Kalenderblätter 401 - 600

Ich übergebe sie mit zweifelhaften Gefühlen der Öffentlichkeit. Daß es dieser Arbeit in ihrer Dürftigkeit und der Finsternis dieser Zeit beschieden sein sollte, Licht in ein oder das andere Gehirn zu werfen, ist nicht unmöglich; aber freilich nicht wahrscheinlich. [Ludwig Wittgenstein: Philosophische Untersuchungen]

401	100710 Platoniker, Kardinalzahl
402	100711 Urnenproblem
403	100712 Arnold: disease
404	100713 Abzählbar unendlichmalige Addition und Geißlein
405	100714 Fraenkel
406	100715 Fraenkel, Zermelo, Bell, Matheologie
407	100716 Russell, Roll, Bell, Homöapthie
408	100717 Russell's tea pot, Mengenfolgen
409	100718 Antwort zu KB100717
410	100719 Arnold: experimentelle Verifikation
411	100720 Cornelius Castoriadis
412	100721 Penelope Maddy
413	100722 Laugwitz
414	100723 Fraenkel: Grenzsumme
415	100724 Fraenkel: Wohlordnungssatz, Goethe: Hexenküche
416	100725 Arnold
417	100726 Konvergenz von Zahlenfolgen, offener Brief
418	100727 Mengenfolgen, Liste
419	100728 Zwei Mengenfolgen
420	100729 Unendliche Folge von Mengenfolgen
421	100730 Fraenkel
422	100731 Kronecker, Cantor
423	100801 MathOverflow-Episode (1)
424	100802 MathOverflow-Episode (2)
425	100803 MathOverflow-Episode (3)
426	100804 MathOverflow-Episode (4)
427	100805 MathOverflow-Episode (5)
428	100806 MathOverflow-Episode (6)
429	100807 MathOverflow-Episode (7)
430	100808 MathOverflow-Episode (8)
431	100809 MathOverflow-Episode (9)
432	100810 MathOverflow-Episode (10)
433	100811 MathOverflow-Episode (11)
434	100812 MathOverflow-Episode (12)
435	100813 MathOverflow-Episode (13)
436	100814 MathOverflow-Episode (14)
437	100815 MathOverflow-Episode (15)
438	100816 MathOverflow-Episode (16)
439	100817 MathOverflow-Episode (17)
430	100818 MathOverflow-Episode (18)
441	100819 MathOverflow-Episode (19)
442	100820 MathOverflow-Episode (20)
443	100821 MathOverflow-Episode (21)
444	100822 MathOverflow-Episode (22)
445	100823 MathOverflow-Episode (23)
446	100824 MathOverflow-Episode (24)
447	100825 MathOverflow-Episode (25)
448	100826 MathOverflow-Episode (26)

449 100827 MathOverflow-Episode (27)
450 100828 MathOverflow-Episode (28)
451 100829 MathOverflow-Episode (29)
452 100830 MathOverflow-Episode (30)
453 100831 MathOverflow-Episode (31)
454 100901 MathOverflow-Episode (32)
455 100902 MathOverflow-Episode (33)
456 100903 MathOverflow-Episode (34)
457 100904 MathOverflow-Episode (35)
458 100905 MathOverflow-Episode (36)
459 100906 MathOverflow-Episode (37)
460 100907 MathOverflow-Episode (38)
461 100908 MathOverflow-Episode (39)
462 100909 MathOverflow-Episode (40)
463 100910 MathOverflow-Episode (41)
464 100911 MathOverflow-Episode (42)
465 100912 MathOverflow-Episode (43)
466 100913 MathOverflow-Episode (44)
467 100914 MathOverflow-Episode (45)
468 100915 MathOverflow-Episode (46)
469 100916 MathOverflow-Episode (47)
470 100917 MathOverflow-Episode (48)
471 100918 MathOverflow-Episode (49)
472 100919 MathOverflow-Episode (50)
473 100920 Wigner: The unreasonable effectiveness of mathematics
474 100921 Felscher:Kühnheit Cantors
475 100922 Unsterblichkeit
476 100923 Fraenkel zu den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ...
477 100924 Zahl der Neunen in 1 = 0,999...
478 100925 Fraenkel zur Definition von Mengen
479 100926 Fraenkel zum Bestehen und Enthalten
480 100927 0,999..., Weierstraß
481 100928 Eddington, Einstein
482 100929 Leon Sanchez zu Cantors erstem Beweis
483 100930 Leon Sanches zu rationaler Diagonalzahl
484 101001 Cantor und Jürgen R. als Kritiker der Funktionentheorie
485 101002 Cantors Weltbild (1): Korpswesen
486 101003 Weierstraß-Kriterium
487 101004 galathaea: aesthetic fetishes of logical type
488 101005 Perron: Was sind und was sollen die Irrationalen Zahlen?
489 101006 Cantor: Irrationalzahlen
490 101007 Domeisen, Fraenkel, Supertask
491 101008 Cantors Weltbild (2): Bismarck
492 101009 Fraenkels Sarkasmus
493 101010 Cantors Weltbild (3): Langbehn
494 101011 Kraus, Starkman
495 101012 Bernays, Poincaré, Hilbert, Dedekind, Wittgenstein
496 101013 Platon: Höhlengleichnis
497 101014 Bernays: Platonismus
498 101015 Bernays: Konsequenz des Platonismus
499 101016 Bernays: Extremplatonismus
500 101017 Bernays: Conceptual realism, Nichtexistenz der Menge |N
501 101018 Cantor Weltbild (4): Platonismus
502 101019 Bernays: Restricted Platonism
503 101020 Stanford Encyclopedia of Philosophy: Platonism
504 101021 Small: Modale Logik und Gödels Gottesbeweis
505 101022 Small: Gödels Gottesbeweis

506 101023 Richter: Gödels Gottesbeweis
507 101024 Barrow: Gödels Gottesbeweis
508 101025 Ravitch: Gödels Platonismus, Wahrheit von Axiomen
509 101026 Schneps: La Clef des Songes
510 101027 Grothendieck
511 101028 Cantors Weltbild (5): Worin wir uns alle einig wissen?
512 101029 Hodges
513 101030 Kanamori: Bernays, Hanf, Scott, Mahlo
514 101031 Cantors Weltbild (6): Haeckel
515 101101 Busch, Cantors Weltbild (7): Darwin
516 101102 Quine-Putnam indispensability argument
517 101103 Hume
518 101104 Locke
519 101105 Maddy: Banach-Tarski
520 101106 The Sand Reckoner
521 101107 Banach-Tarski, Vorderschinken
522 101108 Grenzwert einer unendlichen Reihe leerer Mengen
523 101109 Beweisprinzip: Schwarzes Loch
524 101110 Methode zur Wohlordnung der rationalen Zahlen nach Größe
525 101111 Noch eine Methode zur Wohlordnung der rationalen Zahlen nach Größe
526 101112 GU-Skript zur zeta-Funktion und Apéry
527 101113 Cantors Weltbild (8) Konfession
528 101114 Cantors Weltbild (9) Katholizismus
529 101115 Cantors Weltbild (10): In intellectu Divino
530 101116 Hilberts Paradoxon
531 101117 Fraenkel zur oberen Schranke logische Schritte
532 101118 Fraenkel zur Induktion
533 101119 Komplexität als Argument
534 101120 Fraenkel: potentielle und aktuale Unendlichkeit
535 101121 Die Kronecker-Ebene
536 101122 Mit Sternenstaub und Alephs
537 101123 Chu-Carroll zum Binären Baum
538 101124 John Gabriel
539 101125 Diskussionen über die Dezimalteilung der Winkel- und Zeitgrößen
540 101126 Freges Hilbert-Kritik
541 101127 Frege, Grundlagen der Arithmetik, § 96
542 101128 Frege, Grundlagen der Arithmetik, § 104
543 101129 Frege, Grundlagen der Arithmetik, §§ 5, 6
544 101130 Bruckner: Frege
545 101201 Cantors Weltbild (11): Erhaltungs- und Unsterblichkeitssätze
546 101202 Methodological naturalism
547 101203 Cantors Weltbild (12): Das aktual Unendliche und die Jesuiten
548 101204 Krieg der Frösche und der Mäuse (1)
549 101205 Krieg der Frösche und der Mäuse (2)
550 101206 Krieg der Frösche und der Mäuse (3)
551 101207 Krieg der Frösche und der Mäuse (4)
552 101208 Krieg der Frösche und der Mäuse (5)
553 101209 Krieg der Frösche und der Mäuse (6)
554 101210 Krieg der Frösche und der Mäuse (7)
555 101211 Krieg der Frösche und der Mäuse (8)
556 101212 Krieg der Frösche und der Mäuse (9)
557 101213 Krieg der Frösche und der Mäuse (10)
558 101214 Krieg der Frösche und der Mäuse (11)
559 101215 Krieg der Frösche und der Mäuse (12)
560 101216 Krieg der Frösche und der Mäuse (13)
561 101217 Krieg der Frösche und der Mäuse (14)
562 101218 Krieg der Frösche und der Mäuse (15)

563 101219 Krieg der Frösche und der Mäuse (16)
564 101220 Krieg der Frösche und der Mäuse (17)
565 101221 Krieg der Frösche und der Mäuse (18)
566 101222 Krieg der Frösche und der Mäuse (19)
567 101223 Krieg der Frösche und der Mäuse (20)
568 101224 Krieg der Frösche und der Mäuse (21)
569 101225 Krieg der Frösche und der Mäuse (22)
570 101226 Krieg der Frösche und der Mäuse (23)
571 101227 Krieg der Frösche und der Mäuse (24)
572 101228 Krieg der Frösche und der Mäuse (25)
573 101229 Krieg der Frösche und der Mäuse (26)
574 101230 Krieg der Frösche und der Mäuse (27)
575 101231 Krieg der Frösche und der Mäuse (28)
576 110101 Krieg der Frösche und der Mäuse (29)
577 110102 Krieg der Frösche und der Mäuse (30)
578 110103 Krieg der Frösche und der Mäuse (31)
579 110104 Krieg der Frösche und der Mäuse (32)
580 110105 Krieg der Frösche und der Mäuse (33)
581 110106 Krieg der Frösche und der Mäuse (34)
582 110107 Krieg der Frösche und der Mäuse (35)
583 110108 Krieg der Frösche und der Mäuse (36)
584 110109 Krieg der Frösche und der Mäuse (37)
585 110110 Krieg der Frösche und der Mäuse (38)
586 110111 Krieg der Frösche und der Mäuse (39)
587 110112 Krieg der Frösche und der Mäuse (40)
588 110113 Krieg der Frösche und der Mäuse (41)
589 110114 Krieg der Frösche und der Mäuse (42)
590 110115 Krieg der Frösche und der Mäuse (43)
591 110116 Krieg der Frösche und der Mäuse (44)
592 110117 Krieg der Frösche und der Mäuse (45)
593 110118 Krieg der Frösche und der Mäuse (46)
594 110119 Krieg der Frösche und der Mäuse (47)
595 110120 Krieg der Frösche und der Mäuse (48)
596 110121 Krieg der Frösche und der Mäuse (49)
597 110122 Krieg der Frösche und der Mäuse (50)
598 110123 Krieg der Frösche und der Mäuse (51)
599 110124 Krieg der Frösche und der Mäuse (52)
600 110125 Krieg der Frösche und der Mäuse (53)

401 Das Kalenderblatt 100710

Er {{G. Cantor in einem Brief an Pater I. Jeiler, Pfingsten 1888}} erwartet, daß seine Lehre "insbesondere von derjenigen Theologie bestätigt werden wird, welche auf die heilige Schrift, Tradition und auf die natürliche Veranlassung des menschlichen Geschlechts sich gründet, welche in notwendiger Harmonie zueinander stehen." {{Wer hätte ein derartiges Aufblühen des Glaubens in Form der modernen Matheologie noch für möglich gehalten, nachdem die Menschheit aus der klaren, kühlen Renaissance und der nüchtern-rationalen Aufklärung hätte geläutert hervorgehen sollen?}} [...] Es ist nicht anzunehmen, daß man modernen Menschen den Glauben an die Realexistenz eines platonischen Ideenhimmels vorschlagen will. {{Anmerkung:}} Es gibt auch in unserer Zeit noch einige wenige "Platoniker".
[Herbert Meschkowski: "Georg Cantor: Leben, Werk und Wirkung", 2. Aufl. BI, Mannheim (1981) 216ff]

Es gibt heute mehr Platoniker denn je! Nur wissen die meisten gar nicht, dass sie Platoniker sind. Natürlich gehören alle Mengentheoretiker dazu, die von unzugänglichen Kardinalzahlen fabulieren, aber auch schon jeder, der an die Menge aller natürlichen Zahlen glaubt, indem er ihr eine Kardinalzahl zubilligt, und erst recht, wer Berthas Folge aus KB100709 gegen den Grenzwert { } "konvergieren" sieht. Ein aktualeres Beispiel für den Begriff "aktuale Unendlichkeit" ist kaum vorstellbar.

Das Wort Kardinalzahl hat Cantor am 22. 1. 1886 in einem Brief an Kardinal Franzelin geprägt - vermutlich um den Kardinal, von dem er vergeblich eine Bestätigung seiner auch nach 12 Jahren noch immer abgelehnten Thesen (mein Gott, wie sturköpfig der doch war!) erhoffte, positiv vorzustimmen. Nomes est Omen. Wo wäre das Sprichwort angebrachter als hier?!
Dagegen hilft nur eines:
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/GU/GU11c.PPT#422,65,Folie 65

402 Das Kalenderblatt 100711

Their {{Galileo's and Newton's}} technical skill was unsurpassed; it was guided, however, not by sharp mathematical thinking but by intuitive and physical insights {{wenn man sieht, was bei der "modernen Mathematik" hinten rauskommt, so ist dieser Satz einfach nur lächerlich}}. . . .The physical meaning of the mathematics guided the mathematical steps and often supplied partial arguments to fill in nonmathematical steps. The reasoning was in essence no different from a proof of a theorem of geometry, wherein some facts entirely obvious in the figure are used even though no axiom or theorem supports them. Finally, the physical correctness of the conclusions gave assurance that the mathematics must be correct. {{Diese Sicherheit vermisst man heute. Was ist ein automatischer Beweiser gegen das Funktionieren der Realität? Ein Computer ist so gut wie sein Programmierer. Ihr unbedingter Glaube an die absolute Zuverlässigkeit von automatischen Beweisern ist das sicherste Anzeichen dafür, dass die Gläubigen unglaubwürdig, weil über die Maßen naiv sind.}}
[M. Kline: "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times", Oxford University Press (1972) 617]

Ein Beispiel für diese Naivität findet man hier:
http://mathoverflow.net/questions/7063/a-problem-of-an-infinite-number-of-balls-and-an-urn/31211#31211
Das bekannte Urnenproblem ist eine Variante des Märchens aus KB100709 und der Geschichte von Tristram Shandy: Man legt unendlich oft, nämlich um 23:00 Uhr, 23:30 Uhr, 23:45 Uhr und

in geometrischer Progression bis Mitternacht fortfahrend,10 Kugeln in eine Urne und nimmt gleichzeitig eine wieder heraus. Wieviele Kugeln sind am Ende darin?
Wenn die Kugeln nicht nummeriert sind, so sind sicher unendlich viele darin.
Sind sie aber nummeriert und nimmt man immer die mit der kleinsten Nummer heraus, so ist am Ende keine darin.
Dieses närrische, aber unter Matheologen leider zu den Initiationsriten gehörende Bekenntnis ist eine unvermeidliche Konsequenz der Akzeptanz des aktualen Unendlichen.
The reason this problem has the generally accepted answer of 0 balls in the jug at midnight -- among mathematicians [Daniel Asimov].
There is nothing paradoxical about it [Andrea Ferretti].

403 Das Kalenderblatt 100712

When I was a first-year student at the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Moscow State University, the lectures on calculus were read by the set-theoretic topologist L.A. Tumarkin, who conscientiously retold the old classical calculus course of French type in the Goursat version. [...]

These facts capture the imagination so much that (even given without any proofs) they give a better and more correct idea of modern mathematics than whole volumes of the Bourbaki treatise. [...]

The emotional significance of such discoveries for teaching is difficult to overestimate. It is they who teach us to search and find such wonderful phenomena of harmony of the Universe.

The de-geometrisation of mathematical education and the divorce from physics sever these ties. [...] teaching ideals to students who have never seen a hypocycloid is as ridiculous as teaching addition of fractions to children who have never cut (at least mentally) a cake or an apple into equal parts. No wonder that the children will prefer to add a numerator to a numerator and a denominator to a denominator.

From my French friends I heard that the tendency towards super-abstract generalizations is their traditional national trait. I do not entirely disagree that this might be a question of a hereditary disease, but I would like to underline the fact that I borrowed the cake-and-apple example from Poincaré {{who used to name a disease a disease too}}.

V.I. Arnold: "On teaching mathematics" (1997)
Translated by A.V. Goryunov
http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html

404 Das Kalenderblatt 100713

Demgemäß wird bei jenen {{nichtarchimedischen}} Größensystemen in der Regel durch eine wiederholte Addition der nämlichen Zahl die Summe gegenüber der Ausgangszahl zwar unter Umständen verkleinert, nicht aber wesentlich vergrößert; in der Mengenlehre dagegen, wo 1 unendlichklein ist im Vergleich zur kleinsten unendlichen Kardinalzahl a, wird diese durch abzählbar unendlichmalige Addition von 1 erreicht {{wenn kein Zwischenspeicher dies verhindert, wie z. B. hier:
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/GU/GU12c.PPT#394,22,Folie 22

Man könnte sogar überabzählbar oft und noch viel öfter addieren (wenn man denn könnte), aber ein Geißlein fehlt immer - und "immer" ist eine noch viel schwererwiegende Aussage als "unendlich" -, wenn der Geißleinnehmer das Geißlein erst herausgibt, nachdem ein anderes sich eingestellt hat. Wäre das nicht so, dann könnte man die Mengenlehre wenigstens für ein alltägliches Geschäft, nämlich zur Geißleinbefreiung gebrauchen. Doch ist sie auch dafür ungeeignet.}}
[Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre" 3. Aufl., Springer, Berlin (1928) p. 117f]

405 Das Kalenderblatt 100714

Als im vorigen Paragraphen von Einwänden die Rede war, die gegen den Wohlordnungssatz erhoben worden sind, mag mancher Leser den Kopf geschüttelt und sich gefragt haben: sind denn Einwände gegen mathematisch bewiesene Sätze möglich, handelt es sich denn in der Mengenlehre, die doch eine mathematische Disziplin ist, um Glaubenssachen und nicht vielmehr um ein durch logisch zwingende Schlüsse errichtetes Gebäude? {{Ohne den Glauben an das aktual Unendliche, also den Glauben daran, dass Cantors Liste, was die natürliche Nummerierung betrifft, vollständig ist, gelingt nicht einmal der Einstieg. Allerdings wird Neulingen diese Bedingung meistens verschwiegen, so dass sie sie nach Jahren immer noch nicht kennen und glauben, ohne zu wissen, was sie eigentlich glauben.}} In dieser Beziehung muß sich der Leser allerdings zunächst mit einer Enttäuschung abfinden: das Gebäude der Mengenlehre, wie wir es in seinen Umrissen bisher kennengelernt haben, ist in der Tat nicht vollständig sicher und unangreifbar zusammengefügt. Wir werden nämlich sehen, daß aus unserem bisherigen Mengenbegriff und seiner Verwendung logische Unstimmigkeiten, die sog. Antinomien oder Paradoxien der Mengenlehre, hergeleitet werden können — eine Tatsache, die an sich unsere Überlegungen erschüttert. Übrigens erscheinen diese Antinomien der heutigen Generation im allgemeinen vom mathematischen Standpunkt aus verhältnismäßig harmlos {{alles eine Sache der Gewöhnung}}; dazu hat außer dem Umstand, daß die Widersprüche keineswegs spezifisch mathematischen Charakter tragen und im Grunde gar nicht so neuartig sind, psychologisch wohl auch stark der Erfolg beigetragen, mit dem man inzwischen die Mengenlehre vor den Antinomien zu bewahren gelernt hat. {{Mehr zu diesen neuen Methoden im nächsten KB.}}
[A. Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre", Springer, Berlin (1928) p. 209]

406 Das Kalenderblatt 100715

Der Widerspruch der Mathematiker, der sich in den ersten Jahren (und selbst Jahrzehnten) des Cantorschen Schaffens aus einem historisch verständlichen Mißtrauen gegenüber dem {{vollendeten}} Unendlichen heraus erhoben hatte, war im letzten Jahrzehnt des vorigen Jahrhunderts allmählich beinahe verstummt, angesichts der unbestreitbar großen Erfolge {{?}} der jungen Mengenlehre und ihrer sich mehr und mehr systematisch gestaltenden Begründung. Da zeigte sich zur Überraschung weitester Kreise um die Jahrhundertwende, daß der Mengenbegriff Cantors für Antinomien, wie wir sie nachstehend kennenlernen, Raum läßt. Obgleich der Beseitigung dieser Unstimmigkeiten große und keineswegs erfolglose Bemühungen gewidmet wurden, haben doch die Antinomien wie auch andere, z. T durch sie ausgelöste grundsätzliche Erwägungen seitdem manche, darunter auch anz hervorragende Mathematiker veranlaßt, mehr oder minder große Teile der Mengenlehre abzulehnen; auch wo ein schlechthin abweisender Standpunkt nicht eingenommen wurde, hat begreiflicherweise das Vorhandensein einer mathematischen Disziplin, die sich logische Blößen gab und in der es vielmehr auf subjektive Überzeugung als auf zwingend begründete Erkenntnis anzukommen schien, großes Unbehagen hervorgerufen. Die Antinomien schlugen wie ein Gewitter in die eben

erst beruhigte mathematische Atmosphäre der Jahrhundertwende hinein und ihre Wirkung war vielfach geradezu niederschmetternd. Zwar hat Cantor selbst, der um jene Zeit seine Veröffentlichungen bereits abgeschlossen hatte, die Zuversicht auf das siegreiche Durchdringen seiner Ideen niemals aufgegeben. Aber so hervorragende und in mancher Hinsicht ihm geistesverwandte Forscher wie Dedekind und Frege räumten ihre Stellung, indem jener seine bahnbrechende Schrift lange Zeit hindurch nicht mehr neu auflegen ließ, dieser im Anhang seines zweibändigen Hauptwerks auf Russells Bemerkung hin [...] eine der Grundlagen seines Gebäudes als erschüttert erklärte. Der Siegesflug des Unendlichgroßen schien infolge der Antinomien durch einen jähen Absturz beendet. [1]
{{Im späteren Verlauf wurde der Siegesflug aber fortgesetzt und gipfelte in der Dreifaltigkeit des ZFC-Systems:
1) Jede Menge kann wohlgeordnet werden. [2]
2) Nicht jede Menge kann wohlgeordnet werden. [3]
3) In ZFC wurde noch niemals ein Widerspruch entdeckt! [4]
Wovon der letzte Satz zweifellos die zentrale Aussager bildet und eigentlich nur aus formalen Gründen im Präteritum steht.}}
[1. A. Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre", Springer, Berlin (1928) p. 209f]
[2. E. Zermelo: "Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann", Math. Ann. 59 (1904) 514-516 und "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung", Math. Ann. (1908) 107-128]
[3. J. L. Bell: "Set theory: Boolean-valued models and independence proofs", Ocford Univ. Press (2005) p. 74]
http://books.google.de/books?id=tPVkCxMxHZwC&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
[4] Diese Überzeugung vereint alle Matheologen; sie ist Prämisse für die Existenz der Sekte.

407 Das Kalenderblatt 100716

Durch die Gewohnheit, sich durch räumliche Vorstellung beeinflussen zu lassen, ist man zu der Vermutung gekommen, daß Folgen Limites besitzen müssen in den Fällen, wo es merkwürdig aussehen würde, wenn keine existierten. Da man einsah, daß die Brüche, deren Quadrat kleiner ist als 2, keinen rationalen Limes besitzen, so erlaubte man sich einen irrationalen Limes zu "postulieren", der die Dedekindsche Lücke ausfüllen sollte. Dedekind stellte [...] das Axiom auf, daß die Lücke immer ausgefüllt werden, d. h. daß jede Klasse eine Grenze haben müsse. Aus diesem Grunde nennt man die Folgen, bei denen sein Axiom gilt, "Dedekindsch". Es gibt aber unendlich viele Folgen, für die es nicht gilt.
Die Methode, das zu "postulieren", was man braucht, hat viele Vorteile. Es sind dieselben wie die Vorteile des Diebstahls gegenüber der ehrlichen Arbeit. Wir wollen dies anderen überlassen und mit unserer ehrlichen Arbeit fortfahren.
[B. Russell: "Einführung in die mathematische Philosophie“, Meiner, (2006) p. 83]
http://books.google.de/books?id=m5g4F8083WQC&dq=%22+in+die+mathematische+Philosophie%22+Russell&printsec=frontcover&source=bn&hl=de&ei=mfU5TPbuMsz-ObfLxIoK&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=4&ved=0CCcQ6AEwAw#v=onepage&q&f=false

{{Doch es gibt Dinge, die schwerer wiegen als Diebstahl.}} There is no greater crime in the cosmos than to deliberately indoctrinate young trusting minds with false teachings for selfish ends. [Michael Roll (2002)]
http://www.cfpf.org.uk/articles/background/sok/sok-00.html

Die drei wichtigsten Theoreme des ZFC-Systems sollen hier wiederholt werden, um sie recht deutlich einzuprägen (Quellenangaben s. KB 100715):

1) Jede Menge kann wohlgeordnet werden.
2) Nicht jede Menge kann wohlgeordnet werden.
3) In ZFC wurde noch niemals ein Widerspruch entdeckt!

