1932), Chemiker, Philosoph, Nobelpreisträger, vertraten lange den Standpunkt: Atome sind Gedankendinge, denen keine Realität zukommt.

GEORG CANTOR (1845 – 1918), Mathematiker und Verfechter des aktual-Unendlichen, hielt ausdehnungslose Monaden für die Bausteine der Schöpfung: »... die, meiner festen Überzeugung nach, aktual-unendliche Zahl der geschaffenen Einzelwesen sowohl im Weltall wie auch schon auf unserer Erde und, aller Wahrscheinlichkeit nach, selbst in jedem noch so kleinen, ausgedehnten Teil des Raumes ...« Er lehnte die Atomvorstellung ab: »Die chemisch physikalischen Demokritischen Atome halte ich weder im Begriffe noch in der Wirklichkeit für existent, so viel Nützliches auch mit dieser Fiktion bis zu einer gewissen Grenze zu Wege gebracht wird.«



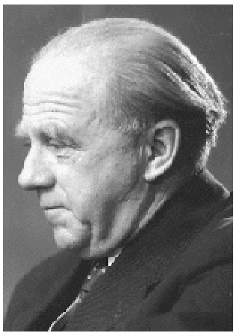
GEORG CANTOR

Ich »gehe von der Ansicht aus, mit welcher ich mich in Übereinstimmung mit der heutigen Physik zu befinden glaube, dass zwei spezifisch verschiedene, aufeinander wirkende Materien und demgemäß auch zwei verschiedene Klassen von Monaden nebeneinander zugrunde zu legen sind, die Körpermaterie und die Äthermaterie, die Körpermonaden und die Äthermonaden, indem diese beiden Substrate zur Erklärung der bisher beobachteten sinnfälligen Erscheinungen auszureichen scheinen. Auf diesem Standpunkt ergibt sich die erste Frage, woran aber weder Leibniz noch die Späteren gedacht haben, welche Mächtigkeiten jenen beiden Materien in Ansehung ihrer Elemente, sofern sie als Mengen von Körper- resp. Äthermonaden zu betrachten sind, zukommen; in dieser Beziehung habe ich mir schon vor Jahren die Hypothese gebildet, dass die Mächtigkeit der Körpermaterie diejenige ist, welche ich in meinen Untersuchungen die erste Mächtigkeit nenne, dass dagegen die Mächtigkeit der Äthermaterie die zweite ist.«

Die Existenz von ausgedehnten Atomen ist inzwischen nicht mehr zu leugnen: Die stöchiometrische Zusammensetzung der Stoffe, die Gasgesetze bezüglich Druck und Partialdrucken, Temperatur, Wärmeleitung, Viskosität, Schallgeschwindigkeit, die Brownsche Molekularbewegung, die Spektrallinien als Fingerabdruck eines chemischen Elementes, schließlich die Entdeckung der Elementarteilchen, der Radioaktivität der künstlichen Kernumwandlung und endlich der Nachweis einzelner Atome und Elementarteilchen lassen keinen Zweifel mehr zu. Man kennt sogar die ungefähre Anzahl von Protonen im gesamten Weltall: es sind ca. 10^{80}.

Allerdings hat sich das Bild des Atoms gewandelt, von DEMOKRITS anschaulichen Körperlein und BOYLES homogenen Kugeln hin zu NIELS BOHRS (1885 – 1962) komplex aufgebauten und keineswegs unteilbaren Systemen mit strukturiertem Kern und strukturierter Elektronenhülle, beides nicht aus greifbarer Materie, sondern nach LOUIS DE BOGLIE (1892 – 1987) aus Wellen bestehend, von WERNER HEISENBERG (1901 – 1976) mit einer Unbestimmtheitsrelation versehen – eine der tiefgreifendsten Umwälzungen unseres Weltbildes – die eine genaue Festlegung auf klassisch-physikalische Bahnen verbietet und das Kausalitätsprinzip außer Kraft setzt, wonach jeder Wirkung eine Ursache vorausgeht.






NIELS BOHR **LOUIS DE BROGLIE** **WERNER HEISENBERG** **MURRAY GELL-MANN**

Die Bausteine der Atome sind winzig klein. Die größeren unter ihnen, die Protonen und Neutronen, haben Durchmesser von einem Millionstel eines Millionstel Millimeters, die kleinsten, die Elektronen und Neutrinos haben ihre geometrischen Abmessungen noch nicht preisgegeben. Doch kennt man ihre sonstigen Eigenschaften wie Masse, Drehimpuls und elektrische Ladung sehr genau. Um nur den Hauch einer Vorstellung zu vermitteln: Die Anzahl von Wasserstoffatomen in einem Gramm Wasserstoff ist so groß, dass dieselbe Anzahl Getränkedosen, wollte man sie unvorschriftsmäßig auf dem Mond entsorgen, dessen Durchmesser verdoppeln würde.

$R_{\text{Mond}} = 1738\text{ km},\ V_{\text{Mond}} = 2{,}2\cdot 10^{19}\text{ m}^3$

$V_{\text{Dosen}} = 6\cdot 10^{23}\cdot 0{,}33\cdot 10^{-3}\text{ m}^3 = 2{,}0\cdot 10^{20}\text{ m}^3$

$R_{\text{Mond+Dosen}} = [(3/4\pi)\cdot(V_{\text{Mond}} + V_{\text{Dosen}})]^{1/3} = 3745\text{ km}$

(ohne Berücksichtigung der Zwischenräume!)

Das Unendliche haben wir hier nicht gefunden, doch sind wir noch nicht am Ende. Die Elementarteilchen sind wieder nicht die letzten unteilbaren Objekte, für die man sie eine Zeitlang hielt. Zumindest die größeren unter ihnen bestehen aus noch »elementareren« Objekten.

Die amerikanischen Physiker MURRAY GELL-MANN (∗1929) und GEORGE ZWEIG (∗1937) führten sie 1964 unabhängig voneinander ein. Die inzwischen allgemein als Quarks bezeichneten Bausteine der schweren Elementarteilchen bilden mit ihren Austauschteilchen, den Gluonen, und den anscheinend (oder scheinbar?) kompakten leichteren Elementarteilchen die bisher tiefste Schicht der Materie. Das besondere an ihnen ist das sogenannte Confinement, die Gefangenschaft. Die Quarks befinden sich nämlich in einem stark anwachsenden Potential, d. h. die Anziehungskraft zwischen ihnen nimmt mit der Entfernung zu. Deshalb sind sie niemals einzeln beobachtbar. Werden sie zu weit auseinander getrieben, so reißt ihre Verbindung zwar ab, aber an den Enden bilden sich neue Quarks. Die Situation ist ungefähr mit einem Stabmagneten vergleichbar, dessen Pole nicht isoliert werden können. Zerbricht man ihn, so hat man zwei Stabmagneten.

Ist damit nun das letzte Glied in der Kette erreicht? Wir wissen es nicht, aber ein Blick auf die Geschichte lässt Zweifel angebracht erscheinen.

Hinzu kommt das Problem der »dunklen Materie«, die vermutlich 90 % der gesamten Masse des Universums ausmacht. Ihre Struktur ist vollkommen unbekannt. Der von CANTOR angesprochene Äther existiert zwar definitiv nicht, aber das Vakuum, der Zustand absoluter Leere, von dem ARISTOTELES meinte, er könne gar nicht bestehen, und der seit OTTO VON GUERIKES (1602 – 1686) Versuchen mit den Magdeburger Halbkugeln belegt ist, hat sich als sehr belebter Zustand entpuppt, mit Nullpunktschwingungen, Vakuum-Energie, Feldquanten und Polarisierbarkeit, dessen potentiell (man sagt: virtuell) vorhandene Teilchen durch Energiezugabe in reale Materie umgewandelt werden können. Trotzdem ist es so gut wie ausgeschlossen, dass CANTORS ausdehnungslose Monaden in aktual unendlich großer Zahl existieren. Mit Masse und Energie wissen die Physiker umzugehen. Sollte auch nur ein ganz kleiner Teil auf das Volumen Null beschränkt sein, so würde das unendlich große Dichte oder Energiedichte bedeuten, und das ist nach unserem Wissen über die Physik ausgeschlossen.

Wir können aber beweisen, dass die Hierarchie des Immerkleineren sich nicht unendlich fortsetzt. Das kann allerdings nicht aus den Naturkonstanten allein geschehen. Zwar wird angenommen, dass die kleinste physikalisch sinnvolle Zeiteinheit von 10^{-44} s, die sogenannte PLANCKzeit, aus einer geeigneten Kombination der wichtigsten Naturkonstanten PLANCKsches Wirkungsquantum h, Gravitationskonstante G und Lichtgeschwindigkeit c mit der Dimension Zeit folgt (s. S. 66). Doch ergibt eine ganz ähnliche Kombination eine Masse von $2{,}2\cdot 10^{-8}$ kg (s. S. 66), die schon mit einer empfindlichen Analysenwaage messbar und ganz gewiss nicht die kleinst mögliche ist.

Aber eine andere Überlegung führt uns zum Ziel. Eine physikalisch sinnvolle Strecke kann man mit der Wellenlänge $\lambda = c/f$ eines Photons der Frequenz f und der Energie hf identifizieren. Das Photon mit der kürzest möglichen Wellenlänge erhielten wir, wenn es uns gelänge, die gesamte Energie $E = mc^2$ des Universums zu einem Photon zu vereinigen. Mit der Masse $m = 5\cdot 10^{55}$ g ergibt sich die Wellenlänge des Photons zu

$$\lambda \geq h/mc = 4{,}4\cdot 10^{-95}\ \text{m}.$$

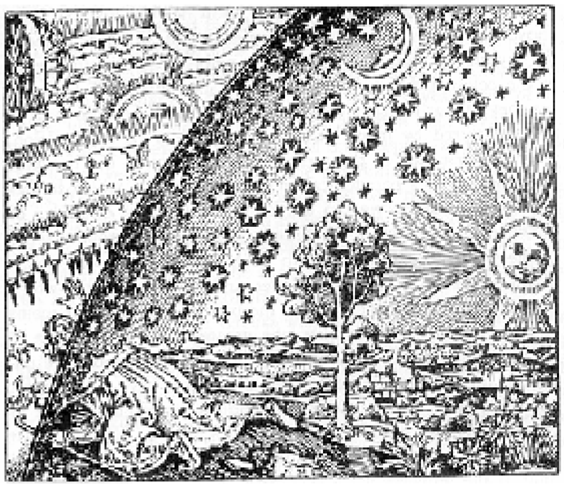
Doch auch eine um viele Größenordnungen größere Masse würde zu einer endlichen Wellenlänge führen, ganz abgesehen davon, dass es sich hier nur um eine gewaltig übertreibende Abschätzung handelt.

Weltraum ist eine unermessliche und grenzenlose Leere, und darin existieren unendlich viele Welten, die unserer ähnlich sind.

GIORDANO BRUNO

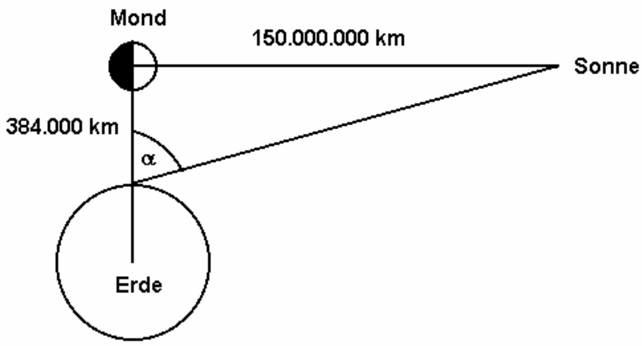
VII Kosmisch

Das Wort *Kosmos* kommt aus dem Griechischen und bedeutet eigentlich Ordnung und Anstand. Für uns heißt es Weltall, Universum. Wir wollen jetzt untersuchen, ob wir im Kosmos oder seinen Eigenschaften das Unendliche finden können und wie die Gelehrten zu verschiedenen Zeiten darüber gedacht haben.



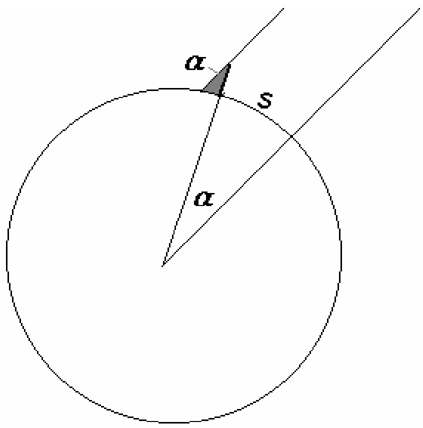
Der schon zitierte ANAXAGORAS hat sich nicht nur negativ über die Existenz eines Kleinsten geäußert, sondern hinzugefügt: »Aber auch von dem Großen gibt es immer noch ein Größeres.« Und sein Zeitgenosse EMPEDOKLES hielt aus Gründen, die wir nicht kennen, das Universum für dreimal so groß wie das System Erde-Mond. Der Atomist DEMOKRIT VON ABDERA hat seine Aufmerksamkeit nicht allein dem Mikrokosmos zugewandt. Er sah als erster die Milchstraße als aus zahlreichen Sternen bestehend an. ARISTOTELES hatte bereits ein fortgeschrittenes Verständnis für die Verhältnisse im Kosmos: Die Erde ist verschwindend klein im Verhältnis zum Universum. Sie steht in seinem Zentrum. Sie ist kugelförmig, weil immer neue Sterne auftauchen, wenn man nach Süden geht.

ARISTARCH VON SAMOS (310 – 230) – vielleicht mit ARCHIMEDES persönlich bekannt, jedenfalls von diesem zitiert – war wohl der erste und für lange Zeit einzige Verfechter eines heliozentrischen Systems. Seine Werke sind zwar verschollen, aber man weiß, dass er das Verhältnis zwischen Sonnenabstand und Mondabstand durch Messung des Winkels $\alpha = 87°$ bei genau Halbmond bestimmt hat (s. die Zeichnung rechts). Sein Ergebnis, tan $87° = 19 : 1$, galt bis KEPLER, der den sehr schwer bestimmbaren, mit 89°51' von 90° kaum abweichenden Winkel α genauer messen konnte. KEPLER fand das Abstandsverhältnis 380 : 1. ARISTARCH schätzte auch schon den Abstand zwischen Erde und Mond recht genau ab, auf – in unseren Einheiten – etwa 500.000 km. Den Sonnendurchmesser gab er mit 7 Erddurchmessern allerdings viel zu niedrig an; statt 90.000 km beträgt er 1.400.000 km. Aus der fehlenden Aberration, also der Gleichheit der zirkumpolaren Fixsternkonstellation in Sommer und Winter, schloss er darauf, dass die Fixsterne sehr weit entfernt sein müssen.



ERATOSTHENES (280 – 200), geboren in Cyrene (heute Schahhat in Libyen), wurde nach einer philosophischen Ausbildung in Alexandria und Athen zum Vorsteher des Museions in Alexandria und zum Erzieher des Kronprinzen berufen. Nach Erblindung wählte er den Tod durch Verhungern. ERATOSTHENES war – hierin etwa vergleichbar mit LEIBNIZ – ein Universalgelehrter, Philosoph, Mathematiker und Astronom. Er fand das Sieb des ERATOSTHENES, die bis heute gebräuchliche Methode zur Ermittlung von Primzahlen, sowie eine Methode zur bewegungsmathematischen Lösung des klassischen Problems der Würfelverdopplung (Bestimmung der Kubikwurzel aus 2). Er soll bereits den vierjährigen Schaltjahreszyklus eingeführt haben. Er begründete die wissenschaftliche Geographie, schrieb über Klimazonen und Mitternachtssonne, maß die Schiefe der Ekliptik und veröffentlichte einen Katalog mit 675 Sternen.

Seine berühmteste Leistung ist die Messung des Erdumfangs: Aus Syene, dem heutigen Assuan, das mit 24° nördlicher Breite sehr nahe am Wendekreis liegt, war bekannt, dass die Sonne genau zu Sommeranfang am Mittag den Boden eines tiefen Brunnens trifft. Aus der zum gleichen Zeitpunkt in Alexandria (31°) gemessenen Schattenlänge ergibt sich der Winkel $\alpha = 7°$, und mit der ziemlich genau in Nord-Süd-Richtung verlaufenden Strecke *s* zwischen Alexandria und Syene kann der Erdumfang *U* berechnet werden. ERATOSTHENES fand *U* = 252000 *Stadien*. Leider ist uns die genaue Länge eines *Stadions* nicht bekannt, vermutlich betrug sie aber 162 m. Damit ergibt sich der sehr gute Wert von ca. 41000 km, der fast 2000 Jahre lang unübertroffen blieb (allerdings ebenso wie das Wissen um die Kugelgestalt der Erde bald wieder in Vergessenheit geriet) und erst 1670 mit *U* = 39800 km verbessert werden konnte. Der genaue Umfang, über die Pole gemessen, beträgt 40009 km.



TITUS LUCRETIUS CARUS (95 – 55), kurz LUKREZ, von EPIKUR geprägter lateinischer Dichter und Philosoph, schrieb das bedeutendste Lehrgedicht des Altertums: *De rerum natura* (über die Natur). Er hielt das Universum in keiner Richtung für beschränkt. Sonst müsste es irgendwo eine Grenze besitzen. Aber ein Ding kann keine Grenze besitzen, wenn nicht etwas außerhalb existiert. In allen Dimensionen gleichermaßen, auf dieser oder jener Seite, oben und unten durch das Universum gibt es kein Ende.

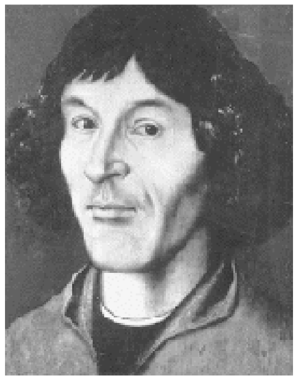
CLAUDIUS PTOLEMAIOS (85 – 165), Mathematiker und Astronom, wirkte wie EUKLID und ERATOSTHENES in Alexandria. Im *Almagest* (arabisiert aus dem griechischen *megiste techne* = größte Kunst) berechnete er die Planetenbahnen in seinem geozentrischen Weltbild, das über tausend Jahre lang gültig blieb. NICOLE VON ORESME (1320 – 1382), Theologe und Mathematiker, verwarf allerdings bereits das ptolemäische Weltbild und lehrte die Drehung der Erde, um die Bewegung der Sterne zu erklären. Ähnliche Vorstellungen erörterte JOHANNES BURIDAN. Doch waren dies ausgesprochene Einzelmeinungen.

CLAUDIUS PTOLEMAIOS

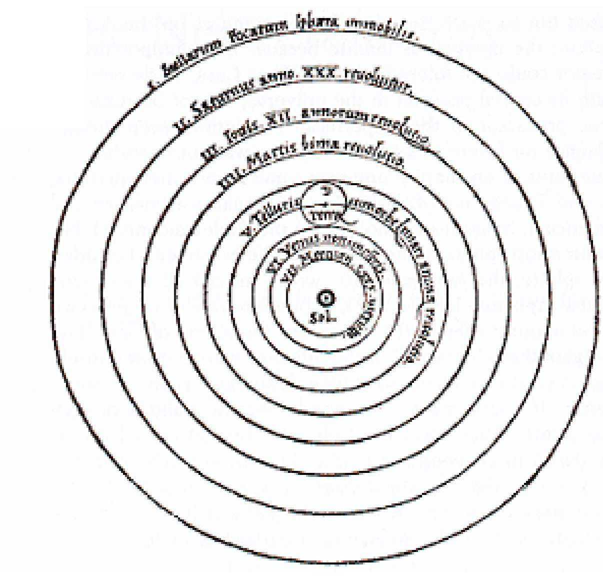
NIKOLAUS CUSANUS (1401 – 1464), ebenfalls Theologe und Mathematiker, stellte die noch heute plausibel erscheinende Forderung nach Homogenität und Isotropie des Weltalls auf:

> Das Universum ist endlos.
> Es besitzt daher kein Zentrum.
> Es sieht von allen Punkten gleich aus.

NIKOLAUS CUSANUS



NICOLAUS COPERNIKUS



NICOLAUS COPERNIKUS (1473 – 1543) hatte die Grundzüge seines heliozentrischen Systems schon um 1510 entwickelt. Mit Hilfe der Zentralstellung der Sonne hoffte er, die Gott, dem vollkommensten Baumeister, würdige Harmonie des Weltbaues besser zu finden. 1543 erschien sein Werk *De revolutionibus orbium coelestum*, aus dem die oft reproduzierte Abbildung der Planetenbahnen stammt.

THOMAS DIGGES (1546 – 1595) griff die Idee auf und veröffentlichte das Copernikanische System inklusive der obigen Abbildung in seinem Buch *Infinite World* von 1576. Die Alternative zur Erdrotation, eine tägliche Drehung des ganzen Weltalls, repräsentiert durch die Fixsternspäre (*Primum mobile*), schloss er darin aus. »But there can be no movement of infinity and of an infinite body, and therefore no diurnal revolution of that vastest Primum mobile.«

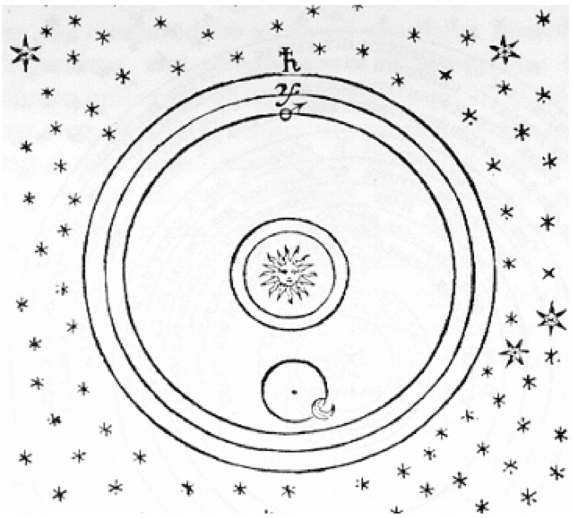
Tycho Brahe

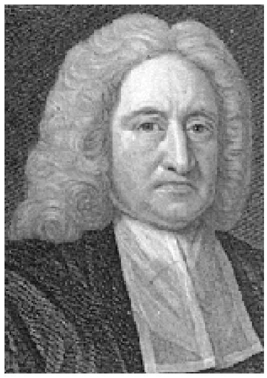
Tycho Brahe (1546 – 1601) – kaiserlicher Hofastronom in Prag, holte Kepler als Assistenten – konnte die Kreise des Copernikus nicht mit seinen Beobachtungen in Einklang bringen. Er entwickelte eine eigene Planetentheorie, nach der sich die Planeten zwar um die Sonne bewegen, die Sonne aber die ruhende Erde umkreist. Die bis dahin allgemein vertretene Anschauung von an Kristallsphären gehefteten Himmelskörpern lehnte er ab. Johannes Kepler konnte die Planetenbahnen dann als Ellipsen identifizieren, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Giordano Bruno

Giordano Bruno (1548 – 1600), Dominikanermönch, bedeutendster Naturphilosoph der Renaissance. Wegen Anklage der Ketzerei floh er nach Deutschland, Frankreich und England, wo er an verschiedenen Universitäten lehrte. Nach seiner Rückkehr fiel er 1592 der Inquisition in die Hände und wurde nach siebenjähriger Haft wegen Ketzerei in Rom auf dem Scheiterhaufen verbrannt. Er lehrte die unendliche Vielheit der Welten, von denen viele wie die unsrige bewohnt seien, in einem grenzenlosen Universum

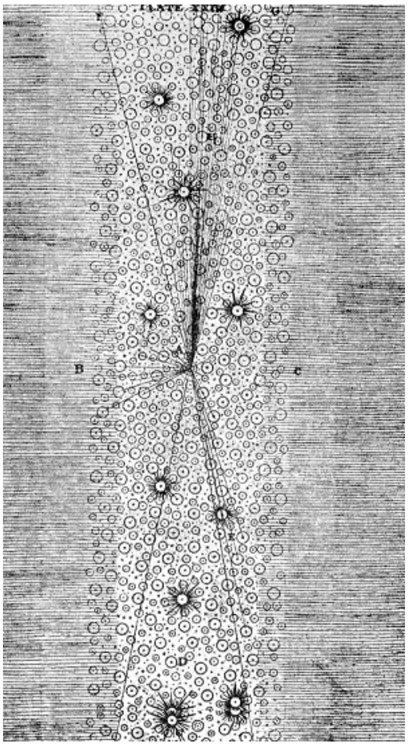
William Gilbert (1544 – 1603), englischer Physiker und Arzt, prägte den Begriff Elektrizität. Nach ihm ist die Gilbert-Epoche benannt, in der (vor ca. 4,5 – 3,3 Millionen Jahren) das Erdmagnetfeld die gegenüber den heutigen Verhältnissen umgekehrte Richtung aufwies. Gilbert veröffentlichte in seinem Buch *De mundo nostro sublunari* (Über unsere sublunare Welt) 1651 die nebenstehende Abbildung. Das heliozentrische System setzte sich durch.





Edmond Halley

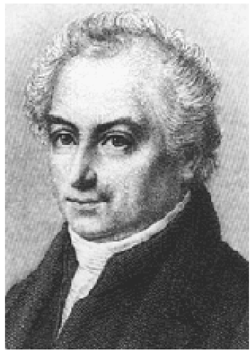
Edmond Halley (1656 – 1742), Astronomer Royal und Direktor des Greenwich-Observatoriums, stellte die Formel zur barometrischen Höhenbestimmung auf und berechnete die Bahnen von 24 Kometen. Drei von ihnen, die Kometen von 1531, 1607 und 1682, waren so ähnlich, dass er in ihnen einen einzigen Kometen sah (es ist der Halleysche Komet), der mit einer Periode von 76 Jahren in einer Ellipsenbahn um die Sonne läuft; er sagte dessen Wiederkehr für 1759 voraus, erlebte dieses Ereignis aber nicht mehr. Halley erkannte, dass ein unendlich ausgedehntes und mit Sternen besetztes Weltall zu einem glühenden Himmel führen müsste: »I have heard urged that if the number of Fixt Stars were more than finite, the whole superficies of their apparent Sphere would be luminous.« Wir werden dieses nach Olbers benannte Phänomen gleich besprechen.



Thomas Wright of Durham (1711 – 1786) gab mit der nebenstehenden Abbildung 1750 die erste Erklärung für den Anblick der Milchstraße als Beobachtungsergebnis innerhalb einer homogen mit Sternen besetzten Scheibe.

Immanuel Kant

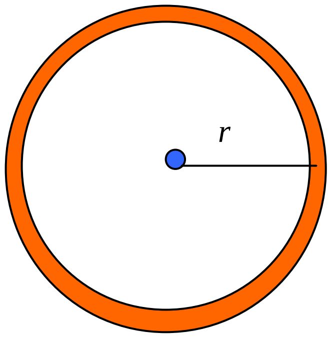
Immanuel Kant (1724 – 1804), Professor der Logik und Metaphysik, 1786 – 1788 Rektor der Universität in Königsberg, und Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827) begründeten mit der Nebularhypothese die wissenschaftliche Kosmogonie, die Lehre von der Entstehung des Weltalls. Danach bildet sich ein Planetensystem aus einer nebularen Materieverteilung. Kant vermutete bereits, dass die die Erdgezeiten hervorrufenden Kräfte des Mondes für eine Verlangsamung der Erdrotation verantwortlich sind. Er vermutete außerdem, das es viele Welteninseln (Galaxien) wie unsere gibt.



Heinrich Olbers

Heinrich Olbers (1758 – 1840), Astronom und Arzt in Bremen, kreierte das Olberssche Paradoxon, indem er unabhängig von Halley die einfache Frage aufwarf: Warum ist nachts der Himmel dunkel? Wenn das Weltall (im großen Maßstab) gleichmäßig mit Sternen vom Querschnitt A erfüllt ist, so ist die Zahl Δn der Sterne in einer Kugelschale der Dicke Δr im Abstand r proportional zum Volumen der Kugelschale $\Delta n \approx C{\cdot}r^2\Delta r$, wobei C eine positive Konstante ist. Der Raumwinkel, den ein Stern bedeckt, ist A/r^2. Der von allen Sternen aus der Kugelschale überdeckte Raumwinkel beträgt $\Delta\Omega \approx C{\cdot}r^2\Delta r{\cdot}A/r^2 = C{\cdot}A{\cdot}\Delta r$. Wenn wir Licht aus unendlich vielen Kugelschalen der Dicke Δr erhalten, so blicken wir in jeder Richtung auf einen Stern, selbst wenn viele von anderen verdeckt werden. Der Nachthimmel dürfte also niemals dunkel werden.

Die Lösung dieses Paradoxons liegt in der Endlichkeit und in der Expansion des Weltalls begründet. Aufgrund der Endlichkeit können wir nicht beliebig viele Kugelschalen der Dicke Δr verwenden. Je weiter ein Stern von uns entfernt ist, umso schneller bewegt er sich von uns fort. Daraus resultiert eine auf dem Doppler-Effekt basierende Rotverschiebung des Lichtes. Wie der Ton einer sich entfernenden Schallquelle tiefer wird, so wird das bei uns ankommende Licht energieärmer, weil zum langwelligen, roten Teil des Spektrums hin verschoben, und im Extremfall als Infrarotstrahlung sogar unsichtbar.



Das endliche Weltall wird nicht durch eine Lukrezische Wand begrenzt, sondern es ist ein unbegrenzter gekrümmter Raum, so wie die Kugeloberfläche eine unbegrenzte gekrümmte Ebene ist (s. Kap. V). Es expandiert seit etwa $13{,}7{\cdot}10^9$ Jahren und ist damit $4{,}3{\cdot}10^{17}$ Sekunden alt (daher die im Kasten auf S. 13 verwandte Zahl).

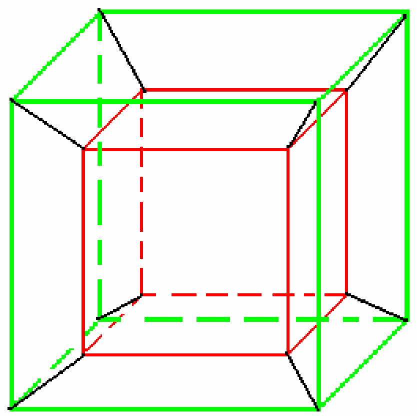
Etwas n-dimensionale Geometrie des Würfels

Sei a die Kantenlänge.

Ein nulldimensionales Intervall ist der Nullpunkt 0.
Ein eindimensionales Intervall ist die Menge aller x mit $0 \le x \le a$, also $\{x \mid 0 \le x \le a\}$.
Ein zweidimensionales Intervall ist die Menge $\{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 \le a, 0 \le x_2 \le a\}$.
Ein dreidimensionales Intervall ist die Menge $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \le x_\nu \le a, \nu = 1, 2, 3\}$.
Ein vierdimensionales Intervall ist die Menge $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 0 \le x_\nu \le a, \nu = 1, 2, 3, 4\}$.

Dimension n	Bezeichnung	Volumen	Eckenzahl	Oberfläche
0	Punkt	a^0	1	–
1	Intervall	a^1	2	$2a^0$
2	Quadrat	a^2	4	$4a^1$
3	Würfel	a^3	8	$6a^2$
4	vierdim. Würfel	a^4	16	$8a^3$
5	fünfdim. Würfel	a^5	32	$10a^4$
		$V = a^n$	$E = 2^n$	$O = 2\partial V/\partial a$

Die Diagonale ist d mit $d^2 = n \cdot a^2$.



Linienhafte Wesen, die auf der Oberfläche (der Kante) eines zweidimensionalen Quadrates leben, müssen für eine vollständige Weltumrundung die Strecke $4a$ zurücklegen. Der größte Abstand zweier Punkte ihrer Welt im Zweidimensionalen beträgt $a\sqrt{2}$.

Flächenhafte Wesen, die auf der Oberfläche eines dreidimensionalen Quadrates (Würfel) leben, müssen für eine vollständige Weltumrundung mindestens die Strecke $4a$ zurücklegen. Der größte Abstand zweier Punkte ihrer Welt im Dreidimensionalen beträgt $a\sqrt{3}$.

Ein vierdimensionaler Würfel (s. Abb.) kann als ein dreidimensionaler Würfel interpretiert werden, der sich auf der Zeitachse (in geeigneten Einheiten) um seine Kantenlänge a bewegt oder wächst oder schrumpft. Jede der sechs hierdurch kreierten Flächen des vierdimensionalen Würfels ist ein dreidimensionaler Würfel mit zwei Raumdimensionen und einer Zeitdimension; Ausgangszustand (in der Zeichnung z. B. der innere Würfel) und Endzustand (in der Zeichnung z. B. der äußere Würfel) sind normale Würfel mit drei Raumachsen. Räumliche Wesen, die auf der Oberfläche eines vierdimensionalen Würfels leben, bestehend aus 8 dreidimensionalen Würfeln (auch Hyperebenen genannt), müssen für eine Weltumrundung mindestens die Strecke $4a$ zurücklegen. Der größte Abstand zweier Punkte ihrer Welt im Vierdimensionalen beträgt $a\sqrt{4} = 2a$.

Etwas n-dimensionale Geometrie der Kugel

Sei r der Radius.

Eine n-dimensionale Kugel ist die Menge $\{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \mid 0 \leq \Sigma_\nu x_\nu^2 \leq r^2\}$.