Ohne den Satz 1 bricht die Hierarchie der Mächtigkeiten zusammen; die Mengenlehre ist gegenstandslos. Satz 2 findet sich an zahlreichen Stellen in der Literatur, meistens wörtlich in der Form: "if ZF is consistent, so is ZFC + GCH + 'there is no definable well-ordering of Pω'" {{Die verallgemeinerte Kontinuumhypothese (GCH) sagt aus, dass $2^{\aleph_n} = \aleph^{n+1}$}}

Da bleiben nur zwei Alternativen: Entweder (und augenscheinlich) wiederlegt Satz 2 die von Zermelo bewiesene Passiv-Komposition des "Wohlgeordnet-werden-könnens", die stets auch einen aktiv Handelnden voraussetzt und nur damit die am passiv Erleidenden vorgenommene aktiv ausgeführte Handlung als möglich behauptet. Denn Satz 2 degradiert das bewiesene "Können", zu einem Nichtkönnen, einer Handlung, die ohne Definition, also ohne Sinn und Verstand ausgeführt werden muss und für vernunftbegabte Wesen als Schandfleck gilt oder wenigstens gelten sollte.
Matheologie in Reinkultur nach dem Motto: Wer kann sich das Widersinnigste ausdenken, ohne im Glauben zu schwanken? Derlei Sätze gehören offenbar zu den hervorragendsten Mitteln, mit denen man "inzwischen die Mengenlehre vor den Antinomien zu bewahren gelernt" hat. (A. Fraenkel, KB100714): Antinomien werden also mit Antinomien bekämpft. Man fühlt sich unwillkürlich an das homöopathische Prinzip erinnert:
http://www.gesundheit-themenguide.de/service/sms/was_ist_eigentlich/az_der_behandungsmethoden/homoeopathie_gleiches_mit_gleichem_behandeln.html
Aber dann bitte auch in homöopathischen Dosen anwenden - nicht mit Holzhämmern auf Holzköpfe einhämmern.

Die oben angekündigte zweite Alternative zur Rettung von Satz 3 besteht in bewährter Manier darin, den automatischen Beweiser ein- und das Gehirn auszuschalten.

408 Das Kalenderblatt 100717

"Wenn ich behaupten würde, dass es zwischen Erde und Mars eine Teekanne aus Porzellan gäbe {{oder eine vollendete Unendlichkeit}}, welche auf einer elliptischen Bahn um die Sonne kreise {{bzw. einer undurchführbaren Durchführung harre}}, so könnte niemand meine Behauptung widerlegen, vorausgesetzt, ich würde vorsichtshalber hinzufügen, dass diese Kanne zu klein sei, um selbst von unseren leistungsfähigsten Teleskopen entdeckt werden zu können. Aber wenn ich nun weiterhin auf dem Standpunkt beharrte, meine unwiderlegbare Behauptung zu bezweifeln sei eine unerträgliche Anmaßung menschlicher Vernunft, dann könnte man zu Recht meinen, ich würde Unsinn erzählen.
Wenn jedoch in antiken Büchern die Existenz einer solchen Teekanne bekräftigt würde, dies jeden Sonntag als heilige Wahrheit gelehrt und in die Köpfe der Kinder in der Schule eingeimpft würde, {{oder allen Mathematik-Studenten in den Universitäten}} dann würde das Anzweifeln ihrer Existenz zu einem Zeichen von Exzentrizität werden. Es würde dem Zweifler in einem aufgeklärten Zeitalter die Aufmerksamkeit eines Psychiaters einbringen oder die eines Inquisitors in früherer Zeit."
Bertrand Russell: "Is There a God?" (commissioned - but not published - by Illustrated Magazine in 1952)
http://www.cfpf.org.uk/articles/religion/br/br_god.html

"Der Grund, wieso organisierte Religion offene Feindschaft verdient, ist, dass Religion, anders als der Glaube an Russells Teekanne, mächtig, einflussreich und steuerbefreit ist und systematisch an Kinder weitergegeben wird, die zu jung sind, sich dagegen zu wehren. Kinder sind nicht gezwungen, ihre prägenden Jahre damit zu verbringen, verrückte Bücher über Teekannen auswendig zu lernen. Staatlich subventionierte Schulen schließen keine Kinder vom Unterricht aus, deren Eltern das falsche Aussehen der Teekanne bevorzugen. Teekannen-Gläubige steinigen keine Teekannen-Ungläubigen, Teekannen-Renegaten, Teekannen-Ketzer und Teekannen-Lästerer zu Tode. Mütter warnen ihre Söhne nicht davor, Teekannen-Schicksen zu heiraten, deren Eltern an drei Teekannen statt an eine glauben. Leute, die ihre Milch zuerst einschenken, schießen nicht jenen, die den Tee zuerst einschenken, die Kniescheiben weg."
[R. Dawkins, L.K. Menon: A devil's chaplain: selected essays. Phoenix, London (2004)]

http://de.wikipedia.org/wiki/Russels_Teekanne

Dagegen sind Matheologen im Mittel (wenn auch mit großer Varianz) noch erträglich. Trotzdem ist die Inkonsequenz, mit der sie denken oder zu denken vorgeben doch bedenklich - vor allem wenn sie Mengen leeren (s. ganz unten). Man denke nur an die Folgen.

Die folgenden Folgen von Mengenpaaren stehen in Bijektion miteinander.

$(1) \leftrightarrow (1)$
$(1, 2) \leftrightarrow (1, 1/2)$
$(1, 2, 3) \leftrightarrow (1, 1/2, 1/3)$
$(1, 2, 3, 4) \leftrightarrow (1, 1/2, 1/3, 1/4)$
$(1, 2, 3, 4, 5) \leftrightarrow (1, 1/2, 1/3, 1/4, 2/3)$
...

Daraus wird (ohne weitere Begründung) geschlossen, dass auch die Grenzwerte in Bijektion stehen

$(1, 2, 3, 4, 5, ...) \leftrightarrow (1, 1/2, 1/3, 1/4, 2/3, ...)$

oder

$\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}([0, 1]))]$

Man bezeichnet diesen Sachverhalt als unendliche Abzählbarkeit.

$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{Q}([0, 1])]) = \aleph_0$

Die folgenden Mengenpaare stehen ebenfalls in Bijektion miteinander.

$(1) \leftrightarrow (2)$
$(1, 2) \leftrightarrow (3, 4)$
$(1, 2, 3) \leftrightarrow (4, 5, 6)$
$(1, 2, 3, 4) \leftrightarrow (5, 6, 7, 8)$
$(1, 2, 3, 4, 5) \leftrightarrow (6, 7, 8, 9, 10)$
...

Daraus wird aber nicht geschlossen, dass auch die Grenzwerte in Bijektion stehen.

$\mathbb{N} \leftarrow/\rightarrow (\ )$

Ich bezeichne diesen Sachverhalt als unendliche Inkonsequenz.

Konsequent wäre die Erkenntnis 1 < $\aleph_0$ = |{ }| = 0 mit den entsprechenden Folgen für die mathematische Existenz des $\aleph_0$ und aller seiner Nachkommen.

409 Das Kalenderblatt 100718

Auf das Kalenderblatt 100717 sind mehrere Reaktionen erfolgt, auf die ich, da wohl von allgemeinerem Interesse, hier antworten möchte.

Die folgenden Folgen von Mengenpaaren stehen in Bijektion miteinander.

(1) ↔ (1)
(1, 2) ↔ (1, 1/2)
(1, 2, 3) ↔ (1, 1/2, 1/3)
(1, 2, 3, 4) ↔ (1, 1/2, 1/3, 1/4)
(1, 2, 3, 4, 5) ↔ (1, 1/2, 1/3, 1/4, 2/3)
...

Daraus wird (ohne weitere Begründung) geschlossen, dass auch die Grenzwerte in Bijektion stehen
(1, 2, 3, 4, 5, ...) ↔ (1, 1/2, 1/3, 1/4, 2/3, ...)

NN: so wird das nicht gemacht. Wenn man das so machen will, dann muss man an der Stelle natürlich auch eine Begründung angeben. Aber wie schon gesagt, so macht das außer dir mal wieder keiner.

Antwort: Die Bijektion der Elemente wie 5 und 2/3 ist nicht von der Bijektion der Anfangsabschnitte (1, 2, 3, 4, 5) ↔ (1, 1/2, 1/3, 1/4, 2/3) verschieden. Im Gegenteil, diese Bijektion wird gerade angestrebt. Und eine Begründung dafür wird keineswegs angegeben. Es gibt als "Begründung" für die Existenz des Grenzwertes (1, 2, 3, 4, 5, ...) das Unendlichkeitsaxiom (Cantor hatte überhaupt noch keine Begründung) und sonst nichts. Die einzige Begründung für die Existenz von (1, 1/2, 1/3, 1/4, 2/3, ...) ist die oben dargestellte Bijektion aller Anfangsabschnitte.

NN: Es wird einfach direkt eine Bijektion zwischen den beiden Mengen angegeben, und nicht über die endlichen Teilmengen oben gegangen.

Antwort: Das ist falsch. Was sollte wohl eine "direkte Bijektion" anders bedeuten, als die Bijektion aller endlichen Anfangsabschnitte?

Die folgenden Mengenpaare stehen ebenfalls in Bijektion miteinander.

(1) ↔ (2)
(1, 2) ↔ (3, 4)
(1, 2, 3) ↔ (4, 5, 6)
(1, 2, 3, 4) ↔ (5, 6, 7, 8)
(1, 2, 3, 4, 5) ↔ (6, 7, 8, 9, 10)
...

Daraus wird aber nicht geschlossen, dass auch die Grenzwerte in Bijektion stehen.

NN: Richtig. Geht ja auch nicht. Hier sind die Mengen

$A_1 \leftrightarrow B_1$ (f_1)
$A_2 \leftrightarrow B_2$ (f_2)
...
$A_n \leftrightarrow B_n$ (f_n)
...

die jeweils über die Abbildungen f_n in Bijektion stehen.

Haben die A_n und B_n Grenzwerte A und B, so können diese in Bijektion stehen, müssen das aber nicht. Haben aber auch die Funktionen fn einen Grenzwert f, kann man u. U. /zeigen/ das dieser eine Bijektion zwischen A und B darstellt. Im ersten Fall geht das, im zweiten Fall nicht.

Antwort: Im ersten Falle wird gezeigt, dass alle endlichen Anfangsabschnitte in Bijektion stehen. Das ist Cantors "Beweis" der Abzählbarkeit. Weiter wird nichts gezeigt. Im zweiten Falle wird dasselbe für die Indexmengen gezeigt. Es würde wohl kein an "alle natürlichen Zahlen" Glaubender die Bijektion aller Mengen

(1) ↔ (1)
(1, 2) ↔ (1, 2)
(1, 2, 3) ↔ (1, 2, 3)
(1, 2, 3, 4) ↔ (1, 2, 3, 4)
(1, 2, 3, 4, 5) ↔ (1, 2, 3, 4, 5)
...

samt Grenzfall $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ anzweifeln wollen.
Doch durch eine einfache Umbenennung wird aus dem stetigen Übergang zum Grenzfall ein erschütternder, krachender Kladderadatsch. Um das zu akzeptieren, muss man an die reale Existenz des Unendlichen und seiner Träger glauben. Aber dann wird es nur noch schlimmer. Die "realen" Träger bleiben ja im obigen Widerspruch dieselben. Es sind nur die aufgeklebten Etiketten, die ausgetauscht werden. Für den konsequenten Platonisten müsste das als ein unendlicher Etikettenschwindel erscheinen!

Schließlich sei noch der mehr metamathematische Irrtum ausgeräumt, ich hätte bisher (und würde vermutlich auch in Zunkunft) nichts, aber auch gar nichts, gegen die Matheologen ausrichten können.

Ich selbst kann aus meiner Erfahrung sagen, dass ich vor 10 Jahren sehr großen Respekt, ja geradezu Ehrfurcht vor den Frontleuten der Mathematik hatte und ihre Lehren ohne den Schimmer eines Zweifels als die Wahrheit schlechthin akzeptiert habe. Vielleicht war das eine etwas naive Haltung, aber sie wird wohl von der großen Mehrheit der "working mathematicians" und erst recht von der breiten Masse geteilt. Inzwischen habe ich viele Stimmen gesammelt (solche von weithin ausstrahlenden Leitfiguren und solche von unbekannten Menschen, die einfach nur geradlinig denken, und zwar von überraschend vielen), die eine wesentlich distanziertere Haltung nahelegen. Deshalb hat sich bei mir und bei zahlreichen Lesern des Kalenderblattes eine aufgeklärte Einsicht durchgesetzt: Es gibt eine kleine Gruppe von Mathematikern, die sich mit solchen Themen wie den Voraussetzungen und Folgen der Wohlordbarkeit des Kontinuums beschäftigen oder Zugang zu unzugänglichen Zahlen suchen. Sie gehören in dieselbe Kategorie wie Astrologen, Alchemisten oder Systemtipper. Ihre leider noch staatlich subventionierte Tätigkeit hat nichts mit Mathematik, Wissenschaft, Bildung oder gar nützlicher Anwendung von Wissen zu tun - heute nicht und auch nicht in 10000 Jahren! Diese Erkenntnis gewonnen zu haben und weiter vermitteln zu können, nenne ich einen Erfolg.

410 Das Kalenderblatt 100719

The scheme of construction of a mathematical theory is exactly the same as that in any other natural science. First we consider some objects and make some observations in special cases. Then we try and find the limits of application of our observations, look for counter- examples which would prevent unjustified extension of our observations onto a too wide range of events [...].

I even got the impression that scholastic mathematicians (who have little knowledge of physics) believe in the principal difference of the axiomatic mathematics from modelling which is common in natural science and which always requires the subsequent control of deductions by an experiment.

Not even mentioning the relative character of initial axioms, one cannot forget about the inevitability of logical mistakes in long arguments (say, in the form of a computer breakdown caused by cosmic rays or quantum oscillations). Every working mathematician knows that if one does not control oneself (best of all by examples), then after some ten pages half of all the signs in formulae will be wrong and twos will find their way from denominators into numerators.

The technology of combatting such errors is the same external control by experiments or observations as in any experimental science and it should be taught from the very beginning to all juniors in schools. {{Große Skepsis ist dagegen dort angebracht, wo etwas als machbar behauptet wird, das gleichzeitig als nicht machbar behauptet wird. Eine experimentelle Verifikation ist nicht möglich. Man muss sich auf die Auskünfte von Logikern verlassen. Apropos: Nach Thomas Mann sind Schriftsteller Leute, denen das Schreiben schwerfällt.}}

V.I. Arnold: "On teaching mathematics" (1997) Translated by A.V. Goryunov
http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html

411 Das Kalenderblatt 100720

Denken heißt nicht, die Höhle verlassen, auch nicht, die Ungewißheit der Schatten durch die Umrisse der Dinge selbst ersetzen, den zitternden Schein einer Flamme mit dem Licht der wahren Sonne vertauschen. Denken heißt, ins Labyrinth eintreten, einen Irrgarten erstehen lassen, während wir uns auch "zwischen die Blumen / gegenüber dem Himmel" hätten lagern können. Denken heißt, sich in den Gängen verlieren, die es nur deshalb gibt, weil wir sie unablässig graben; am Ende einer Sackgasse umkehren, deren Zugang sich hinter unseren Schritten wieder verschlossen hat, bis endlich dieses Herumtappen im Kreise – ohne daß man wüßte, wie – begehbare Öffnungen in der Wand auftut. [...]
Früher oder später stellt man fest, daß man etwas anderes getan hat, als man zu tun glaubte. Peano formuliert die Axiome der natürlichen ganzen Zahlen; danach entdeckt man, daß sie nicht kategorisch sind, daß ihnen auch andere Mengen (etwa die Folge l/n) genügen. Lange glaubte man (und in gewissem Sinne immer noch), daß es einen radikalen Unterschied zwischen der nicht-abzählbaren Menge der reellen Zahlen und abzählbar unendlichen Mengen gibt (etwa der Menge der natürlichen Zahlen). Aber man beweist, daß jede konsistente Theorie der nicht-abzählbaren Menge der reellen Zahlen ein abzählbares Modell besitzt (Löwenheim-Skolem). – Man weiß nicht, ob es wahr ist, was man sagt, denn was man sagt, hängt von den zuvor

aufgestellten Axiomen ab, die – bis auf wenige Bedingungen – willkürlich sind, so daß nicht mehr abzusehen ist, welchen Sinn man der Frage nach der "Wahrheit" der Axiome geben könnte, obwohl man ihr ebensowenig jegliche Bedeutung absprechen könnte (etwa: Warum diese Axiome und keine anderen? Wie weit reicht die "Willkür" bzw. die Freiheit des Mathematikers?). Man umgeht die Frage, indem man sagt, die Wahrheit eines mathematischen Systems sei nichts weiter als seine Widerspruchsfreiheit. Dann kommt jemand und beweist, daß der Beweis dieser Widerspruchsfreiheit, wenn er gelingt, einen Widerspruch in sich schließt.
[Cornelius Castoriadis: Durchs Labyrinth. Vorwort (1977)]
http://www.dalank.de/notabene/phil2.html
(Ich danke Albrecht Storz für den Hinweis auf diese Quelle.)

412 Das Kalenderblatt 100721

Notice that if the result is a method that we do not quite recognize as mathematical, {{dann liegt das daran, dass inzwischen eine Pervertierung in der Mathematik wie leider in vielen anderen gesellschaftlichen Bereichen auch eingetreten ist}}. [...] What we have traced is a more or less simultaneous rise of pure mathematics and reevaluation of applied mathematics. Before all these, back in Newton’s or Euler’s day, the methods of mathematics and the methods of science were one and the same {{Mathematik galt als eine Wissenschaft und wurde auch häufig von Theologen wie Nicole Oresme, John Wallis, Bonaventura Cavalieri oder George Berkeley zum Ausgleich gepflogen - heute wären mathematisierende Theologen zu sehr an ihren Berufsalltag erinnert}}; if the goal is to uncover the underlying structure of the world, if mathematics is simply the language of that underlying structure, then the needs of celestial mechanics (for Newton) or rational mechanics (for Euler) are the needs of mathematics. From this perspective, the correctness of a new mathematical method – say the infinitary methods of the calculus or the expanded notion of function – is established by its role in application. {{Das ist der Prüf-Stein der Weisen.}} [Penelope Maddy: "How applied mathematics became pure", Reviev Symbolic Logic 1 (2008) 16-41]

413 Das Kalenderblatt 100722

Ist P(.) ein Prädikat so dass für fast alle n die Aussage P(n) zu T gehört (oder in T"gilt"), so gehört $P(\Omega)$ zur neuen Theorie $T<\Omega>$. Wir schreiben kurz: Wenn (fan) P(n), so gilt $P(\Omega)$. Das Kürzel (fan) soll ausfürhlich heissen "für fast alle natürlichen Zahlen n gilt ... in T". Sind a, b Zahlfolgen und haben wir (fan) a(n) = b(n), so gilt $a(\Omega) = b(\Omega)$, und für das Gleichheitszeichen in der neuen Theorie gelten die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation. Auf diese Weise erhalten wir die Zahlen der neuen Theorie, die wir kürzer mit den entsprechenden griechischen Buchstanben bezeichnen wollen. Wir schreiben also alpha für die durch $a(\Omega)$ definierte Zahl. Ist (fan) a(n) = n, so haben wir $a(\Omega) = \Omega$, das Zeichen Ω steht also für die durch die Folge der natürlichen Zahlen n selbst erzeugte Zahl; eine weitere Ausnahme von der Bezeichnungsregel wird $\omega = 1/\Omega$ sein, ebenfalls in Anlehnug an eine von Euler gern benutzte Bezeichnung für eine unendlich kleine Zahl [...]. Ist eine Folge fast konstant, (fan) c(n) = c, so gilt $c(\Omega) = c$ oder $\gamma = c$; die alten Zahlen sind in den neuen Bereich eingebettet. Wir haben soeben schon die Division und den Begriff "unendlich klein" benutzt. Operationen und Relationen übertragen sich nach T in naheliegender Weise, zum Beispiel:
Wenn (fan) a(n) > b(n), so gilt $\alpha > \beta$.
Wenn (fan) a(n) + b(n) = c(n), so gilt $\alpha + \beta = \gamma$.
Gilt für ein α jede der unendlich vielen Aussagen $\alpha > n_0$ ($|\alpha| < 1/n_0$) für jede feste natürliche Zahl n_0, so heisst α unendlich gross (unendlich klein).

[Detlef Laugwitz: "Eine Wiederaufnahme der Ideen und Methoden von Leibniz und Euler" in M. Jenny (Hrsg.): "Leonhard Euler - Beiträge zu Leben und Werk", Birkhäuser, Basel (1983) 186f]
http://books.google.de/books?id=vi7me3h-KCkC&printsec=frontcover&dq=Jenni+%22Leonhard+Euler%22+%22Beitr%C3%A4ge+zu+Leben+und+Werk%22&source=bl&ots=AvdGq7o678&sig=BZH6qINxGIawHKnVEw8_6bUGE78&hl=de&ei=RgIETMbBC4O6OMOCve0M&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CBgQ6AEwAA#v=onepage&q&f=false

Um Nichtstandard-Analysis zu betreiben, wird also eine Gesetzmäßigkeit aus (fast) allen endlichen Fällen auf den unendlichen Fall extrapoliert. Für die Folgen

(n) mit n = {1, 2, 3, ..., n}

und

(a_n) mit a_n = {n+1, n+2, n+3, ..., n+n}

und

(b_n) mit b_n = {1, 1/2, 1/3, 1/4, 2/3, ..., p/q}

gilt für fast alle n_0:

|{1, 2, 3, ..., n}| > n_0
|{n+1, n+2, n+3, ..., n+n}| > n_0
|{1, 1/2, 1/3, 1/4, 2/3, ..., p/q}| > n_0

Im Grenzfalle haben wir eine unendliche Menge, außer für die mittlere Folge, denn die ist im Grenzfalle ja weg, es sei denn, man schreibt (x_1, x_2, ..., x_n) und lässt sich kein "n+" für ein "x_" vormachen.

414 Das Kalenderblatt 100723

M sei eine abzählbare Menge, etwa M = {1, 2, 3, . . .} [...]. Wählen wir $M_1 = \{a_1\}$, $M_2 = \{a_2, a_3\}$, $M_3 = \{a_4, a_5, a_6\}$ usw., wobei die im übrigen ganz beliebigen Elemente a_1, a_2, a_3 usw. sämtlich untereinander verschieden sein mögen, so besitzt M_1 die Kardinalzahl 1, M_2 die Kardinalzahl 2, M_3 die Kardinalzahl 3 usw. Es ergibt sich als Summe der Mengen M_1, M_2 usw.:

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + . . . = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, . . .\},$$

d. h. S ist eine abzählbare Menge. Daher ist:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... = \mathfrak{a}.$$

Der Leser beachte, daß auf diese Weise eine Addition unendlichvieler natürlicher Zahlen möglich ist, die nichts mit der sogenannten Summierung "unendlicher Reihen“ zu tun hat und natürlich in der gewöhnlichen Arithmetik sinnlos wäre {{und nicht nur dort. Denn anstelle der Reihe S ließe sich auch die Folge (b_n) betrachten:

$b_1 = \{a_2\}$
$b_2 = \{a_3, a_4\}$

$b_3 = \{a_5, a_6, a_7, a_8\}$
...

deren Glieder nicht nur jede vorgelegte Anzahl, sondern auch jede vorgelegte Summe übertreffen, also in beiderlei Beziehung unendlich sind. $\aleph_0$ ist Grenzsumme und Grenzmächtigkeit. Und beides gehört zu einer völlig leeren Grenzmenge.}}

[Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre", Springer, Berlin (1928) p. 85]

415 Das Kalenderblatt 100724

Im ersten Jahrzehnt dieses Jahrhunderts ist nämlich der strenge Nachweis der schon von Cantor mit Sicherheit vermuteten Tatsache gelungen, daß die Elemente jeder beliebigen (geordneten oder überhaupt nicht geordneten) Menge sich zu einer wohlgeordneten Menge umordnen bzw. anordnen lassen. {{Das ist eine glatte Lüge. Fraenkel weiß das auch, wie er an anderer Stelle (s. unten) zu erkennen gibt. Er kann es aber nicht lassen, diese falsche Behauptung immer wieder einzuschieben. Doch auch in abgeschwächterem Sinne hört es sich gerade so an, als sei hier wirklich etwas Umwälzendes gelungen, als sei ein neues Zeitalter angebrochen. Indessen hätte jeder Esel axiomatisch fordern und behaupten können, dass die Menge aller reellen Zahlen eine wohlgeordnete Ausgabe besitzt. Das wäre wenigstens ein ehrlicher Ansatz gewesen. Aber nein, Zermelo musste ein Hokuspokus machen, damit Mit- und Nachwelt rühmen könne, es sei der strenge Nachweis einer schon lange von einem Genie "mit Sicherheit vermuteten" (d. h. ohne jeden Anhaltspunkt starrköpfig behaupteten) und vergeblich zu beweisen gesuchten "Tatsache" gelungen. Das klingt doch ganz anders! Ein Rezept aus der Hexenküche:

Faust:
Das tolle Zeug, die rasenden Gebärden,
Der abgeschmackteste Betrug,
Sind mir bekannt, verhaßt genug.

Mephistopheles:
Ei Possen! Das ist nur zum Lachen;
Sei nur nicht ein so strenger Mann!
Sie muß als Arzt ein Hokuspokus machen,
Damit der Saft dir wohl gedeihen kann.
}}

Dieser Nachweis gestattet uns, wichtige Vereinfachungen für die Theorie der unendlichen Kardinalzahlen herzuleiten.

{{Die Hexe (mit großer Emphase fängt an, aus dem Buche zu deklamieren):
Du mußt verstehn!
Aus Eins mach Zehn,
Und Zwei laß gehn,
Und Drei mach gleich,
So bist du reich.
Verlier die Vier!
Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex,
Mach Sieben und Acht,

So ist's vollbracht:
Und Neun ist Eins,
Und Zehn ist keins.
Das ist das Hexen-Einmaleins!

Zehn ist keins! Wer denkt da nicht an die Urne, die, unendlich oft mit 10 Kugeln beschickt, am Ende doch leer ist! Goethe musste zwar noch als erwachsener Mann Nachhilfeunterricht in den vier Species (den Grundrechenarten) nehmen, aber seine mathematische Begabung tritt hier unverkennbar zutage. Noch ein Genie also, das wichtige Tatsachen schon lange vermutete.}}
Da insofern die Lehre von den Kardinalzahlen zum Teil — mindestens dem Wesen nach — abhängig ist von der Theorie der wohlgeordneten Mengen und ihrer Ordnungstypen, so kann man ernstlich daran denken, diese früher als die Kardinalzahlen zu behandeln; doch sprechen für den von uns eingeschlagenen Weg andere, namentlich auch didaktische Erwägungen [1] {{und wohl vor allem}} die großen, heute noch unabsehbar scheinenden Schwierigkeiten, die sich der Wohlordnung des Kontinuums und der Lösung des Kontinuumproblems entgegenstellen, {{diese}} haben es nämlich vielen Mathematikern wahrscheinlich gemacht, daß das Kontinuum und um so mehr allgemeinere Mengen überhaupt nicht wohlordnungsfähig, die Mächtigkeiten $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$ usw. also keine Alefs seien [2].

[1. Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre", Springer, Berlin (1928) 165f]
[2. Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre", Springer, Berlin (1923) 209]
Die Verse aus der anderen Hexenküche findet man z. B. im Spiegel:
http://gutenberg.spiegel.de/?id=5&xid=3448&kapitel=9&cHash=f2061be284chap009#gb_found

416 Das Kalenderblatt 100725

Attempts to create "pure" deductive-axiomatic mathematics have led to the rejection of the scheme used in physics (observation - model - investigation of the model - conclusions - testing by observations) and its substitution by the scheme: definition - theorem - proof. It is impossible to understand an unmotivated definition but this does not stop the criminal algebraists-axiomatisators. {{Hier ist nicht von Vertretern einer speziell für Kriminalisten entworfenen Algebra die Rede.}} For example, they would readily define the product of natural numbers by means of the long multiplication rule. With this the commutativity of multiplication becomes difficult to prove but it is still possible to deduce it as a theorem from the axioms. It is then possible to force poor students to learn this theorem and its proof (with the aim of raising the standing of both the science and the persons teaching it). It is obvious that such definitions and such proofs can only harm the teaching and practical work.

It is only possible to understand the commutativity of multiplication by counting and re-counting soldiers by ranks and files or by calculating the area of a rectangle in the two ways. Any attempt to do without this interference by physics and reality into mathematics is sectarianism and isolationism which destroy the image of mathematics as a useful human activity in the eyes of all sensible people. {{Man erinnere sich nur an das Urnenproblem aus KB100711 oder die leere "Grenzmenge" mit einer unendlichen Anzahl von Elementen, die eine ebenso unendliche Summe bilden aus KB100723.}}

V.I. Arnold: "On teaching mathematics" (1997)
Translated by A.V. Goryunov
http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html

417 Das Kalenderblatt 100726

Eine unendliche Zahlenfolge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert a (meistens ohne ihn anzunehmen, d. h. ein Glied $a_n = a$ ist nicht enthalten) genau dann, wenn es ein n_0 gibt, so dass für alle Glieder a_n mit $n \geq n_0$ der Abstand zwischen a_n und a kleiner als ε ist. Und das muss für jeden noch so kleinen Abstand ε gelten:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

oder kurz

$$(a_n) \to a.$$

Ob und wogegen eine unendliche Zahlenfolge konvergiert, das kann nur entscheiden, wer (A) entweder alle Glieder oder (B) ein endliches Bildungsgesetz kennt. Denn anhand der ersten n_0 Glieder ist es offenbar nicht möglich, weil die überhaupt keine Rolle für das Ergebnis spielen. Wer wollte wohl das Konvergenzverhalten der Folge

12, 156, 1020, 4476 und weiter

aus den ersten vier oder auch den ersten 10^{1000} Gliedern ablesen?
Denn auch die Folge

1, 1/2, 1/3, 1/4 und weiter

muss sich ja nicht wie vermutet fortsetzen. Selbst die Folge

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 und weiter

konvergiert nur dann mit Sicherheit, wenn das "und weiter" durch ein "und *so* weiter", in der Mathematik meistens durch die drei Pünktchen angedeutet, ersetzt wird. Damit ist aber eine endliche Definition gegeben, also Fall (B). Doch wer könnte, wenn Fall (B) nicht vorliegt, unendlich viele Glieder kennen, um die Konvergenz im Falle (A) zu untersuchen und um die Aussage zu rechtfertigen, dass ES überabzählbar viele konvergente Folgen gäbe? Richtig. Ein Mensch kann es nicht. Und deshalb erwähnte ich gestern in einem offenen Brief, der hier seiner Wichtigkeit wegen leicht redigiert noch einmal wiederholt werden soll, die Religion. Der Brief beantwortet eine Polemik von HJ.

HJ: Wenn es Dir Spaß macht, kannst Du die Presse involvieren.

WM: Ja, am besten gleich das KB100724 beilegen oder noch besser gleich auf alle Kalenderblätter verweisen:
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/KB/

HJ: Allerdings würde ich an Deiner Stelle die darauf hinweisen, daß da jemand an der FH Augsburg {{Hinweis: Die offizielle Bezeichnung lautet mittlerweise HS Augsburg, worunter aber keine Hauptschule zu verstehen ist, sondern eine Hochschule für angewandte Wissenschaften / University of Applied Sciences, die Menschen zur Ausübung eines anspruchsvollen Berufes befähigt - also dieselben Ziele verfolgt, um deretwillen einst auch die Harvard-University und andere Mitglieder der Ivy-League gegründet wurden}} einen Widerspruch in ZFC gefunden, damit die Grundfesten eines großen Teiles der heutigen Mathematik erschüttert habe

WM: Das wäre eine Unwahrheit, wie sie aber in Matheologenkreisen nicht selten vorkommt {{vgl. z. B. KB100724}}. Erschüttert wurde lediglich die anmaßende Vorstellung einer kleinen Clique von Matheologen, ihre religiös {{sic}} fundierten Vorstellungen hätten etwas mit Mathematik zu tun.

HJ: und des Abelpreises harre. (Natürlich mit Quellenangabe der entsprechenden Publikationen)

WM: Wenn die Juden Christus als Gottes Sohn anerkennen, wenn der Papst Luther, Bruno, Galilei und Darwin heilig- und Russell und Weinberg {{
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/GU/GU09c.PPT#377,26,Folie 26
}} mindestens seligspricht, wenn die Moslems Abziehbildchen von GWB auf die Kaaba kleben und wenn die UNO posthum Hitler und Stalin zu Wohltätern der Menschheit erklärt, dann harre ich immer noch nicht. Denn der Abel-Preis (wie auch die Fields-Medaille mit der einzigen Ausnahme Cohen, soweit mir bekannt) werden für Leistungen in der Mathematik verliehen. Dort habe ich nichts Bemerkenswertes aufzuweisen, habe mich auch niemals darum bemüht.

418 Das Kalenderblatt 100727

Zahlenfolgen können konvergieren, weil die Abstände zwischen zwei Zahlen wie a_n und a beliebig klein sein können. Mengenfolgen besitzen diesen Vorteil nicht. Eine Mengenfolge (M_n) kann nur dann gegen den endlichen Grenzwert M konvergieren, wenn es ein n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $M \subseteq M_n$. Solche Folgen sind eigentlich langweilig.
Bei Zahlenfolgen, hat man sich noch ein Kriterium für uneigentliche Konvergenz ausgedacht: Eine Zahlenfolge (a_n) konvergiert gegen den uneigentlichen Grenzwert ∞, wenn die Glieder $1/a_n$ existieren und gegen den Grenzwert 0 streben.
Damit gelingt es, auch für die eigentlich langweiligen Mengenfolgen Interesse zu wecken: Mengenfolgen (M_n) konvergieren, wenn sie einen Limes der Suprema und einen Limes der Infima besitzen und beide übereinstimmen.
Ein Supremum $\cup_{k = n \dots \infty} M_k$ der Folge enthält alle Elemente, die in der Vereinigung unendlich vieler Folgenglieder, beginnend mit M_n, auftreten, also wirklich vorhanden sind, nicht irgendwie "approximiert" werden.
LimSup ist der Durchschnitt aller Suprema, also das kleinste Supremum:

$$\text{LimSup}\,(M_n) = \cap_{n = 1 \dots \infty} (\cup_{k = n \dots \infty} M_k)$$

Ein Infimum $\cap_{k = n \dots \infty} M_k$ der Folge enthält alle Elemente, die im Durchschnitt aller Folgenglieder ab M_n auftreten, also wirklich vorhanden sind, nicht irgendwie "approximiert" werden.
LimInf ist die Vereinigung aller Infima, also das größte Infimum:

$$\text{LimInf}\,(M_n) = \cup_{n = 1 \dots \infty} (\cap_{k = n \dots \infty} M_k)$$

Das Besondere am Mengenlimes ist, dass er angenommen wird, denn Mengen sind quantisiert. Eine beliebig genaue Annährung ist anders nicht möglich.

Der Grenzwert Lim M_n für $M_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ ist ℕ, eine unendliche Menge, die ES laut Unendlichkeitsaxiom "gibt". Schreiben wir der Übersichtlichkeit halber die Glieder der Mengenfolge in Form einer Liste untereinander, so ergibt sich, obwohl keine letzte natürliche Zahl existiert, doch eine letzte Zeile

{1}
{1, 2}
{1, 2, 3}
...
{1, 2, 3, ...}

denn der Grenzwert dieser Mengenfolge ist nur dann ℕ = {1, 2, 3, ...}, wenn in einem Folgenglied alle natürlichen Zahlen enthalten sind.

Schreiben wir dagegen die Folge der dezimalen Approximationen der Zahl 1/9 in Listengestalt

0,1
0,11
0,111
...

so ist die Zahl 1/9 nicht in der Liste enthalten, denn sie besitzt keine aktual unendliche Darstellung. 0,111... ist lediglich eine Abkürzung für das in KB100726 dargestellte Konvergenzverhalten. Die Aussage, in 0,111... seien "alle Einsen" enthalten, ist im Sinne des Konvergenzkriteriums sinnlos; dann wäre $\varepsilon = 0$ zu fordern.

Überlagert man nun die beiden oben dargestellten Listen, indem die Indizes der Einsen angeschrieben, also ihre Positionen mit natürlichen Zahlen markiert werden,

1_1
1_1, 1_2,
1_1, 1_2, 1_3
...
x_1, x_2, x_3, ...

so erkennt man den Widerspruch zwischen der Mathematik, in der keine letzte Zeile mit allen Positionen existieren kann und der Mengenlehre, in der alle natürlichen Zahlen als Indizes vorkommen müssen, was erst in einer letzten Zeile geschehen kann (denn *nach* allen Positionen kommt keine mehr, und *vorher* sind noch nicht alle Positionen da).

Für die hier mit *x* markierten Positionen sind keine mathematischen Zeichen verfügbar; das Einsetzen von Einsen wäre ein Fehler. Alle indizierten Einsen sind bereits in den darüberliegenden Zeilen angegeben. Deswegen ist die Annahme der aktualen Unendlichkeit falsch; das Unendlichkeitsaxiom führt zu widersprüchlicher Mathematik.

419 Das Kalenderblatt 100728

Mengenfolgen (M_n) konvergieren, wenn sie einen Limes der Suprema und einen Limes der Infima besitzen und beide übereinstimmen.

$\text{LimSup}\,(M_n) = \bigcap_{n = 1 \dots \infty} (\bigcup_{k = n \dots \infty} M_k)$
$\text{LimInf}\,(M_n) = \bigcup_{n = 1 \dots \infty} (\bigcap_{k = n \dots \infty} M_k)$

Das Besondere am Mengenlimes ist also, dass er angenommen wird, denn Mengen sind quantisiert. Eine beliebig genaue Annährung ist anders nicht möglich. Satt Supremum und Infimum sollte man eigentlich besser von Maximum und Minimum sprechen, denn die kleinste obere Schranke und die größte untere Schranke sind entweder in der Folge enthalten oder sie sind nicht kleinste obere Schranke und größte untere Schranke.

Die Folge (M_n) mit $M_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ besitzt z. B. den Grenzwert ℕ. Es bleibt keine natürliche Zahl n vor dieser gefräßigen Folge verschont.

Jede mit (M_n) konkurrierende Mengenfolge aus natürlichen Zahlen muss deswegen den Grenzwert { } besitzen, hier zum Beispiel die Folge (J_n):

$$M_n = \{1, 2, 3, ..., n\} \quad \text{und} \quad J_n = \{n+1, n+2, ..., n+n\}.$$

Das führt zum Kladderadatsch, denn zwar ist der Limes J = { }, doch der Limes der Kardinalzahlen von (J_n) ist voll, so voll, wie es (sinnvoll) voller nicht geht, nämlich unendlich.

Eine Anwendung der Mengenlehre auf tatsächliche Probleme ist damit ausgeschlossen, denn tatsächlich wächst die Folge (J_n) einfach nur immer so weiter, ebenso wie ihre Kardinalzahlen $(|J_n|)$. Dass sich eine unendliche Zahl von Kugeln aus einer Urne verflüchtigt, ist selbstverständlich unmöglich, denn bereits die Anwesenheit von unendlich vielen Kugeln kann ausgeschlossen werden. Aber auch für jede beliebig große Anzahl ist das Verschwinden ausgeschlossen - und damit verbietet sich, wie bereits erwähnt und im Gegensatz zu Cantor allen Cantor-Nachfolgern bekannt, jede reale Anwendung der Mengenlehre.

Wozu ist sie überhaupt gut? Um einigen furchtsamen Geistern die Angst zu nehmen, im Kontinuum könnten sich Löcher auftun, die zum Beispiel eine Lösung mancher Polynomgleichung 10^{100}-sten Grades verbieten. Als ob unter der Voraussetzung des aktual Unendlichen solche Gleichungen alle lösbar wären! Als ob die unsinnige Reflexion auf einen nicht vorhandenen Gott oder ein kontrafaktuales Axiom irgendetwas bessern könnte!

420 Das Kalenderblatt 100729

Mengenfolgen (M_n) konvergieren, wenn sie einen Limes der Suprema und einen Limes der Infima besitzen und beide übereinstimmen.

$\text{LimSup}\,(M_n) = \bigcap_{n = 1 \dots \infty} (\bigcup_{k = n \dots \infty} M_k)$
$\text{LimInf}\,(M_n) = \bigcup_{n = 1 \dots \infty} (\bigcap_{k = n \dots \infty} M_k)$

Das Besondere am Mengenlimes ist also, dass er angenommen wird, denn Mengen sind quantisiert. Eine beliebig genaue Annährung ist anders nicht möglich. Satt Supremum und Infimum sollte man eigentlich besser von Maximum und Minimum sprechen, denn die kleinste obere Schranke und die größte untere Schranke sind entweder in der Folge enthalten oder

sie sind nicht kleinste obere Schranke und größte untere Schranke. Eine gegen $\mathbb{N}$ konvergierende Mengenfolge vereinigt deshalb alle natürlichen Zahlen ohne Ausnahme und lässt für eine konkurrierende Mengenfolge aus natürlichen Zahlen nichts mehr übrig (s. KB100728).

Das Problem verschärft sich bei paralleler Betrachtung von unendlich vielen Mengenfolgen:

1.) $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \ldots \to \mathbb{N}$
2.) $\{2\}, \{3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \ldots \to \{\ \}$
3.) $\{3\}, \{5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \ldots \to \{\ \}$
...
n.) $\{n\}, \{2n-1, 2n\}\ \{3n-2, 3n-1, 3n\}, \ldots \to \{\ \}$
...
ω.) $\{\omega\}, \{2\omega-1, 2\omega\}\ \{3\omega-2, 3\omega-1, 3\omega\}, \ldots \to \{\ \}$
$\omega+1$.) $\{\omega+1\}, \{2\omega+1, 2\omega+2\}\ \{3\omega+1, 3\omega+2, 3\omega+3\}, \ldots \to \{\ \}$

Alle Folgen außer der ersten konvergieren gegen die leere Menge, d. h. jede besitzt als Maximum, das gleichzeitig Minimum ist, die leere Menge.
Die Vereinigung der Grenzwerte aus allen Folgen ist das Maximum der ersten Folge

$$\mathbb{N} \cup \{\ \} \cup \{\ \} \cup \{\ \} \ldots = \mathbb{N}$$

obwohl jede Vereinigung der n-ten Glieder aller Folgen nicht nur alle natürlichen Zahlen, sondern auch ω und $\omega+1$ enthält. Hier als Beispiel die Vereinigung der ersten Glieder

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots, \omega+1\}$$

der zweiten Glieder

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots, 2\omega+2\}$$

und der dritten Glieder

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots, 3\omega+3\}$$

Die Vereinigung der n-ten Glieder aller Folgen

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots, n\omega+n\}$$

besitzt den Grenzwert

$$\{1, 2, 3, \ldots, \omega\cdot\omega+\omega\}.$$

Die Vereinigung der Folgen ist die Folge der Vereinigungen, außer im Grenzfalle, denn die Vereinigung der Folgen strebt nicht gegen die Vereinigung der Grenzwerte.

Man kann natürlich trotzdem die Auffassung vertreten, unendliche Mengen und ihre Limites besäßen einen Sinn.

421 Das Kalenderblatt 100730

Aus dem Satz von der Nichtabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen haben wir im Vorangehenden Folgerungen gezogen, die uns wichtige geometrische und arithmetische Erkenntnisse vermittelten. Hieraus erhellt schon, daß es sich dabei um ein innerhalb der Gesamtmathematik bedeutsames Ergebnis handelt, das — gleich besonders wichtigen Sätzen anderer mathematischer Teilgebiete — weit über die betreffende engere Disziplin (hier über die Mengenlehre) hinaus uns neue Tatsachen lehrt. {{"Was hingegen die Anwendungen der transfiniten Zahlen in anderen mathematischen Disziplinen anlangt, so haben sich die Hoffnungen, welche man zunächst darauf setzte, nur in wenigen, speziellen Fällen erfüllt." (Walter Felscher, KB090616). Tatsachen resultieren nicht, sondern lediglich leidige Denkfehler - und daher ist diese Lehre nicht einmal von peripherem Interesse für die Mathematik.}} Wir haben aber [...] noch nicht von der Bedeutung unseres Satzes für die Mengenlehre selbst gesprochen. In dieser Beziehung kann man unser Ergebnis geradezu als die Grundlage der Mengenlehre betrachten, von der aus die Einführung unendlichgroßer Zahlen erst einen Sinn bekommt; {{und diese Grundlage ist falsch.}}

Bei der Einführung der Kardinalzahlen wie auch der [...] Ordnungstypen und Ordnungszahlen operiert die Mengenlehre nicht etwa rein formal derart, daß sie neue Symbole einführt als "Zahlen“, die gegenüber den gewöhnlichen Zahlen als unendlichgroß erklärt werden, und mehr oder weniger willkürlich das Rechnen mit solchen Zahlen widerspruchsfrei festsetzt; ein derartiges Vorgehen würde verhältnismäßig einfach sein und keines eigenen wissenschaftlichen Gebäudes bedürfen, aber mangels einer natürlichen Grundlage {{zur Natürlichkeit dieser Zahlen vgl. KB100728}}, die gleichzeitig eine entsprechende Anwendungsfähigkeit bedingt, wenig Interesse oder Nutzen bringen. {{Was die Anwendung der transfiniten Zahlen angeht, so wirkt die leere Menge auffällig füllig dagegen.}} In Wirklichkeit geht die Mengenlehre vielmehr von dem gewissermaßen anschaulichen Begriff der Menge aus und gelangt von da aus in konsequenter, durch das wissenschaftliche Bedürfnis {{das muss immer wieder betont werden, damit es niemand vergisst}} geleiteter Begriffsbildung [...] zu den verschiedenen Arten "unendlicher Zahlen"; deren Größenanordnung und Rechengesetze werden dementsprechend nicht durch willkürliche Definitionsakte vorgeschrieben (erfunden) , sondern gewissermaßen der Natur abgelauscht {{da hört jemand das Gras wachsen}}, d. h. (auf Grund anschaulich naheliegender Grunddefinitionen) in ihrer zwangsläufig gegebenen Struktur, wie sie jeweils der Sonderart der betreffenden Zahlengattung entspricht, festgestellt (entdeckt). So ergeben sich [...] die untereinander sehr verschiedenartigen Gesetze der Rechenoperationen für die einzelnen Zahlenarten, die a priori so festzusetzen keinerlei Grund bestanden hätte {{und a posteriori erst recht nicht}} und auf deren Festsetzung in dieser Art man von philosophischer, rein auf den Begriff des Unendlichgroßen gerichteter Betrachtung her ganz bestimmt nicht verfallen wäre. {{Das ist wahr.}}

[Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre" 3. Aufl., Springer, Berlin (1928) 55 und 118f]

422 Das Kalenderblatt 100731

Beim Zählen treten also die Zahlen auf als ein unendlicher Vorrat von Zeichen, mittels dessen sich jedes System von Objekten in ein äquivalentes und, falls es nützlich, reduciertes System von Objekten keinerlei besonderen Charakters transformieren läßt. Gerade in ihrer Bedeutungslosigkeit liegt die Bedeutung der Zahlen. Deshalb ist es von vornherein zu vermuten, daß die Zahl sich am schönsten als Invariante aller unter ihr enthaltenen Systeme bewähren wird, wenn die Elemente derselben aus dem eigenen Reiche der Zahl entnommen werden. Äquivalent sind alle Systeme (x, y, z), wo x, y, z irgendwelche positiven ganzen Zahlen bedeuten. Die zugehörige Invariante ist die Zahl 3. Andererseits läßt sich rein mathematisch als

Invariante dieser Systeme jede von ihnen symmetrisch gebildete Funktion (mit endlichem Werte) auffassen. [...] Die Zahl ν erweist sich also als charakteristisch für die Ausdehnung dieser Mannigfaltigkeit von Systemen. Und das wird sie auch bleiben trotz aller Sophistik, mit welcher des öfteren eine ν fache Mannigfaltigkeit in eine solche verwandelt werden soll, bei welcher ν nicht mehr charakteristisch ist.