Ihre Oberfläche besteht aus der Teilmenge $\{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \mid \Sigma_\nu x_\nu^2 = r^2\}$.

Ihr Volumen ist aus der Rekursionsformel $V_n = \int_{-r}^{r} V_{n\text{-}1}(\sqrt{r^2 - x^2})\,dx$

zu berechnen. Man beachte dabei, dass die Klammer Argumente enthält, keinen Faktor, dass also $V_{n\text{-}1}$ das Volumen der $(n\text{-}1)$-dimensionalen Kugel des Radius $(r^2 - x^2)^{1/2}$ darstellt. Die Oberfläche ergibt sich aus dem Volumen zu $O_n = \partial V_n/\partial r$.

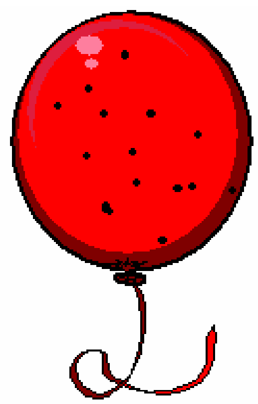
Dimension n	Bezeichnung	Volumen	Oberfläche
0	Punkt	r^0	–
1	Intervall	$2r^1$	$2r^0$
2	Kreis	πr^2	$2\pi r^1$
3	Kugel	$(4/3)\pi r^3$	$4\pi r^2$
4	vierdim. Kugel	$(1/2)\pi^2 r^4$	$2\pi^2 r^3$
5	fünfdim. Kugel	$(8/15)\pi^2 r^5$	$(8/3)\pi^2 r^4$

Linienhafte Wesen, die auf der Oberfläche (dem Umfang) eines zweidimensionalen Kreises leben, müssen für eine Weltumrundung die Strecke $2\pi r$ zurücklegen. Der größte Abstand zweier Punkte ihrer Welt im Zweidimensionalen beträgt $2r$.

Flächenhafte Wesen, die auf der Oberfläche eines dreidimensionalen Kreises (einer Kugel) leben, müssen für eine Weltumrundung (Großkreis) die Strecke $2\pi r$ zurücklegen. Der größte Abstand zweier Punkte ihrer Welt im Dreidimensionalen beträgt $2r$.

Räumliche Wesen, die auf der Oberfläche eines vierdimensionalen Kreises leben, müssen für eine Weltumrundung (Großkreis) die Strecke $2\pi r$ zurücklegen. Der größte Abstand zweier Punkte ihrer Welt im Vierdimensionalen beträgt $2r$.

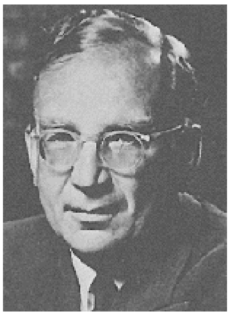
Im zweidimensionalen Analogon der Kugeloberfläche könnten wir unser Universum mit einem Luftballon vergleichen, der kontinuierlich aufgeblasen wird. Zweidimensionale Wesen, die auf seiner Oberfläche leben und die Dimension senkrecht dazu nicht wahrnehmen können, stellen fest, dass ihre Welt unbegrenzt ist und wächst. Markierte Punkte entfernen sich beständig voneinander, obwohl auf der Oberfläche kein Zentrum ausgezeichnet ist (wenn wir vom Lufteinlass einmal absehen).



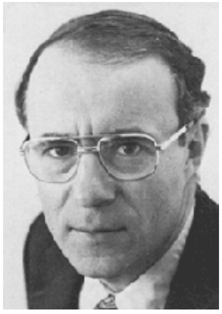
Woher kennen wir diese erstaunlichen Fakten?

Der Astronom EDWIN HUBBLE (1889 – 1953) fand 1929 bei der Beobachtung des Andromeda-Nebels, einer unserer Nachbargalaxien, die ersten Anhaltspunkte für die Expansion des Weltalls. Inzwischen ist sie durch astronomische Beobachtungen so gut gesichert wie nur wenig anderes.

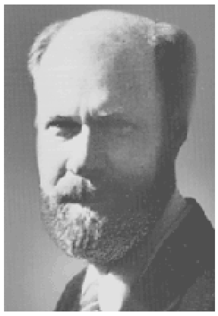
EDWIN HUBBLE



GEORGE GAMOW



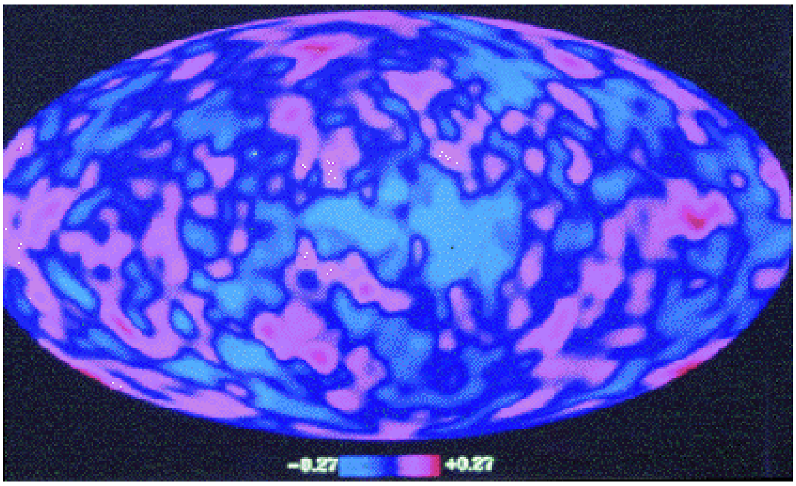
ARNO PENZIAS



ROBERT W. WILSON

Der Physiker GEORGE GAMOW (1904 – 1968) überlegte sich 1949, dass von der Geburt des Universums, falls sie denn mit einem Big Bang, einem großen Knall, einherging, noch Reststrahlung in Form von sogenannter kosmischer Hintergrundstrahlung vorhanden sein müsse, etwa so, wie beim Sprung ins Schwimmbecken Wellen entstehen, die noch lange nachweisbar sind. Diese Hintergrundstrahlung wurde 1965 von ARNO PENZIAS (∗1933) und ROBERT WOODROW WILSON (∗1936) entdeckt. Der Nachweis war deswegen besonders schwierig, weil diese Mikrowellenstrahlung das ganze Weltall erfüllt und isotrop aus allen Richtungen etwa gleichstark (oder besser gesagt gleichschwach) auf uns einströmt. Das Spektrum, die Verteilung der Wellenlängen, entspricht der Strahlung, die ein schwarzer Körper bei der Temperatur -270 °C emittiert. Und die Intensität ist extrem klein; nur etwa 375 Photonen sind in einem Kubikzentimeter enthalten. Als die Strahlung kurz nach dem Big Bang entstand, war sie natürlich viel heißer und intensiver. Die Abkühlung erfolgte aufgrund des DOPPLER-Effektes bei der Ausdehnung des Universums.

.



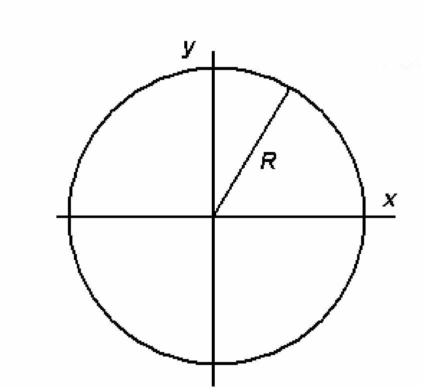
Das Bild zeigt eine Temperaturvariation der Hintergrundstrahlung um ±10 % über den ganzen Himmel aufgrund des nicht völlig homogenen Universums.

Die Metrik des Universums am eindimensionalen Beispiel

Betrachten wir eindimensionale Wesen, die auf einem Kreis mit dem endlichen Radius R leben. Alle Punkte dieses Kreises gehorchen der Gleichung

$$R^2 = x^2 + y^2.$$

Für kleine Abstände (gegen R) kann die Gleichung in differentieller Form verwendet werden



$$2y\mathrm{d}y = -2x\mathrm{d}x$$

und mit

$$y^2 = R^2 - x^2$$

folgt

$$\mathrm{d}y = \frac{-x\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Nehmen wir an, dass ein solches Wesen einen Maßstab der Länge ds zu Messzwecken auslegt.

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$$

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + \frac{x^2(\mathrm{d}x)^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2(\mathrm{d}x)^2}{R^2 - x^2} = \frac{(\mathrm{d}x)^2}{1 - x^2/R^2}$$

In der Nähe des Pols, bei $x = 0$, ist die Metrik dieselbe, wie sie ein eindimensionales Wesen erwartet, nämlich

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x.$$

Und da der Kreis keinen ausgezeichneten Punkt enthält, kann der Pol an jeden beliebigen Punkt des Kreises gelegt werden. Für größere Entfernungen spielt aber der Quotient x/R eine erhebliche Rolle

$$\mathrm{d}s > \mathrm{d}x.$$

Verwendet das Wesen viele Maßstäbe, so kann es einen Viertelkreis belegen. Trotz Hinzufügung von weiteren Maßstäben ergibt sich nun kein Fortschritt mehr in Richtung x. Mit einer noch größeren – aber immer noch endlichen – Anzahl von Maßstäben kann es sogar den ganzen Kreis belegen (was freilich nicht mehr durch die obige Gleichung beschrieben wird) und gelangt beim Fortschreiten in immer derselben Richtung wieder an den Ausgangspunkt, d. h. $\Sigma\mathrm{d}s = 2\pi R$ und $\Sigma\mathrm{d}x = 0$.

Es ist noch ungewiss, ob im wirklichen Universum das Analogon zu

$$(\mathrm{d}s)^2 = \frac{(\mathrm{d}x)^2}{1-(x/R)^2} \quad \text{oder zu} \quad (\mathrm{d}s)^2 = \frac{(\mathrm{d}x)^2}{1+(x/R)^2} \tag{7.1}$$

gültig ist. Die zweite Alternative würde eine sattelartig (hyperbolisch) gekrümmte und nicht geschlossene geometrische Struktur anzeigen.

Die Erforschung dieses inzwischen sehr großen und unbegrenzten, aber möglicherweise nicht unendlichen Raumes geschieht in der klassischen Astronomie durch Beobachtung im Bereich des sichtbares Lichtes, in den modernen Sparten der Astronomie über Infrarot-, Ultraviolett- und Röntgenstrahlung sowie den Nachweis von Neutrinos und – in naher Zukunft – von Gravitationswellen. Die Erkundung mit Hilfe von Raumsonden ist dagegen auf einen winzig kleinen Bereich beschränkt. Doch soll sie nicht unerwähnt bleiben, denn auch die folgenden Bilder vermitteln einen Hauch der Unendlichkeit.

Das von der Raumsonde Mariner 10 aufgenommene Foto rechts zeigt Erde und Mond aus einer Perspektive, wie sie noch kein Mensch mit eigenen Augen gesehen hat.

Am 3. März 1972 wurde Pioneer 10 von der NASA zu einem Flug ins Universum gestartet. Als die Raumsonde das Sonnensystem am 12. Juni 1983 verließ, titelte eine amerikanische Nachrichtenagentur: »The closest man has ever come to infinity.« Inzwischen dürfte das ganze Sonnensystem in ihrem Blickfeld liegen. (In der unteren Zeichnung sind die Planeten allerdings übertrieben groß dargestellt.)

Das letzte Signal von Pioneer 10 wurde am 22. Januar 2003 aus 11 Lichtstunden Entfernung aufgefangen (eine Lichtsekunde entspricht der Strecke 300000 km, also knapp der Entfernung zum Mond). Pioneer 10 fliegt mit einer Geschwindigkeit von 12 km/s auf den roten Riesenstern Aldebaran zu, der sich in 67 Lichtjahren Entfernung von der Erde im Sternbild Stier befindet. In etwa zwei Millionen Jahren wird sie ihn passieren und ihren Weg fortsetzen. Wahrscheinlich wird sie Menschheit und Erde überleben.

Tief ist der Brunnen der Vergangenheit. Sollte man ihn nicht unergründlich nennen?

THOMAS MANN

VIII Ewig

Und wie unergründlich ist erst die Zukunft, die vor uns liegt, die Ewigkeit, viel länger als die hinter uns liegende Vergangenheit? Hier haben wir das potentiell Unendliche, das unbegrenzte und niemals abgeschlossene Wachstum in seiner reinsten Form. Manche Philosophen nennen es auch schlechtes Unendliches oder synkategorematisches Unendliches. GEORG CANTOR bezeichnet es abwertend als das uneigentlich-Unendliche, doch wir werden sehen, dass er sich damit einer Untertreibung schuldig macht.

Ein altes Gleichnis für die Ewigkeit ist der Diamantberg, an dem alle 1000 Jahre eine Taube ihren Schnabel wetzt. Wenn der Berg abgetragen ist, dann ist die Ewigkeit noch nicht vorbei. In einem Gedicht von DANIEL WÜLFFER (1617 – 1685) heißt es:

O Ewigkeit, o Ewigkeit!
Wie lang bist du, o Ewigkeit!
Es trüge wohl ein Vögelein
Weg aller Berge Sand und Stein,
Wenn's nur käm' alle tausend Jahr:
Du Ewigkeit bleibst immerdar.

Wie lange würde ein Vöglein brauchen? Nehmen wir der Einfachheit halber einen pyramidenförmigen Berg mit der Grundfläche $A = (10\text{ km})^2$ und der Höhe $h = 6$ km an. Mit der Dichte des Diamanten $\rho = 3500\text{ kg/m}^3$ ergibt sich die Masse $M = \rho Ah/3 = 3500\cdot 200\cdot 10^9$ kg.

Weil Diamant sehr hart ist und das Vöglein vorsichtig wetzt, soll jedesmal nur ein Nanogramm, also 10^{-12} kg an seinem Schnabel hängen bleiben. Der Vorgang dauert demnach länger als 1000 Jahre $\cdot\, M / 10^{-12}$ kg $= 7\cdot 10^{29}$ Jahre oder 700 Quadrilliarden Jahre. Das ist in der Tat ein Zeitraum, gegen den sich das Alter unseres Universums wie ein Wimpernschlag ausnimmt. Aber die Ewigkeit ist es nicht. Wie wir weiter unten sehen werden, können wir noch weit größere Zeiträume überschauen.

Doch blicken wir zunächst in den Brunnen der Vergangenheit. Viele Mythologien beschreiben eine ewige Wiederkehr der Geschichte. In der germanische Götter- und Heldensage Edda heißt es: Da war nicht Erde unten noch oben Himmel. Gähnung grundlos doch Gras nirgends. ... Feuer schmolz das Eis. Der Riese Ymir entstand aus den Tropfen. Wie ernährte er sich? Es gab eine Kuh namens Audhumla. Wovon ernährte sie sich? Es gab außerdem salzige Steine. Und so geht die Sage weiter. Nach der letzten Schlacht der Götter und Riesen wird die Erde durch Feuer und Wasser zerstört. – Aber das Wasser weicht zurück, Thors Söhne entsteigen der Hölle mit dem Hammer ihres Vaters. Und das Ganze beginnt von vorn. Das ist nicht ausgeschlossen: Auf den *Big Bang* könnte ein *Big Crunch* folgen (S. 67) – da capo.

Wie war und wie wird es wirklich? Das können wir grob abschätzen, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

1) Die physikalischen Gesetze und Konstanten ändern sich nicht.

2) Die wichtigen Gesetze sind uns bekannt.

Für den ersten Punkt sprechen einige Fakten. So weiß man, dass im afrikanischen Staat Gabun vor rund zwei Milliarden Jahren ein natürlicher, also von selbst entstandener Reaktor arbeitete. Aus dem Isotopenverhältnis des dort gefundenen Materials kann man ablesen, dass sich das Verhältnis von elektrischer Coulombkraft und der im Innern der Atomkerne herrschenden Kernkraft um weniger 10^{-18} pro Jahr änderte, also um höchstens 10 Milliardstel im Verlauf der gesamten Geschichte des Universums. Nehmen wir auch den zweiten Punkt als gegeben an, so können wir davon ausgehen, dass die Geschichte mit dem sogenannten *Big Bang* begann.

Zeit nach dem Big Bang	Ereignisse
10^{-44} s	Was vorher war, ist unbekannt und wahrscheinlich undefiniert (siehe den Kasten PLANCKzeit und PLANCKmasse unten).
10^{-43} s	Die Ursuppe besteht hauptsächlich aus Strahlung.
10^{-35} s	Die Materie besteht aus Quarks und Leptonen.
10^{-10} s	Protonen und Neutronen werden gebildet.
1 s	Wasserstoff- und Heliumkerne sind im Verhältnis 10:1 gebildet, auch etwas Lithium.
3 Minuten	Die Materiebildung ist abgeschlossen.
300.000 Jahre	Entkopplung von Materie und Strahlung: Bildung von Atomen. Das bisher opake Weltall wird durchsichtig.
1 Mio. Jahre	Erste Sterne entstehen, sie synthetisieren schwerere Elemente.
700 Mio. Jahre	Galaxien haben sich gebildet.
9 Mrd. Jahre	Das Sonnensystem entsteht.
14 Mrd. Jahre	Atome treten zu Makromolekülen zusammen, die sich für intelligent erklären.

PLANCKzeit und PLANCKmasse

Man kann die wichtigsten Naturkonstanten zu einem Ausdruck zusammensetzen, der die Dimension »Zeit« besitzt und als kleinstes Zeitquantum angesehen wird, unterhalb dessen keine sinnvolle Beschreibung der Realität mehr möglich ist. Mit dem PLANCKschen Wirkungsquantum $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Js, der Gravitationskonstante $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$ und der Lichtgeschwindigkeit $c = 3{,}00\cdot10^{8}\ \mathrm{ms^{-1}}$ ergibt sich die nach MAX PLANCK (1858 – 1947) benannte

$$\text{PLANCKzeit} = \sqrt{\frac{hG}{2\pi c^5}} = 5{,}4\cdot10^{-44}\,\mathrm{s}$$

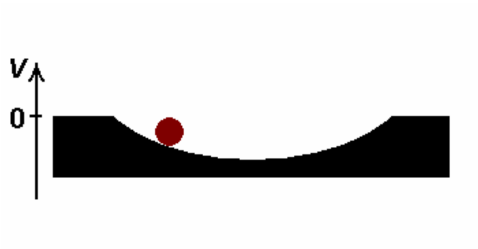
Allerdings kann man auf ähnliche Art auch eine Masse ausrechnen, die sicher keine untere Schranke für Massen darstellt

$$\text{PLANCKmasse} = \sqrt{\frac{hc}{2\pi G}} = 2{,}2\cdot10^{-8}\ \mathrm{kg}$$

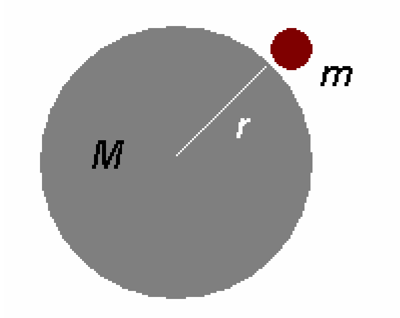
Das ist ein schlechter Prophet, der nur Vergangenes prophezeit.

Das Weltall expandiert seit ca. 13,7 Mrd. Jahren (nach anderen Modellen seit 14,5 Mrd. Jahren). Wie wird es weitergehen? Wird sich das Universum immer weiter ausdehnen, oder kommt es irgendwann zum Stillstand, um wie ein Luftballon, dem die Luft entweicht, wieder in sich zusammenzufallen und in einem *Big Crunch* zu versinken, aus dem es wie Phönix aus der Asche durch einen neuen Big Bang wieder ersteht?

Big Crunch?



Um nicht in die Tiefen der allgemeinen Relativitätstheorie steigen zu müssen, wollen wir mit den Mitteln der klassischen Physik zu erkunden versuchen, ob sich das Universum ewig ausdehnt. Wir betrachten dazu eine Murmel in einer Salatschüssel. Sie kann nur dann über den Rand entkommen, wenn ihre Gesamtenergie positiv ist, d. h. wenn ihre kinetische Energie größer ist als die potentielle Energie, die sie verliert, wenn sie vom Rand bis zur momentanen Position herunterrollt. Andernfalls ist sie in der Schüssel gefangen und kann nur eine auf das Schüsselinnere beschränkte, sogenannte gebundene Bewegung ausführen. Ebenso ist es für einen Himmelskörper, der einen Stern oder eine Galaxie der Masse M umkreist. Auch er führt eine gebundene Bewegung in einem beschränkten Raum aus, wenn seine Gesamtenergie nicht groß genug ist. Bei der Raumsonde Pioneer 10 zum Beispiel hat man dafür gesorgt, dass sie durch Swingby-Manöver von mehreren Planeten genug Energie aufnahm, um unser Sonnensystem verlassen zu können.



Die potentielle Energie V eines Himmelskörpers der Masse m ist nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz

$$V = -GmM/r, \qquad (8.1)$$

wobei G die Gravitationskonstante und r der Abstand der Schwerpunkte ist. Nehmen wir für M eine kugelförmige, homogene Masseverteilung mit Radius r und Dichte ρ an, so wird

$$V = -Gm\rho(4\pi/3)r^2.$$

Die kinetische Energie T des Himmelskörpers folgt aus seiner Geschwindigkeit v zu

$$T = (m/2)v^2. \qquad (8.2)$$

Nach HUBBLEs Beobachtungen entfernen sich die Sterne von uns mit einer Geschwindigkeit, die von ihrem Abstand r und der HUBBLE-Konstante H (ca. 15 km/s je Mio. Lichtjahre) abhängt

$$v = r\mathrm{H}.$$

Was hat das mit unserem Problem zu tun? Wir nehmen jetzt an, dass unsere Salatschüssel das ganze Universum ist, repräsentiert durch die Gravitationskraft von dessen Gesamtmasse *M*, die als homogen verteilt vorausgesetzt werden kann, wenn wir so große Räume betrachten, dass die bekannten Galaxien-Cluster darin als fein verteilter Staub untergehen. *M* soll auf den Himmelskörper der Masse *m* gravitativ einwirken. Dann ist

$$T = (m/2)r^2\mathrm{H}^2,$$

und die Gesamtenergie $E = T + V$ des Himmelskörpers ergibt sich zu

$$E = mr^2[(1/2)\mathrm{H}^2 - \mathrm{G}\rho(4\pi/3)] .$$

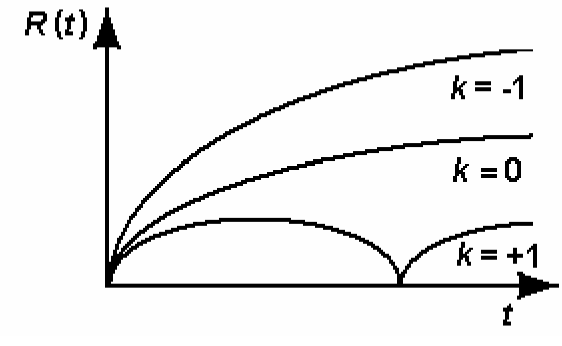
Die Bedingung $E > 0$ ist erfüllt, wenn der Wert der Klammer positiv ist. Dann kann ein Himmelskörper aus dem jetzigen Universum entkommen, d. h. das Universum kann und wird sich immer weiter ausdehnen. Wir erhalten als Bedingung für ein unendliches Universum die kritische Dichte

$$\rho_{\mathrm{krit}} < 3\mathrm{H}^2/8\pi\mathrm{G} = 5\cdot10^{-27}\ \mathrm{kgm}^{-3}.$$

Sie entspricht etwa der Masse von drei Wasserstoffatomen in einem Kubikmeter. Aus astronomischen Beobachtungen kann man abschätzen, dass unser Universum eine Gesamtmasse von etwa $5\cdot10^{55}$ g besitzt. Die leuchtende Materie macht dabei nur einen Anteil von 0,03 Wasserstoffatomen in einem Kubikmeter aus. Dazu kommt zwar noch ein größerer Anteil dunkler Materie, deren Beschaffenheit bislang vollkommen unbekannt ist, deren Existenz aber aus der Rotation von Galaxien geschlossen werden kann. Sie würden durch die Gravitationskraft der leuchtenden, sichtbaren Materie allein nicht zusammengehalten werden können, sondern müssten sich durch die Zentrifugalkraft längst aufgelöst haben. Trotzdem ist die mittlere Dichte des Universums nach den bisher vorliegenden Beobachtungen sehr wahrscheinlich kleiner als 0,3 ρ_{krit}, was eine ewig währende Expansion bedeutet.

Die oben abgeleitet Gleichung (7.1) kann auch in der Form

$$(\mathrm{d}s)^2 = \frac{(\mathrm{d}x)^2}{1 - kx^2/R^2}$$



geschrieben werden, wo entweder $k = 1$ oder $k = -1$ gesetzt wird. Im ersten Fall ergibt sich ein geschlossenes Universum, dessen Radius $R(t)$ ein Maximum erreicht und dann wieder abnimmt. Dieser Fall würde bei einer Dichte $\rho > \rho_{\mathrm{krit}}$ eintreten. Im zweiten Fall erfolgt wegen $\rho < \rho_{\mathrm{krit}}$ eine (potentiell) unendliche Expansion. Der Spezialfall $\rho = \rho_{\mathrm{krit}}$ entspricht ebenfalls einer unendlichen Expansion, die aber immer langsamer wird (unsere Kugel erreicht zwar den Schüsselrand bleibt aber darauf liegen). Dessen Metrik enthält den Parameter $k = 0$ und ist daher die Euklidische Metrik, die ein nicht gekrümmtes, »flaches« Universum beschreibt.

Schwarze Löcher

Gibt es Himmelskörper mit so starker Anziehungskraft, dass selbst Licht nicht von ihrer Oberfläche entweichen kann, die also unsichtbar sind? Die Existenz solcher schwarzen Löcher folgt aus der allgemeinen Relativitätstheorie von ALBERT EINSTEIN (1879 – 1955), und sie ist inzwischen auch experimentell ziemlich gut gesichert. Eines von ihnen befindet sich im Zentrum unserer Milchstraße.

Eine korrekte Beschreibung erfordert das ganze Instrumentarium der allgemeinen Relativitätstheorie, dessen Entwicklung den Rahmen dieses Skripts sprengen würde. Doch man kommt schon im Rahmen der NEWTONschen Mechanik zum richtigen Ergebnis.

Mit den Gleichungen (8.1) und (8.2) ergibt sich die Gesamtenergie eines Probekörpers zu

$$E = T + V = (m/2)v^2 - \mathrm{G}mM/r.$$

Wenn wir auf der Erdoberfläche einen Stein nach oben werfen oder eine Rakete starten, so führt eine positive Gesamtenergie E dazu, dass die Geschwindigkeit niemals Null wird, der Probekörper auch in »unendlich« großer Entfernung seinen Weg immer noch fortsetzt. Daraus lässt sich die erforderliche Geschwindigkeit, die sogenannte Entweichgeschwindigkeit v_0 für jeden Probekörper leicht berechnen, denn in obiger Gleichung kürzt sich seine Masse heraus und wir finden

$$v^2 \geq v_0^2 = 2\mathrm{G}M/r.$$

Die größtmögliche Geschwindigkeit ist die Lichtgeschwindigkeit. Wenn ein Stern die Masse M innerhalb eines Radius r vereinigt, so dass die Entweichgeschwindigkeit größer sein müsste

$$v_0 > \mathrm{c},$$

dann kann kein Körper und auch kein Photon mehr von der Oberfläche des Sterns aus seinen Einflussbereich verlassen. Der Stern wird also unsichtbar, zu einem schwarzen Loch, wenn er soweit kontrahiert, dass

$$r < 2\mathrm{G}M/\mathrm{c}^2. \tag{8.3}$$

Massereiche alte Sterne, deren Innendruck (aufgrund nachlassender Leuchtkraft sinkt und daher) die Gravitationskraft nicht mehr kompensieren kann, sterben als schwarze Löcher. Der Sonne wird das nicht passieren. Sie müsste bei ihrer Masse $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg einen Radius von 3 km unterschreiten. Ihr gegenwärtiger Radius beträgt 696000 km. Die Erde müsste sogar auf eine Kugel von weniger als 2 cm Durchmesser zusammenstürzen. Aber das schwarze Loch in unserer Galaxis besitzt mit 2,6 Mio. Sonnenmassen einen Radius von 8 Mio. km, und im Zentrum des sogenannten Virgo-Clusters sitzt sogar ein schwarzes Loch mit 8 Mrd. km Radius.

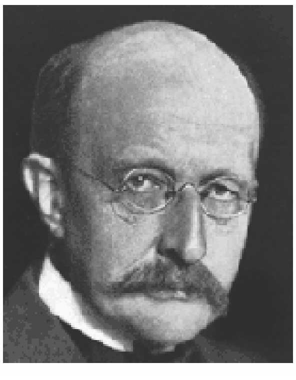
Sollte unser Universum geschlossen sein, so kann aus ihm auch nichts entweichen. Es müsste dann »von außen betrachtet« einem schwarzen Loch sehr ähnlich sehen.

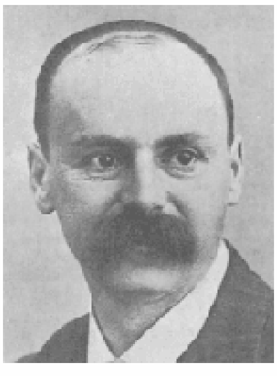
Sterne, die zum schwarzen Loch werden, kollabieren nach der klassischen Relativitätstheorie zu einem Punkt (also zum Volumen 0), womit eine aktual unendlich große Dichte $\rho = M/0$ erreicht wäre. Dass wir diese aktual unendlich große Dichte beobachten, ist wegen der Eigenschaften des schwarzen Loches unmöglich. Man sagt scherzhaft, es gibt einen universalen Zensor, der eine Beobachtung bizarrer Effekte wie Zeitumkehr oder unendliche Dichte verbietet. Doch wir wissen, dass die Relativitätstheorie für kleine Abstände und Zeiten durch die Quantentheorie ergänzt werden muss. Eine konsistente Verschmelzung beider Theorien ist zwar bisher nicht gelungen, aber es gilt als sicher, dass dann die theoretische Behauptung einer unendlich großen Dichte ungültig wird.

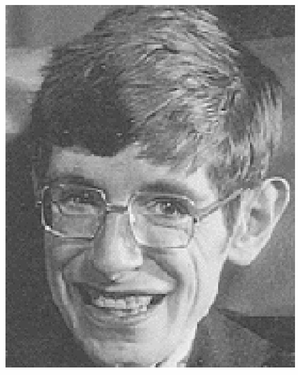
Verdampfen schwarzer Löcher

Schwarze Löcher sind doch nicht das allerletzte Stadium massereicher Sterne, denn auch hier sorgt die Quantentheorie für einen Ausweg. Weiter unten wird vom Verdampfen schwarzer Löcher gesprochen. Dies erfolgt an der Oberfläche, deren Radius von Karl Schwarzschild (1873 – 1916) im Rahmen einer Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen berechnet wurde $r_S = 2GM/c^2$. Er stimmt mit dem Ergebnis der Newtonschen Mechanik überein (vgl. 8.3).

Im Vakuum bilden sich für jeweils sehr kurze Zeit Teilchenpaare aus positiver und negativer Energie. Diese Vakuumfluktuationen werden möglich, wenn das Produkt aus Energie ΔE und Existenzdauer Δt kleiner ist als das Plancksche Wirkungsquantum h, denn nach der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation sind alle beobachtbaren Prozesse durch die Ungleichung $\Delta E \cdot \Delta t > h$ beschränkt. Diese sogenannten virtuellen Teilchenpaare vernichten sich gegenseitig wieder und nichts bleibt zurück. Nun mag es sich ereignen, dass ein Partner während seiner Existenz vom schwarzen Loch absorbiert wird und deswegen für die Vernichtung des anderen Partners nicht mehr zur Verfügung steht. Wird der Partner positiver Energie absorbiert, so wächst das schwarze Loch und damit die Wahrscheinlichkeit, den Partner negativer Energie ebenfalls einzufangen. Wird der Partner negativer Energie absorbiert, so schrumpft das schwarze Loch, und damit die Wahrscheinlichkeit, den Partner positiver Energie einzufangen. Insgesamt ist also die Wahrscheinlichkeit für ein Wachstum etwas geringer als für ein Schrumpfen des schwarzen Loches. Dieser Prozess wurde 1973 von Stephen Hawking (∗1942) entdeckt. Er wirkt sich nur bei schwarzen Löchern aus, die auf andere Weise nichts mehr aufnehmen können, denn es geht hierbei um Massenänderungen von etwa 10^{-30} kg bei Massen von mehr als 10^{30} kg, also um Radiusänderungen von deutlich weniger als 10^{-50} m.







Max Planck **Albert Einstein** **Karl Schwarzschild** **Stephen Hawking**

Einem Big Crunch könnte nichts und niemand im Universum entkommen. Wenn die Expansion aber ewig währt – könnte das Leben dann auch ewig währen?

Beschäftigen wir uns zunächst mit der näheren Zukunft der Menschheit.