Ce passage a été ressenti par Georg Cantor comme une critique méchante et infondée de ses travaux, en particulier de son article [Cantor 1878], dans lequel il avait établi une bijection entre l'intervalle unité et ses puissances, et dont la publication dans le Journal de Crelle avait apparemment été retardée par Kronecker— voir [Purkert, Ilgauds 1987, p. 50–51]. Cantor se montre très agacé par tout le cours de Kronecker dans une lettre à W.Thomé du 21 septembre 1891, où il dit de Kronecker (cité d'après [Purkert, Ilgauds 1987, p. 217]):

"Daß er seit zwanzig Jahren meine mathematischen Arbeiten und damit mich selbst schlecht zu machen sucht, ist mir längst bekannt gewesen [. . .] Nichtsdestoweniger hatte ich ihm aus Rücksicht auf sein Alter und die Stellung, welche er sich gemacht hat, die Ehre zu Theil werden lassen, daß er den Eröffnungsvortrag [lors de la première réunion de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung en automne 1891] halten sollte. Diese Abmachung datirt von den Osterferien. Da wäre doch für einige Monate Suspension seiner Feindseligkeiten gegen mich am Platze gewesen! Allein im Gegentheil: aus einer Nachschrift seines Publicums über den Zahlbegriff, welches er im Sommersemester gelesen hat, die mir zufällig in die Hände gekommen und in meinen Besitz übergegangen ist, geht urkundlich hervor, daß er in der boshaftesten Weise und ohne den Schein wissenschaftlicher Begründung meine im Crelleschen Journal veröffentlichten Arbeiten vor seinen unreifen Zuhörern als 'Mathematische Sophistik' denuncirt hat. Die ganze Vorlesung ist ein wirres oberflächliches Gemisch von unverdauten Ideen, Prahlereien, unmotivierten Schimpfereien und faulen Witzen {{und so weiter. Das Vokabular beleidigter Matheologen ist ja in dsm sattsam bekannt. Über die Wissenschaftlichkeit der Vorlesung Kroneckers möge jeder Leser sich hier
http://smf4.emath.fr/Publications/RevueHistoireMath/7/pdf/smf_rhm_7_207-275.pdf
selbst ein Bild machen. Aber Vorsicht! Keine ganz leichte Kost. Um Kronecker folgen zu können, genügt es gewiss nicht, das Diagonalverfahren verstanden zu haben.}}

["Sur le concept de nombre en mathematique" Cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin (1891) Retranscrit et commenté par Jacqueline Boniface et Norbert Schappacher: Revue d'histoire des mathématiques 7 (2001), p. 246 f]

423 Das Kalenderblatt 100801 Meine MathOverflow-Episode (1)

In den folgenden Kalenderblättern werde ich meine Erfahrungen in MathOverflow dokumentieren - einer virtuellen Welt, wie sie im Internet-Zeitalter wie Pilze aus dem Boden schießen, einem Forum zur Diskussion mathematischer Fragen:
http://mathoverflow.net/
Wie viele Kalenderblätter es werden, steht noch nicht fest; mir geht es fast wie Tristram Shandy: Ich benötige oft eine Woche, um einen Tag meiner Präsenz in diesem Forum aufzuzeichnen: das Eintauchen in eine Wahnwelt, genannt ZFC, beherrscht von Geistern, die durch Formalismen eingekerkert jeden Realitätsbezug verloren haben (*).
Meinen ethischen Maßstäben zuwider musste ich nach der Enttarnung meiner Identität unter Pseudonymen wie Henri-Poincaré oder Hans.Imglueck auftreten, weil in dieser von Ignoranz und Intoleranz geprägten Welt eine Gedankenpolizei jeden nicht konformen Beitrag löscht. Die Pseudonyme und was den Avataren widerfahren ist, werde ich in den folgenden

Kalenderblättern offenlegen. Wer das nicht lesen mag, sollte die Kalenderblätter erst im September wieder abonnieren. Aber er versäumt viel.

(*) Ein Beispiel ist die Urne, in die immer abwechselnd zehn Kugeln gelegt und eine entfernt werden. Dazu behaupten die geistigen Führer dieser Welt:
1) Es ist sinnvoll, über den Endzustand zu sprechen.
2) Im Endzustand ist die Urne leer.
3) Dies ist keineswegs bemerkenswert oder gar paradox.

Anmerkung zur Anmerkung: Es gibt auch in MathOverflow Teilnehmer, die sich dem Gruppenzwang zur intellektuellen Selbstverstümmelung nicht beugen. Zu gegebener Zeit wird von ihnen die Rede sein.

424 Das Kalenderblatt 100802 Meine MathOverflow-Episode (2)

Am 27. Juni stieß ich in MathOverflow auf die Frage: "How many orders of infinity are there?" Ich konnte sie aus dem Stegreif beantworten, weil es ja überhaupt keine aktuale Unendlichkeit und damit auch keine verschiedenen Ordnungen gibt. Da der Binäre Baum hier schon relativ bekannt ist und in KB 100804 nochmals vorgestellt wird, möchte ich meine ausführliche Antwort hier nicht reproduzieren. Neulinge finden eine Kurzdarstellung unter Aufgabe 11 in
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/GU/Pruefung%20GU1007.pdf
oder im KB100624
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/KB/KB%20201-400.pdf
Aus meinen Ausführungen zog ich das Resumee: "There is no hierarchy of infinities."

Nach 18 Minuten stellte sich ein erster Kommentar ein: Harri Gindi schrieb: "This 'result' assumes the continuum hypothesis."

Dass diese Antwort sinnlos ist, bedarf wohl keiner Diskussion. Der Binäre Baum kann mit abzählbar vielen Pfaden vollständig überdeckt werden, wobei jeder Knoten mindestens einmal an die Reihe kommt. Der Kritiker, ein zwanzigjähriger Mathematikstudent, ist sicher noch lernfähig - vielleicht wird auch sein Hass auf Physiker sich noch legen. (Er schrieb nämlich andernorts:
http://meta.mathoverflow.net/discussion/484/physicists-can-be-wrong
"I reopened it {{eine Diskussion zum Thema physicists-can-be-wrong}} because I hope to use the information in my ongoing fight against physicists. Another plus is that it contains the words 'Physicists' and 'wrong'.")

Bevor ich jedoch Harri Gindis unüberlegte Antwort richtigstellen konnte, war mein Beitrag gelöscht - nach genau 40 Minuten und ohne weiteren Kommentar.

In der Vermutung, dass dem Löschtrupp nur an einer Richtigstellung gelegen sei, stellte ich meinen Beitrag binnen Stundenfrist wieder her und den Kommentar des Herrn Gindi richtig: "Note that this result does not assume CH but merely the constructability of a countable set." Da mir auch sonst noch niemand begegnet ist, der die Meinung des Harry Gindi teilt, ging ich davon aus, dass diese Richtigstellung auch nach den Maximen der Mengentheoretiker zuträfe und die Belehrung und intellektuelle Förderung eines der ihren mit Wohlgefallen aufgenommen würde. In mindestens einem Punkte dieser Konjunktion irrte ich.

425 Das Kalenderblatt 100803 Meine MathOverflow-Episode (3)

Einen zweiten Kommentar zu meiner negativen Aussage über die Anzahl der Unendlichkeiten, den ein Herr Robin Chapman, seines Zeichens "senior lecturer" für Mathematik abgab: "Not only does this not address Terry's question, but the notation and argument are so confusing it is impossible to discern what your point is" beantwortete ich partiell mit einem Hinweis darauf, dass der Ausschluss aller Unendlichkeiten die ursprünglich gestellte Frage nach deren Anzahl sehr wohl beantwortet: "There is no hierarchy of infinities. This answers the question of the OP."

Bezüglich seines kundgetanen Unverständnisses des Binären Baums (das vielen Matheologen als willkommene Alternative zur Erkenntnis des Aktual Unendlichen als eines sich selbst widerlegenden Konzeptes dient) kann ich nur schließen, dass Herr Chapman eine sehr schwache Auffassungsgabe besitzt, eine schwächere jedenfalls als meine Studenten, die in der letzten Klausur ausnahmslos die Frage beantworten konnten, was der Sinn und Zweck des Binären Baums ist. Da Herr Chapman auf seiner Webseite auch noch stolz verkündet, in einem Quiz den sechsten Platz unter sechs Teilnehmern gewonnen zu haben, ist die Vermutung naheliegend: Offenbar ist der Kritiker mit sehr geringen Erkenntnismitteln ausgestattet, schreibt den Mangel aber seiner Umwelt zu. Zwar ist es keine Schande, gegenüber einer Schar von sehr intelligenten Studentinnen und Studenten den Kürzeren zu ziehen, aber dass er immer wieder Helfer findet, die Fragen von allgemeinem Interesse wie z. B.
http://mathoverflow.net/questions/7063/a-problem-of-an-infinite-number-of-balls-and-an-urn/31211#31211
oder
http://mathoverflow.net/questions/31284/why-not-stop-using-the-term-philosophical-in-mathematics
"abschließen", d. h. jeden weiteren Gedankenaustausch darüber unterdrücken, das wirft ein übles Licht auf diejenigen, die solche Zensur dulden.

426 Das Kalenderblatt 100804 Meine MathOverflow-Episode (4)

Mit meinem zweiten Beitrag in MathOverflow hatte ich erklärt, wie man am Binären Baum erkennen kann, dass das Aktual Unendliche ein sich selbst widerlegendes Konzept ist, und zwei Einwände richtiggestellt. Nach knapp sechs Stunden wurde mein Beitrag wiederum gelöscht, und ich wurde mit einer Zeitstrafe belegt:

Dear Wolfgang,
I have suspended your account for a day, on account of your reposting verbatim a post that we had previously deleted. MathOverflow is a site for "question and answers of interest to research mathematicians", and we promptly delete inappropriate material.
Sincerly NN

Das überraschte mich zwar nicht wirklich, wohl aber die "Begründung". Deswegen schrieb ich dem Moderator, dass ich meine Idee weiterhin vertreten würde, bis mir eine stringente Widerlegung zuteil würde:

Dear NN,
I am surprised. I had merely reacted to a wrong accusation {{der Leser erinnert sich an Harry Gindi, s. KB 100802}}, namely that my argument would use CH. I will repeat my argument [...] until I will get a valid answer why I am in error. Und dann folgt eine detaillierte Darstellung des Argumentes, dass nämlich der Binären Baum mit all seinen unendlichen Pfaden in abzählbar vielen Schritten konstruiert werden kann, wobei in keinem einzigen Schritt zwei oder mehr unendliche Pfade hinzutreten.

Die Antwort fühlte sich deutlich kühler an. Sie war nicht mehr an "Dear Wolfgang" sondern an "Prof. Dr. Mueckenheim" adressiert. Sachliche, aber nicht formatierte Argumente passen offenbar nicht unverarbeitet auf die Rezeptoren von Matheologen. Nach der Porenlehre des Empedokles (483 - 425) üben Partikel einen Reiz aus, wenn sie in eine bestimmte Pore passen. Bei Matheologen scheinen hingegen die nicht in eine Rezeptor-Pore passenden Partikel einen besonders starken Reiz auszuüben und eine Abwehrreaktion auszulösen.

Nachdem der Moderator sein persönliches Desinteresse an dieser Art von Mathematik kundgetan hatte "unfortunately, I'm not actually interested in the mathematics, on this occasion" fuhr er fort: "Unless you can get a consensus on meta.mathoverflow.net that we (the moderators) have acted in error, you are welcome to repeat your argument wherever you please, but not on mathoverflow."
best, NN

Das wäre nun freilich vergebliche Liebesmüh. In diesem Forum,
http://mathoverflow.net/
das sich der Demokratisierung der Mathematik verschrieben hat, können nämlich Grüppchen ihr Süppchen mit Hilfe von Voten kochen, indem sie die "Reputationskonten" ihrer Mitglieder gegenseitig hochjubeln und jede abweichende Meinung zum Schweigen bringen.

Ein solches Grüppchen hat sich um die Herren Robin Chapman, den schon vorgestellten Senior Lecturer, und Franz Lemmermeyer, seines Zeichens Mathematiklehrer an einem Mädchengymnasium, gebildet, die später noch eingreifen werden.

427   Das Kalenderblatt 100805   Meine MathOverflow-Episode (5)

Da der Moderator, der meine Antwort gelöscht hatte, nach eigenem Bekunden kein Interesse und augenscheinlich auch keine Kenntnisse im Bereich der Darstellung reeller Zahlen mit Hilfe des Binären Baums hatte, beschloss ich, zur Unterrichtung weiter Teile der MathOverflow-Community selbst einen Beitrag zum Thema Binärer Baum zu initiieren. Nach den Regeln von MathOverflow musste das in Form einer Frage geschehen. Sie lautete wie folgt:

Has this paradox been known in literature? Who was the first to state it? What is its solution?

The complete infinite binary tree contains all real numbers between 0 and 1 as infinite paths i. e. infinite sequences $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ of bits.

```
         0,
       /    \
     0        1
   /   \    /   \
  0     1  0     1
 /
0 ...
```

The set $\{a_k \mid k \text{ in } \mathbb{N}\}$ of nodes (bits) a_k of the tree is countable.

```
        a0.
       /    \
     a1      a2
```

```
    /   \    /    \
  a3   a4 a5    a6
  /
a7 ...
```

The binary tree can be constructed because it consists of all its distinct nodes which form a countable set. The binary tree can be considered the limit of the set of its initial segments B_k:

B_0 =

```
          a0.
```

B_1 =

```
         a0.
        /
     a1
```

B_2 =

```
          a0.
        /     \
     a1      a2
```

B_3 =

```
          a0.
        /     \
     a1      a2
     /
   a3
```

B_4 =

```
          a0.
        /     \
     a1      a2
     / \
  a3  a4
```

...

B_k =

```
          a0.
        /     \
     a1      a2
     / \      / \
  a3  a4 a5  a6
...
           ... a_k
```

...

The structure of the Binary Tree excludes that there are any two initial segments, B_k and B_{k+1}, such that B_{k+1}contains two complete infinite paths both of which are not contained in B_k.

Nevertheless the limit of all B_k is the complete binary tree including all (uncountably many) infinite paths. Contradiction. There cannot exist more than countably many infinite paths.

What is the solution? Do the infinite paths consist of more than their nodes? (In particular as no initial segment contains any infinite path at all.) Is the set of nodes more than countable? Is the infinite binary tree not the limit of the sequence of its initial segments?
Regards, WM
asked Jun 29 at 8:41

Diese Frage liegt mir wirklich sehr am Herzen: Welcher Schritt der obigen Überlegung ist nach mathematischen Maßstäben nicht gerechtfertigt - und warum? Gibt es mathematische Gründe dafür, dass die Resultate des aktual unendlichen Binären Baums falscher sind als die der aktual unendlichen Cantorschen Liste? Warum wird in diesem Falle den Ziffern aller endlichen Anfangsabschnitte eine Aussagekraft zugebilligt, in jenem aber nicht? Gibt es also mathematische Argumente außer dem einen immer wiederkehrenden, dass das Resultat meines Beweises dem des Cantorschen widerspricht?

428 Das Kalenderblatt 100806 Meine MathOverflow-Episode (6)

Meine Frage zum Binären Baum führte auf eine ausführliche Diskussion, aus der ich zunächst die direkten Kommentare zur Frage zitiere:

Thomas Bloom: The 'limit' of countably many things need not be countable (as this example shows), just as the 'limit' of finitely many things need be finite (for example, the natural numbers).

WM: Here we have the case of the limit of "finitely many things". The node indices are just the natural numbers. Therefore the set of nodes like the set of initial segments has cardinality $\aleph_0$.

Thomas Bloom: Sorry - I meant that each branch of the tree represents countably many real numbers, and you are taking the limit of all branches (of which there are uncountably many). {{Unter "branch" versteht Thomas Bloom offensichtlich "path" (Pfad). Nun kann man es durchaus so sehen, dass jeder Pfad *P* unendlich viele rationale Approximationen der durch *P* repräsentierten reellen Zahl enthält. Das gerade ist das Besondere an der Struktur des Binären Baums, dass man sie auf verschiedene Weisen interpretieren und dies ausnutzen kann, um damit einen logischen Widerspruch der aktualen Unendlichkeit zu zeigen. Denn es ist ebenso statthaft, all die hier angedachten Approximationen des Pfades *P* als von *P* verschiedene Pfade zu verstehen, nämlich als die mit Tails aus Nullen vervollständigten Anfangsabschnitten von *P*. Beispiel: Die Pfade 0,000..., 0,1000..., 0,11000... usw. sind rationale Approximationen des Pfades P = 0,111... Diese Pfade gehören aber alle zur Gesamtabzählung.}}

WM: I take the limit of the sequence (countable set) of all initial segments B_k. No segment B_k differs from its precurser segment B_{k-1} by more than one node. Hence B_{k-1} and B_k cannot differ by more than one infinite path. The paradox, as it appears to me, is that there are $\aleph_0$ steps, no step adds more than one infinite path to the tree, but in the limit there are uncountably many infinite paths. {{Der Stringenz dieser letzten Aussage kann wohl niemand sich entziehen. Auch Thomas Bloom schien das nicht zu wollen.}}

Inzwischen hatte Yemon Choi herausgefunden, dass ich einen Teil meiner Frage in einer Publikation schon selbst beantwortet hatte: I hope it is not untoward of me to post this link:

http://arxiv.org/find/math/1/au:+Mueckenheim_W/0/1/0/all/0/1

WM: Of course I do know that. I do not know whether there are older hints to this paradox.

Pietro Majer vermochte dem Binären Baum immerhin einen gewissen Reiz abzugewinnen, wenn auch unter matheologischem Vorbehalt: Why do you think that this should be any different than claiming that "reals are countable because they are limits of rational numbers"? It's nice however, though no longer a paradox, at least relatively to the mathematical community (etymologically: paradox = contrary to the common opinion or beliefs).

WM: Because we can apply the pigeon hole principle to the sequence (B_k). This means that there is at least one B_k that contains more than 1 infinite path (i.e. at least 2 infinite paths) that are not contained in B_{k-1}. But as only one node is added, this is impossible, by construction of the binary tree.

Die ganze hier geschilderte, recht angenehme Diskussion spielte sich innerhalb von wenigen Stunden ab und enthielt keinen ernsthaften Ansatz zur Widerlegung meines Argumentes. Alles, was an Gegenargumenten zusammenkam, stützte sich auf Analogieschlüsse, ohne auf mein Argument in irgendeiner Weise einzugehen.

Doch dann hatten die Wächter der Wahrheit die Fährte gewittert.

429 Das Kalenderblatt 100807 Meine MathOverflow-Episode (7)

Die sehr sachliche Diskussion meines in KB100805 dargestellten Argumentes wurde jäh unterbrochen durch Franz Lemmermeyer: WM is a well known crank on sci.math and de.sci.mathematik {{sci.math.research, wo auch ganz wichtige Beiträge zum Thema aktual unendlich nachzulesen sind, z. B: A Limit Question
http://groups.google.com/group/sci.math.research/browse_frm/thread/e251d1529dc6df9e?hl=de&scoring=d&
oder Set Existence
http://groups.google.com/group/sci.math.research/browse_frm/thread/dc8ac0d3f149065b?hl=de&scoring=d&
vergaß er zu erwähnen}}. He is looking for heat, not light. {{Nicht jeder Rechenlehrer kann ein Johann Jakob Balmer sein,
http://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Jakob_Balmer
aber wer das elektromagnetische Spektrum auch nur oberflächlich kennt, weiß, dass hier rein informationsaustauschmäßig kein Unterschied besteht. In Sonderheit die moderne Glasfaserkommunikation erfolgt nicht mit "light" sondern mit "heat". Die intendierte Beleidigung ist somit gar keine.}}

Auf unkontrollierte Ausbrüche unterhalb eines gewissen Niveaus antworte ich in der Regel nicht, und so tat ich auch hier. Ich dachte mir nur dies und das oben Eingefügte.

G. Rodrigues: Not to try and pick up a fight here, but a direct question to Mr. Mueckenheim: you have argued this issue literally for years over at sci.math with several smart people trying (patiently or not) to elucidate you and failing miserably, do you really think you are going to get satisfactory answers here at MO?

WM: If there are such answers, I expect to get them here. What I have received up to yesterday is of the quality recently demonstrated by Mr. Lemmermeyer. {{An einer mathematisch fundierten Erklärung, wie man im Binären Baum trotz der von mir demonstrierten Abzählbarkeit aller Konstruktionsschritte überabzählbar viel unendliche Pfade unterbringen kann, wäre mir nämlich tatsächlich gelegen. Nichts von dem, was in den vergangenen 7 Jahren von "smart people" dazu gesagt wurde, gibt darauf einen Hinweis. Neben üblen Beleidigungsversuchen kommt nur das immer wiederkehrende Argument, dass Cantors Diagonalargument die Überabzählbarkeit beweist. Deswegen wird mein mindestens nicht weniger mathematisch begründeter Gegenbeweis als "intuitiv" abqualifiziert - die Ultima Ratio der Matheologen.}}

Robin Chapman unterstützte Herrn Lemmermeyer kongenial überheblich und wie zu erwarten mit einer leeren Menge von Sachargumenten. In den bisher vorgebrachten und weiter unten noch zu schildernden Gegenargumenten vermochte er klare und pädagogisch wertvolle Antworten zu erkennen: You have received some clear and patient replies here today, Mr Mueckenheim. Please treat them as a learning opportunity.

Nach kurzer Zeit steuerte er aber doch noch ein sachliches Argument bei: I suppose the reductio ad absurdum of Mueckenheim's argument would be to apply it to the complete unary tree. Perhaps he might argue that as there is no infinite path in the linear graphs with n nodes there is no infinite path in the graph that consists of an infinte path.

Wie in Matheologenkreisen Usus, fußt dieses Argument auf der unterschiedlichen Verwendung von infinit, einmal als potentiell unendlich und dann als aktual unendlich. Darauf wies ich ihn hin.

WM: Of course that is the case. But in the unary tree it comes not clear to the surface. In the binary tree we see by the pigeon hole principle that not more than countably many paths can be distinguished by nodes. But according to you, that is not required. You have another means to identify paths? Further you oppose questioning set theory by applying set theory. That is not a scientific attitude. Science means doubting the probable. Religion means believing even the doubtful (i.e. the uncountable set of paths in the tree).

Man kann zwar mit dem Nummerierungstrick

1. {0}
2. {0, 1}
3. {0, 1, 2}
...
n. {0, 1, 2, ..., *n* - 1}
...
ω. {0, 1, ...}

eine zusätzliche Zeile in der Folge der Anfangsabschnitte der natürlichen Zahlen gewinnen, um die Folge "abzuschließen" und sich so das aktual Unendliche vorzuspiegeln. Im Binären Baum geht das nicht mehr, denn dort müsste man unendlich viele Pfade "abschließen".

430 Das Kalenderblatt 100808 Meine MathOverflow-Episode (8)

Während der in den beiden letzten Kalenderblättern KB100806 und KB100807 geschilderten Diskussion trafen fünf offiziell als Antworten deklarierte Stellungnahmen zu meiner Frage zum Binären Baum ein, die erste von Charles Matthews: I don't know whether this formulation has been noticed or named. It is no more and no less of a paradox than the idea that there are "more gaps between rational numbers than rational numbers". {{Dem stimme ich vollkommen zu. Genauer formuliert: Wenn jemand die Erkenntnis erlangt hat, dass zwischen zwei auf dem Zahlenstrahl beliebig eng benachbarten Irrationalzahlen mindestens eine rationale Zahl liegt, und trotzdem behauptet, dass zwischen diesen beiden Irrationalzahlen viel mehr irrationale als rationale Zahlen lägen, so ist das ein Paradoxon - insbesondere, wenn es sich dabei um einen Erwachsenen handelt.}} This is perhaps a hurdle of understanding {{sagen wir einmal, es ist ein Prüfstein des richtigen Glaubens}}, but the reason is the same: if you go through an infinite sequence of "gates" at which you turn left or right, a countable infinity of gates give you an uncountable number of choices. {{Charles Matthews hatte demnach zum Zeitpunkt seiner Antwort (die allerdings schon sieben Minuten nach meiner Fragestellung eintraf) noch nicht erkannt, dass der Binäre Baum nicht nur die Türen (Knoten) abzählt, sondern die Entscheidungen gleich mit, nämlich die Knoten unter den Knoten.}}

WM: Sorry, here we do not count the gates, here we count "the number of turns". Every turn, right or left, leads to a node, that we count. We count all nodes, i.e., all turns.

Charles Matthews: You count all nodes, I count all total choices that can made by an individual. Your set is countable, mine is uncountable. There is no paradox, because a formal discussion shows that we are not talking about the same sets at all. {{Das würde mich wundern. Allerdings hat sich bisher niemand der Aufgabe unterzogen, den Binären Baum zu formalisieren. Manche meinen, es ginge gar nicht. Die Aussage von Charles Matthews scheint mir daher eher auf einer Vermutung zu fußen, und zwar auf einer falschen.}}

WM: I would be interested to talk about the original version (in order to get an explanation). I take the limit of the sequence (countable set) of all initial segments B_k. No segment B_k differs from its precurser segment B_{k-1} by more than one node. Hence B_{k-1} and B_k cannot differ by more than one infinite path. The paradox, as it appears to me, is that there are $\aleph_0$ steps, no step adds more than one infinite path to the tree, but in the limit there are uncountably many infinite paths.

Charles Matthews: The notion of "limit" here is called the inverse limit.
en.wikipedia.org/wiki/Inverse_limit#Examples
unfortunately is rather technical, but it does mention that infinite strings can be constructed as an inverse limit of finite strings. Really this happens by first taking a cartesian product, and then restricting to a subset. The basic point is that an infinite cartesian product of two-element sets is uncountable. {{Um dieses bekannte Dogma kennenzulernen, hätte es meines Besuchs in MathOverflow nicht bedurft.}}

WM: When using the Cartesian product, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, this is clear. But the segments B_k belong to a countable set. There is no product used, but only a sequence. There has been another hint: The rationals are countable although they are dense in the reals. Here, however, we are confronted with a sequence that allows for application of the pigeon hole principle: If there are more infinite paths than initial segments B_k, then there must be at least one B_k that contains more than 1 infinite paths more than its precursor B_{k-1}. This is, in my opinion, a paradox. {{Es geht hier um das erweiterte Schubfachprinzip: Eine überabzählbare Menge passt nicht in abzählbar viele Schubfächer, es sei denn, dass in mindestens einem Schubfach überabzählbar viele Elemente der Menge vorhanden sind.}

Charles Matthews: You are of course entitled to such an opinion. I don't share it {{woraus eine Erklärung, wie überabzählbar viele Pfade in abzählbar vielen Schritten in den Binären Baum gelangen können oder wenigstens welcher Fehler diesen Eindruck vermittelt, nicht entnommen werden kann.}}

431 Das Kalenderblatt 100809 Meine MathOverflow-Episode (9)

Zur Erinnerung: Der vollständige Binäre Baum wird in abzählbar vielen Schritten B_k konstruiert. In keinem Schritt werden zwei oder mehr unendliche Pfade fertig. Trotzdem behauptet die Mengenlehre, dass der vollständige Binäre Baum überabzählbar viele Pfade enthielte und dass überabzählbar viel mehr als abzählbar unendlich sei.

Im Rahmen einer Diskussion um die erste Antwort (s. KB100808) bezog sich Harald Hanche-Olsen auf die von mir schon mit der Frage ausgesprochene Erkenntnis, dass überhaupt kein endlicher Anfangsabschnitt einen unendlichen Pfad enthält (übrigens ist das auch in Cantors Nummerierung der Matrix aller rationalen Zahlen so - ohne dass man diese Unvollständigkeit bezüglich der dortigen Zeilen und Spalten je bemängelt hätte): What's this about infinite paths in B_k? A finite tree cannot contain an infinite path. The entire argument falls apart because it's nonsense.

Diese Folgerung finde ich verblüffend. Weil der vollständige Binäre Baum ausschließlich aus endlichen Anfangsabschnitten besteht (mehr gibt es ja nach Abzählung aller Knoten nicht), kann er im Unendlichen nicht recht in die Breite wachsen. Mehr als höchstens ein unendlicher Pfad ist trivialerweise nicht "drin". Mit "nonsense" wäre also allenfalls die Unendlichkeitsbehauptung der Mengenlehre zu bezeichnen, nicht aber die nüchterne Feststelllung, dass jeder Index einer Folge endlich ist. Jedenfalls kann ich im Beitrag von Harald Hanche-Olsen keinen Anhaltspunkt für eine Sozietät aus überabzählbar vielen Pfaden im vollständigen Binären Baum erkennen.

WM: Of course there is no infinite path in any finite B_k. But what is your answer? Can the complete infinite binary tree not be considered the limit of the sequence (B_k)? Do the infinite paths enter the tree only after all finite B_k? My favourite answer is: There is no finished infinity. But that is not desired by many. Therefore they who like it, should find an answer.

Zu einer solchen Antwort ist es allerdings nicht mehr gekommen. Entweder wusste Harald Hanche-Olsen keine, oder der Löschtrupp war schneller als er. Doch lässt sein folgender Kommentar am ehesten darauf schließen, dass er noch gar nicht erkannt hat, wie angeschlagen sein Glaubensmittelpunkt ist. In meta.mathoverflow ergab sich nämlich noch die folgende Diskussion
http://meta.mathoverflow.net/discussion/484/physicists-can-be-wrong
(Als ich letztes Mal nachschaute, war sie noch vorhanden. Der Robin Hood des MO-Forest scheint noch keine für ihn befriedigende Antwort auf seine Frage erhalten zu haben:
Robin Chapman: can users on meta be suspended?)

Harald Hanche-Olsen also schrieb: I admire your patience and civility in dealing with WM. I am not as nice as you guys, so I will stay out of the discussion. Enough said.

Das, fand ich, war nicht genug gesagt. WM: You have recognized that none of the initial segments of the Binary Tree contains an infinite path. But you believe that the union of these segments contains uncountably many infinite paths. I think you are not only lacking niceness. Regards, WM

Darauf erwiderte zunächst Robin Chapman: I thought this was a forum for discussing the running of MO, not for mathematical questions.

Und Harald Hanche-Olsen pflichtete ihm bei: Indeed.

Man erkennt hier wieder die typische Abwehrhaltung der Matheologen: Nur keine Sachdiskussion aufkommen lassen, wenn's brenzlig wird! Und dabei war die Reaktion ganz unberechtigt, galt meine Besorgnis hier doch nur dem "running of MO" - in einer Qualität allerdings, die bei allen Teilnehmern ein Infimum an intellektuellen Fähigkeiten voraussetzt.

432 Das Kalenderblatt 100810 Meine MathOverflow-Episode (10)

Zur Erinnerung: Der vollständige Binäre Baum wird in abzählbar vielen Schritten B_k konstruiert. In keinem Schritt werden zwei oder mehr unendliche Pfade fertig. Trotzdem behauptet die Mengenlehre, dass der vollständige Binäre Baum überabzählbar viele Pfade enthielte und dass überabzählbar viel mehr als abzählbar unendlich sei.

Der zweite offiziell als Antwort auf meine Frage deklarierte Beitrag kam von Robin Chapman: There is no paradox. The set of nodes in the binary tree and the set of infinite paths in the binary tree are two different sets. There is no paradox about two different sets having different cardinalities. {{Das könnte als Argument gelten, wären die Elemente der beiden Mengen nicht eng miteinander verknüpft, sondern unabhängig voneinander. Um nur ein triviales Beispiel zu nennen: Wenn mindestens ein Pfad im Binären Baum existiert, so kann die Menge der Knoten nicht leer sein.}} The nodes in the binary tree can be labelled by the finite sequences of elements of the set {0,1}. The infinite paths can be labelled by the infinite sequences of elements of {0,1}, that is the set S of maps from $\mathbb{N}$ to {0,1}. The set S can be identified with the power set of $\mathbb{N}$ which is uncountable, while the set of finite sequences of elements of {0,1} is countable. {{Hier wird also abermals gedankenlos das bekannteste Resultat der Mengenlehre aufgesagt. Um das zu erfahren, hätte ich MO nicht bemüht. Dann folgt noch ein pädagogischer Hinweis:}} MathOverflow is a site dediciated to the proposal and solution of research-level mathematics questions, as the OP will realise if he consults the FAQ. This question is at the level of beginning undergraduate studies, and so I have voted to close. If the OP wishes to clear up his misunderstandings regarding elementary set theory, I suggest that he study an elementary textbook on the topic, for instance Halmos's superb Naive Set Theory. Section 23 of this text explains Cantor's theorem to the effect that a set and its power set have different cardinality.

WM: The paths of the set of paths consist of nodes. This observation leads to the paradox. The Binary Tree is completely different from Cantor's theorem. And you have done nothing to explain it. It is typical for set theorists to block any discussion that could show problems in set theory. I am surprised, however, that it lasted so long.

Robin Chapman: If one likes one can identify a path with the set of nodes along it and regard a path as a set of nodes.

WM: Could you propose another method of identifying paths? {{Offenbar konnte er nicht, denn anstatt einer Antwort kam der Löschtrupp, neben anderen in seiner Person. Doch ergriffen vorher noch drei Leser die Gelegenheit, meine Frage zu beantworten.}}

433 Das Kalenderblatt 100811 Meine MathOverflow-Episode (11)

Zur Erinnerung: Der vollständige Binäre Baum wird in abzählbar vielen Schritten B_k konstruiert. In keinem Schritt werden zwei oder mehr unendliche Pfade fertig. Trotzdem behauptet die Mengenlehre, dass der vollständige Binäre Baum überabzählbar viele Pfade enthielte und dass überabzählbar viel mehr als abzählbar unendlich sei.

Victor Protsak steuerte die dritte Antwort bei: I agree with Charles and others that it's a case of a hurdle of understanding. Perhaps, the following model will help: each node (a_1,a_2,...,a_n) of the binary tree encodes a certain dyadic rational number [...] whereas each infinite path (a_1,a_2,...,a_n,...) encodes a real number [...] {{Diese Beobachtung ist zwar richtig, doch führt sie nicht zur Beantwortung meiner Frage: Do the infinite paths consist of more than their nodes?}}. As for the question who first noticed it, I'd leave it to the judgment of more qualified people than I, but this looks like a result from the end of the 19th century at the latest; certainly, Cantor set and Hilbert-Peano curve involved similar considerations. For an even earlier related construction, see Stern–Brocot tree. {{Immerhin sieht mit Victor Protsak hier ein weiterer Leser eine Verständnishürde. Doch gipfelt auch seine "Erklärung" im Hinweis auf den Unterschied zwischen rationalen und reellen Zahlen und damit implizit auf den als bekannt vorausgesetzten Cantorschen Satz. Nachdem ich mich höflich bedankt hatte, wies ich auf das eigentliche Problem hin:}}

WM: Thank you for the hint. Nevertheless, in my opinion, it does not explain the problem: Every intial segment B_k can contain at most one more path than its precurser segment B_{k-1}. This yields (not a bijection - that is excluded for the reals but) an estimation: The result is either that there are less reals than naturals or that most reals come into the tree after all enumerated initial segments.

Zu einer Erwiderung kam es leider nicht mehr. Nach drei effektiv gleichlautenden und wohl jeden interessierten Leser enttäuschenden Antworten folgte nun aber doch noch eine Überraschung - unerwartetet, wie alle Überraschungen.

434 Das Kalenderblatt 100812 Meine MathOverflow-Episode (12)

Zur Erinnerung: Der vollständige Binäre Baum wird in abzählbar vielen Schritten B_k konstruiert. In keinem Schritt werden zwei oder mehr unendliche Pfade fertig. Trotzdem behauptet die Mengenlehre, dass der vollständige Binäre Baum überabzählbar viele Pfade enthielte und dass überabzählbar viel mehr als abzählbar unendlich sei.

Die vierte Antwort kam von Phil Ellison, und sie enthielt den ersten wirklichen Erklärungsversuch: This appears to just be a confusion between the infinite perfect binary tree and paths through that tree. The infinite binary tree itself consists of all finite sequences of 0s and 1s. Paths through the tree are infinite sequences of 0s and 1s. These do not lie in the tree. If you take the union of all of your B_k's you do indeed get the entire tree. And this is countable. However, the paths through the tree do not lie in this set. {{Es gibt ein Leben nach dem Leben - placebo Domino in regione vivorum.}}

WM: Also the paths that "go through" the tree, consist of nodes only and, therefore, must be constructed with the complete set of nodes. {{Und falls die Pfade nicht vollständig durch ihre Knoten bestimmt wären: Weshalb sollte dann die Cantorsche Diagonalzahl eine Ausnahme machen? Denn sie ist schließlich auch kein Traum, sie ist ja nur ein Pfad, sie quert nicht den Binären Baum, doch quert sie ein Quadrat.}} This yields a countable set of paths. No argument that has been shown today can veil this fact.

Nun warf Robin Chapman sein Standard-Repertoire wieder an: Mr Mueckenheim, that is not true. I outlined a proof that the set of paths through the binary tree is in one-to-one correspondence with the power set of ℕ. {{Ja. Das ist richtig. Gerade deshalb besteht hier der Widerspruch, dass aus X Verzweigungen nur X Zweige sprießen können, was auch immer "im Unendlichen" passieren mag.}} I also provided a reference to the literature where it is proved that this set is uncountable. {{Ob er das Problem wirklich nicht erkannt hat? Ich halte das für möglich, und der letzte Satz legt es nahe. Wenn man dieses kognitive Niveau extrapoliert, dann wird noch manch andere Ungereimtheit der zeitgenössischen Matheologie verständlich.}} Please take this opportunity to learn some elementary mathematics, Mr Mueckenheim.

WM: These issues are not new to me. You can learn them from my book "Die Mathematik des Unendlichen" if you are able to understand German. The point is that my argument contradicts or at least seems to contradict Cantor's theorem. The pigeon-hole-principle limits the number of paths in the tree. Therefore I looked for an explanation, not for an orthodox credo of belief in set theory.

Robin Chapman: It would be more profitable for your intellectual growth to learn some elementary mathematics than to fill books with the sort of inane confusions {{Kann er deutsche Texte verstehen? Oder redet er auch hier ohne Kenntnis des Themas?}} you have been spamming this site with, Mr Mueckenheim. Again explanations have been provided to you in profusion; please remove the scales from your eyes.

Jeder Leser, der bis zu diesem Punkt gefolgt ist, wird bestätigen, dass bisher keinerlei Erklärung stattgefunden hat. Nun bleibt nur noch die Antwort von oktan - angesichts der christlichen Unendlichkeitssymbolik ein verheißungsvolles Pseudonym.

435 Das Kalenderblatt 100813 Meine MathOverflow-Episode (13)

Zur Erinnerung: Der vollständige Binäre Baum wird in abzählbar vielen Schritten B_k konstruiert. In keinem Schritt werden zwei oder mehr unendliche Pfade fertig. Trotzdem behauptet die Mengenlehre, dass der vollständige Binäre Baum überabzählbar viele Pfade enthielte und dass überabzählbar viel mehr als abzählbar unendlich sei.

Die fünfte und letzte Antwort kam von oktan: You simply do not count all the paths of B_∞ by just adding the paths of the B_k's (this cannot work as each path in B_k has uncountably many extensions lying in B_∞). {{B_∞ ist aber die Vereinigung, und der Grenzwert aller B_k. B_∞ enthält nichts, was nicht in mindestens einem B_k enthalten wäre. Es sei denn die Pfade würden über den Baum hinausragen, so wie man die Füße über den Rand eines zu kurzen Bettes hinausstreckt. In der Matheologie gilt ja auch der Satz, dass der Grenzwert ℕ in der Folge aller Anfangsabschnitte nicht enthalten ist und trotzdem kein n aus ℕ in den Anfangsabschnitten fehlt. Dieser "Satz" wird gewöhnlich mit Quantorenmagie begründet, die natürlich nur im potentiell Unendlichen greifen könnte, also in der Mengenlehre völlig fehl am Platze ist. Doch selbst dieses Phänomen könnte hier nicht helfen. Denn im Binären Baum müsste jede Mengenfolge nicht nur einen, sondern überabzählbar viele Grenzwerte besitzen, so dass die Faustregel der klassischen Mathematik nicht mehr gilt: Jede konvergente Folge besitzt mehr Glieder als Grenzwerte.}} Consider this result which is a consequence of König's theorem: For each ordinal a, if cf(β) denotes as usual the cofinality of β, and α_γ denotes the γ-th cardinal, then cf($2^{\aleph_\alpha}$) > $\aleph_\alpha$. {{Ja, dieses Theorem gibt es, und die simpelste Anwendung ist selbst vielen

Laien bekannt, nämlich:}} In your case $\alpha = 0$, thus $cf(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$ hence it is impossible to get all the paths of B_∞ in ω-many steps. {{Eben darum habe ich ein Paradoxon zur Debatte gestellt.}}

WM: Thank you for your comment. Would you say then that one can construct the complete binary tree with respect to all its nodes whereas there remain unconstructed parts with respect to the infinite paths? But what is it that remains after all nodes have been added? {{Und vor allen Dingen: Weshalb sollte es der Diagonalzahl in Cantors Liste anders ergehen? Wenn im Binären Baum alle Knoten nicht ausreichen, um einen Pfad zu definieren, weshalb sollten alle Ziffern der Diagonalzahl ausreichen, um die Diagonalzahl zu definieren? Aber solche Überlegungen überlegt man nicht Matheologenkreisen! Das ist so anstößig wie die Erwähnung eines Unterkörpers im Viktorianischen Zeitalter - selbst eines mathematischen.}}

oktan hatte indessen keine Gelegenheit mehr, seine Reflexionen zum Thema zu äußern.

436 Das Kalenderblatt 100814 Meine MathOverflow-Episode (14)

Der am 29. Juni um 8:41 Uhr von mir vorgestellten Frage zum Binären Baum war nur eine kurze Lebensdauer vergönnt. Sie wurde schon am selben Tag um 11:14 Uhr "closed as not a real question by Joel David Hamkins, Robin Chapman, Franz Lemmermeyer, Ben Webster".

An dieser Stelle kam mir zufällig eine Bemerkung von V.I. Arnold in den Sinn: "I.G. Petrovskii [...] taught me in 1966: genuine mathematicians do not gang up, but the weak need gangs in order to survive. They can unite on various grounds (it could be super-abstractness, anti-Semitism or 'applied and industrial' problems), but the essence is always a solution of the social problem - survival in conditions of more literate surroundings." [V.I. Arnold: "On teaching mathematics" (1997)]

Die Gedankenstandardisierungsposten behaupten, ich sei nicht wirklich daran interessiert, zu erfahren, in welchem Punkt mein Argument fehlgeht. Doch, ich bin sehr daran interessiert - schon seit Jahren.

Wie sich aber gezeigt hat, konnte auch in diesem Ambiente keine Antwort gefunden werden - jedenfalls nicht in dem kurzen Zeitfenster. Meine Hoffnung, in MathOverflow von berufener Seite aufgeklärt zu werden, warum meine Konstruktion zu einem Paradoxon führt, bzw. welche meiner Prämissen oder Folgerungen warum unzulässig sei, hat getrogen. Die meisten "Gegenargumente" bestanden aus der Rekapitulation des wohl bekanntesten Ergebnisses der Mengenlehre, um dessen Prüfung es hier ja gerade geht. - Der Hinweis auf Pfade, die nicht im Binären Baum, sondern durch ihn hindurch verlaufen, kann wohl nicht als ernstzunehmendes Argument gelten - und wenn doch, dann unterliegt auch Cantors Diagonalargument diesem Verdikt, und die Zeilen von Cantors Liste verlaufen nicht in der Liste, sondern "durch sie hindurch", so dass eine Aussage über alle Ziffern noch keine Aussage über die Zahl ist. (Man beachte die gern übersehene Tatsache: Cantors Diagonalverfahren betrifft ausschließlich endliche Anfangsabschnitte der untersuchten Folgen.)

437 Das Kalenderblatt 100815 Meine MathOverflow-Episode (15)

Der einzige Gewinn, den ich aus der Diskussion meines Argumentes zum Binären Baum zog, besteht im Nachweis, dass mein Argument offensichtlich auch von Matheologen verstanden werden kann. Dass es normalen Menschen verständlich ist, unterlag ohnehin niemals einem

Zweifel. Ich konnte diese Tatsache an hunderten positiver Rückmeldungen aus unterschiedlichsten Intelligenzniveaus, Berufsgruppen (einschließlich Mathematikern) und sozialen Schichten feststellen. Sollte also nochmals jemand wie Pete L. Clark in
http://meta.mathoverflow.net/discussion/484/physicists-can-be-wrong
sich darüber beklagen, dass mein Argument unverständlich sei, so kann ich ihn auf die stattgehabte Diskussion verweisen. Das Problem liegt dann offensichtlich in den tatsächlichen oder vorgeschützten Beschränkungen seiner Verständnismöglichkeiten, nicht in einer Unklarheit meiner Darstellung.

Pete L. Clark: Your argument about the infinite binary tree is not written clearly enough to be easily refuted. The burden of writing clearly enough for others to understand you must lie on your side, otherwise discourse is impossible. I don't understand at all what the contradiction between the set of nodes being countably infinite and the set of paths being uncountably infinite is supposed to be. If you want to try to be understood, you could try out your argument on the following simpler case: consider the infinite graph on the integers where for all n, n is adjacent precisely to n-1 and to n+1. There are countably many nodes on this graph but there are uncountably many random walks: they again correspond to infinite sequences from a two-element set. This is disturbing to you because...? {{because you seem to be incapable of grasping that the Binary Tree contains just all these "random walks". Das sollte ein Mathematiker erkennen können. In diesem Falle ist das Unverständnis aber ohnehin leicht verständlich, denn wer den Unterschied zwischen aktual und potentiell unendlich nicht kennt, kann die Grundlagen der Mengenlehre nicht mit Erfolg untersuchen:}}

Pete L. Clark: Your arxiv papers contain no arguments which are written in the language of modern set theory, i.e., formalized via ideas and techniques from mathematical logic. Rather, you confine yourself to a sort of literary analysis of very old papers, mostly from the 19th or early 20th centuries. You use terms like completed versus potential infinity, which are not part of the modern vernacular. {{Aus gutem Grund gebrauche ich sie. Und aus ebenso gutem Grund werden sie in der matheologischen Ausbildung vermieden - obwohl der große Prophet der Unendlichkeit mehrfach dringend auf die Notwendigkeit der genauen Unterscheidung hingewiesen hat. Man verleugnet sein Wort! Doch dieses Schicksal teilt er mit vielen anderen Propheten.}}

438 Das Kalenderblatt 100816 Meine MathOverflow-Episode (16)

Die Beantwortung meiner Frage war von der Zensur unterbunden worden. Eine dem durchschnittlichen Intellekt verständliche Erklärung für die Überabzählbarkeit aller Pfade des Binären Baums ergab sich nicht. Indessen spann sich die Diskussion mit Hilfe von "comments" noch munter fort, bis dies einem wenig moderaten Moderator zu viel wurde und er, sei es auf eigene Initiative oder nach Denunziation durch einen Hüter der Wahrheit, jegliche weitere Meinungsäußerung unterband: "locked by Scott Morrison Jun 29 at 17:10". Er blockierte jede der sechs Diskussionen (zur Frage und zu den fünf Antworten) - und das dauerte von 17:10 bis 17:12 Uhr. Ein Scharfrichter, der sich beim Abwürgen eines Delinquenten so unbeholfen angestellt hätte, wäre wohl sogar von der spanischen Inquisition entlassen worden.

Nun konnte der interessierte Mathematiker sich nur noch passiv über die stattgehabte Diskussion informieren. Das hatten nach fünf Tagen immerhin weit über 400 Teilnehmer getan. Sie konnten meinen Text, die erfolgten Antworten und die abgegebenen Kommentare unzensiert lesen, konnten in Email-Kontakt mit mir treten, konnten erkennen, dass mehrere Teilnehmer meine Frage als nützlich oder interessant positiv bewertet hatten, so dass mein Reputationskonto zu schwellen begann. (Mit 10000 Punkten, also 1000 positiven Bewertungen erhält man Moderatorrechte. Bei linearer Extrapolation der Wachstumsgeschwindigkeit meines Reputationskontos wäre das nach 500 Stunden eingetreten, bei durchgehender Betätigung also in kaum 21 Tagen.) Das musste jedem Gedächtnisstörungsapostel ein Dorn im Auge sein. Meine Frage wurde nach ungefähr zwei Wochen durch vollständige Löschung aller Texte ausrrrradiert. Der mathematische Überfluss war zum Abfluss geworden. Die von mir erworbenen Fleißpunkte kamen damit in Fortfall. Mein Wohlbefinden wurde dadurch nicht spürbar beeinträchtigt. Doch nach dieser Gedankenstopapokalypse bilden nun obige Aufzeichnungen den einzigen Hinweis darauf, dass diese Frage jemals in der Welt des mathematischen Überlaufs mit unterlief.

So wie die Alten die Namen von missliebigen noch Älteren durch Außmeißeln unkenntlich machten, so wie man später die Bücher nicht systemkonformer Schriftsteller verbrannte (und in vielen Fällen diese gleich mit), so löscht man im Internetzeitalter die Beiträge von Häretikern rückstandslos. Doch die Idee bleibt erhalten - jedenfalls, solange jemand sie kennt. Und die Zahl derer ist nun wieder etwas gewachsen.