Drei Milliarden Jahre hat die Entwicklung bis zum Mehrzeller und zum Menschen gedauert. Die DNS-Information des Genoms wuchs mit ca. 1 *bit* pro Jahrhundert und wächst seitdem mit ungefähr 1 *bit* pro Jahr. Alle Information des menschlichen Genoms passt in 30 Bücher. Seit wir in der Lage sind, Informationen in geschriebener Form an unsere Nachkommen weiterzugeben, ist die Menge der erzeugten Information sprunghaft auf über 1 Mio. *bit* pro Sekunde angestiegen. Heute werden 200.000 Bücher pro Jahr geschrieben. Im Jahr 1900 wurden 9000 wissenschaftliche Artikel veröffentlicht, 1950 waren es 90.000 und im Jahr 2000 waren es 900.000 Artikel. Ein solches exponentielles Wachstum auf fast allen Gebieten muss an Grenzen stoßen – schon rein räumlich. Ein weltweites Bevölkerungswachstum von gegenwärtig 1,9 % würde dazu führen, dass im Jahr 2600 die $5 \cdot 10^{14}$ Menschen Schulter an Schulter auf $5 \cdot 10^{14}$ m^2 Erdoberfläche ständen (einschließlich der Ozeane, Wüsten und Polkappen – so noch vorhanden) und der Stromverbrauch die Erde zum Glühen brächte. Doch schon vorher werden gesellschaftliche Krisen der Menschheit zu schaffen machen. Die folgende Tabelle enthält lediglich die als sicher voraussagbaren Krisen, nicht die durch neue Krankheiten, Epidemien, Technologien möglichen und nicht die Folgen von Konflikten, die sich aus der Verknappung der Ressourcen ergeben.

Jahr	Gesellschaftliche Krisen der Menschheit
2040	Eine Bevölkerung von über 10 Mrd. Menschen kann durch die Nahrungsproduktion auf der Erde nicht mehr ausreichend ernährt werden.
2100	Der Treibhauseffekt führt zu einer deutlichen Klimaänderung.
2250	Die fossilen Brennstoffe sowie die Stahlveredler (Cr, Mn, Ni, V) und die Edelmetalle werden erschöpft.
?	Schleichende Vergiftung von Luft, Wasser und Boden.

Dazu kommen die »kleinen« kosmischen Katastrophen durch Einschläge von Himmelskörpern mit Durchmessern von über einem Kilometer. Solche Ereignisse treten alle 50 bis 100 Mio. Jahre ein. Das Nördlinger Ries entstand auf diese Weise vor 15 Mio. Jahren. Das Ende der Kreidezeit vor 65 Mio. Jahren ist auf den Einschlag eines 10 km großen Planetoiden nahe der heutigen Stadt Chicxulub auf Yukatan zurückzuführen. Er riss mit der Gewalt von 1 Mrd. Megatonnen TNT (das entspricht der Sprengkraft von 50 Mio. Wasserstoffbomben) einen 180 km großen Krater in die Erdkruste. Die aufgewirbelten Staubmassen verursachten einen nuklearen Winter und führten zum Ende der Saurier. Vergleichbare Einschläge vor 170, 251, 310 und 420 Mio. Jahren sind nachweisbar. Alle Krater sind längst eingeebnet. Der Mond zeigt deutlichere Spuren, da seine Oberfläche nicht der Erosion preisgegeben ist.

Die größeren kosmischen Katastrophen setzen dem Leben auf der Erde ein sicheres Ende. Die wahrscheinlich erste davon besteht im Aufblähen der Sonne. Massereiche Sterne verzehren sich schnell – wie helle Kerzen – innerhalb von 5 bis 50 Mio. Jahren. Kleine Sterne von etwa einem Zehntel der Sonnenmasse leben dagegen mit 1000 Mrd. Jahren sehr lange. Die Sonne als immer noch vergleichsweise kleiner Stern nimmt einen mittleren Platz ein und besitzt eine Lebensdauer von 12,7 Mrd. Jahren. Das biologische Leben *auf der Erde* wird wegen der Veränderung der Sonnenaktivität mit Sicherheit nicht ewig währen.

Alter der Sonne in Jahren	Entwicklung der Sonne
4,55 Mrd.	Heutiger Zustand: Seit Jahrmilliarden kaum verändert strahlt die Sonne durch Fusion von Wasserstoff zu Helium erzeugte Energie ins All – in jeder Sekunde eine Masse von 4 Mio. Tonnen.
10,9 Mrd.	Die Leuchtkraft L der Sonne erreicht das 2,2-fache der heutigen Leuchtkraft L_0. Der zentrale Wasserstoff ist erschöpft.
11,64 Mrd.	Die Sonne bläht sich zum roten Riesen auf, $L = 2{,}7\ L_0$.
12,23 Mrd.	Der Sonnendurchmesser erreicht das 165-fache des heutigen Wertes von 1,4 Mio. km. Dadurch steigt die Leuchtkraft auf $L = 2300\ L_0$.
12,37 Mrd.	Auch die Fusion von Helium zu Kohlenstoff verlischt. Die Sonne wird zu einem weißen Zwerg.

Die Strahlungsleistung der Sonne

Die Sonne ist in guter Näherung ein »schwarzer Strahler« mit einer Oberflächentemperatur von T = 5785 Kelvin. Nach dem STEFAN-BOLTZMANN-Gesetz emittiert sie elektromagnetische Strahlung der Intensität $S = \sigma \cdot T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 5785^4\ \mathrm{Wm^{-2}} = 63{,}5\ \mathrm{MWm^{-2}}$.

Bei einem Radius von 696.000 km besitzt sie eine Oberfläche von $O = 6{,}1 \cdot 10^{18}\ \mathrm{m^2}$. Damit ergibt sich die gesamte emittierte Leistung, die Leuchtkraft $L_0 = O \cdot S = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ W und die in einer Sekunde emittierte Masse $\Delta m = 1\ \mathrm{s} \cdot L_0 / c^2 = 4{,}3 \cdot 10^9$ kg.

Jahr (n. Chr.)	Zustand des Lebens auf der Erde
600 Mio.	Ein Temperaturanstieg auf 60°C beendet das menschliche Leben.
800 Mio.	Auch die Insekten sterben.
900 Mio.	Überleben ist nur noch im Meer möglich. Neue Lebensformen entstehen.
1,1 Mrd.	Die Ozeane sind verdampft. Eine dichte Wolkendecke umgibt die Erde.
7 Mrd.	Bei einer Temperatur von über 1500 Kelvin schmelzen die Gesteine, und die Erdkruste verflüssigt sich wieder. Alle irdischen Zeugnisse der Erd- und Menschheitsgeschichte werden zerstört.
8 Mrd.	Auf der wieder erkalteten Erde könnte nochmals Leben entstehen.

Das irdische Leben könnte aber auf einen anderen Himmelskörper fliehen. Die technischen Möglichkeiten dazu werden – falls die Menschheit dann noch existiert – mit Sicherheit vorhanden sein. Um herauszufinden, ob diese Chance nur einen »kurzen« Aufschub oder doch eine Möglichkeit zu »sehr langfristigem« Überleben bietet, müssen wir vor allem die Entwicklung des Universums kennen. Die folgende Tabelle ist im Gegensatz zu den vorhergehenden sehr spekulativ. Darin ist zum Beispiel vom Proton-Zerfall die Rede, obwohl wir heute noch nicht einmal wissen, ob diese Voraussage der theoretischen Physik überhaupt eintritt oder nicht. Alles könnte auch ganz anders kommen, aber es gibt eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Vorhersagen der Tabelle eintreffen. Wie groß diese Wahrscheinlichkeit ist, soll hier nicht diskutiert werden, denn *Voraussagen sind immer unsicher, besonders dann, wenn sie die Zukunft betreffen.* (NIELS BOHR).

Jahr (seit dem Big Bang)	Die Zukunft des Universums (sehr spekulativ)
16 Mrd.	Milchstraße und Andromeda-Galaxie verschmelzen. Aufgrund der riesigen Abstände zwischen den Fixsternen hat das aber keine Auswirkungen.
20 Mrd.	Die Erdoberfläche glüht. Die Sonne verliert Masse. Dadurch vergrößert sich die Erdbahn bis zur heutigen Marsbahn, und die Erde entkommt knapp der Vernichtung. Werden die Jupitermonde bewohnbar?
10^{13}	Es gibt sauerstoffreiche Sterne mit isolierender Eiskruste.
10^{14}	Die meisten Sterne sind verloschen. Es gibt braune Zwerge, weiße Zwerge, Neutronensterne, schwarze Löcher. Durch Kollision kalter Körper entstehen hier und da rote Zwerge. Ein schwaches rötliches Glimmen erfüllt den Weltraum – mit weniger Leuchtkraft in der ganzen Galaxis als unsere Sonne zurzeit besitzt (S. 72). Alle 10^{12} Jahre erleuchtet eine Supernova den Raum für einige Wochen (verursacht durch eine Kollision weißer Zwerge) oder ein Stern wird geboren.
10^{15}	Die Erde wird bei einer Kollision der Sonne mit einem anderen Stern von der Sonne getrennt. (Es gibt eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Ereignis innerhalb von 1 Billiarde Jahren erfolgt.)
10^{20}	Andernfalls stürzt die Erde in die Sonne, da sie durch Gravitationsstrahlung ihre Energie in 100 Trillionen Jahren aufgezehrt hat.
$10^{20} – 10^{24}$	Die Galaxien lösen sich auf. Ihre Sterne entschwinden, »verdampfen« nach und nach in den dann riesigen intergalaktischen Raum – andere stürzen in schwarze Löcher.
$10^{32} – 10^{42}$	Der Protonenzerfall (wenn er denn vor sich geht) liefert Energie für weiße Zwerge: Ein Stern strahlt kaum mehr als eine Glühbirne, 400 Watt. Die Oberflächentemperatur sinkt unter 0,01 Kelvin. Masse wird dabei in Strahlung umgewandelt, sehr langsam zwar, aber in riesigen Zeiträumen doch nennenswert.
10^{65}	Aufgrund des Tunneleffektes verhält sich die Materie selbst im tiefgekühlten Universum wie eine Flüssigkeit. Keine Form ist beständig.
$10^{65} – 10^{100}$	Die schwarzen Löcher verdampfen (S. 70). Die Temperatur liegt unter 10^{-10} Kelvin. Wenn ein schwarzes Loch stirbt, gibt es ca. 10^{24} Joule an heißer Strahlung ab, weniger als 1 % der Sonnenstrahlung einer Sekunde (S. 72).
10^{1500}	Umwandlung aller Elemente durch Tunneleffekt in Eisen, das stabilste Element. Die Sterne sind kalte Eisenkugeln.
$10^{10^{26}}$	*Falls* die PLANCKmasse die Minimalmasse eines schwarzen Loches ist, kollabieren in dieser Zeit alle Sterne zu schwarzen Löchern und verdampfen anschließend (S. 70) in kurzen 10^{100} Jahren.
$10^{10^{76}}$	Falls die Minimalmasse wesentlich größer ist, haben Eisensterne genügend Zeit, sich durch den Tunneleffekt in Neutronensterne zu verwandeln, die als Supernovae explodieren können.
Danach ...	Alle gewöhnliche Materie ist vergangen. Es gibt Photonen mit riesigen Wellenlängen, Elektronen und Neutrinos mit riesigen Abständen, Positronium-Atome mit Radien, die größer sind als das heutige Universum.

Um die Frage zur Zukunft des Lebens beantworten zu können, benötigen wir außer dem Wissen in der obigen Tabelle noch eine Antwort auf die Frage, ob Leben und Bewusstsein nur möglich sind, wenn sie an organische Materie gekoppelt sind, oder ob *eine Struktur* – in welcher Form auch immer – ausreicht: *Kann ich ohne Verwendung organischer Materie eine Kopie von mir herstellen, die denkt sie wäre ich?*

Falls Leben an organische Materie gekoppelt ist, so ist es zeitlich beschränkt und wird vergehen. Organisches Leben benötigt Wärme, Wasser, ständige Zufuhr freier Energie. Es würde im geschlossenen Universum ($k = 1$, vgl. S. 68) bei der Rekontraktion gebraten werden oder im offenen Universum ($k = 0$ oder $k = -1$) erfrieren.

Wenn als Substrat des Lebens ein Computer oder eine selbstorganisierende kosmische Staubwolke oder ein Strahlungsfeld denkbar sind, so ist unbegrenztes Überleben im offenen Universum nicht von vornherein auszuschließen.

Als Medium der Wahl sollten Partikel dienen, die klein genug sind, um gegen den Zerfall in schwarze Löcher stabil zu sein. Selbstorganisation und Entropieabfuhr erfordern, dass die Temperatur des Organismus' größer als die Temperatur des Universums ist. Dafür ist Energie nötig, und die Energie im Universum ist endlich. Demzufolge kann das Leben zwar nur endlich lange währen. Aber es muss niemals ganz enden. Mit einer Strategie immer längerer Winterschlafphasen, in denen der Metabolismus auf tiefer Temperatur ruht und lediglich Abwärme von einer Antenne höherer Temperatur entsorgt wird, könnten Leben und Bewusstsein nach dem Rezept: $1 + 1/2 + 1/4 + ... = 2$ *im Prinzip* ewig währen!

Es bleibt die Frage, ob diese Perspektive erstrebenswert und ob sie wahrscheinlich ist. Das Erwachen für einen immer kürzeren Sekundenbruchteil in jedem Jahrtausend (hier denken wir wieder an die Taube) birgt sicher kaum noch Lebensqualität und wird auch von einer höchsttechnologisierten Zivilisation irgendwann nicht mehr bewältigt werden können – spätestens dann, wenn Wachzeiten von der Größenordnung der PLANCKzeit zu realisieren wären. (((Oder könnten virtuelle Teilchen das Substrat des Lebens bilden?)))

Doch die Wahrscheinlichkeit für das Ende, den Tod eines Wesens in einem bestimmten Zeitintervall Δt ist eine endliche Größe $w(\Delta t)$, auf welcher Basis auch immer das Wesen existieren mag. Die Wahrscheinlichkeit für den gleichzeitigen Tod aller N Mitglieder einer Zivilisation in demselben Zeitintervall Δt ist dann $W(\Delta t) = w^N(\Delta t)$.

Für unsere gegenwärtige Zivilisation können wir die Wahrscheinlichkeit abschätzen, durch einen Unfall innerhalb einer bestimmten Minute ums Leben zu kommen. (Natürlicher Tod oder kosmische und andere Katastrophen bleiben dabei unberücksichtigt.) Wenn jedes zweihundertste Leben durch Unfall endet und ein Leben im Durchschnitt $80 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60$ Minuten dauert, so wird $w(1\text{ min}) = 10^{-10}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass 6 Milliarden Menschen innerhalb von einer bestimmten Minute unabhängig voneinander durch individuelle Unfälle sterben und damit die menschliche Zivilisation ausgelöscht wird, ist $W(1\text{ min}) = 10^{-60.000.000.000}$. So gering dieser Wert auch ist – und selbst wenn er von der zukünftigen Zivilisation noch um ein Vielfaches vermindert werden könnte: das Ereignis wird mit Sicherheit eintreten, bevor die Ewigkeit *zu Ende* ist.

Aber vielleicht sind uns die wichtigsten physikalischen Gesetze noch gar nicht bekannt – und alles verläuft ganz anders.

Daß aber ein »Infinitum creatum« als existent angenommen werden muß, läßt sich mehrfach beweisen. ... Ein Beweis geht vom Gottesbegriff aus und schließt zunächst aus der höchsten Vollkommenheit Gottes Wesens auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum ordinatum, sodann aus seiner Allgüte und Herrlichkeit auf die Notwendigkeit der tatsächlich erfolgten Schöpfung eines Transfinitum.

GEORG CANTOR

IX Theologisch

Viele Philosophen haben den wichtigsten Anhaltspunkt für die aktuale Existenz des Unendlichen in Gott erblickt. Da der Gottesgedanke in früheren Zeiten allgemein akzeptiert war, wurde dieser Ansicht selten widersprochen. Wir wollen im Folgenden untersuchen, wie das Unendliche mit Gott in Zusammenhang gebracht werden kann, und Argumente und Meinungen dazu sammeln.

AURELIUS AUGUSTINUS

AURELIUS AUGUSTINUS (354 – 430) – einer der Kirchenväter, schrieb das Buch *De civitate dei* (Über den Gottesstaat) – meinte: »Vor der Erschaffung des Universums tat Gott nichts, gab es keine Zeit.« Spötter unterstellen ihm den Ausspruch: »Vorher machte er die Hölle für Leute, die unbotmäßige Fragen stellen.«

AUGUSTINUS fasst die natürlichen Zahlen als eine aktual unendliche Menge auf, die von Gott als Ganzes erkannt wird. »Indem nun der heilige Augustin die totale, intuitive Perzeption der Menge der natürlichen Zahlen ... a parte Dei behauptet, erkennt er zugleich diese Menge *formaliter* als ein aktual-unendliches Ganzes, als ein *Transfinitum* an.« (G. CANTOR).

BLAISE PASCAL

BLAISE PASCAL (1623 – 1662) – französischer Mathematiker, Erfinder einer Rechenmaschine und Unternehmer der ersten öffentlichen Omnibuslinie in Paris – ging nach einem zunächst eher sinnenfreudigen Leben in Spielerkreisen ins Kloster, wo er zur Selbstkasteiung einen Stachelgürtel (mit den Stacheln nach innen) trug. Er stellte die Lehre von den drei Ordnungen auf, nämlich: *Körper, Geist und Himmel* in der Welt stehen *unendlich Kleines, Endliches und unendlich Großes* in der Mathematik gegenüber.

ISAAC NEWTON

SIR ISAAC NEWTON (1642 – 1727) war ein sehr religiöser Mensch. Seine Leitsätze waren:

> Gott ist wichtiger als Physik oder Mathematik.
> Gott schuf die Welt so, wie wir sie jetzt sehen.
> Zeit und Raum sind absolut.
> Der Raum ist das Sensorium Gottes.
> Gott zieht die große Uhr immer wieder auf.

Über die Hälfte aller Bücher in NEWTONS Bibliothek behandeln Alchemie und Religion. Im Alter verfasste er nur noch Schriften zur Alchemie – z. B. über das Wachstum der Metalle – mit dem Ziel göttlicher Erkenntnis und religiöse Abhandlungen über die Chronologie der alten Königreiche, die Auslegung der Prophezeiungen Daniels und der Apokalypse des Johannes und – als Anglikaner – zum Kampf gegen den Katholizismus.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

Die drei Grade der Unendlichkeit von GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716) mit Gott als der höchsten Stufe hatten wir schon in Kapitel IV (S. 39) kennengelernt. Durch NEWTONS Vorstellung vom absoluten Raum als dem Sensorium Gottes wird Gott nach LEIBNIZ' Meinung zu sehr eingeschränkt. Auch braucht Gott die von ihm geschaffene große Uhr, das Universum, nicht mehr aufzuziehen. SAMUEL CLARKE, der Vertreter NEWTONS in der Korrespondenz mit LEIBNIZ, kommentierte polemisch: »Gott ist damit arbeitslos, LEIBNIZ nahe am Atheismus.«

GEORG CANTOR

GEORG CANTOR (1845 – 1918), Mathematiker, Begründer der Mengenlehre, Verfechter des aktual Unendlichen, auch als Überendliches oder Transfinites bezeichnet: »Dementsprechend unterscheide ich ein ›Infinitum aeternum increatum sive Absolutum‹, das sich auf Gott und seine Attribute bezieht, und ein ›Infinitum creatum sive Transfinitum‹, das überall dort ausgesagt wird, wo in der Natura creata ein Aktual-Unendliches konstatiert werden muß.« Gott bedeutet also das ewige, unerschaffene oder absolute Unendliche, wogegen jedes in der Natur vorkommende als erschaffenes Unendliches oder Transfinites bezeichnet wird.

CANTOR versuchte, seine Theorie des Transfiniten zunächst auch mit Hilfe Gottes zu beweisen, und befragte Theologen um ihre Meinung. Dazu hier ein Auszug aus CANTORS Briefwechsel mit Kardinal FRANZELIN.

Auszug aus einem Brief von GEORG CANTOR an Kardinal FRANZELIN:

Daß aber ein »Infinitum creatum« als existent angenommen werden muß, läßt sich mehrfach beweisen. Um Ew. ... nicht zu lange aufzuhalten, möchte ich mich in dieser Sache auf zwei kurze Andeutungen beschränken.

Ein Beweis geht vom Gottesbegriff aus und schließt zunächst aus der höchsten Vollkommenheit Gottes Wesens auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum ordinatum, sodann aus seiner Allgüte und Herrlichkeit auf die Notwendigkeit der tatsächlich erfolgten Schöpfung eines Transfinitum. Ein anderer Beweis zeigt a posteriori, daß die Annahme eines Transfinitum in natura naturata eine bessere, weil vollkommenere Erklärung der Phänomene, im besonderen der Organismen und der psychischen Erscheinungen ermöglicht als die entgegengesetzte Hypothese.

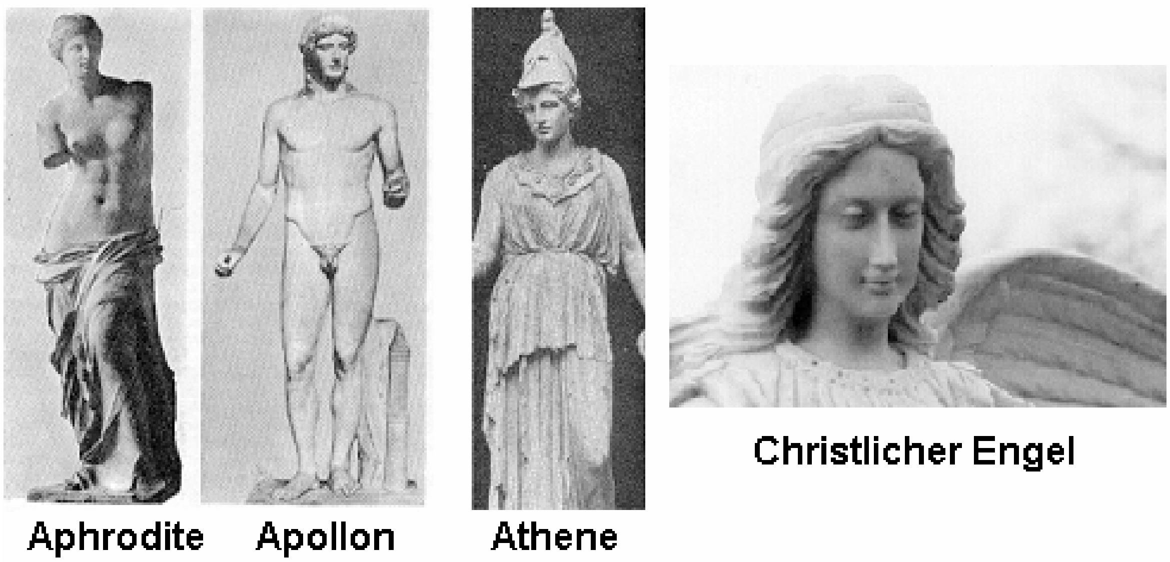
Auszug aus einem Brief von Kardinal FRANZELIN an GEORG CANTOR:

In der Voraussetzung, daß Ihr Transfinitum *actuale* in sich keinen Widerspruch enthält, ist Ihr Schluß auf die *Möglichkeit der Schöpfung* eines Transfinitum aus dem Begriffe von Gottes Allmacht ganz richtig. Allein zu meinem Bedauern gehen Sie weiter und schließen »aus seiner Allgüte und Herrlichkeit *auf die Notwendigkeit* einer tatsächlich erfolgten Schöpfung des Transfinitum«. Gerade weil Gott an sich das absolute unendliche Gut und die unendliche Herrlichkeit ist, welchem Gute und welcher Herrlichkeit nichts anwachsen und nichts abgehen kann, ist die *Notwendigkeit* einer Schöpfung, welche immer diese sein mag, ein Widerspruch, und die *Freiheit* der Schöpfung eine ebenso notwendige Vollkommenheit Gottes, wie alle seine anderen Vollkommenheiten, oder besser, Gottes unendliche Vollkommenheit ist (nach unseren notwendigen Unterscheidungen) ebenso *Freiheit* als Allmacht, Weisheit, Gerechtigkeit etc. Nach Ihrem Schlusse auf die *Notwendigkeit* einer Schöpfung des Transfinitum müßten Sie noch viel weiter gehen. Ihr Transfinitum actuale ist ein Vermehrbares; nun wenn Gottes unendliche Güte und Herrlichkeit die Schöpfung des Transfinitum überhaupt mit Notwendigkeit fordert, so folgt, aus ganz demselben Grunde der Unendlichkeit seiner Güte und Herrlichkeit, die Notwendigkeit der Vermehrung, bis es nicht mehr vermehrbar wäre, was Ihrem eigenen Begriffe des Transfinitum widerspricht. Mit anderen Worten: wer die Notwendigkeit einer Schöpfung aus der Unendlichkeit der Güte und Herrlichkeit Gottes erschließt, der muß behaupten, daß alles Erschaffbare wirklich von Ewigkeit erschaffen ist; und daß es vor Gottes Auge kein Mögliches gibt, das seine Allmacht ins Dasein rufen könnte.

Auszug aus einem Brief von Georg Cantor an Kardinal Franzelin:

Ew. ... sage ich meinen herzlichsten Dank für die Ausführungen des gütigen Schreibens vom 26. Januar 1886, denen ich mit voller Überzeugung zustimme; denn in der kurzen Andeutung meines Briefes vom 22. ds. war es an der betreffenden Stelle nicht meine Meinung, von einer objektiven, metaphysischen Notwendigkeit zum Schöpfungsakt, welcher Gott, der *absolut Freie* unterworfen gewesen wäre, zu sprechen, sondern ich wollte nur auf eine gewisse subjektive Notwendigkeit *für uns* hinweisen, aus Gottes Allgüte und Herrlichkeit auf die tatsächlich *erfolgte* (*nicht* a parte Dei *zu erfolgende*) Schöpfung, *nicht bloß* eines *Finitum ordinatum*, *sondern* eines *Transfinitum ordinatum* zu schließen.

Was wissen wir über das Göttliche? In alten Zeiten hatten die Götter sehr menschliche Züge. Das anthropomorphe Gottesbild tritt uns in allen Religionen entgegen, auch und gerade in der christlichen, die zwar dem Gebot nach kein Bildnis Gottes erlaubt, ihm aber sogar einen Sohn und damit menschliche Zeugungsfähigkeit zuspricht. Ein christlicher Engel unterscheidet sich kaum von den Gestalten der griechischen Götter. Sahen die griechischen Götter tatsächlich so aus? Gab es sie überhaupt? Gibt es ihren Nachfolger? Wer die ersten beiden Fragen heute stellt, gilt als rückständig.



Doch das anthropomorphe Gottesbild findet sich auch im psychologischen Bereich wieder. Die Hinterhältigkeit der Athene bei der Tötung Hektors durch Achill wird noch übertroffen von der Rachsucht und Ungerechtigkeit des alttestamentarischen Gottes. Um nur wenige Beispiele anzuführen:

Gott befindet: »Es ist nicht gut, dass der Mensch allein sei.« Nachdem aber Eva von der Schlange und Adam von Eva verführt worden ist, ändert Gott seine Meinung, denn nun hätte es der Mensch doch besser gehabt, wenn er allein geblieben wäre. Gut soll er es jedenfalls nicht mehr haben. »Dieweil du hast gehorcht der Stimme deines Weibes ...: Verflucht sei der Acker um deinetwillen, mit Kummer sollst du dich darauf nähren dein Leben lang. Dornen und Disteln soll er dir tragen.«

Und auch die Schlange wird verflucht (samt ihren bisher noch unschuldigen Nachkommen). Sie muss nun ihr Leben lang auf dem Bauche gehen und Erde essen. »Und ich will Feindschaft setzen zwischen dir und dem Weibe und zwischen deinen Nachkommen und ihren Nachkommen. Sie sollen dir den Kopf zertreten und du wirst ihnen in die Ferse stechen.«

Wahrhaftig ein zornentbrannter, ein böser Gott – von unendlicher Güte keine Spur. Was war geschehen? Gottes ausdrückliches Verbot war nicht befolgt worden – in einer streng patriarchalischen Gesellschaft ein schlimmes Vergehen.

Adam und Eva hatten nämlich vom Baum der Erkenntnis gegessen, zwar noch nicht vom Baum der wissenschaftlichen Erkenntnis – das taten GIORDANO BRUNO, GALILEI und ihre Zeitgenossen, um dafür von Gottes Statthaltern auf Erden in dessen Namen verbrannt oder verflucht zu werden –, sondern vom Baum der Erkenntnis, was gut und böse ist. Was ist so schlimm daran?

Im Alten Testament gibt Gott selbst die Antwort: »Adam ist geworden wie unsereiner ... Nun aber, dass er nicht auch noch esse vom Baum des Lebens und lebe ewiglich!« Ursache für die Vertreibung aus dem Paradies ist also Gottes Eitelkeit oder Missgunst.

Auf dieser Zivilisationsstufe wird noch zwischen *Mensch* und *Weib* unterschieden, eine Unterscheidung, die Gott billigt – sollte das Alte Testament Gottes Wort sein.

Gott verlangt, dass man an ihn glaubt und ihm blindlings gehorcht. Abraham soll ihm seinen einzigen und erst sehr spät geborenen Sohn Isaak opfern, d. h. ihn schächten. Erst im letzten Augenblick, nachdem der Vater unnennbare Gewissenskonflikte durchlitten haben muß, verzichtet Gott auf das Opfer. – Ein harmloser Scherz.

Jakob betrog Esau und erhielt trotzdem den Segen.

Die Söhne Jakobs ermordeten alle Männer der Stadt Sichem, die sich ihretwegen gerade hatten beschneiden lassen und daher nicht kampfbereit waren, und raubten die Stadt völlig aus. Die Strafe des gerechten Gottes? »Und es kam die Furcht Gottes über die umliegenden Städte, dass sie ihnen nicht nachjagten.«

Zu Zeiten waren Unterdrückung oder Ermordung Andersgläubiger, Sklavenhalterei, Diskriminierung der Frauen, Tierquälerei und Missachtung der Tiere mit Gottes Segen erlaubt, übrigens auch in anderen Religionen.

Freilich ändert sich Gottes Rechtsempfinden und Moralbegriff mit dem der menschlichen Gesellschaft, was aber sehr auf eben diese menschlichen Gesellschaft als Ursprung Gottes hindeutet.

Die christliche Idee der Nächstenliebe, wenn sie denn praktiziert wird, besitzt zweifellos einen hohen moralischen Wert, der sich in den neutestamentlichen Lehrsätzen deutlich ausdrückt: Wenn dich jemand auf deine rechte Wange schlägt, so halte ihm auch die andere hin. – Richtet nicht, damit ihr nicht gerichtet werdet. – Wer dich um etwas bittet, dem gib. – Willst du vollkommen sein, so gehe hin und verkaufe alles, was du hast, und gib den Erlös den Armen. Christi Urteil und Entscheidung: »Wer von euch ohne Sünde ist, der werfe den ersten Stein« zählt sicher zu den schönsten Sätzen, die je gesagt wurden. Doch steht dem zuweilen Zorn und Verdammung der Ungläubigen als Schlangen- und Natterngezücht gegenüber: Wer wider den heiligen Geist redet, der kommt in die Hölle, in den Feuerofen, ins ewige Feuer, dorthin, wo Heulen und Zähneklappern ist. Von Liebe ist wenig spürbar, wenn ein Feigenbaum in Bethanien zum Verdorren verdammt wird, der keine reifen Feigen trug, weil es eben nicht die Zeit der Feigenreife war, als Christus Appetit darauf hatte. Und die Austreibung des bösen Geistes hätte nicht unbedingt die Gadarener Säue zum Ziel nehmen müssen, die gewiss arglos und unbeteiligt waren.

Wozu werden Götter gebraucht? Was sind die Gründe für den Glauben an sie? In primitiven Kulturen ist es die Unwissenheit. Es gibt keine Erklärung für Donner und Blitz, für Geburt, Wachstum und Tod, also wird ein Gott dafür verantwortlich gemacht. Je weiter das menschliche Wissen reicht, umso weiter muss der Gott aber zurückweichen, denn es ist wohl eine feste Regel, dass sich ein Gott niemals beobachten lassen darf. Pan konnte noch durch die Wälder streifen, der frühe christliche Gott wohnte im Himmel (und sein Widersacher unter der Erde), aber seit Raumstationen und Riesenteleskope den Himmel absuchen, ist auch dort seines Bleibens nicht länger.

In unserer Kultur sind die Glaubensgründe hauptsächlich Angst vor Unglück, Krankheit, Tod, Hoffnung auf Belohnung der Gerechten und Bestrafung der Ungerechten (das sind immer die anderen) nach dem Tode.

Viele Gebete könnten nur unter Verletzung der Naturgesetze erhört werden. Das wurde nie verifizierbar beobachtet. Durch Katastrophen (Erdbeben, Überschwemmungen, Vulkanausbrüche, Unfälle), an denen kaum einem Menschen die Schuld zugewiesen werden kann, werden viele Existenzen ausgelöscht. Sind das immer nur die Bösen?

Wollen wir Gott Allmächtigkeit zuschreiben, so scheitern wir schon an der Frage der mittelalterlichen Sophisten, ob Gott einen Stein so schwer machen kann, dass er selbst ihn nicht mehr heben kann.