439 Das Kalenderblatt 100817 Meine MathOverflow-Episode (17)

Obwohl einige Teilnehmer von MathOverflow meine Bemerkungen zum Binären Baum positiv bewertet hatten, wurde das Thema vollständig paralysiert; daneben erhielt ich eine verlängerte Zeitstrafe, nun ganz ohne Anrede:

As you appear to have explicitly ignored our instructions on your use of MathOverflow, I am continuing the suspension process. You are now suspended for 2 days.
sincerely,
NN

Dann kam aber doch noch eine personalisierte Email:

Dear Prof. Dr. Mueckenheim,
I have locked your (already closed) question, and all the answers to it, preventing you from leaving any further comments. As I have said before, this is inappropriate material for MathOverflow, and we have asked you to desist from bringing it here. Please respect your 2 day suspension, and if you decide to return after that, please follow our guidelines, and read in particular http://mathoverflow.net/faq and http://mathoverflow.net/howtoask. I would strongly encourage you to stay away from your favorite subject (anything mentioning infinity, say), as your previous behavior regarding that, here, on sci.math and on the arxiv, suggests that you will very promptly be suspended again. As I mentioned before, each successive suspension will be for double the amount of time, so at our end we can easily afford to be patient.
sincerely,
NN

Darauf antwortete ich höflich, aber bestimmt:
Dear NN
did you notice the ad hominem attacks by Mr. Lemmermeyer and Mr. Chapman? Have they been suspended for that sake? Or do you prefer to punish the victims?
> Please respect your 2 day suspension,
Although I have many IDs available, I will do so, because I understand that there must be rules. But that may change if you continue to act in that biased manner you did.
> I would strongly encourage you to stay away from
> your favorite subject (anything mentioning infinity, say),

And I would strongly encourage you to stay away from censorship. I desire to have the topic of my research chosen by myself. My last question has been interesting to the community, as it has received some positive votes. Only the gang around Mr. Chapman has acted in their well known intolerant manner and voted it down.
> As I mentioned before, each successive suspension
> will be for double the amount of time,
By geometric progression you will nevertheless stay in the finite domain - that is relieving to know!
> so at our end we can easily afford to be patient.
As I mentioned earlier, I have enough IDs so that you might have much to do. But don't be afraid, even if you intend to install a new version of KGB in USA, you may live undisturbed. I intend only to make my view popular among the community of MO. This has been reached already to a good deal.
Yours sincerely,
Prof. Dr. W. Mueckenheim

{{In der Tat habe ich anschließend keine Email mehr und nur noch eine Zeitstrafe erhalten, die ich aber nicht mehr beachtete. --- Zwar sind soziale Gemeinschaften nicht ohne Regeln möglich, doch wenn solche Gemeinschaften unter Missachtung von Minderheitenrechten degenieren oder von Minderheiten usurpiert werden, dann ist Ruhe nicht mehr die erste Bürgerpflicht. Die Moderatoren bemerkten mehr oder weniger schnell, dass ich nach Belieben die IDs wechseln kann, um meine Beiträge zumindest für eine kurze Lebensdauer nach Gefallen zu platzieren. So sehr sich hier die Parallele zum spätstalinistischen System aufdrängt und nach den Drohgebärden der Moderatoren wohl auch aufdrängen soll, sind sie auch in ihren technischen Möglichkeiten eher beschränkt.}}

440 Das Kalenderblatt 100818 Meine MathOverflow-Episode (18)

Nachdem die Konstruktion des *vollständigen* Binären Baums mit Hilfe einer Folge diskutiert worden war, hielt ich es für zweckmäßig und überzeugend, die Konstruktion des *vollständigen* Binären Baums mit unendlichen Pfaden gleich anzuschließen. Aus Erfahrung weiß ich, dass intelligente Menschen diesen Beweis leicht verstehen können. Da ich mit anderen Beiträgen (die im Rahmen dieser systematischen Zusammenfassung erst an späterer Stelle vorgestellt werden), abermals den Unwillen der Moderatoren erregt hatte, musste ich den Beitrag unter Pseudonym verfassen. Hippasos schien mir dafür geeignet:
http://de.wikipedia.org/wiki/Hippasos_von_Metapont
Ich fragte: What can we learn from the new game CTBT that I devised for my students? {{Die Frage hatte ich bewusst in einer für jeden Kryptologen interesse-erregenden Weise formuliert, um die Aufmerksamkeit von vielen Teilnehmern möglichst schnell auf sie zu lenken, denn mir war klar, dass ihr in diesem Gehirnstagnationsportal keine lange Lebensdauer beschieden sein würde.}}

In order to play the game you need a white board or a white wall or a white table (even a large piece of paper will do) and a black felt-tip (in case of paper you can use a pencil). The game is played by two persons, named Alice and Bob, of course. Alice paints a set of big black points (real points, not Euclidean points) on the white surface. (If the surface belongs to the wall of a house, be sure to obtain permission from the owner!) Bob pays one cent and is allowed to draw a big black continuous line from one point, called center- or root-point, over the surface. The line need not be straight, but the felt-tip or pencil must always increase its distance from the root-point. If Bob hits another one of the points, he receives one cent from Alice. If he hits n other points, he receives n cents from her. Afterwards Bob can pay one cent again and repeat his action in order to strike further points. For every point that he hits for the first time Bob receives one cent. The game is continued until either Bob runs out of money or all points have been stroken. If Bob can hit all points without going bancrupt, he has won. Otherwise Alice wins. {{Ganz knapp und prägnant formuliert: Von einem Strich trennen sich nicht mehr Striche, als sich von ihm trennen. Das ist eine Tautologie. Wer behauptet, von einem Strich trennen sich mehr Striche (Pfade), als sich (in Knoten) von ihm trennen, missachtet simpelste Logik. Läge kein Massenphänomen vor, würde niemand solche Aussagen beachten.}}

My question is: What can we learn from that game when applying it to a structure like the infinite binary tree? (That's where the name of the game comes from: "Conquer The Binary Tree".) [Hint: Clever students usually answer this question without trouble within 10 seconds.] Here is an animation of the game:
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/GU/GU12c.PPT#365,33,Folie 33
Regards, WM {{Link und Unterschrift waren keine Versehen, denn es ging mir ja nur darum, das Gedankenstandardisierungspotential für eine Weile zu neutralisieren. An die aktual unendlich fortdauernde Existenz so anstößigen Materials war selbstverständlich nicht zu denken.}}

Meine Rechnung ging auf, denn während ihrer Präsenz wurde die Frage über 20 Mal gelesen. Drei Reaktionen erfolgten: Zwei MO-Teilnehmer zeigten sich verblüfft bis überzeugt (hatten diese Seite der Mathematik jedenfalls noch nicht gekannt), einer missbilligte hingegen, dass ich eine Frage stellte, auf die ich die Antwort augenscheinlich schon kannte. Doch derartige Praktiken werden seit den Zeiten des Isokrates angewandt.

441 Das Kalenderblatt 100819 Meine MathOverflow-Episode (19)

Die folgende Frage von Alekk täuscht eine Superiorität der Mathematiker gegenüber den Physikern vor, die in Wirklichkeit nicht besteht:

Examples where physical heuristics led to incorrect answers?

I have always been impressed by the number of results conjectured by physicist, based on mathematically non-rigorous reasoning, then (much) later proved correct by mathematicians. [...] I would be interested in knowing examples of results conjectured by physicists and later proved wrong by mathematicians.

Diese Unausgewogenheit habe ich korrigiert:

Why do you ask for wrong physicists only? Being wrong happens to mathematicians as well. In 1833, the year of his dead, Adrien Marie Legendre presented an overwiev of proofs of the parallel axiom to the French Académie des Sciences. It included six rigorous proofs, three of which using infinite angular areas. (Here "rigorous" is to be understood in the meaning of his times as present mathematicians use "rigorous" in the meaning of our times. But obviously there can never be absolute rigour, neither then nor today.) {{Allein diese Feststellung muss natürlich jeden von der Unfehlbarkeit des gegenwärtigen Instrumentariums überzeugten Matheologen verärgern.}}

Or take the first proof of the Cantor-Bernstein theorem bei E. Schroeder in 1896. The proof was wrong, as Schroeder admitted in a letter to A. Korselt (who had improved the proof). Korselt gives a copy of Schroeder's reply in his paper [A. Korselt: "Über einen Beweis des Äquivalenzsatzes", Math. Ann. 70 (1911) 294.] Nevertheless, Korselt's corrected version was not accepted in 1902 by the Annalen. Only 9 years later, he could publish his paper. But that was not widely noticed, so the incorrect proof survived for a long time.

Cantor wrote to Hilbert on June 28, 1899 that E. Schroeder in 1896 (and Cantor's student F. Bernstein about Easter 1897) had proved the theorem. So Cantor never noticed Schroeder's error. A. Fraenkel mentioned in 1923 (!) that Schroeder's proof was wrong. [A. Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre", Springer (1923) p. 58] E. Zermelo considered Schroeder's proof correct even in 1932. Zermelo remarks in Cantor's collected works as an editor's note: "... wurde erst im Jahre 1896 von E. Schroeder und 1897 von F. Bernstein bewiesen und seitdem gilt dieser 'Aequivalenzsatz' als einer der wichtigsten Saetze der gesamten Mengenlehre." [E. Zermelo: "Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer (1932) p. 209]

This shows that wrong things can survive in mathematics for about 35 years. Or even longer? And should that be different now?

Last but not least take take Cantor. He devised transfinite set theory, according to his own words, in order to apply it to physics, chemistry, minearlogy, biology, anthropology, medicine and even social sciences. [Letter from Cantor to Hilbert Sept. 20, 1912] Physicists and other scientists have shown that he has been wrong in all respects concerning non-mathematical sciences.

And finally we should remember the late V. I. Arnold: Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap. V.I. Arnold: "On teaching mathematics" (1997). Translated by A.V. Goryunov
http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html

442 Das Kalenderblatt 100820 Meine MathOverflow-Episode (20)

Meine Erwiderung auf die Frage "Examples where physical heuristics led to incorrect answers?" stieß drei Lesern so übel auf, dass sie negative Voten abgaben, obwohl sie dafür mühsam erworbene Fleißpunkte opfern mussten. Sie wurde nach wenigen Stunden (genauer lässt sich das leider nicht mehr ermitteln) von Moderator Scott Carnahan gelöscht. Doch als ich auf den Undelete-Knopf drückte, wurde ich gefragt, ob ich meine Antwort wieder herstellen wollte. Ich wollte, und so erschien sie wieder und währte noch eine Weile sichtbarlich fort, bis zur erneuten und diesmal irreversiblen Löschung.

Ich beschwerte mich in:
http://meta.mathoverflow.net/discussion/484/physicists-can-be-wrong
It seems to me that mathematicians do not like to be reminded that some of their guild have been wrong. My recent answer, mentioning some of those cases, was promptly deleted. I am new in MO. Is that kind of behaviour customary here?

Darauf antwortete neben anderen der Löschmeister Scott Carnahan: You have just made a rather broad claim about mathematicians in your comment, and it doesn't seem to be backed by much in the way of evidence. If you look around MathOverflow, you will find a lot of mistakes made by active mathematicians (myself included). The wording of your first sentence suggests a disconnect with the reality of the mathematical community. I deleted your answer because its relation to the question is quite tenuous, and because it was flagged as offensive by another user. You never mentioned anything involving physical heuristics in any of your examples, and you wrote the answer in an inflammatory {{aufrührerisch, aufwieglerisch}} tone. My guess is that you were voted down because you were lowering the signal-to-noise ratio, not because you were challenging the orthodoxy. The answer reappeared after deletion because I made the mistake of leaving it unlocked when I deleted it. This is due to my own unfamiliarity with the moderator interface.

WM: Agreed. So I will give another answer. Now concerning physics. {{Doch diese Antwort veranlasste sogar fünf Leser, ihre Fleißpunkte für negative Voten zu opfern.}}

443 Das Kalenderblatt 100821 Meine MathOverflow-Episode (21)

Auf die Frage "Examples where physical heuristics led to incorrect answers?" hatte ich mit Beispielen auf Fehler von Mathematikern hingewiesen, was wegen Verfehlung des Themas gelöscht wurde. Deswegen antwortete ich im zweiten Anlauf mit einem, wie mir schien, passenden Beispiel: Georg Cantor als Physiker.

Georg Cantor, the founder of set theory, also gave lessons in philosophy and in theoretical physics. He devised his set theory in particular to get a better explanation of physical phenomena. Therefore he can be considered as a physicist, at least in part.

He stated that "in the universe and on earth and, according to my firm conviction, in every non vanishing volume of space there are an actually infinite number of created creatures." [Letter to Cardinal Franzelin of Jan. 22, 1886] Cantor believed that the material point-like atoms were a countable set and the ether atoms were an uncountable set (though he did not believe in the existence of atoms for chemical purposes). Both sets should be dense (in sich dicht) and geometrically homogeneous. [Letter to Mittag-Leffler, Nov. 16, 1884]

These ideas have later been proved incorrect. (By other physicists. Sorry, again not fully met the topic.) Die Frage war ja eigentlich nach Physikern, die von Mathematikern korrigiert wurden. Nunja, vielleicht hätte ich meine Korrekturen von Cantors mathematischen Ideen, die aus seinen falschen physikalischen Vorstellungen erwuchsen, thematisieren sollen. So jedenfalls war das Thema nicht ganz getroffen, was ich ja auch betroffen festgestellt hatte.

Trotzdem kommentierte der (mir sonst wohlgesonnene) sci.math.research-Moderator Gerald Edgar erbost: "Sorry, again not fully met the topic. ??? completely off the topic, -1." Die letzte Bemerkung sollte andeuten, dass er zu den fünf Rüfflern gehörte, die meine Antwort mit -1 (nicht zu verwechseln mit 1-) bewertet hatten.

Daraufhin erging es meiner Antwort wie jener weißen Wolke: Und als ich aufsah, war sie nimmer da. Obwohl der Binäre Baum abgehakt war, kreisten meine Gedanken an jenem Tage aus irgendeinem Grund weiter um Wörter mit B: Berthold Brecht, Bier aus Bayern (dessen Zufluss er sich bei seiner Übersiedlung in den A&B-Staat vertraglich ausbedungen hatte) und vor allem: Blockwartmentalität. Aber all das ist nicht mein Thema, also beließ ich's dabei - obwohl mir sicher noch viel mehr Fehler von Mathematikern und insbesondere physikalische Schnitzer von Cantor eingefallen wären.

Ich bemerkte lediglich: Now I am sure that some mathematicians do not like to be reminded that some of their guild have been wrong. The physical misbeliefs of Cantor were deleted. Is there any reason to extinguish historical facts that fit the question?
http://meta.mathoverflow.net/discussion/484/physicists-can-be-wrong
Dann hatte ich nur noch zwei metamatische Kommentare zu kommentieren.

Der erste zu kommentierende Kommentar stammt von Pete L. Clark: The question is about physical reasoning leading to mathematical mistakes. Cantor's physical opinions are not relevant to this: what was the mathematical mistake?

WM: Transfinite set theory. The greatest error in intellectual history of mankind (may I say so in this hidden place? or will it cost me a further suspension?) {{Bezüglich des angeblich von Cantor Entdeckten ist "greatest" sicher gerechtfertigt, denn es kann nicht übertroffen werden.}}

Pete L. Clark: Let's not be disingenuous: you are notorious on the internet for your writings about set theory and especially Cantor's uncountability arguments. But Cantor's work on set theory has been explored and vetted with extreme care by mathematicians for more than a hundred years.

WM: The "care" you talk about is not an argument. Compare Schroeder's proof of the equivalence theroem which stood up for 30 years. And compare the handling of counter-arguments here and elsewhere.

Pete L. Clark: Nowadays our attitude to allegations of flaws in Cantor's work is similar to that of many biologists when presented with attacks to evolution from "creation scientists" {{Das ist nun eine höchst amüsante Behauptung. Die Matheologen glauben an das nirgendwo in der Wissenschaft beheimatete vollendete Unendliche. Im geistigen Gesamtbilde unseres Jahrhunderts wirkt das aktual Unendliche geradezu anachronistisch, stellt Paul Lorenzen fest - mit einem Höchstmaß von Höflichkeit. Zu bemerken ist ferner, dass Georg Cantor ein fanatischer Gegener der Evolutionslehre war und mehrfach auf höchst intrigante Weise, also ganz im Stile von ausgewählten heutigen Matheologen, versucht hat, Evolutionisten von mathematischen Lehrstühlen fernzuhalten - glücklicherweise stets ohne Erfolg. Am Anfang seiner Unendlichkeitsbehauptung stehen Augustinus und Gott. Eine gröbere Verdrehung der Positionen von Matheologie und Wissenschaft, als sie Pete L. Clark hier versucht, ist nicht vorstellbar.}} it is not a debate we are eager to have, and we feel that we are at least entitled to restrict ourselves to discussants who show an understanding and technical mastery of the relevant material (which is, for mathematics, not that technical: for instance, many bright high school students know it well). {{In der Tat. Wenn jemand das Diagonalargument versteht, so muss sein IQ wohl zu den besten 95 % gehören. Die brightesten Studenten verstehen sogar den Binären Baum und seine Konsequenzen, was dem verehrten Korrespondenten bei seiner letzten Einlassung (s. KB 100815) offensichtlich noch abging.}} There's certainly room for philosophical doubts about uncountable (or even countably infinite) sets, but this is not the appropriate forum for that. {{Deswegen habe ich bisher ja auch nicht philosophisch, sondern mathematisch argumentiert. Aber das kann nur verstehen, wer es verstehen kann.}} I am sorry if you feel that your views are being excluded by some sort of clubbish or defensive attitude on the part of professional mathematicians. {{Nein, es gibt viele professionelle Mathematiker, die verstehen, dass aus X Verzweigungen nicht mehr als X Zweige sprießen können. Das ist eigentlich gar nicht schwer zu verstehen.}} I do think it is fair to say that mathematicians bring a particular point of view to these issues of infinity. {{Kommunisten sind selten Demokraten. Die Behauptung, nur Kommunisten seien Demokraten, ist eine grobe Unwahrheit. Aber Kommunisten behaupten es trotzdem.}} From our point of view, your criticisms are simply not valid. Other than different people willing to explain to you why your ideas and arguments are incorrect, I'm not sure what is to be gained by bringing the discussion here. {{Nun, es hätte ja sein können, dass jemand die Konsequenzen des Binären Baums versteht und in einer gemeinverständlichen Sprache hier öffentlich erläutern kann, weshalb kein Paradoxon besteht.}}

WM: The interesting thing is that my first argument posted here, the Binary Tree, has been "refuted" by many, but with always different arguments that easily can be recognized as invalid. Same is with the list of all words. {{Hier geht es um einen später vorzustellenden Beitrag.}} There is no refusal but only dismission. I am interested to see how long it will be readable here. {{Nun, diese Frage wurde bald geklärt. Zur Beantwortung muss man das Ende kennen. Das ist übrigens genau so wie bei Ziffernfolgen!}}

445 Das Kalenderblatt 100823 Meine MathOverflow-Episode (23)

Der zweite zu kommentierende Kommentar stammt von Scott Carnahan: The question was not about bad physical theories cooked up by mathematicians (of which there are plenty), but cases where physical heuristic reasoning about mathematics yielded wrong mathematical answers. Your responses have not fit the question at all. If you can find a documented example of Cantor applying physical heuristic reasoning to conclude a false mathematical statement, you are welcome to point it out.
The fact that you are citing Cantor's private communications in your answers leads me to suspect your motivations. {{Hinweis: Darauf zitierte ich Cantors zur Veröffentlichung bestimmtes Manuskript. Die Antwort dazu war leer. Insbesondere wurden meine Beiträge nicht wiederhergestellt. This lead me to suspect Scott Carnahan's motivations.}} People do not make claims in private letters with the same confidence that they do in their published papers, and letters are traditionally a place where people can exchange speculative, incomplete thoughts. For that reason, when you claim that someone was wrong in a letter, it does not carry the sort of judgmental weight that you seem to be seeking. Of course, such false claims could be of historical interest, since we often like to know what was going on in someone's head when a correct theory later came out of something wrong. Such a discussion might be on-topic at MathOverflow, but only if prompted by a concrete question, e.g., about the historical development of a particular theory.
The question is about physical reasoning leading to mathematical mistakes. Cantor's physical opinions are not relevant to this: what was the mathematical mistake?

WM: {{Dass es die transfinite Mengenlehre ist, hatte ich schon am selben Ort Pete L. Clark wissen lassen (s. KB100822). Ich brauchte es nicht zu wiederholen.}} I don't know whether you understand German. Here is a part of a paper that Cantor intended to publish in Acta Mathematica. It was rejected by Mittag-Leffler in 1884. There he talks
about the reasons for his theory of order types. He devised set theory for application to physics and chemistry and even biology:

Die mathematische Physik wird von der Typentheorie gleichfalls betroffen, weil sich letztere als ein mächtiges und tief einschneidendes Werkzeug zur Ergründung und zur begrifflichen Construction der sogenannten Materie ausweist.
Damit hängt auch die Anwendbarkeit der Typentheorie in der Chemie zusammen; es ist aber die hier gemeinte Typentheorie nicht zu verwechseln mit der ebenso benannten Theorie von Gerhardt, welcher die Chemie wesentlich ihre gegenwärtige Gestaltung verdankt, obgleich die Gerhardt'sche Theorie längst nicht mehr in ihrer ursprünglichen Form anerkannt wird, sondern sich erheblichen Umgestaltungen hat unterziehen müssen, welches Schicksal sie, meines Erachtens, nothwendig mit allen vergangenen oder noch kommenden Theorien theilen wird, die auf der chemischen Atomistik ihr Gebäude errichten. Mit dieser Typentheorie hat die meinige nichts als den Namen gemein.
Von ganz besonderem Interesse scheinen mir aber die Anwendungen der mathematischen Typentheorie auf das Studium und die Forschung im Gebiete des Organischen zu sein. {{Es

geht hier um die Cantorsche Theorie der Ordnungstypen, die auch seine transfiniten Ordnungszahlen (= Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen) enthält und nach allem, was wir wissen, mit naturwissenschaftlichen Fakten keine gemeinsame Schnittmenge besitzt.}}
[An unpublished paper by Georg Cantor: Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung. Ivor Grattan-Guinness, Acta Mathematica 124 (1970) 65-107]

446 Das Kalenderblatt 100824 Meine MathOverflow-Episode (24)

Auch die folgende Frage von Paul Siegel konnte ich mühelos beantworten: Why worry about the axiom of choice? As I understand it, it has been proven that the axiom of choice is independent of the other axioms of set theory. Yet I still see people fuss about whether or not theorem X depends on it, and I don't see the point. Yes, one can prove some pretty disturbing things, but I just don't feel like losing any sleep over it if none of these disturbing things are in conflict with the rest of mathematics.

WM: Your assertion that none of these disturbing things are in conflict with the rest of mathematics is questionable. As G. Koenig already knew in 1905, there are only countably many names or "marks". Therefore it is impossible to put a mark on every element of an uncountable set. But without a mark for identification: What is such an element? Even Cantor stated (1906, in a letter to Hilbert) that objects without a finite definition are "Undinge" (the meaning lies between non existing things and nonsense).
The problem can be explained as follows: If we write the list of all finite definitions (words) in binary form

0
1
00
01
10
11
000
...

then that list contains all words we can say in some language A over a finite alphabet B based on a dictionary C. The set of all A is countable, the set of all B is countable, and the set of all C is countable. Therefore we can put all meanings of all finite words of A×B×C into one single list (as Cantor showed for the related case of all rationals, i.e., by Cauchy-diagonalisation). And if some further features D, E, F, ... of languages should be discovered later, the cartesian product A×B×C×D×E×F... would also be a countable set.
Therefore it is impossible to identify all real numbers let alone all elements of a set of, say, cardinal number $\aleph_5$.
In my opinion that is a severe problem. Of course every subset we choose will have a first element. But can we choose every subset? Are there all real numbers readily available to act as a first element? How should they be named and chosen?
Regards, WM

Es gab wieder in kürzester Zeit zwei negative Voten und eine rrrrückstandsfreie Elimination. Doch sollen die abgegebenen Kommentare nicht auf ewig im Orkus verschwinden:

JBL: What does this have to do with the axiom of choice? {{Meine Überlegung zeigt, dass das AC Humbug ist, den man auch nicht axiomatisch rechtfertigen kann.}}

Michael Greinecker: You don't need AC to show the existence of uncountable sets.

WM: You need AC for the well-ordering of uncountable sets.

Pete L. Clark: @WM: no, that (somewhat common misconception) is false: AC is not required to show the existence of uncountable well-ordered sets. This came up on MO previously. {{Ich sagte nicht, dass AC für den Existenznachweis erforderlich wäre. Aber ohne AC kann keine überabzählbare Menge wohlgeordnet werden. Es geht ja nicht einmal mit AC.}}

447 Das Kalenderblatt 100825 Meine MathOverflow-Episode (25)

Eine andere Frage, die ich mühelos beantworten konnte (weil ich Gödels Originaltext gelesen habe, wo die Antwort steht) betraf den Proof of Gödel incompleteness.

Doron Shafrir fragte: In Jech's paper: On Gödel's Second Incompleteness Theorem http://www.math.psu.edu/jech/preprints/goedel.pdf
He proves: Theorem if ZF proves there is a model of ZF, then ZF proves 0=1.
In the beginning of the proof he passes to a "big enough" finite subset S of ZF (that proves there is a model of ZF and defines formulas and their satisfaction etc.) The proof goes by looking at a model M of S and models of S within M, which can be lifted to be a model in the 'outside world', and using some diagonal sentence G for a contradiction.
My question: Why does passing to a finite subset needed for the proof?

Meine Antwort: It should not be overlooked, that Goedel's proof is based upon set theory. And set theory is not all. {{Nachdem ich ein paar kritische Stimmen zur Mengenlehre zitiert hatte, die den Lesern der KB längst bekannt sind und deshalb hier nicht den Text aufblähen sollen, fuhr ich fort:}} With respect to these facts, reconsider Goedel's incompleteness-proof. According to Goedel, the true reason for the incompleteness attached to all formal systems of mathematics is that the construction of higher and higher types can be extended into the transfinite, whereas every formal system contains at most countably many elements. He promised to show this in the second part of his paper. But a second part did never appear because the first part already had been accepted enthusiastically by all his contemporaries. (*)

Therefore, if there is no actual, i.e., completed or finished infinity, then there is no hierarchy of transfinite numbers and the problem with Goedel's proof vanishes completely.

(*) "Der wahre Grund für die Unvollständigkeit, welche allen formalen Systemen der Mathematik anhaftet, liegt, wie im II. Teil dieser Abhandlung gezeigt werden wird, darin, daß die Bildung immer höherer Typen sich ins Transfinite fortsetzen läßt [...] während in jedem formalen System höchstens abzählbar viele vorhanden sind. Man kann nämlich zeigen, daß die hier aufgestellten unentscheidbaren Sätze durch Adjunktion passender höherer Typen (z. B. des Typus ω zum System P) immer entscheidbar werden. Analoges gilt auch für das Axiomensystem der Mengenlehre." [Kurt Gödel: "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931) S.173–198, quoted from p. 191]

Wolfgang Mueckenheim 17●4

Zu jener Zeit war ich im Besitz von 17 Fleißpunkten (durfte also positive Voten abgeben und habe dieses Recht auch einmal ausgeübt) und 4 Medaillen (wozu die gut sind, weiß ich nicht. Vermutlich sind sie so nützlich wie Orden: Um Flecken auf dem Frack zu verdecken - wenn man einen hat.)

Lange kann meine Antwort nicht existiert haben. Sie wurde entfernt (locked and deleted by Ben Webster), vermutlich, weil ich deutschen Text eingeschoben hatte und die englischsprachigen Matheologen sich diskriminiert fühlten. Meine Antwort wurde mit zwei negativen Voten ausgezeichnet. Die Frage allerdings, von wem diese Voten abgegeben wurden, wird ein ewiges Geheimnis bleiben.