Die von Kardinal FRANZELIN zitierte unendliche Güte ist schwer vereinbar mit der ebenso notwendigen unendlichen Freiheit, auch Böses zu tun. Dass der Mörder sein Opfer meuchelt und der Jäger seine Beute erlegt, kann noch der menschlichen Willensfreiheit angelastet werden, dass aber der Löwe das Lamm schlägt, die Katze die Maus tötet und die Spinne die Fliege – oft erst nach langen Qualen –, das ist im Schöpfungsplan genau so vorgesehen. Hat Gott aus Unvermögen keinen humaneren Weg zur Erhaltung des biologischen Gleichgewichts gefunden? Oder hat er von seiner vollkommenen Freiheit, auch zum Bösen, Gebrauch gemacht? Gottes einzige Entschuldigung für die Qualen der Gepeinigten ist seine Nichtexistenz.

Wäre Gott allwissend, so würde dadurch ein Determinismus bedingt, der als direkte Reaktion den Fatalismus nach sich zieht. Weshalb sollte ich irgendetwas mir unliebsames tun, wenn doch schon alles vorherbestimmt ist? Doch diese Facette der Unendlichkeit Gottes können wir ausschließen, wenn wir nur das von drei Weltreligionen, den Juden, Christen und Moslems verehrte Alte Testament studieren. Es ist leicht nachzuweisen, dass dort jedenfalls keine Allwissenheit waltet. Die angeblich von Gott stammenden Texte wurden von Menschen ca. 500 Jahre v. Chr. mit dem Wissen ihrer Zeit verfasst.

Aus der in der Bibel angegebenen Genealogie kann man die seit Erschaffung der Welt bis Christi Geburt vergangene Zeit auf etwa 4000 Jahre abschätzen. Das ist falsch. Aber auch wenn die sechs Tage, in denen Gott die Welt erschuf, großzügig als Tage »im übertragenen Sinne« interpretiert werden, so stimmt doch die Reihenfolge nicht. Am 1. Tag schied Gott das Licht von der Finsternis. Die Erde war ganz von Wasser bedeckt. Am 4. Tag erst wurden Sonne und Mond erschaffen. Woher kam das Licht vorher? Bei der Erschaffung der Fische am 5. Tag wird der Walfisch besonders erwähnt, der gar kein Fisch, sondern ein ins Meer zurückgewandertes Säugetier ist und auch »im übertragenen Sinne« nicht vor den anderen, erst am 6. Tage geschaffenen Säugetieren auftrat. Die Erwähnung des Wals zeugt nicht von Wissen um die Schöpfung, sondern davon, dass der Schreiber sein Wissen um die imposanten und vermutlich wenig bekannten Tiere demonstrieren wollte, um seinen Text glaubhafter zu machen.

In Noahs Arche waren Känguru, Beutelwolf und viele andere exotische Tiere bestimmt nicht anwesend. Wie konnten sie überleben, wenn während der Sintflut die Erde wieder ganz von Wasser bedeckt war? Man kennt heute die Katastrophe – oder besser gesagt: eine der Katastrophen –, von der die in vielen Kulturen verbreitete Sage von der Sintflut herrührt. Eine vollständige Bedeckung der Erde mit Wasser ist in keinem Falle erfolgt. Sie wäre auch nach dem Abschmelzen der Polkappen nicht möglich. So viel Wasser gab und gibt es auf der ganzen Erde nicht.

Die Zierde von Salomons Tempel war ein Becken von 10 Ellen Durchmesser und 30 Ellen Umfang. Das führt auf $\pi = 3{,}0$. Schon 1500 Jahre früher kannten die Ägypter den wesentlich genaueren Wert 3,16 und die Babylonier hatten 3,125.

»Sogleich aber nach der Bedrängnis jener Zeit wird die Sonne sich verfinstern und der Mond seinen Schein verlieren, und die Sterne werden vom Himmel fallen« (Matthäus). Schnuppen?

Salomon (der seine Weisheit von Gott selbst hatte) stellte kategorisch fest: »Die Erde ist ewig in Ruhe, die Sonne geht auf und unter ...« Ähnliche Aussagen findet man an anderen Stellen: »Da stand die Sonne und der Mond still, bis sich das Volk an seinen Feinden rächte. Ist dies nicht geschrieben im Buch des Frommen? Also stand die Sonne mitten am Himmel und verzog unterzugehen beinahe einen ganzen Tag« (Josua). »Siehe, ich will den Schatten an der Sonnenuhr zehn Striche zurückziehen, über die er gelaufen ist. Und die Sonne lief zehn Striche zurück an der Sonnenuhr, über die sie gelaufen war« (Jesaja). »Ihren Aufgang vergaß die Sonne« (Habakuk). Das alles ist nur bei einer ruhenden Erde möglich. Die rotierende Erde kann nicht plötzlich zur Ruhe kommen – und täte sie es doch, so hätte das Volk keine Chance mehr, sich an seinen Feinden zu rächen. Kein Wunder also, dass die Kirche das heliozentrische Weltbild so hartnäckig bekämpft hat, zwingt es doch abermals dazu, einige Bibelstellen »im übertragenen Sinne« zu interpretieren.

Auch im Neuen Testament finden sich Fehler, deren Uminterpretation viel Kunst erfordert. So war Christus offenbar von seiner baldigen Wiederkehr überzeugt, als er sagte: »Einige von denen, die hier stehen, werden den Tod nicht kosten, bis sie den Menschensohn in seinem Reiche kommen sehen.« oder »Sorget nicht ängstlich für den morgigen Tag!«

Der stärkste Widerspruch liegt aber in der Sinnlosigkeit der Kreuzigung. Wenn ein allwissender Gott die Welt und die Menschen mit ihren Fehlern und Schwächen geschaffen hat (warum eigentlich mit Fehlern und Schwächen?), so muss ihm der weitere Verlauf doch bekannt gewesen sein, von Evas Verführung durch die Schlange bis zur Sintflut, von Sodom und Gomorrha über Pompeji und Herculaneum bis Hiroshima und Nagasaki.

Heutzutage wird die Gottesidee und damit der Glaube an eine aktuale Unendlichkeit Gottes immer stärker zurückgedrängt. Dazu trägt gerade die Verwissenschaftlichung unserer Kultur entscheidend bei: Wissenschaft erfordert Zweifel am Glaubhaften, Religion zwingt zum Glauben an Zweifelhaftes, mit dem Leitsatz: »Glühen ist besser als wissen.« Der Konflikt entbrannte erstmals im 16. Jahrhundert.

NICOLAUS COPERNIKUS (1473 – 1543), der Arzt, Astronom und Domherr, hatte gewiss keine Ketzereien im Sinne, sondern hoffte mit Hilfe der Zentralstellung der Sonne, die Gott, dem vollkommensten Baumeister, würdige Harmonie des Weltbaues besser zu ergründen.

GALILEO GALILEI (1564 – 1642), Begründer der experimentellen Physik, geriet in Konflikt mit der Kirche, als er durch sein Fernrohr Berge auf dem Mond, Sonnenflecken, Jupitermonde und Venusphasen entdeckte, die nicht in das geozentrische Weltbild der Bibel passten. Hier sind die wichtigsten Begebenheiten.

GALILEO GALILEI

1614 Ein Dominikaner (das war der schlimme Orden der Inquisition) predigt über das Thema »Männer von Galiläa, warum betrachtet ihr den Himmel?«, was auf Lateinisch mit *viri galilei* beginnt und den Adressaten deutlich bezeichnet.

1615 An den berühmten Wissenschaftler GALILEI selbst traut man sich noch nicht heran, doch erhebt man den schweren Vorwurf, ein Schüler GALILEIs glaube nicht an Wunder. Ein Inquisitionsprozess beginnt, wie er z. B. GIORDANO BRUNO das Leben gekostet hat. Schließlich erfolgt ein Ultimatum der Kirche: »Das heliozentrische System ist lediglich als mathematische Hypothese zur Erleichterung des Rechnens zu betrachten.« Darauf erwidert GALILEI: »Das wäre meines Erachtens ein Irrtum.«

1616 Der Papst umgeben von Dominikanern empfängt GALILEI und verbietet ihm, die »dumme, absurde und häretische Lehre« in irgendeiner Form zu verbreiten.

1624 Ein neuer, wissenschaftlich aufgeschlossenerer Papst erlaubt GALILEI, ein Buch zu veröffentlichen, den *Dialog über die beiden Weltsysteme* von PTOLEMAIOS und COPERNIKUS.

1632 Es wird ein Bestseller. GALILEI unterstützt zwar die Lehre des COPERNIKUS nicht offen, aber es ist nicht allein seine Schuld, dass Salviati, der Verteidiger des heliozentrischen Systems, bessere Argumente hat als der schlichte Simplicio. Man redet dem Papst ein, er selbst sei in der Person des Simplicio lächerlich gemacht worden. Daraufhin wird das Buch verboten – doch es ist schon vergriffen.

1633 GALILEI schwört im Büßerhemd vor dem Inquisitionsgericht ab. Damit entgeht der Greis Folter und Scheiterhaufen und wird nur zu lebenslanger Haft verurteilt. Allerdings stellt sich das Urteil als Segen für die Wissenschaft heraus, denn als die Strafe nach einem Jahr in Hausarrest umgewandelt wird, hat GALILEI viel müßige Zeit. Er schreibt das erste Physikbuch der Neuzeit, in dem er alle seine Erkenntnisse zur Mechanik und zu den Fallgesetzen zusammenfasst. Die *Unterredungen über zwei neue Wissenszweige* erscheinen 1638 und begründen die wissenschaftliche Mechanik.

Erst 100 Jahre nach seinem Tode erhielt GALILEI eine würdige Begräbnisstätte. 1992 wurde er von Papst Johannes Paul II. rehabilitiert.

Im Zeitalter der Aufklärung wagten viele Wissenschaftler erstmals, ihre Gedanken zur Gottesidee öffentlich auszusprechen. Und heute sind viele Dogmen der katholischen Kirche nur noch belächelte Relikte aus einer anderen Zeit: Das Dogma der jungfräulichen Geburt Christi, das Dogma der päpstlichen Unfehlbarkeit oder das Dogma, wonach die Existenz Gottes durch Vernunftgründe beweisbar ist.

IMMANUEL KANT (1724 – 1804) fragt: Wenn das Universum tatsächlich erst vor ca. 5500 Jahren erschaffen wurde, warum die unendlich lange Wartezeit vor der Schöpfung? Wenn es schon unendlich lange existiert, warum noch kein Wärmetod?

IMMANUEL KANT

KANT versucht auf mehrere Arten, die Existenz Gottes zu beweisen, z. B. dass Gott als erste Ursache nötig ist. Er diskutiert auch den ontologischen Gottesbeweis: »Die Idee Gottes schließt seine Wirklichkeit ein. Gott wäre ohne seine eigene Existenz nicht das vollkommenste Wesen.« Später verwirft er ihn jedoch: »Ebenso könnte ein Kaufmann seinen Kassenbeständen einige Nullen anhängen, um seine Lage zu verbessern.«

In seinem 1793 erschienen Buch *Die Religion innerhalb der Grenzen der bloßen Vernunft* übt er deutliche Kritik: Gnade, die aus der Willkür eines unberechenbaren, tyrannischen Gottes fließt, widerspricht seinem Wesen als höchstem moralischen Richter. Wäre Christus göttlich, so wäre sein Sieg ein billiges Scheingefecht. Die enge Pforte ist ein guter Lebenswandel, die breite Pforte ist die Kirche. Und er spricht von Pfaffentum, Afterdienst, Fetischdienst, ...

GEORG CHRISTOPH LICHTENBERG (1742 – 1799), Göttinger Mathematiker und Physiker, der sich in seinen *Sudelbüchern* über viele philosophische Themen ausgelassen hat, meint dazu:

GEORG CHRISTOPH LICHTENBERG

»Mir ist es unbegreiflich, warum der Zustand der ewigen Herrlichkeit nicht lieber gleich angeht.«

»Gott schuf den Menschen nach seinem Bilde, das heißt vermutlich, der Mensch schuf Gott nach dem seinigen.«

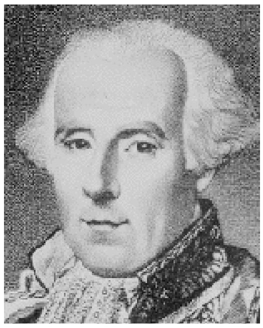
»Dass in den Kirchen gepredigt wird, macht deswegen die Blitzableiter auf ihnen nicht unnötig.«

»Es macht gewiss den Deutschen mehr Ehre als Schande, dass die Geschenke für das heilige Grab aus Deutschland so selten sind.«

»Sie glauben, dass es Menschen gegeben hat, die Gottes Sohn waren? O du gerechter Gott, wohin kann dein Geschenk, die Vernunft, sinken.«

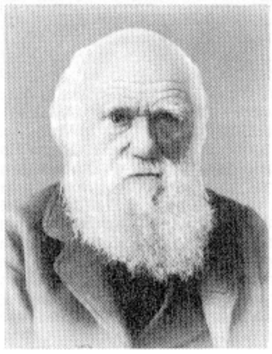
PIERRE SIMON MARQUIS DE LAPLACE (1749 – 1827) – schon mit 18 Jahren Lehrer, Mitglied der Académie des Sciences, erst Professor, dann Leiter der École Normale, vorübergehend Minister des Inneren, Senator und Kanzler des Senats – war einer der hervorragenden Mathematiker, Physiker und Astronomen.

Auf Napoleons Frage, wo in seiner fünfbändigen *Himmelsmechanik* Gott zu finden sei, antwortete LAPLACE lakonisch: »Sire, ich benötige diese Hypothese nicht!« Er war von einem absolut determinierten Universum überzeugt, in dem für einen einwirkenden, irgendwie handelnden Gott kein Platz ist.



PIERRE SIMON DE LAPLACE

CHARLES DARWIN (1809 – 1882) leitete die nach COPERNIKUS zweite Revolution unseres Weltbildes ein. Nachdem der Mensch räumlich aus dem Zentrum der Welt gedrängt worden war – und sich schließlich in den äußeren Bezirken einer Galaxie wiederfand – verlor er nun den Titel Krone der Schöpfung und wurde zu einem recht zufällig entstandenen Wesen ohne tiefere moralische Berechtigung als irgendein anderes Wesen. Keine Frage, dass auch DARWINs Lehre von den Kirchen vehement bekämpft wurde, doch waren sie im neunzehnten Jahrhundert nicht mehr stark genug, um die wissenschaftliche Wahrheit mit Gewalt zu unterdrücken.



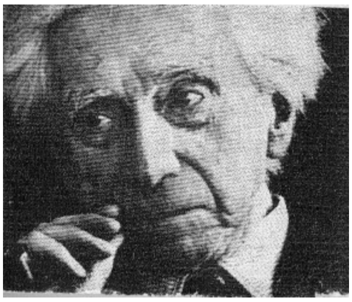
CHARLES DARWIN

DARWIN nahm 1831 – 1836 an einer Expedition nach Südamerika und zu den Galapagos-Inseln teil. Hier fand er isolierte Tierarten, die sich durch geringfügige Veränderungen ihres Körpers den äußeren Gegebenheiten angepasst hatten. Er vermutete darin ein allgemeines Gesetz und schrieb in seinem Buch *The Origin of Species*: »Ich habe dieses Prinzip, bei dem jede kleine Veränderung erhalten bleibt, falls sie nützlich ist, als natürliche Auslese bezeichnet.«

Heute zweifelt kein wissenschaftlich gebildeter Mensch mehr an der Richtigkeit von DARWINs Erkenntnissen, zumal sie durch zahlreiche Fossilienfunde belegt sind (wenn man nicht – wie die vor allem in den USA vertretenen Creationisten – davon ausgeht, dass Gott Fossilien im Gestein versteckt hat, um die Paläontologen zu nasführen.)

In diesem Zusammenhang stoßen wir auch auf das Geist-Materie-Problem: Wo sitzt und wie wirkt eine immaterielle Seele auf den materiellen Körper? Vergiftungen (z. B. durch Alkohol oder andere Rauschmittel), Reizauslösung durch chemische und elektrische Mittel sowie Beschädigungen des Gehirns können die Persönlichkeit eines Menschen gravierend verändern. Wir können heute die Denkvorgänge im Gehirn genau lokalisieren. Schaltet man die entsprechenden Bereiche aus, so verschwinden auch die zugehörigen Funktionen. Von einer Seele ist keine Spur zu erkennen.

Denkvorgänge können nur mit Hilfe von Begriffen ablaufen, die aufgrund von vorhergehenden Sinneseindrücken im Gehirn gebildet worden sind. Einer extern dem Fötus eingepflanzten Seele, die noch keine Gelegenheit zur Aufnahme solcher Eindrücke hatte, fehlt damit jede Funktionsbasis. Es ist auch bezeichnend, wie wenige Erinnerungen an die pränatale Phase bestehen.



BERTRAND RUSSELL

EARL BERTRAND RUSSELL (1872 – 1970) – englischer Philosoph und Mathematiker, Logiker und Atheist, Sozialist und Pazifist (deswegen häufig in politische Konflikte mit der Regierung verstrickt) – schrieb in seinem Buch *Warum ich kein Christ bin*: Es gibt viele Weltreligionen, Hindus, Buddhisten, Juden, Christen, Mohammedaner und dazu Richtungen und Sekten. Doch höchstens eine kann die wahre, richtige sein.

Mitgliedschaft erwirbt man durch Geburt oder Prägung. Was können die zu früh Geborenen, die Indianer oder die Neandertaler dafür, dass sie nicht die Möglichkeit hatten, der einen, wahren Religionsgemeinschaft beizutreten, deren Anhänger allein Anspruch auf das Paradies haben?

Kein sogenannter Gottesbeweis verdient diesen Namen.

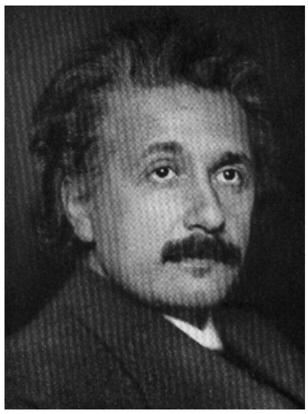
– Der Beweis Gottes als der ersten Ursache führt sofort auf die Frage: Wer schuf Gott?

– Nach einem anderen Gottesbeweis brauchen Naturgesetze einen Gesetzgeber. Schuf Gott die Naturgesetze willkürlich oder mit Grund? Falls willkürlich, so gibt es etwas, das dem Gesetz nicht unterworfen ist, nämlich Gott. Falls mit Grund, so wäre er selbst Gesetzen unterworfen.

– Der teleologische Gottesbeweis geht davon aus, dass die Welt für die Zwecke des Menschen geschaffen wurde. Das ist aber nur eine Unterstellung, die mit COPERNIKUS und DARWIN unwahrscheinlich geworden ist.

– Der moralischer Gottesbeweis setzt Gott für die Unterscheidung von Gut und Böse. Wenn diese Unterscheidung aber von Gott erst definiert wurde, dann gab es ursprünglich für Gott keinen Unterschied. War sie schon vorher vorhanden, dann ist Gott dafür nicht erforderlich.

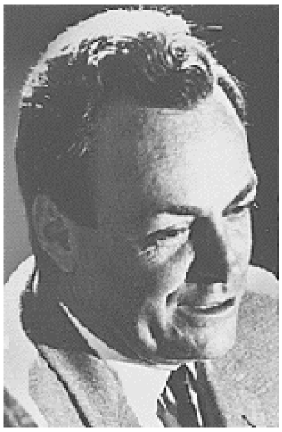
– Das Argument, wonach Gott für die ausgleichende Gerechtigkeit sorgt und deshalb existieren muss, ist *sehr* fraglich.



ALBERT EINSTEIN

ALBERT EINSTEIN (1879 – 1955), Schöpfer der Relativitätstheorie und Entdecker der korpuskularen Natur des Lichtes, kann sich keinen persönlichen Gott vorstellen. »Einen Gott, der die Geschöpfe seines Schaffens belohnt und bestraft, der überhaupt einen Willen hat, den wir an uns selbst erleben, kann ich mir nicht einbilden. Auch ein Individuum, das seinen körperlichen Tod überdauert, mag und kann ich mir nicht denken, mögen schwache Seelen aus Angst oder lächerlichem Egoismus solche Gedanken nähren.«

EINSTEIN, ein Verehrer SPINOZAS, unterscheidet zwischen primitiven Furcht-Religionen und fortgeschrittenen Moral-Religionen, eine Entwicklung, wie sie sich in der heiligen Schrift des jüdischen Volkes schön beobachten lässt. Sie hat ihre Fortsetzung im Neuen Testament gefunden. »Es stünde traurig um die Menschen, wenn sie durch Furcht vor Strafe und Hoffnung auf Belohnung nach dem Tode gebändigt werden müssten. – Es ist also verständlich, dass die Kirchen die Wissenschaft von jeher bekämpft und ihre Anhänger verfolgt haben.«



RICHARD P. FEYNMAN

RICHARD P. FEYNMAN (1918 – 1988) leitete die Untersuchung der Challenger-Katastrophe 1986. Seine Bücher zählen zu den Klassikern der Physik. Er fragt skeptisch: »Das ganze Weltall, die Milliarden Jahre, nur als Bühne, damit Gott auf einem ganz kleinen Planeten in einem ganz kleinen Zeitraum den Kampf zwischen Gut und Böse verfolgen kann?« Aber »man kann die Existenz Gottes ebensowenig beweisen wie das Gegenteil.«

Dieser Aussage müssen wir uns anschließen, doch ist es sehr unwahrscheinlich, dass ein tatsächlich existierender Gott nach seinem Wesen oder seinen Eigenschaften tatsächlich eine Repräsentation des aktual Unendlichen wäre.

Wer sich keinen Punkt denken kann, der ist einfach zu faul dazu.

WILHELM BUSCH

X Transzendent

Algebraische Zahlen sind Nullstellen oder Wurzeln von Polynomen, d. h. Lösungen der zugehörigen algebraischen Gleichungen

$$P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$$

mit *ganzzahligen* Koeffizienten a_ν und nichtnegativen ganzen Exponenten ν. Der größte Exponent n heißt Grad des Polynoms P. Beispiele für algebraische Zahlen sind

$$2 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

$$2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2/3$$

$$2 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\sqrt{2}\ ,\ x_2 = \sqrt{2}$$

$$1 - x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1\ ,\ x_2 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ x_3 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 - x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}\ ,\ x_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ x_3 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

mit der Abkürzung $\mathrm{i} = \sqrt{(-1)}$.

Die ganzen und die rationalen Zahlen gehören als Untermenge zu den algebraischen Zahlen in derselben Weise, wie die ganzen Zahlen eine Untermenge der rationalen Zahlen sind.

Der Grad einer algebraischen Zahl α ist der Grad ihres Minimalpolynoms*, des Polynoms von kleinstem Grade, das die Wurzel α besitzt (s. Kasten: Beweis des Satzes von LIOUVILLE, S. 89). Bis auf einen konstanten Faktor ist das Minimalpolynom einer algebraischen Zahl eindeutig bestimmt. Eine nicht algebraische Zahl heißt transzendent.

Der Grad einer rationalen Zahl ist $n = 1$.
Der Grad der Quadratwurzel aus einer Primzahl ist $n = 2$.
Der Grad der Kubikwurzel aus einer Primzahl ist $n = 3$.

Eine transzendente Zahl ist nicht Wurzel eines Polynoms, das per Definition immer einen endlichen Grad besitzt, sondern Wert einer unendlichen Reihe (s. Kapitel II).

---

* Im Gegensatz zu $2 - x^3$ ist $1 - x^3 = (1 + x + x^2)(1 - x)$ kein Minimalpolynom, da es sich in Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten aufspalten lässt. Deswegen treten unter den Wurzeln von $1 - x^3$ keine Kubikwurzeln auf.

Wir haben rationale Zahlen mit unendlich vielen periodischen und irrationale Zahlen mit unendlich vielen nichtperiodischen Dezimalstellen kennengelernt. Nun aber stehen wir vor der *Notwendigkeit*, das Unendliche schon bei der Erzeugung einer Zahl zu akzeptieren. Die *Möglichkeit* dazu besteht allerdings für jede Zahl, wie schon die geometrische Reihe zur Erzeugung der Zahl 1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... zeigt.

Wie in Kapitel III an mehreren einfachen Beispielen ausgeführt wurde, zeigt ein Irrationalitätsbeweis für die Zahl α, dass α nicht Wurzel eines Polynoms vom ersten Grade $n = 1$ ist, denn mit

$$P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha = 0$$

wäre $\alpha = -a_0/a_1$ eine rationale Zahl.

Ein Transzendenzbeweis für die Zahl α ist viel schwieriger zu führen, denn er muss zeigen, dass α nicht Wurzel eines Polynoms von endlichem Grade $n < \infty$ ist.

Obwohl die rationalen Zahlen jeden Punkt der Zahlengeraden zu bedecken scheinen, gibt es weitere, die algebraischen irrationalen Zahlen.

Obwohl die algebraischen Zahlen jeden Punkt der Zahlengeraden zu bedecken scheinen, gibt es weitere, die transzendenten Zahlen.

Alle transzendenten Zahlen sind Irrationalzahlen. Sie gehören also als Untermenge zur Menge der irrationalen Zahlen, die wiederum eine Untermenge der reellen Zahlen ist.

Das Zahlensystem

Der Aufbau des Zahlensystems kann in einem einfachen Schema dargestellt werden. Wir verwenden dafür die Symbole {, }, ⊂, ∪ der Mengenlehre.

Mit {Maikäfer} ist die Menge aller Maikäfer gemeint.

⊂ steht für den Ausdruck »ist Untermenge von«, wie in »{Maikäfer} ⊂ {Käfer}«.

∪ bedeutet »Vereinigung von Mengen«, wie »{Männer} ∪ {Frauen} = {Erwachsene}«.

{natürliche Zahlen} ⊂ {ganze Z.} ⊂ {rationale Z.} ⊂ {algebraische Z.} ⊂ {reelle Z.}

{natürliche Zahlen} ∪ {0} ∪ {negative ganze Zahlen} = {ganze Zahlen}

{gerade Zahlen} ∪ {ungerade Zahlen} = {ganze Zahlen}

{rationale Zahlen} ∪ {irrationale algebraische Zahlen} = {algebraische Zahlen}

{irrationale algebraische Zahlen} ∪ {transzendente Zahlen} = {irrationale Zahlen}

{rationale Zahlen} ∪ {irrationale Zahlen} = {reelle Zahlen}

{algebraische Zahlen} ∪ {transzendente Zahlen} = {reelle Zahlen}

JOSEPH LIOUVILLE (1809 – 1882), seit 1833 Professor in Paris, bekannt vor allem durch den LIOUVILLEschen Satz zur Konstanz des Phasenvolumens, konnte 1844 zeigen, dass transzendente Zahlen existieren. Er bewies den heute nach ihm benannten

Satz von LIOUVILLE: Ist α ist eine algebraische Irrationalzahl vom Grade n, so besitzt die Gleichung

$$\left|\alpha - \frac{u}{v}\right| < \frac{1}{v^{n+1}} \qquad (10.1)$$

nur endlich viele rationale Lösungen u/v.

1. Beispiel: Ist $\alpha = m \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, so ist $n = 1$, doch sogar für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ besitzt (10.1) nur eine Lösung:

$$\left|m - \frac{u}{v}\right| < \frac{1}{v^{n+1}} \Rightarrow |mv^{n+1} - uv^n| < 1$$

Der Absolutbetrag ist eine nichtnegative ganze Zahl < 1, weil $m, u, v \in \mathbb{Z}$. Da bleibt nur die Null.

$$|mv - u| \cdot v^n = 0 \Rightarrow \frac{u}{v} = m$$

Letzteres folgt wegen $v \neq 0$.

2. Beispiel: Ist $\alpha = p/q$ eine positive rationale Zahl, so ist $n = 1$. Ungleichung (10.1)

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{u}{v}\right| < \frac{1}{v^2}$$

kann – außer von Brüchen $u/v = \alpha$ – nur von Brüchen mit Nenner $v \leq q$ erfüllt werden, und davon gibt es in der Nähe von p/q nur endlich viele. Für $v > q$ erhalten wir nämlich mit $p, q, u, v \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{u}{v}\right| = \left|\frac{pv - qu}{qv}\right| \geq \frac{1}{qv} > \frac{1}{v^2} .$$

Für negative rationale Zahlen gilt dasselbe.

3. Beispiel: Für $\alpha = \sqrt{2} = 1{,}414...$ ist $n = 2$. (10.1) besitzt für $v = 2$ nur eine Lösung.

$$..., \left|\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2^3}, \left|\sqrt{2} - \frac{2}{2}\right| > \frac{1}{2^3}, \left|\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2^3}, \left|\sqrt{2} - \frac{4}{2}\right| > \frac{1}{2^3}, ...$$

Für $\alpha = \sqrt{2}$ und $v = 10$ besitzt (10.1) überhaupt keine Lösung.

$$..., \left|\sqrt{2} - \frac{13}{10}\right| > \frac{1}{10^3}, \left|\sqrt{2} - \frac{14}{10}\right| > \frac{1}{10^3}, \left|\sqrt{2} - \frac{15}{10}\right| > \frac{1}{10^3}, \left|\sqrt{2} - \frac{16}{10}\right| > \frac{1}{10^3}, ...$$

Beweis des Satzes von LIOUVILLE

Die algebraische Irrationalzahl α besitzt den Grad *n*, wenn es kein Polynom von kleinerem Grade als *n* gibt, dessen Wurzel α ist. Das Polynom *P*(*x*) vom kleinsten Grade *n* mit der Wurzel α heißt Minimalpolynom von α. Es besitzt keine rationale Nullstelle *u*/*v*, denn andernfalls könnte *P*(*x*) durch den zugehörigen Linearfaktor (*x* – *u*/*v*) dividiert werden, und es ergäbe sich als Quotient ein Polynom *Q*(*x*) kleineren Grades, das aber ebenfalls die Wurzel α besäße.

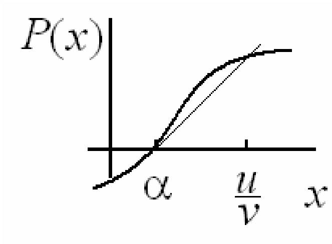
Also ist der Wert des Minimalpolynoms von α für ein rationales Argument *x* = *u*/*v* immer von Null verschieden.

$$0 \neq \left|P(\frac{u}{v})\right| = \left|a_0 + a_1\frac{u}{v} + \ldots + a_n\frac{u^n}{v^n}\right| = \left|\frac{a_0v^n + a_1uv^{n-1} + \ldots + a_nu^n}{v^n}\right| \geq \frac{1}{v^n} \qquad (10.2)$$

Letzteres folgt, weil der Zähler ganzzahlig ist, aber nicht verschwindet.

Nach dem Mittelwertsatz gibt es zwischen der Nullstelle α und dem größeren (oder kleineren) rationalen Abszissenwert *u*/*v* eine Stelle *x*, α < *x* < *u*/*v*, an der die Funktion *P*(*x*) dieselbe Steigung besitzt wie die Sekante von der Nullstelle zum Funktionswert *P*(*u*/*v*) an der Stelle *u*/*v*. Diese Steigung *P*'(*x*) ist endlich und kann daher durch eine endliche Konstante *C* abgeschätzt werden. Mit *P*(α) = 0 folgt

$$\left|\frac{P(\frac{u}{v})}{\alpha - \frac{u}{v}}\right| = |P'(x)| \leq C \qquad (10.3)$$



Setzen wir (10.2) in (10.3) ein, so ergibt sich (für *v* > 0)

$$\left|\frac{1}{v^n}\right| \leq \left|\alpha - \frac{u}{v}\right| \cdot C\,. \qquad (10.4)$$

Ungleichung (10.4) und Forderung (10.1) führen auf

$$\frac{1}{C \cdot v^n} \leq \left|\alpha - \frac{u}{v}\right| < \frac{1}{v^{n+1}}$$

und damit werden die (in jedem Falle als positiv voraussetzbaren) Nenner *v*, die Forderung (10.1) erfüllen können, durch die Konstante *C* in der Ungleichung

$$v < C$$

beschränkt. Die Forderung (10.1) kann nur von Brüchen erfüllt werden, deren Werte in der Nähe der Irrationalzahl α liegen und deren Nenner nicht größer als *C* sind. Das sind nur endlich viele; q. e. d.