Die folgenden Kommentare sind noch zu erwähnen:

Michael Greinecker: Your "answer" is in no way related to the actual question. MO is not the appropriate place for the rambling of someone distrusting contemporary mathematics. [...]

WM: Has mathematics become a matter of "trust", in your opinion? Then we should in fact distrust it!

supercooldave: I have plenty of problems trying to convince my girlfriend that larger notions of infinity exist. {{Das haben Einbildungen so an sich. Von der Existenz eines Hammers könnte man leichter überzeugt werden.}} She's almost convinced that there is one notion of infinity, but she's not happy how it behaves. So Wolfgang is not alone. {{Das nun ganz gewiss nicht. Doch würde mir das auch nichts ausmachen.}}

448 Das Kalenderblatt 100826 Meine MathOverflow-Episode (26)

Die nächste Frage, zu der ich beitragen konnte, lief unter dem Titel: Papers that debunk common myths in the history of mathematics. T. Chow fragte: What are some good papers that debunk common myths in the history of mathematics? To give you an idea of what I'm looking for, here are some examples. [...] Jeremy Gray, "Did Poincare say 'set theory is a disease'?", Math. Intelligencer 13 (1991), 19-22. Debunks the myth that Poincare said, "Later generations will regard Mengenlehre as a disease from which one has recovered." {{Ich kann diesen Satz zwar nicht nachweisen, dafür aber einen fast ebensoguten, der die Authentizität des bezweifelten wahrscheinlich macht. Deshalb schrieb ich (wegen Sperre unter Pseudonym):}}

But I said: "... it has come to pass that we have encountered certain paradoxes, certain apparent contradictions that would have delighted Zeno the Eleatic and the school of Megara. And then each must seek the remedy. For my part, I think, and I am not the only one, that the important thing is never to introduce entities not completely definable in a finite number of words. Whatever be the cure adopted, we may promise ourselves the joy of the doctor called in to follow a beautiful pathologic case." [H. Poincaré: "The future of mathematics" (1908)]
Regards, HP

Erst am nächsten Tag schaute ich wieder nach, um Poincarés Karrierefortschritte in Sachen Fleißpunkte wohlgefällig zu betrachten, denn das Zitat ist im Gegensatz zu dem angezweifelten erstens hieb- und stichfest und zweitens nicht so oft wiedergekäut. Eine wissbegierige Gemeinschaft hätte dankbar sein, Dankbarkeit zumindest heucheln sollen. Aber ich war entsetzt! Schon eine Stunde nach dem Erscheinen war diese Antwort durch einen automatisierten Gesinnungstabupotentaten geschlossen und gelöscht worden. Ich hatte damit überhaupt nicht gerechnet, weil mein Text ja objektiv nachprüfbar ist und ich davon ausging, dass die Gesetzestafelpolierer in MathOverflow historische Texte großer Mathematiker nicht wie Fliegendreck wegwischen würden. Während seiner kurzen Lebensdauer hatte der Text vier negative Bewertungen erhalten. Ich weiß nicht warum das geschah. Hatte ich grammatische Fehler stehengelassen? Hätte HP besser französisch sich äußern sollen? Ist er bei diesen Geniedestabilisierungspopulisten so unbeliebt, dass sie seine klarsichtigen Äußerungen in ihrem gemeinschaftlichen Starrsinnsportal nicht ertragen können? Vermutlich hätten sie den Text eines gehemmt stammelnden Polyhymnikers vorgezogen. Trotzdem veranlasste ich HP, sich nochmals zu Wort zu melden.

449 Das Kalenderblatt 100827 Meine MathOverflow-Episode (27)

Es geht um einen Artikel von Jeremy Gray, "Did Poincare say 'set theory is a disease'?", Math. Intelligencer 13 (1991), 19-22. Debunks the myth that Poincare said, "Later generations will regard Mengenlehre as a disease from which one has recovered." Meine erste Antwort darauf war nach nur einer Stunde von einem automatisierten Gedächtnisstatuspositivator gelöscht worden. Hier ist die zweite:

I am not used to be censored by stupid automata!

Therefore I repeat that I have said in "The future of mathematics" (1908) "... it has come to pass that we have encountered certain paradoxes, certain apparent contradictions that would have delighted Zeno the Eleatic and the school of Megara. And then each must seek the remedy. For my part, I think, and I am not the only one, that the important thing is never to introduce entities not completely definable in a finite number of words. Whatever be the cure adopted, we may promise ourselves the joy of the doctor called in to follow a beautiful pathologic case."

I do not remember whether I have said exactly what Jeremy Gray believes to have "debunked". But it is clear that I meant it. Cantor himself complains in a letter to Russell, written on Sept. 19, 1911:

"I am quite an adversary of Old Kant, who, in my eyes has done much harm and mischief to philosophy, even to mankind; as you easily see by the most perverted development of metaphysics in Germany in all that followed him, as in Fichte, Schelling, Hegel, Herbart, Schopenhauer, Hartmann, Nietzsche, etc. etc. on to this very day. I never could understand that and why such reasonable and enabled peoples as the Italiens, the English and the French are, could follow yonder sophistical philistine, who was so bad a mathematician. And now it is that in just this abominable mummy, as Kant is, Monsieur Poincare felt quite enamoured, if he is not bewitched by him. So I understand quite well the opposition of Mons. Poincaré, by which I felt myself honoured, so he never had in his mind to honour me, as I am sure. If he perhaps expect, that I will answer him for defending myself, he is certainly in great a mistake."

From this letter it is obvious that I must have had said something that Cantor did not like very much.

Fortunately Cantor did not meet Russell. Cantor would have been very disappointed: "The objections to the theory are [...] that a great part of Cantor's theory of the transfinite, including much that it is hard to doubt, is, so far as can be seen, invalid if there are no classes or relations." [Bertrand Russell: "On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types", Proc. London Math. Soc. (2) 4 (1906) 29-53, Received November 24th, 1905. - Read December 14, 1905.]

And at least Skolem reports the "debunked" sentence: Andere Mathematiker gingen so weit in skeptischer Richtung, daß sie die Mengenlehre ganz verwarfen, so z. B. Poincaré. Er soll in einem Vortrage auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Rom 1908 gesagt haben, daß man einmal in der Zukunft dazu kommen würde, die Mengenlehre als eine überwundene Krankheit anzusehen. (to consider set theory as a disease from which one has recovered.) [Skolem: "Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik" (1929)]

From these few quotes it is clear, that T. Chow's question suggests a falsehood. And he should be grateful that I have corrected that. I do not hope that some matheologians here around will again demonstrate that they belong to an intolerant and fanatic sect where it is usual to suppress the truth.

450 Das Kalenderblatt 100828 Meine MathOverflow-Episode (28)

Wie lange mein in KB100827 wiedergegebener Beitrag überlebte, weiß ich nicht genau. War den Matheologen der Ausrutscher ihrer Gallionsfigur peinlich? Zumindest erhielt er eine negative Bewertung und vermochte die Aufmerksamkeit von Robin Chapman auf sich zu ziehen, was vermutlich nicht besonders vorteilhaft war. Desungeachtet ergänzte ich den Beitrag später um zwei bedeutende Teile. Beide existierten nur jeweils eine Viertelstunde und erhielten innerhalb dieser Zeit jeweils drei negative Bewertungen. Jede negative Bewertung vermindert das Fleißpunktekonto des Bewerters. (Die Fleißpunktekonton von Robin Chapman und Franz Lemmermeyer müssen in jener Zeit sehr gelitten haben.)

Here are some sentences related to that "debunked" one in question and certainly never debunked.

For several terms at Cambridge in 1939, Ludwig Wittgenstein lectured on the philosophical foundations of mathematics. A lecture class taught by Wittgenstein, however, hardly resembled a lecture. He sat on a chair in the middle of the room, with some of the class sitting in chairs, some on the floor. He never used notes. He paused frequently, sometimes for several minutes, while he puzzled out a problem. He often asked his listeners questions and reacted to their replies. Many meetings were largely conversation. These lectures were attended by, among others, D. A. T. Gasking, J. N. Findlay, Stephen Toulmin, Alan Turing. [Cora Diamond (ed.): "Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge 1939 from the notes taken by R. G. Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees, and Yorick Smythies", The University of Chicago Press, Chicago (1975)]

Imagine set theory's having been invented by a satirist as a kind of parody on mathematics. – Later a reasonable meaning was seen in it and it was incorporated into mathematics. (For if one person can see it as a paradise of mathematicians, why should not another see it as a joke?)

If it were said: "Consideration of the diagonal procedure shews you that the concept "real number" has much less analogy with the concept "cardinal number" than we, being misled by certain analogies, inclined to believe", that would have a good and honest sense. But just the opposite happens: one pretends to compare the "set" of real numbers in magnitude with that of cardinal numbers. The difference in kind between the two conceptions is represented, by a skew form of expression, as difference of extension. I believe, and I hope, that a future generation will laugh at this hocus pocus.

The curse of the invasion of mathematics by mathematical logic is that now any proposition can be represented in a mathematical symbolism, and this makes us feel obliged to understand it. Although of course this method of writing is nothing but the translation of vague ordinary prose.

"Mathematical logic" has completely deformed the thinking of mathematicians and of philosophers, by setting up a superficial interpretation of the forms of our everyday language as an analysis of the structures of facts. Of course in this it has only continued to build on the Aristotelian logic.

[Rhees, von Wright, Anscombe (eds.): "Ludwig Wittgenstein, Remarks on the Foundations of Mathematics", Wiley-Blackwell (1991)]

451 Das Kalenderblatt 100829 Meine MathOverflow-Episode (29)

Unter dem Pseudonym Henri Poincaré schrieb ich abschließend: I think you matheologians would also burn heretics, if you only had the power. But you haven't.

I repeat that I have said in "The future of mathematics" (1908) "... it has come to pass that we have encountered certain paradoxes, certain apparent contradictions that would have delighted Zeno the Eleatic and the school of Megara. And then each must seek the remedy. For my part, I think, and I am not the only one, that the important thing is never to introduce entities not completely definable in a finite number of words. Whatever be the cure adopted, we may promise ourselves the joy of the doctor called in to follow a beautiful pathologic case."

I do not remember whether I have said exactly what Jeremy Gray believes to have "debunked". But it is clear that I ment it. Cantor himself complains in a letter to Russell, written on Sept. 19, 1911:

"I am quite an adversary of Old Kant, who, in my eyes has done much harm and mischief to philosophy, even to mankind; as you easily see by the most perverted development of metaphysics in Germany in all that followed him, as in Fichte, Schelling, Hegel, Herbart, Schopenhauer, Hartmann, Nietzsche, etc. etc. on to this very day. I never could understand that and why such reasonable and enabled peoples as the Italiens, the English and the French are, could follow yonder sophistical philistine, who was so bad a mathematician. And now it is that in just this abominable mummy, as Kant is, Monsieur Poincare felt quite enamoured, if he is not bewitched by him. So I understand quite well the Opposition of Mons. Poincaré, by which I felt myself honoured, so he never had in his mind to honour me, as I am sure. If he perhaps expect, that I will answer him for defending myself, he is certainly in great a mistake."

From that letter it is obvious that I must have had said something that Cantor did not like very much. (With respect to Cantor's opinion about myself, I can only reciproce his.)

Fortunately Cantor did not meet Russell (as Cantor had announced in his letter). Cantor would have been very disappointed: "The objections to the theory are [...] that a great part of Cantor's theory of the transfinite, including much that it is hard to doubt, is, so far as can be seen, invalid if there are no classes or relations." [Bertrand Russell: "On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types", Proc. London Math. Soc. (2) 4 (1906) 29-53, Received November 24th, 1905. - Read December 14, 1905.]

And at least Skolem reports the "debunked" sentence:

Andere Mathematiker gingen so weit in skeptischer Richtung, daß sie die Mengenlehre ganz verwarfen, so z. B. Poincaré. Er soll in einem Vortrage auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Rom 1908 gesagt haben, daß man einmal in der Zukunft dazu kommen würde, die Mengenlehre als eine überwundene Krankheit anzusehen. (to consider set theory as a disease from whioch one has recoverd.) [Skolem: "Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik" (1929)]

From these few quotes it is clear,that the original question implies a falsehood. And the questioner should be grateful that I have corrected that. I do not hope that some matheologians here around will again demonstrate that they belong to an intolerant and fanatic sect where it is usual to suppress the truth.

Regards, HP

Doch die Hoffnung trog. Ich hätte vielleicht französische schreiben sollen, zum einen um glaubwürdiger zu erscheinen, und zum andern, um die Matheologen längere Zeit an einer Übersetzung knabbern zu lassen.

452 Das Kalenderblatt 100830 Meine MathOverflow-Episode (30)

Da mit Zeitstrafen in geometrisch wachsender Progression belegt, musste ich für die folgende Frage auf eine Ersatz-ID ausweichen. sceptic konnte frei agieren; so benutze ich dieses Pseudonym (später hat kein Moderator mehr versucht, mich oder ein Pseudonym mit Zeitstrafen zu belegen; eine gewisse Lernfähigkeit ist dort also vorhanden) für eine Frage, die ich mir schon lange vorgelegt habe, ohne eine Antwort zu finden:

Why don't set theorists use the axiom of well-ordering instead of AC?

The axiom of choice leads to the well-ordering theorem. Zermelo proved "every set can be well-ordered", which is literally a lie. We know that it is impossible to well-order any uncountable set because there are only countably many marks which can be attached to the elements. That much is not sufficient to well order even the smallest uncountable set, let alone a set of, say, cardinal number $\aleph_3$. Without AC (which for any real attempt of well-ordering does help as much as dice for playing chess) we have:

"For example, it is a theorem that there does not exist any way to ever actually construct or even define a well-ordering of the real numbers." [Bill Thurston: "On proof and progress in mathematics", Bull. of the American Math. Soc. 30, 2, 1994, pp. 161-177]

"Feferman and Levy showed that one cannot prove that there is any non-denumerable set of real numbers which can be well ordered." [Abraham A. Fraenkel, Yehoshua Bar-Hillel, Azriel Levy: "Foundations of Set Theory", North Holland, Amsterdam (1973) p. 62]

So it is clear that no sensible mathematician would bet 1 cent on the announcement of a well-ordering of the reals until 2020, say. An axiom directly stating the contrary would easily be recognized as counterfactual. But by Zermelo's "proof" many freshmen get the false impression that Zermelo had something proven that really could be done. It cannot.

I do not believe that Zermelo wilfully tried to deceive his audience. In particular because he did not understand (at least did he not accept) Skolem's 1923-proof that every consistent first-order-theory has a countable model.

But for the present community of set theorists it would be honourable to explicitly state: Yes, the reals and other large sets cannot be well-ordered, but we nevertheless use the counterfactual axiom, in order to see what might happen. In current ZFC the layman receives the wrong impression that something is proved that has to do with that sense that is automatically understood by the statement: "every set can be well-ordered".

Ich unterzeichnete aber mit "Regards, WM", denn bewusste Täuschung liegt mir fern.

Binnen einer guten halben Stunde hatte diese Frage sieben Missbilligungen eingefangen. Neben den üblichen Verdächtigen müssen also noch andere Missbilliger missbilligt haben. Vermutlich rekrutierten sie sich aus der Schar der Kommentatoren:

Yemon Choi: The second sentence of this "question" does not inspire my confidence in it; and indeed, apart from the title, there is no question, merely tiresome assertion. {{Er zieht es also vor, an eine Unwahrheit zu glauben, wie es meines Wissens in dieser Offensichtlichkeit in keiner noch so fanatischen Sekte gefordert wird.}}

WM: Set theorists don't like to hear the truth. I know that. Regards, WM

zeb: why are you asking the question if you already "know" the answer?

WM: I do not know the answer! Why do you not use the axiom: Every set can be well-ordered? Regards, WM {{Es wird mir auf ewig schleierhaft bleiben, wie eine solche Massensuggestion zustandekommen, eine unüberschaubare Menge äußerst intelligenter Menschen infizieren und sich über 100 Jahre halten konnte!}}

Simon Wadsley: Surely the answer is that the axiom of choice produces interesting maths. Whether it is actually 'true' or 'false' independent of a given axiomitisation of set theory is essentially a meaningless question.

{{Das Axiom produziert Humbug und, was schlimmer ist, Humbug-Gläubige, denen interessanter Humbug wichtiger ist als Wahrheit. Doch zu dieser Antwort kam ich nicht mehr, denn die Generalstabilisierungspointe war gesetzt:}} closed as subjective and argumentative by Robin Chapman, Joel David Hamkins, Yemon Choi, Andrea Ferretti, Martin Brandenburg.

453 Das Kalenderblatt 100831 Meine MathOverflow-Episode (31)

Die nächste Frage stellte sceptic, um die vor Selbstzufriedenheit mit ihren Formalismen überfließenden Matheologen aufzuwecken: The incorrect proof of the equivalence theorem survived for several decades in the mathematical community. Are there other examples of comparable lifetime?

Doch schon nach wenigen Sekunden war die Frage gelöscht. sceptic wiederholte.
Oops there seems to have been a software error. So here is the question again:

The first proof of the equivalence theorem, given by E. Schroeder in 1896, was wrong, as Schroeder admitted in a letter to A. Korselt (who had improved the proof). Korselt gives a copy of Schroeder's reply in his paper [A. Korselt: "Über einen Beweis des Äquivalenzsatzes", Math. Ann. 70 (1911) 294.]

Nevertheless, Korselt's corrected version was not accepted by the Annalen before 1911. And then it was not widely noticed, so the incorrect proof survived for a long time.

Cantor wrote to Hilbert on June 28, 1899 that E. Schroeder in 1896 (and Cantor's student F. Bernstein about Easter 1897) had proved the theorem. So Cantor never noticed Schroeder's error.

A. Fraenkel mentioned in 1923 (!) that Schroeder's proof was wrong. [A. Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre", Springer (1923) p. 58]

E. Zermelo considered Schroeder's proof correct even in 1932. Zermelo remarks in Cantor's collected works as an editing note: "... wurde erst im Jahre 1896 von E. Schroeder und 1897 von F. Bernstein bewiesen und seitdem gilt dieser 'Aequivalenzsatz' als einer der wichtigsten Saetze der gesamten Mengenlehre." [E. Zermelo: "Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer (1932) p. 209]

This shows that errors could survive in mathematics for about 35 years. Are there recent examples?

Regards, sceptic

Die Frage lebte etwa 10 Minuten - lange genug um sceptic eine positive Bewertung und damit 10 Fleißpunkte einzutragen. Ein vielversprechender erster Karriereschritt. Noch 999 solche Fragen und sceptic hätte Moderatorbefugnisse erlangt. Aber mit der ersatzlosen Löschung waren auch sceptics Punkte futsch. Damit stand der Zähler wieder auf 1000.

454 Das Kalenderblatt 100901 Meine MathOverflow-Episode (32)

Halfdan Faber stellte eine Frage zum Axiom of Computable Choice versus AC.

What would be the consequence of requiring that any choice function be computable; i.e. using as the foundational basis ZF + ACC? Does it make a difference if we admit definable functions? I guess I am sometimes bothered by the thought that any random choice over an uncountable set by definition would seem to almost certainly return a non-computable member. This seems impractical and perhaps even problematic, considering that major branches of mathematics such as for example analysis, with only few notable exceptions, mainly operate within the computable or definable realm. {{Genau! Die so oft vorgeschützte Behauptung, ZF ohne C wäre nicht ausreichend, um die Mathematik darauf zu bauen, geht am Kern der Mathematik vorbei. Denn mit C wird so viel wild wuchernde Unkraut in den Garten der weiland Königin der Wissenschaften eingetragen, dass Mathematik darin kaum noch zu erkennen ist. Undefinierbare Definitionen. Was für ein Humbug!}} Presumably an immediate consequence would be that the Banach–Tarski paradox and similar theorems related to unmeasurable sets would fail. But would there be more fundamental consequences?

Meine Antwort (unter der Adresse von sceptic):

Of course it makes a big difference! There are only countably many computable, definable, or somehow "identifiable" numbers and forms of numbers. The problem can be explained as follows: If we write the list of all finite definitions (words) in binary form

0

1
00
01
10
11
000
...

then that list contains all words we can say in some language A over a finite alphabet B based on a dictionary C. The set of all A is countable, the set of all B is countable, and the set of all C is countable. Therefore we can put all meanings of all finite words of A×B×C into one single list (as Cantor showed for the related case of all rationals, i.e., by Cauchy-diagonalisation). And if some further features D, E, F, ... of languages should be discovered later, the cartesian product A×B×C×D×E×F×... would also be a countable set. {{Denn es würden ja in jedem Falle nur endlich viele Eigenschaften entdeckt werden.}} Therefore it is impossible to identify all real numbers let alone all elements of a set of, say, cardinal number $\aleph_{10}$. Therefore it is impossible to well-order an uncountable set with ACC - as it is impossible to do so with AC: One can prove that it is possible to do so, but one cannot do so. Unfortunately mathematics has been perverted from a solid science to matheology with strong believers who blindly believe in well-ordering although none of them can show it (other than by doubtfull "proof").

Regards, WM

Meine Antwort hatte leider innerhalb von einer Stunde vier negative Voten eingefangen (ich möchte ja gern wissen, wer so unhöflich war) und wurde von einem darauf dressierten automatischen Geschäftsstatutenportier ausrrradiert. In dieser Gesinnungsstadelposse gilt nämlich die Wahrheit als pfui.

455 Das Kalenderblatt 100902 Meine MathOverflow-Episode (33)

Die letzte mit meinem eigenen Namen unterzeichnete Antwort betraf die von unknown Google gestellte Frage: Any paradoxical theorems arising from large cardinal axioms?

Dort gab es verwunderliche und unglaubhafte Aussagen wie:
I would like to know if the assumption of some large cardinal axiom is known to produce some sort of paradoxical phenomena in the "everyday world", as it happens in the case of the axiom of choice. {{Mir hat AC bisher die Vorspiegelung pathologischer Phänomene beharrlich verweigert. Man muss wohl ein Auge dafür haben, wenn in der Alltagswelt aus einer Kugel plötzlich zwei werden oder eine Kugel ins Riesenhafte wächst. Aber vielleicht ist AC für das Wachstum von Riesenbovisten zuständig? Dann liegt es nur an meiner mangelnden Geduld, dass ich den Wachstumsprozess noch niemals verfolgt habe.}}
If suitable large cardinals exist, then all projective sets of reals (i.e. the definable sets that you are likely to come across in real life) are non-pathological. {{Das würde ich allerdings auch ohne große Kardinäle allein aus der Beobachtung meiner Alltagswelt schließen.}}
Large cardinals have consequences that were initially surprising to set theorists. {{Das ist die frappierendste Aussage. Ich halte sie übrigens nicht für wahr.}}

Meine Antwort aus dem Blickwinkel des Skeptikers sceptic: The greatest paradox is: How can sensible people talk about such a nonsense? Regards, WM

Die Antwort existierte leider nur 6 Minuten. Dann hatte sie ein Gegenstandspolizist eliminiert. In meta.mathoverflow ergab sich noch folgendes Gespräch:

Steve Huntsman: It appears that WM is using another account "skeptic" while he's suspended. {{Nein, ich benutzte die britische Form sceptic.}}

Robin Chapman: Steve, he is also using "Henri Poincare" (would you believe!). By my reckoning that's three sock puppets he's used now.

WM: Poincaré is the correct spelling. Regards, HP (WM)

Yemon Choi: Also, to be fair, I think that on at least one of the accounts he signs his comments/posts with "regards, WM", so this is not sock-puppetry per se (just against the norms of MO).

Entgegen meiner langjährigen Gewohnheit, musste ich hinfort auf die abschließende Grußformel verzichten.

Damit war meine erste Woche im Lande des mathematischen Überflusses beendet. Die zweite und letzte werde ich nicht ganz so ausführlich wie die erste schildern, denn nun geht es mehr, wenn auch nicht ausschließlich, um neckische Neckereien.

456 Das Kalenderblatt 100903 Meine MathOverflow-Episode (34)

Meine nächste Frage stellte ich unter dem Pseudonym T Zettelbaum (um einen kleinen Hinweis auf die richtige Antwort zu geben): Who said set theory is a fairy tale?

There is some rumor that a great logician has called set-theory a fairy tale. Is that true? Or has it been debunked? T Zettelbaum

Yemon Choi: Can you remember any more details? e.g. a 50-year timespan when this is supposed to have been said?

Robin Chapman: This is hardly a question about mathematical research; it is hardly even a question at all.

Wie nicht anders zu erwarten, war mit Mr. Chapmans auftreten die Frage beendet.

Doch T Zettelbaum stellte sie nochmals unter dem Titel: This is hardly a question about mathematical research; it is hardly even a question at all.

Nevertheless I remain interested in an answer: There is some rumor that a great logician (could have been a Polish one) has called set-theory a fairy tale. Is that true? T Zettelbaum

Robin Chapman: MO is a forum for asking and answering questions about mathematical research. I can't see that spreading unattributed rumour and hearsay is a valid use of it. {{Er hatte also noch nie davon gehört.}}

T Zettelbaum {{WM}}: I would like to know whether this is true or not. Further I would like to know how much you guys know about the history of your business.

supercooldave: Alfred Tarski said it. books.google.be/… @T: Your question would have received a better reception had you not been so disparaging about it. Why should we waste effort answering your question if you hardly consider it a question at all.