JOSEPH LIOUVILLE hat aber nicht nur seinen Satz bewiesen, sondern auch gezeigt, dass es Zahlen α gibt, für die (10.1) unendlich viele Lösungen u/v besitzt, die somit keine algebraischen Irrationalzahlen sein können. Eine von ihnen ist *die* LIOUVILLEsche Zahl

$$\tau = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{10^{\nu!}},$$

Grenzwert einer Folge von Partialsummen: $\tau_1 = 0{,}1$; $\tau_2 = 0{,}11$; $\tau_3 = 0{,}110001$; ... . Die ersten Stellen, an denen Einsen auftreten, sind:

$$\tau = 0{,}110001000\ldots0001000\ldots0001000\ldots0001000\ldots$$

1 2 6 24 120 720

Die Zahl τ ist nicht periodisch, also ist sie irrational.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert nun eine rationale Zahl $\frac{u}{v}$ mit $v > 1$ als Lösung von (10.1). Der Exponent n+1 wird im Folgenden aus Bequemlichkeitsgründen durch m ersetzt.

$$\left|\tau - \frac{u}{v}\right| < \frac{1}{v^m}$$

Wählen wir als Rationalzahl $u/v = \tau_3$

$$\tau_3 = \sum_{\nu=1}^{3} 10^{-\nu!} = 0{,}110001 = \frac{110001}{1000000}$$

mit dem Nenner $v = 10^6$, so erhalten wir für $n = 2$, also $n+1 \equiv m = 3$:

$$|\tau - \tau_3| = \sum_{\nu=1}^{\infty} 10^{-\nu!} - \sum_{\nu=1}^{3} 10^{-\nu!} = \frac{1}{10^{24}} + \frac{1}{10^{120}} + \ldots \le \frac{1}{(10^6)^3}$$

Für $m = 4$ finden wir die Lösung $u/v = \tau_4$, weil $120 > 24 \cdot 4$ und die weiteren Exponenten so groß werden, dass die betreffenden Stammbrüche keine Rolle mehr spielen. Für beliebiges m finden wir die Lösung τ_m, weil $10^{m!}$ der Hauptnenner von τ_m ist und

$$|\tau - \tau_m| = 10^{-(m+1)!} + 10^{-(m+2)!} + 10^{-(m+3)!} + \ldots < 10^{-m!m}.$$

Auf diese Weise ergeben sich unendlich viele Lösungen von (10.1).

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{10^{\nu!}},\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu!}},\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2\nu!}},\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2^{2^{\nu!}}}}$$

und ähnlich aufgebaute Zahlen sind LIOUVILLEsche Zahlen. 10 und 2 dienen hier lediglich als konkrete Beispiele; sie können durch beliebige natürliche Zahlen ≥ 2 ersetzt werden.

CHARLES HERMITE (1822 – 1901), ebenfalls ein französischer Mathematiker, bewies 1873 dass auch die Zahl e transzendent ist.

CHARLES HERMITE

$$a_0 + a_1\mathrm{e} + a_2\mathrm{e}^2 + ... + a_n\mathrm{e}^n \neq 0$$

CARL LOUIS FERDINAND VON LINDEMANN (1852 – 1939) zeigte 1882, gestützt auf den HERMITEschen Beweis, dass die Gleichung

$$\beta_1\mathrm{e}^{\alpha 1} + ... + \beta_n\mathrm{e}^{\alpha_n} = 0$$

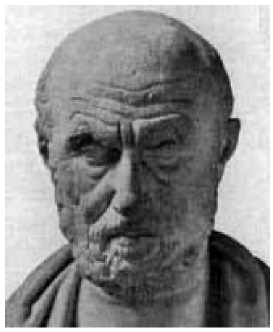
für verschiedene algebraische Zahlen α_1, ..., α_n und algebraische Zahlen β_1, ..., $\beta_n \neq 0$ und natürliche Zahlen n keine Lösung besitzt. Aus der Gleichung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$ (sie wäre für rein algebraischen Exponenten wie i und 0 nicht möglich) folgt damit die Transzendenz der Zahl π.

CARL LOUIS FERDINAND VON LINDEMANN

$$a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + ... + a_n\pi^n \neq 0$$

Ein Polynom kreuzt die Abszisse niemals bei $x = \mathrm{e}$ oder $x = \pi$. Das uralte Problem der Kreisquadratur war damit 1882 endgültig erledigt.

Die Kreisquadratur, also die Berechnung der Kreisfläche mit Hilfe rationaler oder geometrisch darstellbarer irrationaler Zahlen wie $\sqrt{2}$, wurde im 5. Jhd. v. Chr. aktuell und war schon 414 so populär, dass der Komödiendichter Aristophanes in der Komödie *Die Vögel* von Kreisquadratoren als von Leuten spricht, die das Unmögliche versuchen.

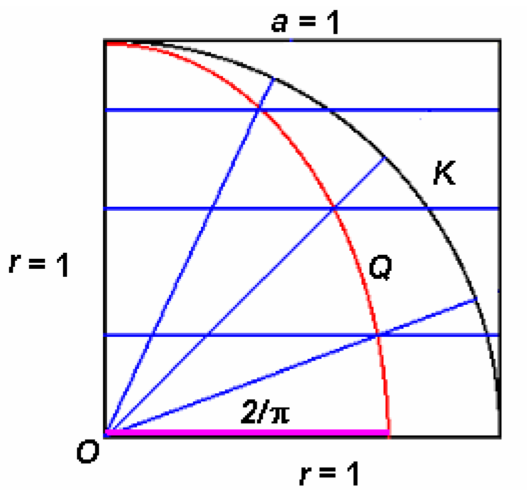


HIPPOKRATES VON CHIOS

ANAXAGORAS (500 – 428) – laut Plutarch befand er sich im Gefängnis – und HIPPOKRATES VON CHIOS (ca. 450 v. Chr.) gehörten zu den ersten, die es betrachteten.

Es gibt grundsätzlich mehrere Wege, das Problem anzugehen.

Eine bewegungsgeometrische Methode fand schon DINOSTRATUS um 400 v. Chr. mit Hilfe der sogenannten *Quadratrix*, einer Kurve die wahrscheinlich HIPPIAS VON ELIS um 420 v. Chr. konstruiert hatte. Die Quadratrix Q entsteht aus der Menge der Schnittpunkte, wenn sich die obere Seite a des Einheitsquadrates mit konstanter Geschwindigkeit bis zur Basis absenkt, während gleichzeitig der Radius r mit konstanter Geschwindigkeit den Viertelkreis K um O aus der Senkrechten in die Basis beschreibt. Die Quadratrix teilt die Strecke $2/\pi$ von der Basis ab.



Bei einer Reihendarstellung der Zahl π, wie der von GREGORY und LEIBNIZ, VIETA oder EULER, spricht man auch von »arithmetischer Kreisquadratur«.

Die seinerzeit beste Näherung fand ARCHIMEDES (287 – 212), indem er ein 96-Eck in einen Kreis einbeschrieb und ein anderes umbeschrieb (S. 34):

$$3 + 1/7 > \pi > 3 + 10/71$$

Der Chinese TSU CH'UNG-CHIH (430 – 501) gab im fünften Jahrhundert den noch erheblich genaueren Wert $\pi = 355/113 = 3{,}1415929...$ an, den sein Landsmann LIU HWUY aber im siebenten Jahrhundert schon wieder vergessen hatte. Er benutzte die heute noch gebräuchliche Näherung $\pi = 157/50 = 3{,}14$. Allerdings übertraf er damit immer noch den Vertreter der mathematisch sonst sehr gewandten Inder, BRAHMAGUPTA, der um dieselbe Zeit $\pi = \sqrt{10} = 3{,}16...$ für exakt hielt.

LUDOLPH VAN CEULEN (d.h. von Köln, 1540 – 1610) berechnete in einer lebenslangen Arbeit nach der archimedischen Methode 35 Stellen, weshalb man π ihm zu Ehren auch LUDOLPHs Zahl nannte. Derartige Leistungen steigerten sich, und heute, im Zeitalter der Computer, kennt man viele hundert Millionen Stellen. Weil Lorbeer damit nicht mehr zu ernten ist, verlegen sich manche auf das Auswendiglernen der (soweit bisher bekannt) normal, d. h. rein zufällig und gleichmäßig, verteilten Ziffern. So sagte RAJAN MAHADEVAN 1981 in knapp vier Stunden 31812 Stellen der Zahl π aus dem Gedächtnis auf. HIDEAKI TOMOYORI brauchte 1987 über 17 Stunden, brachte es aber auf 40000 Stellen.

Kreisquadraturen im eigentlichen Sinne sind aber alle oben genannten Methoden nicht, denn darunter versteht man eine im Prinzip exakte geometrische Konstruktion, bei der nach PLATON (427 – 348) außer dem Zeichenstift lediglich ein Zirkel und ein Lineal ohne Markierungen verwendet werden dürfen. Seit 1755 nahm die französische Akademie der Wissenschaften keine Arbeiten zur Kreisquadratur mehr an. JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728 – 1777) zeigte 1761, dass π keine rationale Zahl sein kann, aber noch im selben Jahrhundert »fanden« drei Amateure unabhängig voneinander den rationalen Wert $\pi = 4{\cdot}(31/35)^2 = 3{,}137959...$. Und 1897 passierte die Gesetzesvorlage Bill 246 das Parlament im US-Bundesstaat Indiana, womit der lakonische biblische Wert $\pi = 3{,}0$ wieder eingeführt werden sollte, um überflüssige Rechenarbeit wegzurationalisieren. Sie scheiterte erst im Senat.

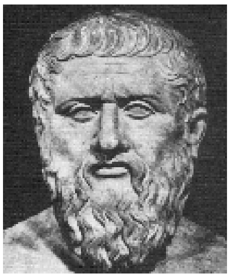
Im alten Europa, in Paris, zählte DAVID HILBERT derweil im Jahre 1900 die 23 wichtigsten mathematischen Probleme auf; an siebenter Stelle erwähnte er den Transzendenzbeweis für $2^{\sqrt{2}}$ und ähnliche Zahlen.

Dem russischen Mathematiker ALEXANDER GELFAND (1906 – 1968) und dem deutschen Mathematiker THEODOR SCHNEIDER (1911 – 1988) gelang 1934 unabhängig voneinander dieser Beweis – eine ebenso merkwürdige Parallelität wie im Falle der Entdeckung des Periodensystems.

Ob das aktual Unendliche in Form der unendlichen Reihen, die zur Erzeugung von LIOUVILLEschen und anderen transzendenten Zahlen benötigt werden, »tatsächlich« existiert, ist mit der Frage verbunden, ob man diese Ziffernfolgen für »tatsächlich« existent hält oder eher den DEDEKINDschen Standpunkt einnehmen möchte.

Die Zahlen sind eine freie Schöpfung des Menschen
RICHARD DEDEKIND

XI Transfinit



PLATON

PLATON (427 – 348), der große griechische Philosoph und Lehrer des ARISTOTELES, sagte: »Es gibt viele schöne Dinge; sie sind vergänglich. Die *Idee* des Schönen ist unvergänglich.« Und in seinem berühmten Höhlengleichnis beschreibt er unsere Welterkenntnis als Schatten einer wirklich vorhandenen äußeren Welt. Die Welt der Ideen *existiert* außerhalb unserer Höhle, von der wir aufgrund gewisser Einschränkungen nur die Rückwand betrachten können, auf der sich die äußeren Vorgänge schemenhaft abzeichnen. Mathematiker, die von der unabhängigen *Existenz* der gefundenen Größen und Gesetze überzeugt sind, nennt man daher Platonisten; die mathematischen Sätze werden demnach nicht *er*funden, sondern *ge*funden.

RICHARD DEDEKIND, als Korrespondent und Freund GEORG CANTORs an der Entstehung von dessen transfiniter Mengenlehre beteiligt, nahm nach dem obigen Zitat eine ganz entgegengesetzte Position ein (S. 29).

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit der CANTORschen Mengenlehre beschäftigen, weil sie die engste und direkteste Verbindung mit der Idee des aktual Unendlichen liefert. Dazu sind einige Vorbemerkungen erforderlich.

Wie können wir im und mit dem Unendlichen rechnen? Schon an dieser Grundsatzfrage scheiden sich die Geister. Nach GALILEO GALILEI (1564 – 1642) sollte das Unendliche eine andere Arithmetik befolgen als gewöhnliche Zahlen, während GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716) meint, die Regeln des Endlichen behalten im Unendlichen Geltung, und umgekehrt gelten die Regeln des Unendlichen für das Endliche. Einigkeit herrschte aber in der Annahme, dass das Unendliche nicht vermehrbar ist, also die folgenden Rechenregeln gelten

$$\infty + n = \infty = \infty - n$$
$$\infty + \infty + ... + \infty = n\cdot\infty = \infty\cdot\infty = \infty = \infty/n$$
$$\infty\cdot\infty\cdots\infty = \infty^n = \infty^\infty = \infty = \infty^{1/n}$$

worin n eine natürliche Zahl darstellt. Damit werden Ausdrücke wie $\infty - \infty$, ∞/∞, $0/0$, $\infty\cdot 0$, $log_\infty\infty$ unbestimmt, es sei denn, wir können sie mit Hilfe der L'HOSPITALschen Regel (S. 40) berechnen.

Kontrovers ist außerdem die Bedeutung einer Bijektion für die Zahl der Elemente der beteiligten Mengen. Eine Bijektion ist eine eins-zu-eins-Abbildung. Das bekannteste Beispiel ist der Walzertanz. Wenn eine Gruppe von Damen und eine Gruppe von Herren sich beim Walzer so arrangieren können, dass jeder Tänzer genau eine Tänzerin und jede Tänzerin genau einen Tänzer hat, also niemand übrig bleibt, dann haben wir eine Bijektion zwischen den Mengen von Damen und Herren. Eine solche Bijektion sagt uns, dass die beteiligten Mengen genau gleichviel Elemente besitzen, jedenfalls solange die Mengen endlich sind. In der Mengenlehre geht man heute davon aus, dass die Existenz einer Bijektion auch bei unendlichen Mengen die Gleichheit der Elementzahl beweist, was zu einigen Paradoxien führt.

Eine bijektive Abbildung zwischen ganzen Zahlen und geraden Zahlen, $n \leftrightarrow 2n$, zeigt demnach, dass es genau so viele gerade Zahlen wie ganze Zahlen gibt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	...

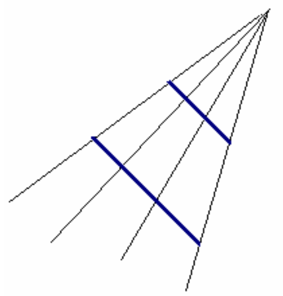
GALILEI zeigte mit der Methode, dass es genau so viele Quadratzahlen wie natürliche Zahlen gibt, $n \leftrightarrow n^2$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
1	4	9	16	25	36	49	64	81	...

BERNARD BOLZANO (1781 – 1848), tschechischer Theologe, Philosoph und Mathematiker, der Schöpfer des Begriffs »Menge«, nimmt eine entgegengesetzte Position ein. In seinem Buch *Die Paradoxien des Unendlichen* beschreibt er eine bijektive Abbildung der Form $y = kx$, die zwischen allen Punkten von zwei verschieden langen Geraden stattfindet (s. Abbildung). Die Geraden, so argumentiert er, enthalten sicher verschiedene Mengen von Punkten. Eine Bijektion zwischen unendlichen Mengen impliziert also nicht die gleiche Elementzahl der beteiligten Mengen. Das Ganze ist stets größer als sein echter Teil. Diese Auffassung hat sich zwar nicht durchsetzen können, aber »die Tatsache, dass Bolzanos Anzahlbegriff ein anderer ist als die von Cantor geprägten, stempelt ihn keineswegs als widersprüchlich oder gar falsch ab!« (D. D. SPALT).

BERNARD BOLZANO

BOLZANO hält das aktual Unendliche für existent und unterscheidet sogar verschieden große Unendlichkeiten.



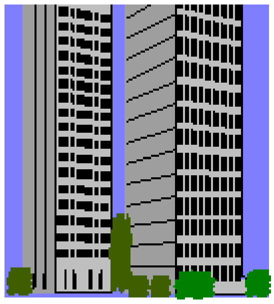
Ein Beweis für das aktual Unendliche ist mein Gedanke an einen wahren Satz, und zwar, dass ich daran denke, dass ich daran denke, ... Als Beispiele für das aktual Unendliche nennt BOLZANO außerdem Gottes unendlich große Kraft, Güte, Weisheit, die Menge der Zahlen, die Menge der Punkte von Linie, Fläche, Körper, Raum und Zeitspanne, die Anzahl der Stellen von $\sqrt{2}$, die Menge aller Kugeln oder aller Tetraeder.

Es gibt verschiedene Grade des Unendlichen. Wir können die Menge aller Kreislinien und die Menge aller Kreisdurchmesser vergleichen und finden, dass es zu jedem Kreis unendlich viele Durchmesser gibt. Manche Mengen bilden sogar endliche Zahlenverhältnisse miteinander: Die Menge aller Kreislinien und aller Kreisflächen sind gleich. Mittelpunkte und Brennpunkte aller Ellipsen verhalten sich wie 1:2.

Es gibt auch unterschiedliche Qualitäten des Unendlichen. Ein Intervall ist in Hinsicht auf die enthaltenen Punkte unendlich, in Hinsicht auf die Länge nicht.

Eine Menge von Elementen einer bestimmten Art heißt unendlich, wenn jede endliche Menge von Elementen dieser Art nur als Teil von ihr erscheint. Ein Beispiel ist die Menge der natürlichen Zahlen.

Ein bekanntes Beispiel für das paradoxe Ergebnis einer Bijektion mit unendlichen Mengen liefert »HILBERTS Hotel«, das nach oben unendlich ist. Auch wenn das Hotel vollständig belegt ist, kann noch ein neuer Gast aufgenommen werden, denn jeder der vorhandenen Gäste wird gebeten, ein Zimmer weiterzuziehen, wodurch Zimmer Nr. 1 frei wird. Selbst unendlich viele Gäste finden noch Platz, weil alle Zimmer mit ungerader Nummer frei werden, wenn jeder schon vorhandene Gast seine Zimmernummer verdoppelt.



Zur Reinigung des ganzen Hotels genügt übrigens eine einzige Putzfrau, die allerdings sehr tüchtig sein muss, denn sie reinigt das erste Zimmer zwar in einer halben Stunde, für das zweite Zimmer hat sie aber nur eine Viertelstunde Zeit. Wenn sie jedes Zimmer in der halben Zeit des vorhergehenden schafft, so ist sie nach einer Stunde mit allen Zimmern fertig. Aber das hat nichts mit Bijektionen zwischen unendlichen Mengen zu tun.

GEORG CANTOR (1845 – 1918), Professor in Halle, gilt als Begründer der transfiniten Mengenlehre.

GEORG CANTOR

Er definiert jede Menge, die in eine Bijektion mit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gebracht werden kann, als eine abzählbar unendliche Menge und schreibt ihr die »Mächtigkeit« oder »Kardinalzahl« $\aleph_0$ (Aleph-null) zu. Die Menge aller geraden Zahlen und die Menge aller Quadratzahlen sind abzählbar unendliche Mengen. Sie alle besitzen dieselbe Mächtigkeit. Ihre Kardinalzahl, durch Absolutstriche bezeichnet, ist

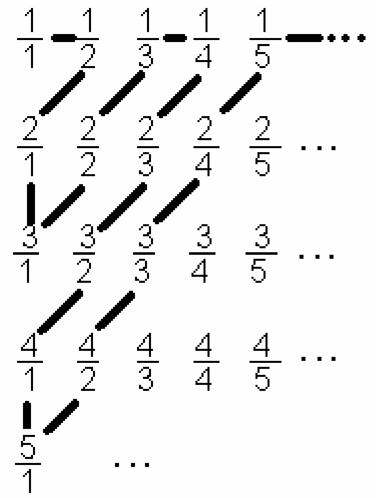
$$|\{\text{gerade Zahlen}\}| = |\{\text{Quadratzahlen}\}| = \aleph_0.$$

Eine unendliche Menge ist daran erkennbar, dass sie in eine Bijektion mit einer ihrer Teilmengen gebracht werden kann, wie in den obigen oder der folgenden Tabelle gezeigt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
100	200	300	400	500	600	700	800	900	...

Es gibt demnach genau so viele durch 100 teilbare natürliche Zahlen wie natürliche Zahlen überhaupt.

Die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen besitzt dieselbe Mächtigkeit wie die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen, weil eine Bijektion $\mathbb{Q} \leftrightarrow \mathbb{N}$ erzeugt werden kann.



Wie das Schema zeigt, können *alle* rationalen Zahlen – sogar mehrfach – in einer Folge angeordnet, also mit den natürlichen Zahlen nummeriert werden. Daher ist

$$|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Die erste Spalte der Tabelle zeigt aber $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ und folglich

$$|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Beide Ungleichungen zusammengenommen ergeben

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0,$$

obwohl die rationalen Zahlen dicht liegen – zwischen p und q liegt immer eine weitere $(p+q)/2$ – und daher zwischen zwei natürlichen Zahlen unendlich viele rationale Zahlen liegen. Das Schema wird auch als CANTORs erstes Diagonalverfahren oder als CAUCHYsches Diagonalverfahren bezeichnet, weil CAUCHY es in anderem Zusammenhang erstmals angewendet hat.

Beweis für die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen

1873 bewies RICHARD DEDEKIND sogar die Abzählbarkeit der Menge aller algebraischen Zahlen. Er ging vom Fundamentalsatz der Algebra aus, wonach ein Polynom n-ten Grades maximal n verschiedene Wurzeln besitzt. Die Polynome

$$P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

und damit auch die Gleichungen $P(x) = 0$ können mit Hilfe ihres Index

$$J = |a_0| + |a_1| + |a_2| +...+ |a_n| + n$$

nummeriert werden. Für $J = 1$ ergibt sich noch keine algebraische Zahl, weil die Gleichung $1x^0 = 0$ ebenso wie $0x^1 = 0$ oder $0x^0 = 1$ keine (eindeutige) Lösung besitzt.

J	Gleichungen **algebraische Zahlen**
2	$1x^1 = 0$ **0**
3	$1x^2 = 0$, $2x^1 = 0$, $1x^1 \pm 1 = 0$ **0 0 ±1**
4	$1x^3 = 0$, $2x^2 = 0$, $3x^1 = 0$, $1x^2 \pm 1 = 0$, $2x^1 \pm 1 = 0$, $1x^1 \pm 2 = 0$ **0 0 0 ±1, ±i ±1/2 ±2**
...	....

Alle Polynome mit einem bestimmten Index J können in einer Folge angeordnet werden, alle Lösungen einer Polynomgleichung in einer endlichen Folge, also können alle Lösungen von Polynomgleichungen in einer Folge dargestellt, d. h. nummeriert werden. Die algebraischen Zahlen sind damit abzählbar.

Die Kardinalzahl $\aleph_0$ ist für CANTOR eine aktuale Zahl. Wiederholt spricht er von der *unendlichen Menge der endlichen* (natürlichen) *Zahlen*. Das bringt einige Paradoxa mit sich. In LAURENCE STERNES (1713 – 1768) Geschichte des Lebens von *Tristram Shandy* verfasst der Held seine Autobiographie so pedantisch, dass er zur Beschreibung eines Tages ein ganzes Jahr benötigt. In endlicher Zeit fällt er immer weiter hinter die Gegenwart zurück. Wenn aber das Unendliche aktual existiert, so kann er fertig werden, denn die Menge seiner Tage und die Menge seiner Jahre besitzen dieselbe Mächtigkeit $\aleph_0$; jedem Tag kann somit ein Jahr zugeordnet werden.

CANTORS zweites Diagonalverfahren basiert, wie man aus Briefen weiß, auf einer Idee von PAUL DU BOIS-REYMOND (1831 – 1889). Das Verfahren zeigt – und das ist wohl CANTORS originäre Leistung – für die meisten Mathematiker überzeugend, dass die Mächtigkeit der Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen größer ist als $\aleph_0$. Der Beweis erfolgt durch Widerspruch. Man nimmt an, dass alle reellen Zahlen in einer Liste aufgeschrieben werden können. Die Zeilen sind mit natürlichen Zahlen n nummeriert. Die Annahme, wäre sie richtig, würde zeigen, dass eine Bijektion $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{N}$ existiert. Die folgende Tabelle soll alle reellen Zahlen r aus dem Intervall $(0,1] = \{r \mid 0 < r \leq 1\}$ in einer beliebigen Reihenfolge enthalten.

n	$r(n)$
1	0,**0**00111199999...
2	0,1**2**3456789123...
3	0,55**5**555555555...
4	0,789**7**89789789...
5	0,0101**0**1010101...
...	...

Erhöht man jede Diagonalziffer, das ist die n-te Stelle der n-ten reellen Zahl, um 1 (oder vermindert sie um 1, wenn die Diagonalziffer eine Acht oder eine Neun ist), und fügt die veränderten Ziffern zusammen, so ergibt sich die Zahl 0,13681... . Sie ist in der Liste nicht enthalten, weil sie sich von jeder reellen Zahl $r(n)$ in der Liste an mindestens einer, nämlich der n-ten Stelle unterscheidet. Die Annahme einer vollständigen Liste war also falsch. Schon die reellen Zahlen aus dem Intervall (0,1] lassen sich nicht auflisten. Damit gibt es eine Menge mit einer Kardinalzahl

$$|\mathbb{R}| > \aleph_0,$$

die größer als das gewöhnliche Unendliche $\aleph_0$ ist.

Dieser Beweis wird auch als CANTORS Beweis für die Existenz transzendenter Zahlen angesehen, denn da die algebraischen Zahlen abzählbar sind, müssen die meisten (fast alle) reellen Zahlen transzendent sein.

Ein zweiter Beweis dazu macht Gebrauch von der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der natürlichen Zahlen.

Die Potenzmenge und der Beweis von HESSENBERG

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M besteht aus allen Kombinationen ihrer Elemente einschließlich der in jeder Menge enthaltenen leeren Menge $\{\ \} = \emptyset$. Sei z. B. $M = \{a, b\}$, so ist $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. $\mathcal{P}(M)$ besitzt also vier Elemente, die alle Teilmengen von M sind. Ist $|M|$ die Kardinalzahl der Menge M, so ist die Kardinalzahl der Potenzmenge

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}.$$

Dies ist leicht zu sehen. Wenn man zu einer Menge M ein Element m hinzufügt, so verdoppelt sich die Menge aller Teilmengen, $|\mathcal{P}(M \cup \{m\})| = 2|\mathcal{P}(M)|$, weil das zusätzliche Element m zu jeder Teilmenge einmal hinzugefügt werden muss und einmal nicht hinzugefügt werden darf, um alle Kombinationsmöglichkeiten zu erschöpfen. Die Potenzmenge einer Menge mit nur einem Element $\{a\}$ ist $\{\{\ \}, \{a\}\}$; sie besitzt 2^1 Elemente. Immer wenn ein Element hinzugefügt wird, verdoppelt sich die Anzahl der Elemente der Potenzmenge.

Der Anstieg ist gewaltig: Eine Menge M mit drei Elementen besitzt die Kardinalzahl

$$|M| = |\{a, b, c\}| = 3,\ |\mathcal{P}(M)| = 2^3 = 8,\ |\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))| = 2^8 = 256,\ |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)))| = 2^{256} \approx 10^{77}.$$

Der Beweis von G. HESSENBERG zeigt nun, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ aller natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die gleichmächtig mit der Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen ist, nicht dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ besitzt.

$$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

Zum Beweis gehen wir vom Gegenteil aus und nehmen an, dass es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gibt, etwa so wie zwischen den Tagen und Jahren des Tristram Shandy. Dann werden manche natürlichen Zahlen auf Mengen abgebildet, welche diese Zahlen enthalten, in einem willkürlich gewählten Beispiel

$$1 \to \{1\},\ 4 \to \{1, 2, 3, 4\},\ 15 \to \{\text{alle ungeraden Zahlen}\}, \ldots,$$

andere werden auf Mengen abgebildet, welche sie nicht enthalten, z. B.

$$5 \to \{2\},\ 8 \to \{2, 3, 4\},\ 17 \to \{\text{alle geraden Zahlen}\}, \ldots .$$

Die Menge N aller dieser letzteren Zahlen n, die auf Teilmengen M_n abgebildet werden, in denen sie selbst nicht enthalten sind,

$$N = \{n \mid n \to M_n \wedge n \notin M_n\}$$

ist auch eine Untermenge der natürlichen Zahlen, $N \subseteq \mathbb{N}$, und deswegen ein Element der Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Diese Menge kann aber nicht zur Abbildung gehören, denn es gibt keine natürliche Zahl n_0, die darauf abgebildet werden könnte. Wäre $n_0 \in N$, so würde n_0 auf eine Menge abgebildet, in welcher n_0 enthalten ist, und dürfte nicht in der Menge N enthalten sein, für die eben dies nicht gilt. Würde n_0 dagegen aus N herausgenommen, so müsste n_0 zu N gehören. Das Dilemma ist unauflöslich.

Es gibt demzufolge eine transfinite Zahl *aktual abzählbar unendlich* $\aleph_0$, die durch eine andere transfinite Zahl *aktual überabzählbar unendlich* $2^{\aleph_0}$ übertroffen wird. Durch analoge Beweise kann gezeigt werden, dass eine nicht abbrechende, also unendliche Folge von transfiniten Kardinalzahlen, von einander übertreffenden aktualen Unendlichkeiten entsteht

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \dots .$$

Für das Rechnen mit dem aktual Unendlichen gilt, wenn n eine natürliche Zahl ist,

$$\aleph_0 + n = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdots \aleph_0 = \aleph_0^n = \aleph_0$$

aber im Gegensatz zum potentiell Unendlichen der Analysis ist

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}.$$

CANTOR fand noch ein weiteres erstaunliches Ergebnis. Er bewies nämlich, dass ein Quadrat nicht mehr Punkte besitzt als eine seiner Seiten. Das führt unmittelbar zu der Aussage, dass der ganze Weltraum mathematisch betrachtet nicht mehr Punkte besitzt als ein beliebig kleines lineares Intervall. CANTOR schrieb darüber: »Je le vois, mais je ne le crois pas.« (Ich sehe es, doch kann ich es nicht glauben.)

Schon im 14. Jahrhundert zog ALBERT VON SACHSEN (1316 – 1390) in seinem Buch *Questiones subtilissime in libros de celo et mundi* den ähnlichen Schluss, dass ein unendlich langer Holzbalken genau so viele Punkte besitzt wie der gesamte dreidimensionale Raum.

Eine Bijektion zwischen dem positiven reellen Zahlenstrahl $[c, \infty)$ ohne das Intervall $(0, c)$ und diesem Intervall selbst erzeugt man durch die Abbildung $x \to c^2/x$ (vgl. die Inversion für $c = 1$ auf S. 47).

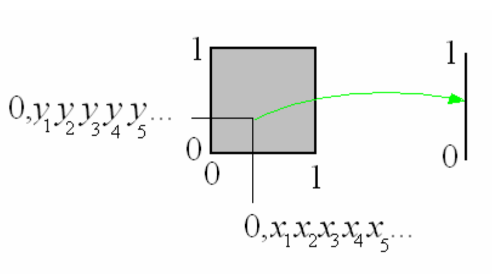
Dass die Kardinalzahl der Punkte des Quadrates $[0, 1]^2$ nicht größer ist als die Kardinalzahl der Punkte des Intervalls $[0, 1]$, erkennt man folgendermaßen:

Seien die Koordinaten

$$x = 0{,}x_1x_2x_3\dots$$

und

$$y = 0{,}y_1y_2y_3\dots$$



eines Punktes $(x \mid y) \in [0, 1]^2$ gegeben. Durch Vereinigung der Dezimalstellen der Koordinaten nach dem Schema

$$0{,}x_1y_1x_2y_2x_3y_3\dots$$

(oder einem ähnlichen) erfolgt eine Abbildung aller Punkte des Quadrates in das lineare Intervall (s. Zeichnung). Zahlenbeispiel: Der Punkt des Einheitsquadrates $(x \mid y) = (0{,}111 \mid 0{,}222)$ wird abgebildet auf den Punkt des Einheitsintervalls 0,121212.

Die gewählte Relation ist allerdings nicht bijektiv (ja nicht einmal eine Abbildung), da wegen der Identität der Koordinatendarstellungen x = 0,1000... = 0,0999... (vgl. S. 23) die Vereinigung mit einer beliebigen y-Koordinate nur auf einen Punkt des linearen Intervalls führen dürfte, nicht aber wie hier auf zwei, $0{,}1y_1 0y_2 0y_3 0y_4...$ und $0{,}0y_1 9y_2 9y_3 9y_4...$, die sich deutlich unterscheiden. Eine bijektive Abbildung könnte man mit Hilfe von Kettenbrüchen (S. 30) erzeugen, und das hat CANTOR auch demonstriert.

Die bijektive Abbildung von allen Punkten eines zweidimensionalen Raumes auf alle Punkte eines Intervalls kann leicht auf höhere Dimensionszahlen erweitert oder mehrmals hintereinandergeschaltet ausgeführt werden. Damit könnten alle Koordinatenquadrupel des gesamten vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums unseres Universums auf eine Strecke von einem Zentimeter Länge (um wenigstens von der Bildmenge eine Vorstellung zu ermöglichen) projiziert werden.

CANTORs transfinite Mengenlehre steht und fällt mit der Möglichkeit der *Wohlordnung*. Um einer Menge eine Kardinalzahl zuweisen zu können, muss sie so angeordnet werden können, dass jede ihrer Teilmengen ein erstes Element besitzt. Für jede Teilmenge der natürlichen Zahlen oder der positiven Brüche ist diese Forderung automatisch erfüllt, wenn man die natürlichen Zahlen nur in ihrer natürlichen Reihenfolge anordnet oder die Brüche nach dem auf S. 96 dargestellten Schema. Diese Mengen sind dann also wohlgeordnet. Die Menge der Punkte des offenen Intervalls (0, 1) dagegen macht Schwierigkeiten. Es gibt für $0 < x < 1$ kein kleinstes und damit sich selbst als erste Zahl einer Wohlordnung anbietendes Element.

ERNST ZERMELO

Der ungarische Mathematiker JULIUS KÖNIG (1849 – 1913) berichtete 1904 auf einer Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung über seinen Beweis dafür, dass die reellen Zahlen nicht wohlgeordnet werden können. Ein Gegenbeispiel, die beste und überzeugendste Methode, um eine Behauptung zu entkräften, konnte niemand konstruieren, weil KÖNIG faktisch Recht hatte. An der Aufgabe, das Kontinuum der reellen Zahlen wohlzuordnen, ist noch jeder gescheitert. Jedoch enthielt KÖNIGs Beweis einen Fehler. Und gleich im Anschluss an die Auseinandersetzung, die CANTOR stark aufregte, weil er sein Lebenswerk, das er seit über 30 Jahren verfolgte, in Gefahr gebracht sah, erdachte ERNST ZERMELO (1871 – 1953) das *Auswahlaxiom*, mit dessen Hilfe sich beweisen lässt, dass die Menge der reellen Zahlen wohlgeordnet werden kann. Darin wird festgelegt, dass aus *jeder* nicht leeren Teilmenge einer Menge ein erstes Element ausgewählt werden kann. Die Möglichkeit der Wohlordnung wird kontrafaktual behauptet. ZEMELOs Beweis trägt zwar die Überschrift *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann* (s. Literaturverzeichnis, S. 130), aber man kann auch beweisen, dass keine Wohlordnung für Mengen wie die reellen Zahlen angeben werden kann – und dieser Beweis wird durch die Tatsachen erhärtet.

Eine Fassung des Auswahlaxioms lautet: Es gibt eine Funktion f auf der Menge M so dass für jede Untermenge $m \subseteq M$, die nicht leer ist, $m \neq \emptyset$, ein Element $f(m) \in m$ aus dieser Untermenge m existiert, also automatisch ein erstes Element ausgewählt ist. Das vollständige Axiomensystem der Mengenlehre von ZERMELO und FRAENKEL ohne Auswahlaxiom wird mit ZF abgekürzt; nimmt man das Auswahlaxiom (englisch: axiom of choice) hinzu, so spricht man von ZFC. Natürlich ist es das Ziel eines jeden Mathematikers, seine Sätze allein in ZF zu beweisen – also ohne das dubiose Auswahlaxiom.

Das ZERMELO-FRAENKEL-Axiomensystem (ZF) mit dem Auswahlaxiom (C)

1) Axiom der Bestimmtheit (Extensionalitätsaxiom): Eine Menge ist durch ihre Elemente eindeutig bestimmt: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

2) Aussonderungsaxiom: Ist M eine Menge, so ist jede durch ein sinnvolles Prädikat (also eine definite Eigenschaft) definierte Teilklasse von M eine Menge.

3) Axiom der Paarmenge: Sind A und B Mengen, so existiert die Menge $\{A, B\}$, die A und B als einzige Elemente enthält.

4) Axiom der Potenzmenge: Für jede Menge A ist die Klasse ihrer Teilmengen eine Menge.

5) Ersetzungsaxiom: Ist der Argumentbereich einer Funktion eine Menge, so ist auch ihr Wertebereich eine Menge, d.h. ist X eine Menge, so ist die Klasse aller Mengen $M(x)$ mit $x \in X$ auch eine Menge.

6) Summenaxiom: Ist X eine Menge, so ist auch die Vereinigung $\cup_{x \in X} M(x)$ eine Menge.

7) Unendlichkeitsaxiom: Es gibt eine Menge U, so dass: $\{\ \} \in U \wedge A \in U \Rightarrow A \cup \{A\} \in U$.

8) Auswahlaxiom: Ist X eine beliebige Menge nichtleerer Mengen so gibt es eine (sogenannte Auswahl-) Funktion f, die jeder Menge in X eines ihrer Elemente zuordnet.

ZERMELO ist übrigens auch Autor der auf S. 24 gebrachten Version des Beweises zum Fundamentalsatz der Zahlentheorie und Herausgeber der gesammelten Abhandlungen CANTORS. Im Vorwort schreibt er: »In der Geschichte der Wissenschaften ist es gewiss ein seltener Fall, wenn eine ganze wissenschaftliche Disziplin von grundlegender Bedeutung der schöpferischen Tat eines einzelnen zu verdanken ist. Dieser Fall ist verwirklicht in der Schöpfung GEORG CANTORS.«

ADOLF ABRAHAM FRAENKEL

ADOLF A. FRAENKEL (1891 – 1965) verfasste eines der ersten Lehrbücher über die Mengenlehre, die inzwischen als Fundament der gesamten Mathematik gilt. FRAENKEL schreibt darin: »Wenn er [der Angriff auf das Unendliche] endgültig glückt, so bleibt, abgesehen von engumgrenzten unangreifbaren Gebieten (namentlich der Arithmetik im engeren Sinn), von der gegenwärtigen Mathematik nur ein ungeheurer Trümmerhaufen übrig, aus dem wohl erst durch die Arbeit von Generationen neue einigermaßen wohnliche (und den alten jedenfalls an Bequemlichkeit nicht gleichkommende) Behausungen aufgebaut werden können. ... [Die Mengenlehre] stellt einen der kühnsten Schritte dar, die die mathematische Entwicklung jemals getan hat, einen Schritt, der eine wissenschaftliche Revolution von nicht geringerer Tragweite bedeutet als das Kopernikanische Weltsystem in der Astronomie, als die Einsteinsche Relativitätstheorie oder die Plancksche Quantenlehre in der Physik.«

Die Revolution hatte allerdings mit Problemen zu kämpfen. Eines davon ist CANTORs Kontinuumhypothese, wonach die Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ des Kontinuums der reellen Zahlen

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$$

die nächstgrößere nach $\aleph_0$, also

$$\mathfrak{c} = \aleph_1$$

ist. CANTOR glaubte 1884 kurzzeitig, einen Beweis dafür zu besitzen, musste aber erkennen, dass er diesen wichtigen Beweis, den er schon öffentlich angekündigt hatte, nicht erbringen konnte. Bedingt durch diese frustrierende Situation, die es ihm verwehrte, sein Lebenswerk zu krönen, wandte er sich von der Mengenlehre und zeitweise ganz von der Mathematik ab. Er interessierte sich zunehmend für die wahre Identität Shakespeares, die er in Francis Bacon zu erkennen glaubte, und stellte sogar beim Kultusminister den Antrag, von seinen Pflichten als Lehrstuhlinhaber entbunden zu werden, um sich, z. B. als Bibliothekar, ganz seinen genealogischen Forschungen widmen zu können. Seit 1884 litt er anfallsweise unter Geistesstörungen. Er musste immer häufiger um Befreiung von seiner Lehrverpflichtung ersuchen und sich in Heilanstalten begeben. Zeitweise glaubte und behauptete er, die Kontinuumhypothese sei ihm direkt von Gott eingegeben worden.

Gibt es eine Kardinalzahl zwischen $\aleph_0$ und $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$? Die Frage ist durchaus berechtigt, wie folgende Analogie zeigt (vgl. den Kasten S. 98): Durch Bildung der Potenzmenge einer dreielementigen Menge M und ihrer Potenzmengen $|\mathcal{P}(M)| = 8$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))| = 256$, ... kann niemals die endliche Kardinalzahl 100 erreicht werden.

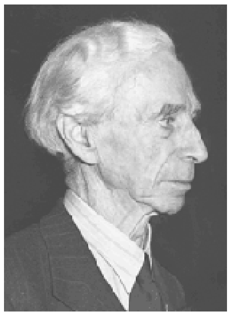
Das erste und damit wohl wichtigste der von DAVID HILBERT 1900 auf dem II. Weltkongress der Mathematiker in Paris genannten 23 Probleme betraf den Beweis der Kontinuumhypothese.

KURT GÖDEL (1906 – 1978), bekannt durch den berühmten GÖDELschen Satz, wonach die Widerspruchsfreiheit einer hinreichend komplexen mathematischen Theorie niemals aus ihr allein bewiesen werden kann, bewies 1937: Die Kontinuumhypothese widerspricht nicht dem Axiomensystem von ZERMELO und FRAENKEL. GÖDEL bezweifelte die Kontinuumhypothese. Er hielt die Kardinalzahl des Kontinuums für wesentlich größer.

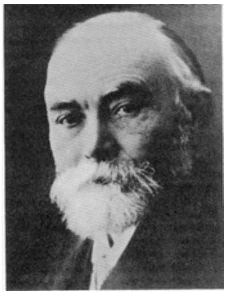
KURT GÖDEL

PAUL J. COHEN (1934 – 2007) bewies 1963: Die Kontinuumhypothese ist unentscheidbar, denn ihr Gegenteil widerspricht den ZF-Axiomen auch nicht. COHEN beendet sein Buch aber mit der Bemerkung, die Annahme, dass die Kontinuumhypothese offensichtlich falsch sei, werde bald allgemein akzeptiert werden.

Die transfinite Mengenlehre ist eine Theorie, die zahlreiche Paradoxa auf dem Gebiet der Logik kreiert hat. Schon CANTOR hatte das erkannt. In einem Brief an DEDEKIND schrieb er 1899, dass das System aller Alephs inkonsistent ist, also keine Menge bildet. Es gibt auch keine Menge aller Mengen, denn sie müsste ihre Potenzmenge umfassen, was, wie wir oben gesehen haben, unmöglich ist.



BERTRAND RUSSELL



GOTTLOB FREGE

Das Problem wurde öffentlich bekannt, als EARL BERTRAND RUSSELL (1872 – 1970), Mitautor des Standardwerkes der mathematischen Logik *Principia Mathematica*, 1903 die Frage aufwarf und verneinen musste, ob die Menge $\{X \mid X \notin X\}$ aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, existieren könne. Er richtete diese Frage an seinen Logiker-Kollegen GOTTLOB FREGE (1848 – 1925), der in mehrjähriger Arbeit eine axiomatische Begründung für die CANTORsche Mengenlehre geschaffen hatte, die gerade gedruckt wurde. FREGE war durch diese logische Inkonsistenz der Mengenlehre tief betroffen und hat das auch im Vorwort seines Buches zum Ausdruck gebracht. RUSSELL blieb trotzdem ein Verehrer von CANTORs Leistung: »The solution of the difficulties which formerly surrounded the mathematical infinite is probably the greatest achievement of which our age has to boast!« Die mit der Mengenlehre verbundenen Paradoxien haben auch nicht alle ihren Ursprung in der Mengenlehre selbst. Viele logische Paradoxien, wie schon das Sprichwort »keine Regel ohne Ausnahme«, besitzen tiefere Wurzeln. SOKRATES (470 – 399), der weise Lehrer PLATONs, sagte bescheiden: »Ich weiß, dass ich nichts weiß«, und EPIMENIDES, der Kreter, sagte: »Alle Kreter lügen«. Die beiden Sätze: »Der nächste Satz ist falsch; der vorhergehende Satz ist richtig,« erlauben keine Entscheidung über ihren Wahrheitsgehalt, und durch das folgende Satzpaar wird man nicht nur gezwungen, den Mond als quarkhaltig anzuerkennen, sondern überhaupt alles zu akzeptieren, was der zweite Satz behauptet, um wenigstens eine logisch konsistente Aussage zu erhalten.

Diese beiden Sätze sind falsch.
Der Mond besteht aus weißem Käse.

Wäre der erste Satz richtig, so könnte er nach eigener Aussage nicht richtig sein, deshalb ist er sicher falsch. Es können aber nicht beide Sätze falsch sein, denn dann wäre der erste ja richtig. Nach der folgenden Wahrheitstabelle ist der erste falsch und der zweite richtig.

Diese beiden Sätze sind falsch.	*w*	*w*	*f*	*f*
Der Mond besteht aus weißem Käse.	*w*	*f*	*w*	*f*
Logische Konsistenz der Gesamtaussage	-	-	+	-

Die einfache Aussage: »Dieser Satz ist falsch« ist vollends logisch inkonsistent. Wäre sie richtig, so müsste sie falsch sein, wäre sie falsch, so wäre sie richtig.

Das RUSSELLsche Paradoxon ist zum besseren Verständnis auch in populäre Formen gekleidet worden: Ein Barbier in einem kleinen Dorf rasiert alle Männer, die sich nicht selbst rasieren. Wer rasiert den (männlichen und also mit einem Bart ausgestatteten) Barbier? Rasiert er sich nicht selbst, so muss er sich rasieren, tut er das, so darf er es nicht. Eine andere Version betrachtet die Kataloge von Bibliotheken des Landes Gaga. Ein solcher Katalog soll den gesamten Buchbestand angeben. Manche Bibliotheken führen ihren Katalog als Buch selbst mit auf, andere nicht. Fällt es dem Oberbibliothekar von Gaga nun ein, alle Kataloge, die sich nicht selbst enthalten, in einem Hauptkatalog auflisten zu lassen, so bleibt unentschieden, ob dieser Hauptkatalog sich selbst auch aufführt oder nicht.

Das Problem hängt mit der Frage zusammen, ob eine Aussage f eine Fortsetzung besitzt, d. h. ob eine Menge $\{x \mid f(x)\}$ von Elementen x existiert, die durch die Aussage f eindeutig beschrieben werden. Eine solche Aussage bezeichnet RUSSELL als prädikativ. Ein einfaches Beispiel wäre die Menge $\{x\}$ aller natürlichen Zahlen, die der Forderung f gehorchen, dass sie ohne Rest durch 2 teilbar sind. Eine solche Menge existiert; es sind die positiven geraden Zahlen. RUSSELLs Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, ist keine prädikative Aussage, weil sie keine Fortsetzung $\{x \mid f(x)\}$ besitzt.

Um auch dieses Problem etwas anschaulicher zu gestalten, wollen wir ein Adjektiv als »prädikabel« bezeichnen, wenn das Wort die Eigenschaft selbst besitzt, die es angibt. »Prädikabel« kann hier also als Kurzbezeichnung für »die eigenen Eigenschaften beschreibend« verstanden werden. In der folgenden Tabelle sind links einige Adjektive aufgeführt, die sich selbst beschreiben, rechts dagegen andere, deren Aussage auf sie selbst nicht zutrifft.

prädikabel	**imprädikabel**
häufig (wird oft gebraucht)	ölig
abstrakt (ist seine Bedeutung)	beliebt
alt (das Wort gibt es schon lange)	neu
verständlich (das Wort versteht wohl jeder)	unverständlich
kurz (viel kürzer geht’s nicht)	superkurz
superbandwurmlänglich (naja ziemlich)	lang
unsymmetrisch (symmetrisch wären OTTO und ANNA)	symmetrisch
wohlklingend (Geschmackssache, hat aber viele Vokale)	duftend
schwarz (zumindest im Druck)	rot

In welche Spalte gehören die als Überschriften verwendeten Wörter? Das Wort »prädikabel« beschreibt alles, was sich selbst beschreibt, also beschreibt es auch sich selbst; »prädikabel« ist prädikabel. Die paradoxe Frage lautet nun: Ist das Wort »imprädikabel« imprädikabel? Wenn es sich selbst beschriebe, so hieße und wäre es imprädikabel – und das bedeutet, es wäre ein Wort, das sich nicht selbst beschreibt. Akzeptieren wir aber die Aussage, dass es sich nicht selbst beschreibt, so ist das Wort »imprädikabel« genau das, was es aussagt (nämlich imprädikabel), und diese Eigenschaft nennen wir prädikabel. Also beschreibt es sich selbst, und wir stehen wieder am Anfang.

Infinite totalities do not exist in any sense of the word (i.e., either really or ideally). More precisely, any mention, or purported mention, of infinite totalities is, literally, meaningless.

ABRAHAM ROBINSON

XII Infinit

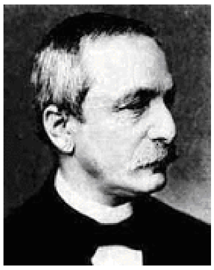
XII.1 Ansichten

Zahlreiche Mathematiker haben die Mengenlehre abgelehnt, andere bezweifeln lediglich die Gültigkeit der Mengenlehre mit dem Auswahlaxiom. Dieses Axiom kann als Analogon zum Parallelenaxiom der Geometrie gesehen werden. Auch ohne das Parallelenaxiom kann man Geometrie betreiben, aber sie unterscheidet sich wesentlich von der EUKLIDischen. Auch ohne Auswahlaxiom kann man Mengenlehre betreiben, aber sie unterscheidet sich deutlich von der CANTORschen.

Als Gegner seiner Theorie der aktual unendlichen und dabei unterscheidbaren Zahlen nennt CANTOR selbst: CAUCHY, CAVALIERI, FISCHER, FONTENELLE, FULLERTON, GALILEI, GAUSS, GERDIL, GOUDIN, GULDIN, GUTBERLET, HEGEL, V. HELMHOLTZ, HERBART, KANT, KRONECKER, LEIBNIZ, MOIGNO, NEWTON, PERERIUS, PESCH, RENOUVIER, SANSEVERINO, SIGWART, TONGIORGI, TORRICELLI, WUNDT, ZIGLIARA.

CARL FRIEDRICH GAUSS

Viele dieser Namen sind heute vergessen, doch einige haben wir in den vorangehenden Kapiteln schon kennengelernt. Zu den prominentesten unter ihnen zählt CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855), einer der größten Mathematiker überhaupt. Er schrieb in einem Brief an seinen Freund SCHUMACHER: »... so protestiere ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine Facon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist.«



LEOPOLD KRONECKER

KARL WEIERSTRAS

LEOPOLD KRONECKER (1823 – 1891), Professor in Berlin, (bekannt ist das Kroneckersche Deltasymbol $\delta_{mn} = 1$, falls $m = n$, und 0 sonst), erweiterte die Theorie der algebraischen Strukturen und fand Lösungen für allgemeine Gleichungen fünften Grades, war Lehrer CANTORS, hielt aber überhaupt nichts von dessen Theorie und soll ihn später als Verderber der Jugend bezeichnet haben.

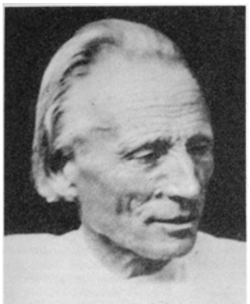
KARL WEIERSTRASS (1815 – 1897), Professor in Berlin, Lehrer CANTORS, setzte die Veröffentlichung von dessen Ideen gegen den Widerstand KRONECKERS durch, sagte aber noch 1878 (vier Jahre nach CANTORS erster Veröffentlichung zur Unterscheidung verschiedener transfiniter Zahlen): $b > a$, wenn es eine Zahl c gibt, die wohl von b, nicht aber auch von a Bestandteil ist. »Es ist danach unmöglich, zwei unendlich große Zahlen a und b zu unterscheiden.«

Henri Poincaré (1854 – 1912) – Schüler von Charles Hermite, Professor in Paris, Mitglied der Académie des Sciences und der Académie Française, erkannte gleichzeitig mit Einstein die Grundlagen der Relativitätstheorie, schrieb etwa 30 Bücher und über 500 Veröffentlichungen, einer der brillantesten Mathematiker und Physiker – er urteilte: Es gibt kein Aktual-Unendliches. Was wir »unendlich« nennen, ist nur die Möglichkeit, unaufhörlich neue Objekte zu schaffen, wie zahlreich auch die schon geschaffenen Objekte seien. Wie von verschiedenen Gewährsleuten berichtet wird, soll er gesagt haben: »Zukünftige Generationen werden die Mengenlehre als eine Krankheit betrachten, von der man sich erholt hat.« Das Originalzitat lässt sich aber so nicht nachweisen. Doch ist seine folgende Aussage zum *Cantorism* in *The future of mathematics* (1908) nachzulesen: »Whatever be the cure adopted, we may promise ourselves the joy of the doctor called in to follow a beautiful pathologic case.«

Émile Borel (1871 – 1956) – Begründer der Maßtheorie, vielseitiger Mathematiker mit 300 Veröffentlichungen und 30 Büchern, wie mehrere andere französische Mathematiker auch als Politiker (Abgeordneter und Marineminister) erfolgreich – betonte: »Es gibt Zahlen, die wir nie erreichen werden.« Er akzeptierte das Auswahlaxiom nicht.

Luitzen E. J. Brouwer (1881 – 1966), Begründer des Konstruktivismus (die Mathematik ist mehr ein Tun als eine Lehre) oder auch Intuitionismus (nach der Ur-Intuition des Zählens als Grundlage allen mathematischen Tuns): Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten (das *Tertium non datur*) gilt nur im Endlichen. Er lehnte die Mengenlehre, vor allem überabzählbare Mengen ab: »Cantors zweite Zahlklasse gibt es nicht.«



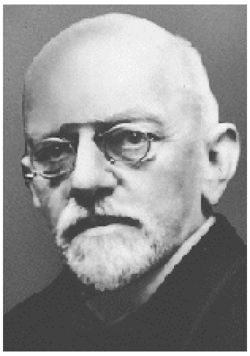


Henri Poincaré Émile Borel L. E. J. Brouwer Hermann Weyl A. Robinson

Hermann Weyl (1885 – 1955), Schüler und Nachfolger Hilberts in Göttingen, lehnte große Teile der Cantorschen Mengenlehre ab, womit er Hilbert enttäuschte: »Die möglichen Kombinationen endlichvieler Buchstaben bilden eine abzählbare Menge, und da jede bestimmte reelle Zahl sich durch endlichviele Worte definieren lassen muß, kann es nur abzählbar viele reelle Zahlen geben – im Widerspruch mit Cantors klassischem Theorem und dessen Beweis.«

Die klare und eindeutige Stellungnahme von A. Robinson (1918 – 1974), Schüler Fraenkels und Begründer der Non-Standard-Analysis, wurde oben bereits zitiert. Robinson fährt dann fort: »Aber wir sollten so handeln, als ob unendliche Mengen existierten.«

David Hilbert (1862 – 1943), Professor in Königsberg und Göttingen, berühmter Axiomatiker, begeisterte sich für die Idee des aktual Unendlichen: »Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können. ... bewundernswerteste Blüte menschlichen Geistes ... eine der höchsten Leistungen rein verstandesmäßiger menschlicher Tätigkeit«.



DAVID HILBERT

Sehr viele heute lebenden Mathematiker glauben an CANTORS transfinite Mengenlehre inklusive Auswahlaxiom. Von einer einflussreichen Mathematikervereinigung, die sich unter dem Pseudonym »NICOLAS BOURBAKI« zusammengeschlossen hatte, wurde die Mengenlehre sogar als Grundlage der gesamten Mathematik bezeichnet. Doch das ist eine durch nichts gerechtfertigte Übertreibung. »Was hingegen die Anwendungen der transfiniten Zahlen in anderen mathematischen Disziplinen anlangt, so haben sich die Hoffnungen, welche man zunächst darauf setzte, nur in wenigen, speziellen Fällen erfüllt ...« schreibt WALTER FELSCHER (1931 – 2000) in einer mehrbändigen Darstellung der Mengenlehre.

Wie im Folgenden dargelegt wird, gilt die transfinite Mengenlehre heute durchaus nicht als unumstritten, sowohl unter philosophischen als auch unter mathematischen Gesichtspunkten.

LUDWIG WITTGENSTEIN

LUDWIG WITTGENSTEIN (1889 – 1951), einer der bedeutendsten Philosophen des 20. Jahrhunderts, lieferte wichtige Beiträge zur Philosophie der Logik, der Sprache und des Bewusstseins. Er lehnte CANTORS Ideen vorbehaltlos ab.

»It isn't just impossible ‚for us men' to run through the natural numbers one by one; it's impossible, it means nothing.«

»You can't talk about all numbers, because there's no such thing as all numbers.«

»The infinite number series is only the infinite possibility of finite series of numbers. It is senseless to speak of the whole infinite number series, as if it, too, were an extension.«

»Set theory is wrong because it apparently presupposes a symbolism which doesn't exist instead of one that does exist (is alone possible). It builds on a fictitious symbolism, therefore on nonsense.«

FELIX KAUFMANN

FELIX KAUFMANN (1895 – 1949) kritisiert die transfinite Mengenlehre in großer Ausführlichkeit in seinem Buch *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung* und fragt anschließend: »Legen wir uns nunmehr rückblickend die Frage vor, wieso die von uns als ungereimt nachgewiesene Bildung einer Stufenfolge transfiniter Mächtigkeiten dennoch einen so hohen Grad von Scheinbarkeit besitzt, daß sie auch heute noch von den bedeutendsten mathematischen Denkern der Gegenwart als Erkenntnistatsache angesehen wird, so werden wir wieder auf die allgemeinen Bemerkungen zurückgeführt, die wir in der Einleitung zu der vorliegenden Arbeit über die typischen Irrwege des von ›Begriffen‹ (Symbolen) einen ›überschwänglichen‹ Gebrauch machenden Denkens gemacht haben. [...] Geht man nun – im Gegensatz zu unserer vorstehend begründeten Auffassung – von der Annahme aus, daß in den Cantorschen Thesen über das Transfinite, speziell über das unabzählbar Unendliche, mathematische Erkenntnis enthalten sei …«

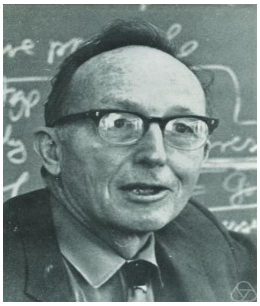
Insbesondere erfordert die für die transfinite Mengenlehre unverzichtbare Voraussetzung der platonischen Existenz mathematischer Objekte die Idee eines Schöpfers und wirft damit das Weltbild der Anhänger dieser Idee auf einem prä-evolutionären Entwicklungsstand zurück.

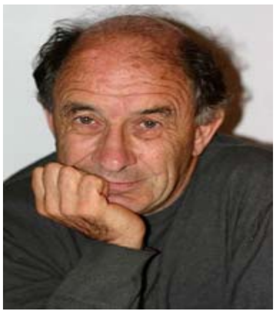
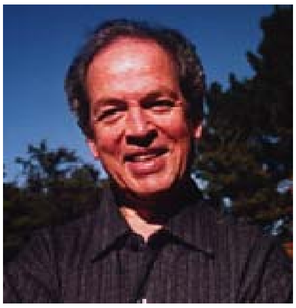
PAUL BERNAYS

PAUL BERNAYS (1888 – 1977), Schüler und enger Mitarbeiter DAVID HILBERTS, sogar hauptsächlicher Autor des Buches *Grundlagen der Mathematik* (von DAVID HILBERT and PAUL BERNAYS) war einer der ersten Mathematiker, die die Notwendigkeit und auch die Problematik des Platonismus erkannten: »The essential importance of these antinomies is to bring out the impossibility of combining the following two things: the idea of the totality of all mathematical objects and the general concepts of set and function [...] We must therefore give up absolute platonism. [...] Nonetheless, if we pursue the thought that each real number is defined by an arithmetical law, the idea of the totality of real numbers is no longer indispensable.«

SAUNDERS MAC LANE (1909 – 2005) lehnt die Mengenlehre als einzig mögliche Grundlage der Mathematik jedenfalls ab: »It is my contention that this Grand Set Theoretic Foundation is a mistakenly one-sided view of mathematics. The set-theoretic approach is by no means the only possible foundation for mathematics.«

PAUL LORENZEN (1915 – 1994) begründete eine natürliche Art des Rechnens und stand dem aktual Unendlichen skeptisch gegenüber: »Die endlichen Weltmodelle der gegenwärtigen Naturwissenschaft zeigen deutlich, wie diese Herrschaft eines Gedankens einer aktualen Unendlichkeit mit der klassischen (neuzeitlichen) Physik zu Ende gegangen ist. Befremdlich wirkt dem gegenüber die Einbeziehung des Aktual-Unendlichen in die Mathematik, die explizit erst gegen Ende des vorigen Jahrhunderts mit G. Cantor begann. Im geistigen Gesamtbilde unseres Jahrhunderts wirkt das aktual Unendliche geradezu anachronistisch.«



SAUNDERS MAC LANE **PAUL LORENZEN** **WLADIMIR I. ARNOLD** **SOLOMON FEFERMAN**

WLADIMIR I. ARNOLD (1937 – 2010) stellt nüchtern fest: »Mathematics is a part of physics.« Wie wir in den Kapiteln VI und VII gesehen haben, schließt er damit unendliche Mengen aus.«

Der Logiker SOLOMON FEFERMAN (∗1928) zeigt anhand einiger Fallstudien, dass alle gegenwärtig für wissenschaftliche Zwecke erforderliche Mathematik in einem Axiomensystem ausgeführt werden kann, in dem das aktual Unendliche nicht vorkommt. »At least to that extent the question ›Is Cantor necessary?‹ is answered with a resounding ›no‹«.

Der für das aktual Unendliche erforderliche Platonismus wird von EDWARD NELSON (∗1932) abgelehnt: »Eine Konstruktion existiert nicht, bevor sie gemacht wurde; wenn etwas Neues gemacht wird, dann ist es etwas Neues – und nicht eine Auswahl aus einer vorher schon existierenden Kollektion.«

Das unterstreicht auch ALEXANDER A. ZENKIN (1937 – 2006): »Cantor's ›paradise‹ as well as all modern axiomatic set theory [AST] is based on the (self-contradictory) concept of actual infinity. Cantor emphasized plainly and constantly that all transfinite objects of his set theory are based on the actual infinity. Modern AST-people try to persuade us to believe that the AST does not use actual infinity. It is an intentional and blatant lie, since if infinite sets are potential, then the uncountability of the continuum becomes unprovable, but without the notorious uncountablity of continuum the modern AST as a whole transforms into a long twaddle about nothing.«

William Thurston (∗1946): »Auf ihrem tiefsten Grunde sind die Fundamente der Mathematik viel wackliger als die Mathematik, die wir betreiben. Die meisten Mathematiker akzeptieren Prinzipien, die als Trugbilder bekannt sind. Es ist zum Beispiel bewiesen, dass es unmöglich ist, eine Wohlordnung der reellen Zahlen zu konstruieren oder auch nur zu definieren. Es gibt beträchtliche Evidenz dafür (aber keinen Beweis) dass wir mit diesen Trugbildern durchkommen, ohne uns zu verfangen, aber das macht sie nicht richtig. Mengentheoretiker konstruieren viele verschiedene und sich gegenseitig ausschließende ›mathematische Universen‹. Das erweckt sehr wenig Vertrauen, dass eines von ihnen die richtige oder die natürliche Wahl wäre.«

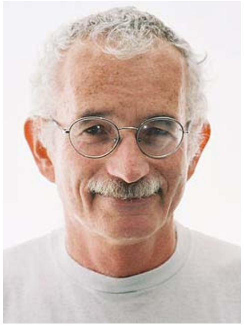



EDWARD NELSON **ALEXANDER ZENKIN** **WILLIAM THURSTON** **NIK WEAVER**

NIK WEAVER (∗1969): »Philosophisch erfordert ZFC den vagen Glauben an ein mystisches Universum von Mengen, das unphysikalisch und zeitlos existieren müsste (und doch dürften irgendwie ›nicht alle Mengen auf einmal da sein‹, um die klassischen Paradoxien zu vermeiden).« Hier berührt WEAVER den oben schon von BERNAYS angesprochenen wunden Punkt der Mengenlehre: Das aktual Unendliche kann nur existieren, wenn alle Elemente vorhanden sind. (Alle Elemente können nur dann vollständig vorhanden sein, wenn alle Elemente vollständig vorhanden sind.) Dann sollten aber auch alle Mengen und insbesondere die Menge aller Mengen vorhanden sein. Doch diese Menge aller Mengen besitzt eine Potenzmenge und damit eine Kardinalzahl, die nach dem CANTORschen Theorem, dem wichtigsten Satz der transfiniten Mengenlehre, größer als ihre Kardinalzahl ist. Wo zieht wer eine Grenze?

DORON ZEILBERGER (∗1950) schrieb einen provokativen offenen Brief an die »Herren Geheimrat Hilbert und Prof. Dr. Cantor, I'd like to be Excused from your ›Paradise‹: It is a Paradise of Fools, and besides feels more like Hell«.

»Ich sah einen Beweis, dass eine extrem konkrete Frage zur Färbung von Punkten in einer Ebene zwei vollkommen verschiedene Antworten besitzt, je nachdem, welche Axiome der Mengenlehre man benutzt. Was ist die richtige Antwort? Natürlich keine von beiden! Die Frage war von Anfang an sinnlos, weil über die unendliche Ebene gesprochen wird, und unendlich ist genau so fictional (tatsächlich noch viel mehr) als weiße Einhörner.«



DORON ZEILBERGER

Die wichtigste daraus folgende Aussage macht ZEILBERGER in lakonischer Kürze: »Every statement that starts ›for every integer *n*‹ is completely meaningless.«

Die hier zitierten, mehr oder weniger von der persönlichen Einstellung zu mathematischer Existenz und zum Platonismus geprägten subjektiven Ansichten werden durch ein schwerwiegendes, von keiner Seite bestrittenes Argument unterstützt:

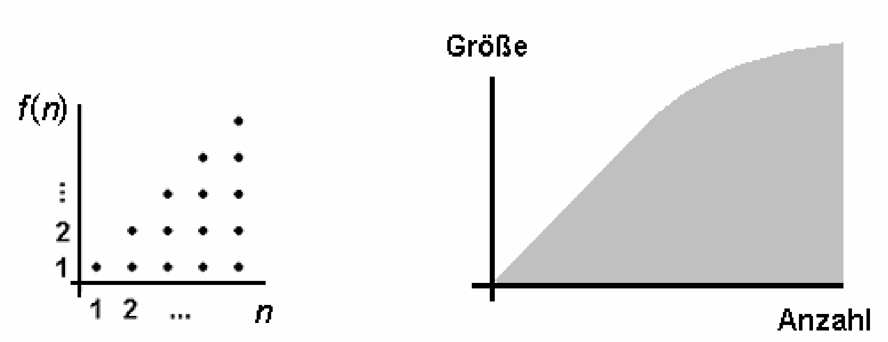
Wenn die Mathematik, so wie es für GEORG CANTOR noch selbstverständlich und bis gegen Ende des 19. Jahrhunderts allgemein üblich war, als Produkt der Realität angesehen wird, deren Gesetze aus dem alltäglichen Leben abstrahiert wurden, um im Gegenzug wieder darauf angewandt zu werden, dann ist die Mathematik mit der transfiniten Mengenlehre nicht vereinbar. Unter der Voraussetzung des ZERMELO-FRAENKELschen Axiomensystems mit Auswahlaxiom, kurz ZFC genannt, ergeben sich nämlich absurde Konsequenzen, die mit dem modernen Weltbild und allem, was diesbezüglich noch zu erwarten ist, in Widerspruch stehen. CANTOR hatte noch angenommen, dass die Menge der materiellen Atome durch abzählbar-unendliche Zahlen gemessen werden könne und dass die überabzählbaren transfiniten Zahlen zur Menge der Ätheratome korrespondierten; die Vereinbarkeit dieser Hypothesen mit der Realität war bis zur Verbreitung der moderneren physikalischen Erkenntnisse zumindest denkbar gewesen. Doch ist es nach der transfiniten Mengenlehre möglich, ein Volumen durch Umordnung weniger Teile zu vermindern oder zu vermehren und so (durch wiederholte Anwendung des Verfahrens) beliebig zu vervielfachen. Nach den etwas reißerischen, aber keineswegs falschen Darstellungen dieses zuerst 1914 von FELIX HAUSDORFF (1868 – 1942) und 1924 von STEFAN BANACH (1892 – 1945) und ALFRED TARSKI (1901 – 1983) bewiesenen Sachverhalts kann man damit das Volumen einer Erbse zum Volumen des gesamten Universums vergrößern, ohne dabei einen einzigen Punkt des Erbsenvolumens doppelt zu benutzen und ohne einen einzigen Punkt des Universums zu verfehlen. (Nähere Angaben und Literaturhinweise findet man in den Kalenderblättern 298 und 519. Link s. Literaturverzeichnis).

Um die transfinite Mengenlehre trotz dieses falschen Resultates nicht aufgeben zu müssen, wird die Verwurzelung der Mathematik in der Wirklichkeit von vielen Mathematikern bestritten und außerdem darauf hingewiesen, dass die Zerlegung der Kugel in nicht messbare Teilstücke erfolgt. Dazu ist zu sagen, dass das Volumen einer Kugel ebenso messbar ist wie das von zwei oder vielen Kugeln – und allein darauf, auf die Ergebnisse, kommt es in der Wissenschaft an!

Im nächsten Abschnitt werden wir aber sehen, dass die transfinite Mengenlehre mit ihrem Begriff des *aktualen*, also *vollendeten* Unendlichen nicht nur in Konflikt mit der Wirklichkeit gerät, sondern auch auf logische Widersprüche führt.

XII.2 Aktual unendlich?

CANTOR spricht wiederholt von der aktual *unendlichen Menge aller endlichen Zahlen*, womit er die natürlichen Zahlen meint. Schon hierdurch wird ein unauflöslicher Widerspruch eingeführt. Da die natürlichen Zahlen sich selbst nummerieren, ist die Anzahl $f(n) = |\{1, 2, 3, ..., n\}|$ der Zahlen von 1 bis n genau gleich der Größe der größten enthaltenen Zahl n. Wenn diese Größe endlich ist, so ist es auch die Anzahl. Zwar existiert keine größte natürliche Zahl, aber wir wissen, dass es in der Menge aller natürlichen Zahlen keine unendliche Zahl gibt. Deshalb kann es auch nicht *aktual* unendlich viele geben. Andernfalls müsste die Funktion $f(n)$ einen gekrümmten Graphen besitzen oder unstetig sein. Beides ist per Definition ausgeschlossen.



Ein einfaches Bild für die natürlichen Zahlen ist eine Treppe. Wenn die Stufen alle von derselben endlichen Höhe sind, dann kann eine Treppe mit unendlich vielen Stufen nicht eine endliche Höhe besitzen: Unendlich viele Differenzen 1 ergeben eine unendliche Zahl.

Die Mengenfolge der endlichen Anfangsabschnitte natürlicher Zahlen

$$\{1\}$$
$$\{1, 2\}$$
$$\{1, 2, 3\}$$
$$...$$
$$\{1, 2, 3, ..., n\}$$
$$...$$

ist potentiell unendlich, indem jede natürliche Anzahl überschritten wird: Zu jedem endlichen Anfangsabschnitte $\{1, 2, 3, ..., n\}$ existiert ein größerer Anfangsabschnitt $\{1, 2, 3, ..., n, n+1\}$, aber eine aktual unendliche Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ der Kardinalzahl $\aleph_0 > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich nicht. Die gesamte, nicht mehr vermehrbare Menge $\mathbb{N}$ wird in keiner Zeile erreicht. Wie jede andere Zeile müsste sie sich durch irgendein Merkmal von allen darüber stehenden endlichen Anfangsabschnitten unterscheiden. Um eine natürliche Zahl kann es sich dabei aber nicht handeln, denn alle sind in den endlichen Anfangsabschnitten bereits »verbraucht«.

Um diese Überlegungen leichter fasslich zu gestalten, wollen wir sie auf folgenden Fall übertragen: Wir können die geschlossenen Intervalle, die sich von $1/n$ bis 1 erstrecken

$$A(n) = [1/n, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/n \le x \le 1\},$$

mit den endlichen Anfangsabschnitten der natürlichen Zahlenfolge vergleichen. Die Vereinigung aller Intervalle ist dann das halboffene Intervall $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$, denn jeder Stammbruch $1/n$ einer natürlichen Zahl n, ist darin enthalten. Die aktual unendliche Menge aller natürlichen Zahlen würde aber dem geschlossenen Intervall $A(\omega) = [0, 1]$ entsprechen, denn dieses Intervall ist das einzige geschlossene Intervall, das alle Intervalle $A(n)$ umfasst – und auf den nicht kontinuierlich verteilten natürlichen Zahlen gibt es keine offenen Intervalle. Aber $A(\omega)$ ist nicht deren Vereinigung, sondern mehr als das, denn es enthält außerdem den Punkt $x = 0$, den keines der Intervalle $A(n)$ zur Vereinigung beiträgt.

Die logische Inkonsistenz des aktualen Unendlichkeitsbegriffs wird auch anhand der folgenden Mengenfolge deutlich: Jeder nichtleere endliche Anfangsabschnitt der positiven geraden Zahlen

$$\begin{array}{l} \{2\} \\ \{2, 4\} \\ \{2, 4, 6\} \\ \ldots \\ \{2, 4, 6, \ldots, 2n\} \\ \ldots \end{array}$$

enthält eine Zahl, die größer ist als die Kardinalzahl

$$|\{2, 4, 6, \ldots, 2n\}| = n$$

des Anfangsabschnitts. Wir sehen sogar, dass mindestens die Hälfte aller enthaltenen geraden Zahlen die Kardinalzahl n übertreffen. Die Kardinalzahl aller geraden Zahlen $\aleph_0$ soll jedoch alle von ihr gezählten geraden Zahlen übertreffen. Was für gerade Zahlen sollten das wohl sein, die einen der oben angegebenen Anfangsabschnitte soweit auffüllen, dass die Anzahl der Elemente größer wird als jede als Element darin enthaltene Zahl? Es ist anzumerken, dass *jede* gerade Zahl in einem *endlichen* Abschnitt enthalten sein kann. Es ist weiterhin anzumerken, dass eine Eigenschaft, die für alle Elemente einer *abzählbaren* Menge mit Hilfe von vollständiger Induktion bewiesen werden kann, für eben alle Elemente dieser Menge gilt.

Die Behauptung, dass $\mathbb{N}$ aus der unendlichen Mengenvereinigung

$$\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \ldots = \mathbb{N}$$

resultiert, führt zu folgender Konsequenz: Geben wir die Zahl 1 in ein Reservoir, sodann die Zahl 2, sodann die Zahl 3 und fahren unbegrenzt so fort, indem wir z. B. die Geisterstunde nutzend um 0:00 Uhr beginnen, um 0:30 Uhr den zweiten Schritt ausführen, um 0:45 Uhr den dritten usw., dann enthält das Reservoir nach unendlich vielen Schritten, Schlag 1:00 Uhr, den Grenzwert der Mengenfolge, die Menge aller natürlichen Zahlen.

Aber diese Behauptung hat auch eine andere Konsequenz: Geben wir um 0:00 Uhr die Zahlen 1 bis 10 in das Reservoir und entnehmen sogleich wieder die Zahl 1, um 0:30 Uhr geben wir die Zahlen 11 bis 20 in das Reservoir und entnehmen sogleich wieder die Zahl 2, um 0:45 Uhr geben wir die Zahlen 21 bis 30 in das Reservoir und entnehmen sogleich wieder die Zahl 3 usw., dann enthält das Reservoir nach unendlich vielen Schritten um 1:00 Uhr nichts, denn von jeder natürlichen Zahl kann der Zeitpunkt angegeben werden, zu dem sie wieder entnommen wurde.

Die letztere Überlegung ist offensichtlich falsch, denn die Anzahl der Zahlen im Reservoir wächst in jedem Schritt um 9 und nimmt niemals ab. Und was noch deutlicher den Fehler aufzeigt, ist dies: Würden wir statt der Zahlen 1, 2, 3, ... die Zahlen 10, 20, 30, ... entnehmen, so enthielte das Reservoir um 1:00 Uhr unendlich viele Zahlen, nämlich alle nicht durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen. Das Ergebnis eines Prozesses darf aber nicht von Bezeichnungswillkür abhängen. Das gilt in der Wissenschaft und sogar im Märchen, wie das folgende Bei-Spiel zeigt:

Es waren einmal sechs Schwestern, die verliefen sich in einen dunklen Wald. Dort fand sie ein böser, alter Zauberer, der die Mädchen mästen wollte, um sie dann zu fressen. Als die Schwestern das merkten, baten sie um Gnade. Der Zauberer besann sich kurz und stellte ihnen dann eine Aufgabe: Jede Schwester sollte eine Mengenfolge aufzählen, und der Zauberer versprach, die Mädchen freizulassen, die am Ende $\aleph_0$ Elemente vorweisen konnten. (Er wusste natürlich, dass gar keine $\aleph_0$ kannte – er war ja ein böser Zauberer.)

Die beiden Ältesten, Anna und Bertha, fingen an. Sie kannten schon die geraden Zahlen, und da zählten sie einfach die Folge G mit den Gliedern $G(n) = \{2, 4, 6, ..., 2n\}$ auf. Damit aber jede eine eigene Folge vorweisen konnte, wählte Bertha alle Zahlen, die größer als n waren, und Anna den Rest. So dachten die beiden Schwestern gerecht und gleichmäßig zu teilen:

n	$A(n)$	$B(n)$
1	{ }	{2}
2	{2}	{4}
3	{2}	{4, 6}
4	{2, 4}	{6, 8}
5	{2, 4}	{6, 8, 10}
6	{2, 4, 6}	{8, 10, 12}
...	...	...

Aber, Ach und Weh! Der Zauberer entschied, dass die Folge von Bertha am Ende ganz leer sei und nichts enthalte, denn für *jede* gerade Zahl gibt es eine natürliche Zahl n, von der ab sie zu Annas Folge gehört. Damit schien Berthas Schicksal besiegelt.

Christa und Dora hatten das Missgeschick gesehen und stellten sich klüger an. Sie wählten die Folgen:

n	$C(n)$	$D(n)$
1	{ }	{1}
2	{2}	{1}
3	{2}	{1, 3}
4	{2, 4}	{1, 3}
5	{2, 4}	{1, 3, 5}
6	{2, 4, 6}	{1, 3, 5}
...	...	...

Der Zauberer musste zugeben, dass beide die Aufgabe gelöst hatten.

Nun kamen noch Edda und Frieda an die Reihe. Frieda hatte den Zauber schon durchschaut, aber sie wollte auch gern die arme Bertha retten. Als Edda wieder eine geeignete Mengenfolge aufzuzählen begann, traf Frieda eine äußerst geschickte Wahl

n	$E(n)$	$F(n)$
1	{ }	$\{\square_1\}$
2	{2}	$\{\square_1\}$
3	{2}	$\{\square_1, \square_2\}$
4	{2, 4}	$\{\square_1, \square_2\}$
5	{2, 4}	$\{\square_1, \square_2, \square_3\}$
6	{2, 4, 6}	$\{\square_1, \square_2, \square_3\}$
...	...	...

(wo gleiche Indizes nicht gleiche Elemente implizieren, sondern nur freie Platzhalter unterscheiden). Und trotz strenger Nachfrage sagte sie nicht, ob ihre Platzhalter Berthas oder Doras Folgenelemente zählen sollten. Da lief das Gehirn des bösen Zauberers so heiß, dass er unter mächtiger Rauchentwicklung in den Boden versank. Daraus erhob sich ein prächtiger Palast, und aus sechs Fenstern schauten sechs verwunschene Prinzen heraus. Die sechs traumatisierten Schwestern heirateten die sechs Prinzen und wurden alle zu Prinzessinnen und später sogar zu Königinnen. – Und wenn sie nicht gestorben sind, dann zählen sie noch heute.

Offensichtlich zeigt hier Frieda, dass die Ergebnisse der Mengenlehre von willkürlich gewählten Bezeichnungen abhängen, was in einer Wissenschaft niemals vorkommen darf. Außerdem darf der Grenzwert einer unendlichen Folge nur von den endlichen Gliedern abhängen, wie dies z. B. beim Majorantenkriterium oder bei Grenzwertberechnungen in der Analysis stets der Fall ist. Eine Folge, deren Glieder positiv sind und ohne Ende wachsen, kann nicht den Grenzwert Null besitzen.

Orthodoxe Vertreter der Mengenlehre, die dies ignorieren, lehnen die Anwendung der vollständigen Induktion auf unendliche Mengen ab. Sie behaupten, dass Induktionsbeweise nur für zwar beliebig große, aber endliche Zahlen greifen und die Grenzwerte davon völlig unabhängig existierten. Mit einer solchen Argumentation ließe sich aber auch behaupten, dass die Summe der geometrischen Reihe

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + ...$$

zwar für endlich viele Summanden beliebig genau 1 approximiert, für unendlich viele Summanden aber irgendeine ganz andere Zahl, z. B. $-\pi$ sei.

Verfolgen wir den obigen Gedanken weiter, so stoßen wir auf eine unendliche Folge von Folgen, die alle den mengentheoretischen Grenzwert { } besitzen, deren Vereinigung aber gegen $\mathbb{N}$ konvergiert.

Die Folge S der Mengen $S(n) = (n, n\text{-}1, ..., 3, 2, 1)$ konvergiert gegen den Grenzwert

$$\omega^* = (..., 3, 2, 1).$$

Teilen wir die Menge $S(n)$ in zwei Mengen $S_1(n)$ und $S_2(n)$, so dass die erste Menge, $S_1(n)$ alle Zahlen $n > |S(n)|/2$ enthält und die zweite, $S_2(n)$ alle Zahlen $n \leq |S(n)|/2$, dann besitzt die Folge S_2 den Grenzwert ω^*, während der Grenzwert der Folge S_1 leer ist, denn wie im Falle von Anna und Bertha kann für jede Zahl in S_1 der Schritt n angegeben werden, in dem sie in S_2 überwechselt. Die ersten Glieder der Folgen sind

n	S_1	S_2
1	(1)	( )
2	(2)	(1)
3	(3, 2)	(1)
4	(4, 3)	(2, 1)
...	...	...

Nun spalten wir aus der Menge $S_2(n)$ die Elemente ab, die nicht größer als $|S_2(n)|/2$ sind, und vereinigen sie in einer neue Menge $S_3(n)$. Die ersten Terme der Folgen sind

n	S_1	S_2	S_3
1	(1)	( )	( )
2	(2)	(1)	( )
3	(3, 2)	(1)	( )
4	(4, 3)	(2)	(1)
...	...	...	

Wir können dieses Verfahren ohne Ende fortsetzen: Sobald m nicht leere Mengen $S_1, S_2, ...,$ S_m vorliegen, spalten wir aus der Menge $S_m(n)$ die Elemente ab, die nicht größer als $|S_m(n)|/2$ sind, und vereinigen sie in der neue Menge $S_{m+1}(n)$.

Im Grenzfalle $n \to \infty$ ergeben sich unendlich viele Folgen. Jede von ihnen besitzt als Grenzwert die leere Menge { }. Die Vereinigung der k im Schritt n entstandenen Mengen

$$S_1(n) \cup S_2(n) \cup S_3(n) \cup ... \cup S_k(n) = (n, n-1, ..., 3, 2, 1)$$

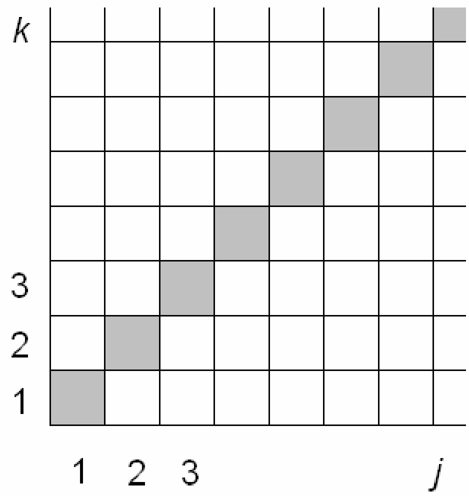
ist die n-te Partialsumme der unendlichen Mengenreihe

$$S_1(n) \cup S_2(n) \cup S_3(n) \cup ... = (..., n, n-1, ..., 3, 2, 1) = \omega^*.$$

Für die Kardinalzahlen der Grenzwerte der Mengenfolgen und der Mengenreihe erhalten wir das Ergebnis $0 + 0 + 0 + ... = \infty$.

Dieses Ergebnis ist entweder falsch – oder es zerstört auch die Basis des CANTORschen Diagonalverfahrens (S. 97): *Wird die geordnete Menge aller natürlichen Zahlen durchlaufen, dann trifft man auf jede genau einmal. Man kann die Diagonale nicht umgehen.* Um dies genauer zu untersuchen, definieren wir die »KRONECKER-Ebene« mit dem KRONECKER-Symbol

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ falls } j = k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$



Der CANTORsche Grund-Satz lautet dann: Für jede natürliche Zahl *j* gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{jk} = 1 .$$

Weil aber für jede natürliche Zahl *k* auch gilt

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{jk} = 0 ,$$

so folgt ein ähnliches Paradoxon wie in den oben untersuchten Mengenfolgen:

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{jk} = \lim_{j\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{j\to\infty} \delta_{jk} ,$$

denn der Grenzwert der Folge 1, 1, 1, ... ist 1, und die Summe 0 + 0 + 0 + ... ist 0.

Es ist zwar in der KRONECKER-Ebene (die nur für natürliche Zahlen *j*, *k* definiert ist) unmöglich, am Diagonalgebirge vorbeizukommen, doch im Grenzfalle, auf dem »rechten Rand bei ∞« sozusagen, kann man es umgehen.

Diese Überlegung ist jedoch falsch, weil jede Folge (δ_{jk}) ihren Grenzwert $\lim_{j\to\infty} \delta_{jk} = 0$ bereits für *endliche* Argumente *j* annimmt (im Gegensatz etwa zu der Folge 1/*j*, die ihren Grenzwert $\lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} = 0$ für kein endliches Argument *j* annimmt). Deswegen kann man auch *innerhalb* der KRONECKER-Ebene die natürlichen Zahlen von 1 an vollständig durchlaufen, *ohne* auf das Diagonalgebirge zu stoßen. Der Weg $k = j - 1$ zum Beispiel trifft niemals darauf, überdeckt aber alle natürlichen Zahlen *j* und *k*, und es gibt unendlich viele weitere Wege, wie leicht ersichtlich ist.

Deswegen ist der CANTORsche Grund-Satz ungültig. Nicht jeder Weg durch die KRONECKER-Ebene vom unteren zum oberen Rand schneidet die Diagonale. Das ist aber nur möglich, wenn die Annahme, die KRONECKER-Ebene und damit die geordnete Menge aller natürlichen Zahlen existiere aktual, nicht zutrifft.

XII.3 Überunendlich?

Wir sehen, dass die Annahme vollendeter Unendlichkeiten zu unmathematischen Absonderlichkeiten führt. Wenn es aber keine vollendete Unendlichkeit gibt, dann kann eine vollendete Unendlichkeit auch nicht übertroffen werden. Wäre CANTORS zweites Diagonalverfahren logisch konsistent, so wäre damit nun ein Widerspruch erzeugt, doch ist das Verfahren fehlerhaft, wie sogleich gezeigt wird.

Das CANTORsche Verfahren beruht darauf, dass die Diagonalzahl der Liste »realisiert« – nicht nur ihr Grenzwert angestrebt – wird, dass also tatsächlich eine aktual unendliche Ziffernfolge dargestellt wird, die in keinem der unendlich vielen Listeneinträge sonst realisiert ist.

Da es sich um einen Unmöglichkeitsbeweis handelt (es soll gezeigt werden, dass *keine* Liste ihre Diagonalzahl enthalten kann), muss er für *jede* Form der Liste und *jedes* Ersetzungsverfahren gelten. Wir können daher eine bestimmte Liste und ein bestimmtes Verfahren auswählen, um das Versagen der Methode zu demonstrieren.

Wählen wir die folgende Liste aus, so finden wir, dass der durch Änderung der ersten n Diagonalziffern erzeugte Anfangsabschnitt der Diagonalzahl immer schon in der folgenden Zeile der Liste enthalten ist.

n	$r(n)$
1	0,0000000000...
2	0,1000000000...
3	0,1100000000...
4	0,1110000000...
...	...

Wenn hier nämlich die Diagonalziffer 0 durch 1 ersetzt wird, so ist die bis zur n-ten Stelle erzeugte Diagonalzahl in der Zeile $n + 1$ enthalten.

n	$r(n)$
1	0,**1**000000000...
2	0,1**1**00000000...
3	0,11**1**0000000...
4	0,111**1**000000...
...	...

In der Diagonale können niemals mehr Einsen stehen als in jeder Zeile. Die Folge der Zeileneinträge $r(n)$ enthält ihren Grenzwert 0,111... nicht, weil er zu keiner endlichen Zahl n gehört. Als Diagonalzahl muss dieser Grenzwert aber »realisiert« werden, weil die Menge der Listeneinträge »fertig« ist. Doch wenn sich dieser Fall bei der Konstruktion der Diagonale ereignen kann, obwohl jede Zeile mit einer endlichen Zahl nummeriert ist, so kann er sich auch bereits bei der Konstruktion der Liste ereignen, die ja genau so breit wie lang ist. Wie sollte man die Behauptung rechtfertigen, dass die Liste 0,111... nicht als Eintrag enthalten kann, die Diagonale aber doch? Wie sollte man die Behauptung rechtfertigen, man könne eine Liste mit $\aleph_0$ Zeilen aber keine Ziffernfolge mit $\aleph_0$ Ziffern 1 erzeugen? Wenn es bei $\aleph_0$ Versuchen in $\aleph_0$ Zeilen nicht gelingt, wann dann?

Enthält also die Diagonale die Zahl 0,111..., so ist 0,111... auch in der Liste enthalten. Ist die Menge der Listeneinträge dagegen nicht aktual unendlich, so ist auch die Diagonalzahl niemals fertig. In beiden Fällen ist die Diagonalzahl bereits als Eintrag in der Liste enthalten. Wir erinnern uns hier an die Umgehung des Diagonalgebirges in der KRONECKER-Ebene (S. 116).

Tatsächlich gibt es gar keine Zahl mit unendlich vielen Ziffern – und eine solche Zahl würde auch keinerlei Sinn haben, weil man niemals alle Ziffern kennen könnte – denn das hieße, auch die letzte kennen, die es gar nicht gibt. Wie man leicht erkennen kann, wenn man bewusst hinsieht, ist die Darstellung »0,111...« endlich, denn sie enthält genau acht Zeichen.

Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen r_1 und $r_2 > r_1$ lässt sich *immer* eine rationale Zahl q finden.

$$r_1 < q < r_2$$

Andernfalls wären die Zahlen r_1 und r_2 nicht verschieden, sondern ein und dieselbe. Da die rationalen Zahlen abzählbar sind, ist die Menge der von ihnen gebildeten Intervalle ebenfalls abzählbar. (Diese Intervalle können zwar nicht angegeben werden, jedoch können alle Intervallgrenzen angegeben werden – und die Anerkennung nicht konstruierbarer Dinge ist der klassischen Mathematik in der Regel ja nicht fremd.) Wo liegen aber die überzähligen irrationalen Zahlen? Sie können nur zwischen den rationale Zahlen liegen. Um überabzählbar viele irrationale Zahlen unterzubringen, müsste mindestens ein Intervall mit überabzählbar vielen irrationalen Zahlen ohne zwischenliegende Rationalzahl existieren. Es gibt aber nicht einmal zwei unmittelbar benachbarte irrationalen Zahlen.

Was ist die Lösung der Gleichung $2^x = \aleph_0$? $x = \aleph_0$ wäre die von der klassischen Analysis gelieferte Lösung, denn $2^\infty = \infty$. Laut Mengenlehre ist das falsch. Andererseits ist auch $x < \aleph_0$ falsch – ebenso wie $x > \aleph_0$. Folglich ist x in diesem Zusammenhang überhaupt nicht definiert. Die Lösungsmenge der Gleichungen $2^x = y$ weist hier eine Lücke auf. Das bedeutet einen Rückschritt in der Evolution der Mathematik.

Der Divergenzbeweis des NICOLE VON ORESME (S. 12)

$$\frac{1}{1}+(\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+\ldots=\infty$$

erfordert die Existenz von $\aleph_0$ Klammern und folglich von $2^{\aleph_0}$ natürlichen Zahlen. Die Berechnung der Zahl e benötigt eine Auswahl aus $\aleph_0! \geq 2^{\aleph_0}$ natürlichen Zahlen für die Nenner der Stammbrüche, LIOUVILLEs transzendente Zahl τ (S. 90) benötigt sogar eine Auswahl aus $10^{\aleph_0!} \geq 2^{\aleph_0}$ natürlichen Zahlen. Wenn das Unendliche aktual existierte, dann müssten so viele natürliche Zahlen existieren, um die entsprechenden transzendenten Zahlen bilden zu können.

Diese Überlegungen zeigen Widersprüche in der transfiniten Mengenlehre auf, die andererseits durch den Beweis von Hessenberg gestützt erscheint. Doch das ist ein Trugschluss. Hessenbergs Beweis greift nicht, denn er kann auch zwischen Mengen *gleicher Mächtigkeit* geführt werden. Auch hier kann man Beispiele konstruieren, für die es keine Möglichkeit gibt, eine *Zahl* n_0 auf die Menge N aller *Zahlen* abzubilden, welche in ihren Bildern M_n nicht enthalten sind (s. S. 98). Ein einfaches Beispiel verdeutlicht dies. Die Menge $\{1, a\}$, wo *a keine* Zahl ist, möge auf die gleichmächtige Potenzmenge $\{\{\ \}, \{1\}\}$ der Menge $\{1\}$ abgebildet werden. Es sind überhaupt nur zwei surjektive Abbildungen möglich, die wir als f und g auflisten können:

$$f\colon a \to \{\ \} \text{ und } 1 \to \{1\}$$
$$g\colon a \to \{1\} \text{ und } 1 \to \{\ \}$$

Unter f ist $N = \{\ \}$, denn die einzige Zahl 1 der Urbildmenge wird auf eine Menge $\{1\}$ abgebildet, in der sie selbst enthalten ist. Unter g ist $N = \{1\}$, denn die einzige Zahl 1 der Urbildmenge wird auf die leere Menge $\{\ \}$ abgebildet, die kein Element und damit auch nicht die Zahl 1 enthält.

Die mit Hilfe von *Zahlen* definierte Menge N besitzt keine *Zahl* als Urbild – und das ist unabhängig von den Mächtigkeiten der beteiligten Mengen.

Alle reellen Zahlen können in Binärschreibweise dargestellt werden. Im Unterschied zur üblichen Dezimalbruchentwicklung der Zahl $r = \sum_k d_k \cdot 10^k$, die mit Zehnerpotenzen erfolgt, verwendet man für die Binärbruchentwicklung Potenzen zur Basis 2: $r = \sum_k b_k \cdot 2^k$. Als Beispiel betrachten wir die Zahl

$$3{,}25_d = 3\cdot10^0 + 2\cdot10^{-1} + 5\cdot10^{-2}$$

und ihre Binärbruchentwicklung

$$11{,}01_b = 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 + 0\cdot2^{-1} + 1\cdot2^{-2}.$$

Alle reellen Zahlen des Intervalls [0, 1] können so als Binärzahlen in Form eines Baumdiagramms dargestellt werden. Da für jede Ziffer zwei Möglichkeiten bestehen, $b_i = 0$ oder 1, verdoppelt sich die Anzahl der als verschieden erkennbaren Anfangsabschnitte der reellen Zahlen des Intervalls mit jeder Ebene.

```
Ebene      Baumdiagramm

  0             0.
               /  \
  1           0    1
             / \  / \
  2         0   10   1
 ...           ...
```

Die Stellen, an denen sich Ziffern befinden, bezeichnet man als Knoten. Die unendlich lange Darstellung einer reellen Zahl als Binärfolge wie z. B. 0,000... oder 0,010101... (wo die Pünktchen tatsächlich durch Ziffern ersetzt sind) heißt Pfad.

Die Zahl aller Knoten im gesamten Baumdiagramm ist abzählbar unendlich, denn die Abzählung kann nach dem einfachen Schema erfolgen:

K_0
/ \\
K_1 K_2
/ \\ / \\
K_3 K_4 K_5 K_6
/
K_7 ...

Die Anzahl aller Pfade entspricht der Anzahl aller reellen Zahlen des Intervalls [0, 1] und diese ist nach der Mengenlehre überabzählbar. Die Anzahl der Pfadabschnitte auf jeder Ebene ist aber identisch mit der Anzahl der Knoten auf dieser Ebene. Und wie man aus dem Grundelement des Binären Baums

|
K
/ \\

unschwer erkennt, kann ein Pfadabschnitt sich nur dann teilen, wenn ein Knoten vorhanden ist. Die Anzahl der unterscheidbaren Pfadabschnitte kann demnach nur um 1 größer als die Anzahl der Knoten sein. Die Gültigkeit dieser Feststellung wird auf keiner Ebene des Baumdiagramms aufgehoben. Die Entstehung von mehr Pfaden als Knoten ist damit auf jeder endlichen Ebene ausgeschlossen. – Und andere Ebenen gibt es nicht.

Das zeigt sich auch in dem Bei-Spiel »Wir erobern den Binären Baum«. Ziel des Spiels ist es, alle Pfade des Binären Baums zu markieren. Die Berechtigung zur Markierung eines Pfades erkauft sich der Spieler, indem er dem Bankhalter einen Knoten bezahlt. Dafür darf er einen unendlichen Pfad wie 0,000... markieren und alle Knoten, aus denen dieser Pfad besteht, einheimsen, hier also K_0, K_1, K_3, K_7, ... Nun darf er für jeden Knoten, den er dem Bankhalter übergibt, einen weiteren Pfad markieren und dessen Knoten, soweit sie noch nicht markiert waren, zu seinem Guthaben schlagen. Das Spiel endet, wenn der Spieler bankrott ist, weil er keine Knoten mehr besitzt, um Pfadmarkierungsrechte zu kaufen, oder wenn er alle Pfade markiert hat. Wächst die Spielgeschwindigkeit bei zunehmender Routine des Spielers immer weiter an (Beginn um 0:00 Uhr, Fortsetzung um 0:30 Uhr, 0:45 Uhr usw.), so endet das Spiel Schlag 1:00 Uhr mit dem Sieg des Spielers, weil nur abzählbar unendlich viele Knoten existieren, die von Pfaden bedeckt werden können.

Wenn kein unüberdeckter Knoten mehr vorhanden ist, so kann auch kein weiterer Pfad mehr konstruiert werden, denn zu jedem Knoten führt nur genau ein einziger Anfangsabschnitt. Folglich müssen alle zu Knoten führenden Anfangsabschnitte und damit auch alle allein aus (unendlich vielen) Anfangsabschnitten bestehenden Pfade bereits konstruiert worden sein.

Der Binäre Baum kann aber auch systematisch konstruiert werden, indem in jedem Schritt ein Knoten hinzugefügt wird. Das ergibt eine Folge von Konfigurationen *B*(*n*):

```
B(0)       B(1)       B(2)       B(3)       B(4)       B(5)   ...

 0.         0.         0.         0.         0.         0.
           /          / \        / \        / \        / \
          0          0   1      0   1      0   1      0   1
                               /          /\         /\   /
                              0          0 1        0 1  0
```

Wieder um 1:00 Uhr sind nach abzählbar unendlich vielen Schritten alle Knoten vorhanden. Aufgrund der Struktur des Binären Baums wird aber in keinem Schritt mehr als ein unendlicher Pfad fertig. (Selbstverständlich wird in *keinem* Schritt ein unendlicher Pfad fertig, aber das spricht nicht gegen unser Bei-Spiel, sondern allein gegen die Annahme, dass das Unendliche überhaupt fertig werden könnte.)

Da von *jedem* Knoten eines unendlichen Pfades bekannt ist, in welchem Schritt *B*(*n*) seine Konstruktion erfolgt, wird *jeder* Anfangsabschnitt des unendlichen Pfades konstruiert. Mehr als die Konstruktion jedes Anfangsabschnittes kann nicht gefordert werden, denn *ein unendlicher Pfad ist nicht mehr als die Vereinigung aller seiner Anfangsabschnitte*. Mit der Folge der *B*(*n*) werden alle unendlichen Pfade des Binären Baums und damit alle unendlichen Binärfolgen der reellen Zahlendarstellungen des Einheitsintervalls konstruiert, und es zeigt sich, dass die Menge *nicht mächtiger* als abzählbar unendlich ist.

Aber auch wenn man die reellen Zahlen nicht als unendliche Binärfolgen betrachtet, sondern als deren Grenzwerte, die nicht im Binären Baum enthalten sind (ebenso wie die Folge 0,111... nicht als Element in der auf S. 117 dargestellten Liste enthalten ist), so bleibt die Mächtigkeit der Menge dieser Grenzwerte doch abzählbar, denn mit dem Binären Baum werden alle unendlichen Binärfolgen konstruiert, und jede kann gegen maximal einen Grenzwert konvergieren.

Schon vor beinahe 100 Jahren wurde von Thoralf Albert Skolem (1887 – 1963) nach Vorarbeiten von Leopold Löwenheim (1878 – 1957) bewiesen, dass das vollendet Überabzählbar-Unendliche keine absolute Wahrheit beanspruchen kann, sondern allenfalls als Defekt eines speziellen Systems betrachtet werden muss. Der Satz von Löwenheim und Skolem wird von den Vertretern der transfiniten Mengenlehre ebenso wie das Ergebnis von Banach und Tarski bewusst als »Paradoxon« bezeichnet, also als etwas, das keinen Widerspruch im System ZFC beweist, sondern nur mit der unterschwellig als naiv klassifizierten »Intuition« kollidiert. Skolems Satz lautet: Jedes nach der gewöhnlichen Logik erster Ordnung konsistente System besitzt ein abzählbares Modell. Wenn die Mengenlehre also widerspruchsfrei ist, dann muss sie ein Modell besitzen, das nur abzählbar viele Elemente enthält, darunter jedenfalls nach dem Unendlichkeitsaxiom eine unendliche Menge, und in dem auch der wichtigste Satz der Mengenlehre gilt, wonach die Potenzmenge einer unendlichen Menge überabzählbar ist, in dem aber keine überabzählbare Menge existiert. Wenn also die Mengenlehre widerspruchsfrei ist, dann ist sie falsch und damit nicht widerspruchsfrei.

SKOLEM selbst hat versucht, diesen Widerspruch zu entschärfen, indem er ein Modell vorschlug, das zwar eine unendliche Menge umfasst, aber nicht alle Elemente von deren Potenzmenge, sondern nur abzählbar viele. Das Modell enthält jedoch keine Möglichkeit, diese Elemente zu nummerieren, so dass innerhalb des Modells die abzählbar vielen Elemente der Potenzmenge als überabzählbar gelten.

Selbst wenn man geneigt ist, solch kartenhaushaften Konstruktionen zu vertrauen, muss man dem überabzählbaren Unendlichen den ihm von CANTOR und HILBERT zugeschriebenen absoluten Charakter absprechen. SKOLEM selbst sagt dazu 1929: »Es scheint in der Tat, daß Hilbert die Cantorschen Anschauungen in ihrem alten absolutistischen Sinne aufrechterhalten will, was mir sehr merkwürdig vorkommt; es ist bezeichnend, daß er es nie nötig gefunden hat, auf den Relativismus einzugehen, den ich für jede finit formulierte Mengenaxiomatik bewiesen habe. Er hat auch gesagt, daß er nicht aus dem Cantorschen Paradies ausgetrieben werden will. Es ist sehr eigentümlich, diesen Ausspruch mit dem früher erwähnten zu vergleichen, daß die Mengenlehre eine Krankheit ist.«

Wir fassen zusammen: In der Realität unserer Welt haben wir das aktual Unendliche nicht gefunden. In Gott oder seinen Eigenschaften ist seine Existenz noch zweifelhafter als die Existenz Gottes selbst. Wir stellen nun fest, dass auch die Annahme aktual unendlicher Mengen widersprüchlich und überdies durch nichts gerechtfertigt ist. Die von CANTOR eingeführten Kardinalzahlen sind nutzlose Phantasiegebilde ohne jeden Realitätsbezug. Daher gibt es auch keinen Grund, Alephs zu verwenden oder die Kontinuumhypothese entscheiden zu wollen.

$$\xcancel{\aleph_0, \aleph_1 = 2^{\aleph_0}?, \aleph_2, \aleph_3, \ \ldots}$$

XII.4 Existenz und Realität

Schon DEDEKIND hatte die Frage aufgeworfen, ob die durch Alephs bezeichneten Mengen überhaupt konsistent seien, und vermutet, dass sich die Inkonsistenz vielleicht nur noch nicht bemerkbar gemacht habe. Die Existenz endlicher Mengen – von CANTOR in einer Replik an DEDEKIND als ebenfalls unbeweisbar bezeichnet – und damit die Existenz natürlicher Zahlen – ist unvergleichlich sicherer.

Es gibt grundsätzliche zwei Möglichkeiten, natürliche Zahlen zu *realisieren*, nämlich einmal durch Mengen von notwendig quantisierten Gegenständen, und zum andern durch Ziffernsysteme. So ist die Zahl 3 in der Menge {Sonne, Erde, Mond} und in vielen anderen Mengen *realisiert*, die Zahl 4 in den vier Ecken oder den vier Seiten eines Vierecks, die Zahl 11 in den Spielern einer Fußballmannschaft oder den Stufen einer elfstufigen Treppe. (Notabene: Es geht hier nicht um eine tautologische *Definition* von Zahlen, sondern um ihre *Realisation*, ihre *Verwirklichung*.) Die Zahl 4711 auf diese Weise zu realisieren, wäre zumindest unübersichtlich. Deswegen wird sie durch vier Mengen, deren Elemente in einer Wert-Relation stehen (10 Rechte gelten so viel wie ein Linkes) und mit 4, 7, 1, 1 Elementen ausgestattet sind, realisiert. Die Mengen werden gewöhnlich statt durch Gegenstände (wie Rechensteine, Münzen, Striche oder Kleckse) durch allgemein akzeptierte Abkürzungen realisiert: durch Ziffern. Mit Hilfe dieser außerordentlich nützlichen kulturellen Errungenschaft können nun auch Nachkommastellen von reellen Zahlen realisiert werden – allerdings nur endlich viele.

Für den Nichtplatonisten bleibt die Frage nach der Existenz irrationaler Zahlen wie $\sqrt{2}$ oder π. Die Quadratwurzel aus 2 *existiert* – sowohl hier im Druck als auch im Verhältnis aus Diagonale und Seite eines idealen Quadrates; die LUDOLPHsche Zahl *existiert* im Verhältnis aus Umfang und Durchmesser eines idealen Kreises und in der Quadratrix (S. 91). Das Wort »ist realisiert« müssen wir aber vermeiden, denn es gibt keine Möglichkeit der Realisation durch Mengen oder Ziffern, und es gibt keinen realen Kreis, keine reale Quadratrix und kein reales Quadrat mit hinreichend genauen Maßen. – Ein »gedachter« Kreis dagegen erlaubt nicht einmal die Bestimmung der Zahl π auf zwei Stellen genau.

Die Quadratwurzel aus 2 existiert in Form der Möglichkeit, mit ihr zu rechnen und exakte Resultate zu erhalten. Wäre $\sqrt{2}$ aber *realisiert*, so könnten wir die *Definition* $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ *rechnerisch exakt* nachprüfen, so wie wir die Summe $1 + 2 = 3$ exakt bilden können, indem wir zu einer Murmel zwei weitere hinzufügen, oder so wie wir das Produkt von zwei Brüchen nach den bekannten Methoden mit Hilfe von Ziffern ausrechnen.

Die *Realisierung* einer irrationalen Zahl in Form der vollständigen Folge ihrer Dezimalstellen – mit Bleistift und Papier oder auf irgendeine andere Art – ist auszuschließen (auch in Gedanken, denn diese sind an Materie gebunden und ohne Materie nicht *denkbar*). Das geht aus folgender Überlegung hervor: Im gesamten Kosmos existieren ca. 10^{80} Protonen und aus Gründen der Ladungsneutralität auch nicht mehr Elektronen. Doch selbst wenn wir unter Einschluss aller Quarks, Leptonen und Austauschteilchen sowie der dunklen Materie die viel zu große Zahl von

$$Z = 10^{100}$$

spinbehafteten Teilchen annehmen und dazu eine überlegene Zivilisation, die unter Verwendung einer geringen Menge dieser Teilchen in der Lage ist, alle anderen so zu organisieren und zu überschauen, dass jedes durch seine Spineinstellung eine Binärziffer (*bit*), 0 oder 1, repräsentiert und alle zusammen eine einzige Zahl darstellen: Die Realisierung einer irrationalen Zahl in Form einer Darstellung als Bitfolge misslänge.

Oder sollten wir in einer selbst für Endzeitverhältnisse (die nicht das Ende der Zeiten bedeuten) kühnen Spekulation das gegenwärtig 10^{80} m³ betragende Volumen des Universums in 10^{365} Elementarzellen mit einer minimalen Kantenlänge von 10^{-95} m einteilen (die Wellenlänge eines Photons, das die gesamte Energie des Universums in sich vereinigt (s. S. 54) – also sicher die kleinste Länge, der irgendeine physikalische Bedeutung beizumessen wäre), um durch Einordnung der Teilchen in die Elementarzellen mehr Spielraum für die Zahlendarstellung zu erzielen? Sollten wir warten, bis das Volumen des Universums auf 10^{1000} m^3 angewachsen sein wird? Natürlich können wir Photonen oder Neutrinos nicht in eine der Elementarzellen einsperren; dafür stehen allenfalls die 10^{80} Elektronen und Protonen zur Verfügung (falls letztere dann noch existieren), und es ist leicht einzusehen, dass die Zahl der Möglichkeiten, 10^{80} nicht unterscheidbare Teilchen auf 10^{1285} Zellen aufzuteilen, eine endliche ist (die sich nach einer einfachen Formel für Binomialkoeffizienten berechnen lässt) – und das bliebe sie natürlich auch, wenn $10^{1000.000}$ individuell unterscheidbare Teilchen und $10^{1000.000.000}$ Elementarzellen zur Verfügung ständen.

Wäre das Universum aber doch aktual unendlich groß und mit aktual unendlich vielen Teilchen ausgestattet? Die Situation bliebe unverändert, denn die endliche Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit für jeden Informationsübertrag würde die Kommunikation »in Ewigkeit« auf endliche Bereiche begrenzen. Eine Technologie, die sich darüber hinwegsetzen könnte, wäre zu Zeitreisen befähigt und hätte uns sicher schon besucht, wenn es sie je *geben hätte oder gegeben würde* (nicht nur Sprachprobleme dieser Art wären mit Zeitreisen verbunden). Als Fazit bleibt unverändert und unter *allen* Umständen – denkbaren wie undenkbaren: In der Ziffernfolge irrationaler Zahlen kann das Unendliche niemals aktual existieren.

Nicht anders ist es mit allgemeinen Folgen oder Reihen, auch wenn sie so einfache Bildungsgesetze aufweisen, wie wir sie für e, ϕ, π oder τ kennengelernt haben. Die Zahl e existiert in Form der Vorschriften von NEWTON und EULER, wie ihre Reihe oder Folge auszurechnen seien. Die Auswertung stößt am Ende des (praktisch *möglichen*, nicht des zum Erfolg *erforderlichen*) Rechenprozesses grundsätzlich an eine Grenze, weil das Maß der in unserem Universum handhabbaren Information endlich und durch den verfügbaren Speicherplatz beschränkt ist. Eine irrationale Zahl, die als Reihe oder als Folge explizit oder rekursiv definiert werden kann, stellt aufgrund ihres gesetzmäßigen Aufbaues eine endliche Informationsmenge dar. Die Menge dieser Zahlen ist ohne Zweifel abzählbar, das heißt ganz gewiss nicht überabzählbar. Denn die Anzahl endlicher Sätze in einer logischen Sprache über einem endlichen Alphabet ist abzählbar. (Und was sollte eine unendlich lange Definition nützen? Sie könnte nicht einmal gegeben werden.) Aber eine irrationale Zahl, die weder als Reihe noch als Folge definiert werden kann, die also keiner endlichen Gesetzmäßigkeit unterliegt, stellt eine unendlich große Informationsmenge dar. Solche irrationalen Zahlen existieren in unserem Universum nicht – und ein »Anderswo« ist äußerst fraglich. Auch diese Überlegung bestätigt unsere Erkenntnis, dass eine überabzählbare Menge von Zahlen nicht existiert.

Die übliche Lehrmeinung, dass eine irrationale Zahl »beliebig genau« approximierbar sei, ist unbedacht und falsch – nicht aufgrund von Zeitmangel, sondern wegen der Endlichkeit des verfügbaren Speicherplatzes. Damit reduziert sich die Binärdarstellung jeder irrationalen Zahl tatsächlich auf ein Intervall Δ. Wenn wir die erste der obigen Abschätzungen zugrunde legen, beträgt die unvermeidbare Unsicherheit in der Bestimmung der Zahl $\Delta = 1/2^Z$. Hier vereinigen sich die unterschiedlichen Charaktere von rationalen und irrationalen Zahlen. Eine rationale Zahl mit mehr als Z nichtperiodischen Stellen vor Beginn der Periodizität oder mit einer Periodenlänge von mehr als Z Stellen ist ebenfalls nicht mehr exakt darstellbar. Ihre Darstellung besitzt dieselbe Unbestimmtheit Δ wie die jeder irrationalen Zahl. Jenseits dieser Grenze sind die Binärdarstellungen beider Zahlenarten nicht mehr unterscheidbar.

Wir können für *Zahlen in endlichen Systemen* drei Zustandsformen unterscheiden:

Realisation: Eine Zahl ist realisierbar, wenn sie durch eine endliche Menge von Elementen (Gegenständen) des Systems oder durch endlich viele Ziffern des Systems dargestellt werden kann.

Existenz: Eine Zahl existiert, wenn sie im System eindeutig identifizierbar und kommunizierbar ist. (Das trifft auf alle im System realisierbaren Zahlen zu, aber auch auf viele nicht realisierbare, für die nur das Bildungsgesetz oder sonst eine Identifikationsmöglichkeit im System existiert, zum Beispiel ein im System per allgemeiner Übereinkunft akzeptierter Name.)

Nichtexistenz: Eine Zahl, die im System nicht identifiziert und erst recht nicht realisiert werden kann, existiert dort nicht. (Das trifft in einem Taschenrechner auf die meisten Zahlen mit mehr als 10 Ziffern zu, im Universum auf die meisten Zahlen mit mehr als 10^{80} Ziffern. Und diese Sachlage ist unabhängig davon, dass man die Summe der ersten 10^n Zahlen für jede realisierbare Zahl n berechnen kann.)

Jedes zum Rechnen geeignete System ist beschränkt, also endlich. Ein prädarwinistisches Weltbild, in dem diese Tatsache vernachlässigt oder gar bestritten wird, kann in der modernen Wissenschaft keinen Platz haben.

Die Geschichte des aktual Unendlichen ist damit zu Ende – sie sollte es jedenfalls sein – nicht jedoch die des potentiell Unendlichen. Eine beliebig lange Folge von Rechenoperationen ist im Prinzip realisierbar, wenn im Bedarfsfall vorhergehende Ergebnisse zusammengefasst werden, um Speicherplatz frei zu machen.

Aufgrund des regelmäßigen Aufbaues bestimmter natürlicher Zahlen wie

$$M = 10^{10^{10^{10}}}$$

und mit der Möglichkeit, solche Zahlen wiederum durch noch prägnantere, noch weniger Speicherplatz benötigende Abkürzungen zu bezeichnen, sind die natürlichen Zahlen ihrer Größe nach nicht beschränkt. Zwar können wir schon relativ kleine Zahlen nicht mehr realisieren, z. B. eine regellos aufgebaute natürliche Zahl mit mehr als *Z bit* Informationsinhalt, trotzdem besteht die Möglichkeit, eine einfach darstellbare, weitaus größere Zahl mit verschwindend wenig Information zu realisieren, z. B. die oben unter verschwenderischer Verwendung von ca. 10^{16} Atomen realisierte Zahl *M*, die nach einer kurzen allgemeinen Definition mit 8 *bit* oder noch weniger realisiert werden könnte (wie der Taschenrechner auch die Zahl 10^{99} realisieren kann).

Das Googolplex und GAUSSens messbare Unendlichkeit (S. 8) sind realisierte Zahlen. Wir kennen ihre Eigenschaften und können sie eindeutig identifizieren, die messbare Unendlichkeit am einfachsten im Neunersystem. Mit den Kehrwerten der großen Zahlen können wir auch zu beliebig kleinen Zahlen gelangen.

CANTORS unendliche Menge endlicher Zahlen enthält einen Selbstwiderspruch. Das genaue Gegenteil ist richtig. Die Menge der im Universum realisierbaren natürlichen Zahlen ist endlich, weil maximal *Z* Ziffern zur Verfügung stehen, aber ihre Elemente können beliebig groß werden – beschränkt lediglich durch Mangel an Erfindungsreichtum oder Interesse; eine prinzipielle Schranke für die Darstellung großer Zahlen mit endlichem Speicherplatz ist nicht erkennbar. Deswegen liefern die natürlichen Zahlen bezüglich ihrer Größe – neben der Ewigkeit und der grenzenlosen Expansion des Universums – das klassische Beispiel für potentielle Unendlichkeit.

Sie ist kein Heiligtum, kein »ganz besonderer Zustand, in dem andere Gesetze gelten«, wie romantische Rechenkünstler raunen. Das Unendliche ist jedem profanen Interessenten zugänglich. Wir betreten es schon, wenn wir nur 1, 2, 3, ... zu zählen beginnen. Aber es geht uns nicht wie der Goldmarie, die im Märchen von Frau Holle in einen Brunnen fällt und sich in einem zauberhaften Land mit sprechenden Bäumen und Backöfen wiederfindet. Wir können zählen und zählen, wir gelangen zu größeren und größeren Zahlen, einige müssen wir wohl überspringen, doch weiter ereignet sich in diesem Prozess nichts. Um ihn sinnvoll zu bezeichnen, genügt das von WALLIS eingeführte Symbol

$$\infty.$$

Allgemeine und leicht verständliche Literatur

A. D. Aczel: *Die Natur der Unendlichkeit*, Rowohlt, Hamburg (2002)

I. Asimov: *Die Erforschung der Erde und des Himmels*, dtv, München (1988)

G. Beck, M. Trot: *Calculating Pi*, Mathematica 3.0 Notebook

E. T. Bell: *Die großen Mathematiker*, Econ, Düsseldorf (1967)

B. Bolzano: *Paradoxien des Unendlichen*, Reclam, Leipzig (1851)

J. M. Borwein, P. B. Borwein: *Pi and the AGM*, Wiley, New York (1987)

E. Colerus: *Von Pythagoras bis Hilbert*, Rowohlt, Hamburg (1969)

J. H. Conway, R. K. Guy: *The book of numbers*, Copernicus Springer, New York (1996)

J. W. Dauben: *Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite*, Princeton (1990)

A. Einstein: *Mein Weltbild*, Ullstein, Frankfurt (1966)

R. P. Feynman: *Was soll das alles?*, Piper, München (1999)

W. R. Fuchs: *Exakte Geheimnisse*, Knaurs Buch der modernen Mathematik, Droemer Knaur, München (1966)

S. Hawking: *Eine kurze Geschichte der Zeit*, Rowohlt, Hamburg (1988)

S. Hawking: *Das Universum in der Nußschale*, dtv, München (2001)

T. Heath: *A history of greek mathematics I*, Dover Publications, New York (1981)

F. Heer: *Leibniz*, Fischer, Frankfurt (1958)

A. Hermann: *Lexikon Geschichte der Physik*, Aulis, Köln (1987)

S. v. Hoerner, K. Schaifers: *Meyers Handbuch über das Weltall*, BI Mannheim (1967)

H. U. Keller: *Kosmos Himmelsjahr 2001*, Franckh-Kosmos, Stuttgart (2001)

H. U. Keller: *Kosmos Himmelsjahr 2004*, Franckh-Kosmos, Stuttgart (2004)

H. Kracke: *Mathe-musische Knobelisken*, Dümmler, Bonn (1982)

M. Luther: *Die Bibel*

E. Maor: *To infinity and beyond*, Birkhäuser, Boston (1986)

G. Martin: *Platon*, Rowohlt, Hamburg (1969)

J. P. Maury: *Galileo Galilei*, Otto Maier, Ravensburg (1990)

W. Mückenheim: *Mathematik für die ersten Semester*, Oldenbourg, München (2010)

S. Ortoli, N. Witkowski: *Die Badewanne des Archimedes*, Piper, München (2001)

B. Russell: *Warum ich kein Christ bin*, Rowohlt, Hamburg (1968)

W. Rutherford: *Pythagoras*, Aquarian Press, Wellingborough (1984)

I. Schneider: *Isaac Newton*, Beck, München (1988)

E. Schrödinger: *Die Natur und die Griechen*, Rowohlt, Hamburg (1956)

U. Schultz: *Kant*, Rowohlt, Hamburg (1965)

S. Singh: *Fermats letzter Satz*, dtv, München (2000)

S. Weinberg: *Die ersten drei Minuten*, dtv, München (1980)

E. Weissenstein: *World of Biography*, `http://scienceworld.wolfram.com/biography/`

F. Wille: *Humor in der Mathematik*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1983)

Weiterführende Literatur

H. Bachmann: *Transfinite Zahlen*, Springer, Berlin (1967)

R. Baldus, F. Löbell: *Nichteuklidische Geometrie*, de Gruyter, Berlin (1964)

A. F. Bentley: *Linguistic analysis of mathematics*, Bloomington Ind. (1932) und London (1934)

P. Bernays: *Sur le platonisme dans les mathématiques*, Conférences internationales des Sciences mathématiques, University of Geneva (1934)

H. Bondi: *Einsteins Einmaleins, Einführung in die Reativitätstheorie*, Fischer, Frankfurt (1974)

P. W. Bridgman: *A physicist's second reaction to Mengenlehre*, Scripta Math **2** (1934) 101, 224

L. E. J. Brouwer: *Intuitionistische Mengenlehre*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **28** (1920) 203

C. Burali-Forti: *Una questione sui numeri transfiniti*, Rend. Palermo **11** (1897)

G. Cantor: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Crelles Journal f. Mathematik **77** (1874) 258

G. Cantor: *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Crelles Journal f. Mathematik **84** (1878) 242

G. Cantor: *Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten*, Göttinger Nachrichten (1879) 127

G. Cantor: *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Math. Annalen **15** (1879) 1; **17** (1880) 335; **20** (1882) 113; **21** (1883) 51; **21** (1883) 545; **23** (1884) 453

G. Cantor: *Die Grundlagen der Arithmetik* (Rezension der Schrift von G. Frege, »Die Grundlagen der Arithmetik«, Breslau 1884.) Deutsche Literaturzeitung, VI, Berlin (1885) 728

G. Cantor: *Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche*, Gesammelte Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten, Halle (1890)

G. Cantor: *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **1** (1891) 75

G. Cantor: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, E. Zermelo (Hrsg.), Springer, Berlin (1932), Nachdruck: Olms, Hildesheim (1966)

M. Cantor: *Geschichte der Mathematik I – III*, Teubner, Leipzig (1894 – 1901)

R. Carnap: *Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaft*, Nymphenburger, München (1969)

P. J. Cohen: *The indepence of the continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **50** (1963) 1143; **51** (1964) 105

P. J. Cohen, R. Hersh: *Non-Cantorian Set Theory*, Scientific American, December (1967) 104

J. Cohn: *Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant* (1896), Nachdruck Olms, Hildesheim (1983)

G. Dautcourt: *Relativistische Astrophysik*, Akademie-Verlag, Berlin (1972)

C. Diamond (ed.): *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Cambridge 1939 from the notes taken by R. G. Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees, and Yorick Smythies, The University of Chicago Press, Chicago (1975)

R. Dedekind: *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig (1878)

R. Dedekind: *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, Braunschweig (1887)

F. J. Dyson: *Time without end: Physics and biology in an open universe*, Rev. Mod. Phys. **51** (1979) 447

H.-D. Ebbinghaus: *Ernst Zermelo: An Approach to His Life and Work*, Springer (2007)

A. Einstein: *Über spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*, Vieweg, Braunschweig (1969)

A. Einstein: *Grundzüge der Relativitätstheorie*, Vieweg, Braunschweig (1979)

Euklid: *Die Elemente*, Harri Deutsch (1996)

A. B. Feferman, S. Feferman: *Alfred Tarski – Life and Logic*, Cambridge Univ. Press (2004)

S. Feferman: *In the light of logic*, Oxford University Press (1998)

W. Felscher: *Naive Mengen und abstrakte Zahlen III*, BI Mannheim (1979)

A. A. Fraenkel: *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer, Berlin (1923)

A. A. Fraenkel: *Zum Diagonalverfahren Cantors*, Fundam. Math. **25** (1935) 45

A. A. Fraenkel, A. Levy: *Abstract Set Theory*, North Holland, Amsterdam (1976)

A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy: *Foundations of Set Theory*, North Holland, Amsterdam (1984)

A. O. Gelfond: *Sur le septième probléme de Hilbert*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **2** (1934) 1

K. Gödel: *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Annals of math. studies, Nr. 3, Princeton (1940)

K. Gödel: *What is the continuum problem?*, Amer. Math. Monthly, **54** (1947) 515, Korrektur **55** (1948) 151

G. H. Hardy, E. M. Wright: *Einführung in die Zahlentheorie*, Oldenbourg, München (1958)

F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*, Chelsea Publishing Company, New York (1965)

G. Heberer: *Homo – unsere Ab- und Zukunft*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart (1968)

W. Heisenberg: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, Z. Physik **43** (1927) 172

W. Heisenberg: *Physik und Philosophie*, Ullstein, Frankfurt (1968)

W. Heisenberg: *Der Teil und das Ganze*, dtv, München (1983)

J. A. Henle: *An Outline of Set Theory*, Springer, New York (1986)

C. Hermite: *Sur la fonction exponentielle*, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **77** (1873) 18, 74, 226, 285

G. Hessenberg: *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Göttingen (1906)

D. Hilbert: *Mathematische Probleme*, Vortrag, Paris (1900) `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~kersten/hilbert/rede.html`

D. Hilbert: *Axiomatisches Denken*, Math. Annalen **78** (1918) 405

D. Hilbert: *Über das Unendliche*, Math. Annalen **95** (1925) 161

T. Jech: *Set Theory*, Springer, Berlin (2002)

I. Kant: *Die drei Kritiken*, Suhrkamp, Frankfurt (2004)

F. Kaufmann: *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt (1968)

K. Kiefer: *Quanteneigenschaften Schwarzer Löcher*, Physik in unserer Zeit **28**,1 (1997) 22

G. König (Hrsg.): *Konzepte des mathematisch Unendlichen im 19. Jahrhundert*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1990)

J. König: *Zum Kontinuumproblem*, Math. Ann. **60** (1905) 177, Korrektur S. 462

J. König: *Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem*, Math. Ann. **61** (1905) 156, **63** (1907) 217

K. Kunen: *Set Theory*, North Holland, Amsterdam (1980)

K. Kuratowski, A. Mostowski: *Set Theory*, North Holland, Amsterdam (1976)

J. H. Lambert: *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendants circulaires et logarithmiques*, Histoire de l'Acad. de Berlin (1761, publ. 1768), Opera Mathematica II, p. 265, Orell Füßli Verlag, Zürich (1946)

J. H. Lambert: *Vorläufige Kenntisse für alle die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen, Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen, Zweyter Theil*, Berlin (1770), Opera Mathematica I, p. 194, Orell Füßli Verlag, Zürich (1946)

D. Laugwitz: *Zahlen und Kontinuum*, BI Mannheim (1986)

A. Levi: *Basic Set Theory*, Springer, Berlin (1979)

F. v. Lindemann: *Über die Zahl π*, Math. Ann. **20** (1882) 213

J. Liouville: *Sur des Classes Trés Étendues de Quantités dont la Valeur n'est ni Rationnelle ni même Réductible à des Irrationnelles Algebriques*, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **18** (1844) 883, 910

P. Lorenzen: *Das Aktual-Unendliche in der Mathematik*, Phil. naturalis **4** (1957) 3

N. D. Mermin: *Stirling's formula!*, Am. J. Phys. **52** (1984) 362

K. v. Meyenn, K. Stolzenburg, R. U. Sexl: *Niels Bohr*, Vieweg, Braunschweig (1985)

W. Mückenheim: *Physical Constraints of Numbers*, Proceedings of the First MACAS, A. Beckmann, C. Michelsen, B. Sriraman (eds.), Franzbecker, Berlin (2005) p. 134 – 141
`http://arxiv.org/pdf/math.GM/0505649`

W. Mückenheim: *Die Mathematik des Unendlichen*, Shaker-Verlag, Aachen (2006)

W. Mückenheim: *The Infinite in Sciences and Arts*, Proceedings of MACAS 2, B. Sriraman, C. Michelsen, A. Beckmann, V. Freiman (eds.), Centre for Science and Mathematics Education, University of Southern Denmark, Odense (2008) p. 265 – 272
`http://arxiv.org/abs/0709.4102`

W. Mückenheim: *Das Kalenderblatt*
`http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/KB/`

W. Mückenheim: *MatheRealism*
`http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/MR.mht`

G. Münster: *Materie und Idee: Vorstellungen von der Materie in der griechischen Naturphilosophie und in der heutigen Physik*, Phys. Bl. **40** (1984) 363

N. Murray, M. Holman: *The role of chaotic resonances in the Solar System*, Nature **410** (2001) 773

E. Nelson: *Predicative arithmetic*, Princeton University Press, Princeton (1986)

I. Niven, H. S. Zuckermann: *Einführung in die Zahlentheorie I,II*, BI Mannheim (1991, 1987)

J. J. O'Connor, E. F. Robertson: *The MacTutor History of Mathematics*
`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/index.html`

O. Perron: *Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner, Stuttgart (1954)

H. Poincaré: *The future of mathematics* (1908)
`http://portail.mathdoc.fr/BIBLIOS/PDF/Poincare.pdf`

H. Poincaré: *Über transfinite Zahlen,* Leipzig (1910)

H. Putnam: *Realismus in der Philosophie und Realismus in der Physik*, Phys. Bl. **42** (1986) 10

R. Resnick: *Einführung in die spezielle Relativitätstheorie*, Klett, Stuttgart (1976)

A. Robinson: *Selected Papers*, W. A. J. Luxemburg, S. Körner (eds.), North Holland, Amsterdam (1979)

B. Russell: *The principles of mathematics I*, Cambridge (1903)

B. Russell: *Das ABC der Relativitätstheorie*, Nymphenburger, München (1970)

W. M. Rust: *An operational statement of Cantor's Diagonalverfahren*, Scripta Math. **2** (1934) 334

T. Schneider: *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen*, J. reine angew. Math. **172** (1934) 65

T. Schneider: *Einführung in die transzendenten Zahlen*, Springer, Berlin (1957)

C. L. Siegel: *Transcendental Numbers*, Princeton Univ. Press, Princeton (1949)

T. Skolem: *Einige Bemerkungen zur axiomatische Begründung der Mengenlehre*, Fifth Congress of Scandinavian Mathematicians, 1922, Helsingfors, (1923) 217

E. Specker: *Verallgemeinerte Kontinuumshypothese und Auswahlaxiom*, Arch. Math. **5** (1954) 332

E. F. Taylor, J. A. Wheeler: *Exploring Black Holes*, Addison Wesley Longman, New York (2000)

H. H. Voigt: *Abriß der Astronomie*, BI Mannheim (1975)

A. Weil: *Zahlentheorie*, Birkhäuser (1992)

H. Weyl: *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik*, Math. Zeitschrift **10** (1921) 39

A. N. Whitehead, B. Russell: *Principia Mathematica I – III*, Cambridge (1910 – 1913)

L. Wittgenstein: *Philosophical Grammar*, Basil Blackwell, Oxford (1969)

H. Wussing: *Mathematik in der Antike*, Teubner, Stuttgart (1962)

H. D. Zeh: *Die Physik der Zeitrichtung*, Springer, Berlin (1984)

D. Zeilberger: *Opinion 68*
`http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/Opinion68.html`

E. Zermelo: *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Math. Ann. **59** (1904) 514

E. Zermelo: *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, Mat. Ann. **65** (1908) 107