T Zettelbaum {{WM}}: It was not me who considered this question not a question, but it was Mr. Chapman, who is eager to discredit and close things he doesn't understand. This question had been removed this morning already. But you got it. Alfed Tarski, born as Alfred Teitelbaum, said it. I accept your answer. I hope that is favourable for your reputation! Regards, TZ.

Wie nicht anders zu erwarten, hatte Mr. Chapman bald wieder eine Ignoranten-Gang versammelt: closed as not a real question by Igor Pak, Mariano Suárez-Alvarez, Robin Chapman, Gjergji Zaimi, gowers

Immerhin hatte T Zettelbaum Zustimmung und damit fünf Fleißpunkte erworben, und er rechnete sich schon aus, nach 2000 solcher Fragen zum Moderator von MathOverflow aufzusteigen.

457 Das Kalenderblatt 100904 Meine MathOverflow-Episode (35)

Vag fragte: Are real numbers countable in constructive mathematics?

Eine Antwort von Joel David Hamkins verschob zwar etwas das Thema von konstruierbar nach definierbar, begann aber ganz nüchtern mit der Bemerkung: One often hears it said that there must be reals that we cannot define or describe, because there are only countably many definitions, but uncountably many reals. And if one considers only definitions over a fixed first-order structure in a countable language, then this is correct [...] {{Dass es auch ohne Beschränkung auf eine feste Struktur korrekt bleibt, zeige ich unten.}}

Aber dann zelebrierte der Hohepriester einen Hochseilakt zum Abzählbarkeitsproblem, der lesenswert ist: In particular, in this universe it happens that every particular real is definable without parameters, even though the language is countable. The resolution of the resulting paradox is that the property of "being definable" is not first-order expressible. Although the model thinks that there are uncountably many reals, each of which happens to uniquely fulfill a definition, and it thinks that there are only countably many definitions, it is nevertheless unable to map those definitions onto the reals, since by Tarski's theorem, there is no universal truth definition.

Ja, der gute Tarski ... Seine hellsichtige Bemerkung "Mengenlehre ist ein Märchen" (von mir ins Deutsche übertragen) hatte gerade einmal 5 (fünf) Punkte in diesem Forum geerntet. Jeder Zwanzigste der 100 Leser äußerte sich sogar missbiligend. Joel David Hamkins dagegen war inzwischen zum Schützenkönig von MathOverflow geworden, mit weit über zwei Myriaden Reputationspunkten. Er muss ein gar treffsicherliches Reputiergewehr besitzen. Denk' ich an das Jahr von Cantors entscheidender Idee, so fällt mir Winchester '73 dabei ein.

Hier geht es also um ein Modell, das alles für abzählbar und für definierbar hält und dennnoch keinen Widerspruch zu Cantors Theorem liefert. Es werden zwei Auswege offen gehalten, denn was heißt "every particular real"? Es heißt "jede bestimmte reelle Zahl". Selbstverständlich ist jede bestimmte Zahl bestimmbar oder definierbar. Da wird niemand widersprechen wollen. Und der zweite Ausweg ist sowieso immer gangbar: Was zur Konstruktion eines Widerspruchs in ZFC missbraucht werden könnte, kann in Gutsprech gar nicht ausgedrückt werden.

Ich gab - noch unter dem Pseudonym T Zettelbaum - eine Antwort, die in ihrer schlichten Folgerichtigkeit gar kein Modell betrifft, sondern allgemeingültig ist und damit Cantors Theorem widerlegt, was freilich die Andacht stören musste.

458 Das Kalenderblatt 100905 Meine MathOverflow-Episode (36)

Vag hatte gefragt: Are real numbers countable in constructive mathematics?

Ich gab eine Antwort, noch als T Zettelbaum: The problem can be explained as follows: If we write the list of all finite definitions (words) in binary form

0
1
00
01
10
11
000
...

then that list contains all words we can say in some language A over a finite alphabet B based on a dictionary C.

The set of all A is countable, the set of all B is countable, and the set of all C is countable. Therefore we can put all meanings of all finite words of A×B×C into one single list (as Cantor showed for the related case of all rationals, i.e., by Cauchy-diagonalisation). And if some further features D, E, F, ... of languages should be discovered later, the cartesian product A×B×C×D×E×F×... would also be a countable set. {{Denn man kann nur abzählbar viele Eigenschaften von Sprachen entdecken.}}

This list has no diagonal.

Only infinite sequences can be diagonalized. But infinite sequences without finite definitions don't define anything, because nobody knows how they end. (They don't end. To define, however, means to know and to let others know.) Hence they don't define real numbers. But without definition, a real number is not a real number and, in particular, is not an element of a set. (Elements of sets must be distinct from one another.)

Was kann man mit einer unwiderlegbaren Widerlegung des eigenen Glaubens tun? Man eliminiert von der Widerlegung und wenn opportun auch vom Widerlegenden so viel wie irgend möglich, um einer Infektion vorzubeugen. So auch hier. (Es gibt wesentlich tiefschlagendere Methoden, aber sie müssen dem vorliegenden Sachverhalt speziell angepasst werden, was oft mühsam ist, manchmal aber auch ganz einfach: Was kann man gegen die These von vererbbarer Intelligenz tun? Man widerlegt sie schlagend, indem man zeigt, dass Affen und Menschen denselben IQ besitzen können - jedenfalls manche.) Mein Beitrag wurde mehrfach gelöscht und mehrfach wieder eingestellt. Wie lange er existierte, kann ich nicht genau sagen. Lediglich aus der Ernte von 15 negativen Bewertungen lässt sich schließen, dass es wohl zahlreiche Minuten gewesen sein müssen. Dabei kam es noch zu folgendem Dialog:

Robin Chapman: This doesn't address the original question at all. {{Er hatte nicht verstanden und meinte deswegen, es gäbe nichts zu verstehen. Oben beweise ich, dass alle definierbaren

Objekte, darunter die Zahlen, zu einer abzählbaren Menge gehören. Was nicht definierbar ist, kann nicht Zahl sein. Deshalb umfasst mein Beweis nicht allein, aber auch, die konstruktive Mathematik.}}

T Zettelbaum {{bezog sich auf einen Satz, der im gestrigen KB100804 zu lesen war}}: "Although the model thinks [...]". Delicious. It seems, the model can think better than those guys here around. Regards, WM

Robin Chapman: You got your initials wrong. {{Nun hatte er doch etwas verstanden.}}

459 Das Kalenderblatt 100906 Meine MathOverflow-Episode (37)

Als Poincaré oder Zettelbaum konnte ich nicht mehr unentdeckt auftreten. Ich entschied mich für das unschuldige Pseudonym Hans.Imglueck und stellte eine unverfängliche Frage, die mich schon länger interessierte:

When did the career of 1 as a prime number begin and when did it end?

The old Greek did not consider 1 a number, so it was not a prime. The theorem of unique prime factorization excludes 1 to be a prime number. But in between probably at Euler's and Goldbach's times? Who can determine most precisely (probably by original papers) when 1 first became a prime number and when 1 had been called a prime number for the last time?

Da ich nicht enttarnt wurde, ist diese Frage und sind die Antworten darauf für jeden Interessenten in MathOverflow noch einsehbar (mit Ausnahme eines Fauxpas von Franz Lemmermeyer, den er aber nach einem Hinweis von Oliver korrigierte):
http://mathoverflow.net/questions/30735/when-did-the-career-of-1-as-a-prime-number-begin-and-when-did-it-end
Jedenfalls war das kürzlich noch so. Eine Garantie für das künftige Fortbestehen würde wohl keine Versicherung versichern.

Hans.Imglueck erntete für diese harmlose Frage mehr Glückspunkte als WM in seiner ganzen MathOverflow-Karriere. Später verspielte er zwar einiges wieder, aber nicht gar so viel wie sein märchenhaftes Vorbild.

460 Das Kalenderblatt 100907 Meine MathOverflow-Episode (38)

Ich wollte erkunden, ob unter den in MathOverflow versammelten Experten tatsächlich ein Experte ist. Deshalb fragte ich (und gab auch gleich einen Tipp):

Cardinal number: why and when?

In books on history of mathematics and in Wikipedia
http://en.wikipedia.org/wiki/Cardinal_number
cardinal number is explained only superficially. My questions: Why did Cantor chose the word cardinal? Has it to do with the catholic church? When was this word invented?

Diese Frage ist nicht einfach zu beantworten, weil Cantor selbst die Spuren verwischte. In einem (auch von Zermelo in die gesammelten Werke Cantors aufgenommenen) Brief, der nach Cantors Angaben "am 15. Febr. 1884, an Herrn Prof. Dr. Kurd Laßwitz in Gotha geschrieben worden" ist, findet sich das Wort Kardinalzahl erklärt: "Unter Mächtigkeit oder Kardinalzahl einer Menge M (die aus wohlunterschiedenen, begrifflich getrennten Elementen m, m', ... besteht {{dass dies nur für abzählbar viele Elemente möglich ist, wurde in KB100905 erklärt}} und insofern bestimmt und abgegrenzt ist) verstehe ich den Allgemeinbegriff oder Gattungsbegriff (universale), welchen man erhält, indem man bei der Menge sowohl von der Beschaffenheit ihrer Elemente, wie auch von allen Beziehungen, welche die Elemente, sei es untereinander, sei es zu anderen Dingen haben, also im besonderen auch von der Ordnung, welche unter den Elementen herrschen mag, abstrahiert und nur auf das reflektiert, was allen Mengen gemeinsam ist, die mit M äquivalent sind." Doch wurde diese Fassung von Cantor erst 1887 geschrieben. Im Original von 1884 findet sich der Terminus "Kardinalzahl" nämlich noch nicht. Cantor glaubte 1884, also 10 Jahre nach seiner Einführung des vollendeten Unendlichen, immer noch, mit der Anzahl einer wohlgeordneten Menge eine allgemeine Definition der Zahl gefunden zu haben. [H. Meschkowski, W. Nilson (Herausgeber): "Georg Cantor Briefe", Springer, Berlin (1991)]

Als ahnten die Experten, auf welch glatten Boden sie diese von Hans.Imglueck gestellte Frage führen würde, wurde selbige schon nach ganz kurzer Zeit gelöscht. Das wunderte mich. Ich wiederholte die Frage unter dem Pseudonym Franz.Impech und der Überschrift:

Why is cardinal number named as it is? When was this name first used?

Doch auch Franz erwies sich nicht als Glücksgarant. Was treibt diese "MOderatoren" zu dem Versuch, die weitverzweigten, geistvollen und und freundlichen Gefilde einer freien Wissenschaft Mathematik zu beschneiden oder auszugrenzen und, was übrig bleibt, in trübes Halbdunkel einzutauchen, bevölkert mit maschinenhaft agierenden Geholperstammelpoeten, denen alles falsch, wertlos und intuitiv (schlimmstes Schimpfwort in diesen geistig vergreisten Kreisen) erscheint, das nicht in ihrem Gutsprech normiert werden kann?

461 Das Kalenderblatt 100908 Meine MathOverflow-Episode (39)

Hans.Imglueck und Franz.Impech hatten gefragt, warum Cantor das Wort Kardinalzahl einführte. Die Fragen wurden rasch ausrrrradiert. Doch gab ich nicht auf, sondern wechselte abermals Pseudonym und Titel.

FAQAsker fragte: Cardinal number: When, Why?

Der Fragetext blieb unverändert. Das Ergebnis war heute noch vorhanden: http://mathoverflow.net/questions/31304/cardinal-number-when-why

José Figueroa-O'Farrill: 'Cardinal' comes from the Latin 'cardinal', itself derived from 'cardo', which means 'hinge'. Hence the main accepted definition (according to the OED): "On which something else hinges or depends, fundamental; chief, principal, of special importance. (Almost always of abstract things.)" It's a fairly common word.

Chris Phan: I could swear the same question was asked yesterday, {{Das ist korrekt.}} and answered in the comments. {{Als ich nachschaute, war die Frage samt allen Antworten schon rückstandslos gelöscht. Ein Revolutionswächter hatte Lunte gerochen.}}

FAQAsker: Do you remember the answers? I could not find the question of yesterday.

Chris Phan: Basically what José said above. And that it predates Cantor by centuries.

FAQAsker: The latin meaning is clear. But I am in particular interested to know 1) when Cantor used this word for the first time and 2) whether anything is known why he chose just this word.

José Figueroa-O'Farrill: I have nothing to say about your first question (although it strikes me as nor particularly interesting), but the second question makes as much sense to me as asking why someone would use the word "fundamental". {{Hier irrte José Figueroa-O'Farrill - in beiden Fällen.}}

Robin Chapman: The term "cardinal number" for counting numbers "one, two, three,..." is standard, as opposed to ordinal numbers "first, second, third,...". All this predates Cantor by centuries. ISTR there was an identical question yesterday. Perhaps it vanished due to users flagging it as spam (there have been a lot of flaky questions mentioning Cantor recently)? {{Die MOlemischen Sittenwächter haben doch ein ausgeprägtes Gespür für Leute ohne Kopfbrett. Meine Frage wurde gelöscht, weil die (zwar zutreffende aber keineswegs fundierte) Vermutung bestand, ich sei ich!}}

FAQAsker: Do you have a written source where "cardinal number" has been used predating Cantor? In some historical context this would be really interesting if not surprising.

Qiaochu Yuan: The last time this question was asked I gave a quote from the OED where this word was used in the 16th century. Voting to close. {{Unbedingt! Sonst kommen vielleicht noch Sachen ans Licht, über die man nicht spricht.}}

Robin Chapman: Yesterday, one user gave an OED citation from 1591.

FAQAsker: Is OED that old? Wiki seems to be in error. en.wikipedia.org/ wiki/OED#Origins

Robin Chapman: Please don't be obtuse, FAQAsker (is that really your name?). {{Erneuter Beweis für einen außerordentlich gut funktionierenden Instinkt des Gardisten.}} The OED gives a citation to a document written in 1591.

FAQAsker: My apologies. I misunderstood. {{Doch nachdem er erst einmal Verdacht geschöpft hatte, konnte auch diese Demutsgeste den Großinquisitor nicht mehr am Kehlbiss hindern:}} closed as off topic by Andy Putman, José Figueroa-O'Farrill, Robin Chapman, Qiaochu Yuan, Andrey Rekalo

Wäre die Frage nicht geschlossen worden, so hätte WM noch die hier offensichtlich unbekannte Information verbreiten können, dass Cantor das Wort Kardinalzahl erstmals am 22. 1. 1886 in einem Brief an Kardinal Franzelin gebrauchte, vermutlich um diesen seiner Lehre gewogen zu stimmen. Doch scheint Bildung oder gar Allgemeinbildung in der MOthematik verwerflich - zumindest wenn die Fragen von Verworfenen aufgeworfen werden.

462 Das Kalenderblatt 100909 Meine MathOverflow-Episode (40)

Um die Geduld des Lesers nicht über Gebühr zu strapazieren, überspringe ich nun ein paar Beiträge, die ich unerkannt abgab und die nicht zum Kern meines Forschungsgebietes, sondern zur gewöhnlichen Mathematik gehören und deswegen auch unstrittig sind. Ich beschreibe nur noch den letzten matheologischen Themenkomplex. Darin geht es um Grenzwerte von Mengenfolgen.

Ich setze dabei voraus, dass eine Mengenfolge, die in jedem endlichen Schritt anwächst, im Limes nicht verschwinden kann und die Kardinalzahl (Verbeugung nach Rom) auch im Limes nicht von der Aufgabe abweichen kann, für die sie geschaffen wurde, nämlich die Anzahl der Elemente anzugeben. Tut sie das doch, so ist damit gezeigt, dass hier der Limesbegriff und die mit ihm untrennbar verknüpfte transfinite Kardinalzahl nicht sinnvoll anwendbar sind, denn der Limes ist kein abrupt eintretendes Ereignis, sondern, wie uns schon Cauchy gelehrt hat, nur aus dem Verhalten einer Folge im Endlichen ableitbar. Anderenfalls könnte man auch definieren

$0 + 0 + 0 + ... = 1$

oder

$1/2 + 1/ 4 + 1/8 + ... = 0$

oder

Lim{n --> ∞} n = 0

usw.

Da sich Franz leider als völlig untauglich erwiesen hatte, stellte ich am 6. 7. unter dem Pseudonym Gregor Contra aus der Halle die Frage:

How can an infinite cardinal number remain when the set vanishes?

Da das Argument sich in ähnlicher Form noch mehrfach wiederholt, verweise ich den Leser hier nur auf das Stichwort:

Die Folge der positiven geraden Zahlen, die zu einem Anfangsabschnitt der Menge der positiven geraden Zahlen gehören und dessen Kardinalzahl übertreffen:

{2}; 2, {4}; 2, {4, 6}; 2, 4, {6, 8}; 2, 4, {6, 8, 10}; 2, 4, 6, {8, 10, 12}; ...

schrumpft in keinem endlichen Schritt, "konvergiert" aber gegen die leere Menge. Für die Folge ihrer Kardinalzahlen

1, 1, 2, 2, 3, 3, ...

wagte bisher meines Wissens noch niemand den "Grenzwert" Null zu nennen. Es bleibt somit als einziger Ausweg zur Aufrechterhaltung des Glaubens ans Transfinite nur die Behauptung einer "Abweichung im Limes". Als ob transfinite Kardinalzahlen überhaupt anders als "im Limes" definiert wären!

Ich schloss:

Set-theory considers limits as something "real".
What is it in this case that has cardinal number $\aleph_0$?
Certainly it is not emptyset.

463 Das Kalenderblatt 100910 Meine MathOverflow-Episode (41)

Gregor Contra aus der Halle hatte die Frage gestellt:

How can an infinite cardinal number remain when the set vanishes?

Set-theory considers limits as something "real".

What is it in this case that has cardinal number aleph_0?
Certainly it is not emptyset.

Dass ich die Kenntnis des Grenzwertes für Mengenfolgen in MathOverflow voraussetzte, bot den ersten willkommenen Angriffspunkt für die Kommentatoren - übrigens genau wie parallel dazu auch in de. sci. mathematik:

Yemon Choi schrieb einen Kommentar: "The limit of the sequence..." in para 2 is not well defined. Neither is the claim that "Set theory considers limits as something real". As it stands, the question is imprecisely formulated and perhaps not fully thought through. Voting to close. {{Unbedingt. Der Gedanke klingt wirklich nicht nach Halle. Vielleicht handelt es sich ja um einen Tippfehler und Gregor Contra aus der Hölle?}}

François G. Dorais gab eine Antwort: What you demonstrated above is the well-known fact that cardinality is not a continuous function with respect to the topology of pointwise convergence. {{Dass dies eine wohlbekannte Tatsache ist, zeigt lediglich den unbedingten Glauben der Matheologen. Weshalb ist die cardinality der Mengenfolge {1}, {1, 2}, {1, 2, 3}, ... eigentlich continuous? Würde $\aleph_0 = 0$ nicht die Notation wesentlich vereinfachen?

Nach einer halben Stunde wurde meine Frage "closed as subjective and argumentative by Harald Hanche-Olsen, Andrea Ferretti, Yemon Choi, Robin Chapman, {{wie sich immer wieder zeigt, ein wirklich aufmerksamer Gardist}} François G. Dorais".

Natürlich ließ ich mich dadurch nicht beirren. Eine halbe Stunde und nur 5 negative Bewertungen für dieses brisante matheologische Thema erschienen mir lange nicht ausreichend - auch wenn mindestens 55 Teilnehmer meinen Text angeschaut hatten, darunter vermutlich auch die Negativ-Voter. Das ist aber keineswegs sicher.

464 Das Kalenderblatt 100911 Meine MathOverflow-Episode (42)

Am 6. 7. hatte ich unter dem Pseudonym Gregor Contra aus der Halle die Frage

How can an infinite cardinal number remain when the set vanishes?

gestellt, die nach kurzer Zeit geschlossen und bald darauf ganz gelöscht wurde. Deswegen wiederholte ich sie am 7. 7. unter dem Titel

How can a sequence of non-empty sets have a vanishing limit although no set has less elements than its precursor?

und verbesserte einige der Schwachstellen:

Notes:
1) The limits above are well-defined according to set theory:
http://en.wikipedia.org/wiki/Set-theoretic_limit
2) Set-theory considers limits as real, in particular the real existence of an infinite set is an axiom in ZF. This set is the limit of its initial segments.
3) This paradox has been well-known for a long time. But that does not explain it.

Gegen Pseudonyme ist zwar nicht grundsätzlich etwas einzuwenden. Es gibt sogar unter den Matheologen berühmte Vorbilder: Schon Felix Hausdorff nannte sich Paul Mongré. Aber mir gefällt das nícht. Deswegen benutzte ich diesmal wieder meinen wirklichen Namen (vielleicht hatte die Strenge der Gesittungstafelfpolitruks ja nachgelassen, oder sie schliefen einmal) und unterschrieb wie üblich: Regards, WM

Diese Frage wurde von ca. 20 Lesern gelesen.

Es gab einen Kommentar von Qiaochu Yuan: All you've shown is that cardinality is not continuous with respect to set-theoretic limits. This isn't a paradox. {{Ein merkwürdiges Argument, das nur durch gewohnheitsmäßigen Missbrauch von Intelligenz erklärbar ist. Genau hier liegt ein Paradoxon, denn nur set-theoretic limits liefern überhaupt eine Definition der Kardinalzahl. Die Kardinalzahl der rationalen Zahlen ist nur deswegen gleich der der natürlichen Zahlen, weil es eine Bijektion zwischen allen Elementen und also zwischen allen endlichen Anfangsabschnitten beider Mengen gibt. Mehr als ein set-theoretic limit ist da nicht vorhanden.}}

A set that only grows and has limit $\emptyset$ is a paradox.
Regards, WM – Wolfgang Mueckenheim

Außerdem gab es einen interessanten Hinweis von rpotrie {{dass das Urnenproblem auch in MathOverflow schon zur Sprache gekommen war}}: See here
http://mathoverflow.net/questions/7063/a-problem-of-an-infinite-number-of-balls-and-an-urn
A similar problem is treated and there are several answers.

Ich hätte rpotrie gern gedankt, doch meine, wie mir schien, nun gegen jede rationale Kritik gewappnete Frage verschwand nach kurzer Zeit spurlos vom Bildschirm.

465 Das Kalenderblatt 100912 Meine MathOverflow-Episode (43)

Da die Gesittungsstörungsaportierer sich strikt weigerten, irgendwo ein WM zu dulden, wählte ich wieder ein Pseudonym. Das ist ja nicht ehrenrührig. Es gibt sogar feste Regeln zu dem Themenkomplex: "Der Diensteanbieter hat die Nutzung von Telemedien und ihre Bezahlung anonym oder unter Pseudonym zu ermöglichen, soweit dies technisch möglich und zumutbar ist."
http://www.gesetze-im-internet.de/tmg/__13.html

Wikpedia sagt dazu: "Pseudonyme sind heute namensrechtlich geschützt. Nach dem Urheberrecht hat ein Künstler das Recht, festzulegen, unter welchem Namen (Pseudonym) er genannt werden will. Für die Wahl des Namens gibt es gewisse Einschränkungen durch Persönlichkeitsrechte anderer. Im europäischen Reisepass und Ausweisdokumenten vieler Länder kann der Künstlername (auch Ordensnamen) eingetragen werden. Rechtsverbindlich und zulässig ist die Unterschrift mit einem Pseudonym, sofern die als Aussteller in Betracht kommende Person ohne Zweifel feststeht (BGH NJW 1996, 997). Wird mit dem Künstlernamen unterschrieben, so ist damit der gesetzlichen Schriftform genügt."
http://de.wikipedia.org/wiki/Pseudonym

Na also. Primus inter Parias schrieb:

An answer to a disappeared question

I just saw and copied this interesting question. Now I cannot find it again. But I would like to contribute the solution. Therefore I repost it {{der an Dagobert Duck erinnerte Leser lasse sich nicht von den Dollar-Zeichen verwirren. Sie schließen in MathOverflow die Latex-Texte ein}}:

The set of all positive even numbers E is the limit of the sequence of its initial segments
E_n = { 2, 4, 6, ..., 2n }
$\lim_{n\rightarrow\infty} E_n = E$
and we have
$\lim_{n\rightarrow\infty} |E_n| = \aleph_0$
The limit of the sequence $S_n\subset E_n$ with S_n = { x | $x\in E_n \wedge x>n$ }
is $\emptyset$.
The limit of the sequence of cardinal numbers $|S_n|$ = |{ x | $x\in E_n \wedge x>n$ }|
is $\aleph_0$.
Set-theory considers limits as something "real". What is it in this case that has cardinal number $\aleph_0$? Certainly it is not $\emptyset$.

Notes:
1) The limits above are well-defined according to set theory:
http://en.wikipedia.org/wiki/Set-theoretic_limit
2) Set-theory considers limits as real, in particular the real existence of an infinite set is an axiom in ZF. This set is the limit of its initial segments.
3) This paradox has been well-known for a long time. But that does not explain it.
4) This paradox has not been treated under
http://mathoverflow.net/questions/7063/a-problem-of-an-infinite-number-of-balls-and-an-urn
because there we have a temporal development. The above example, on the contrary, uses the limit-definition dictated by set theory.

And here is the promised solution:

The sets E_n can be separated into $E_n - S_n = A_n$ and S_n. The following list shows the beginning of this sequence:

A_n and S_n
$\emptyset$ and {2}
{2} and {4}
{2} and {4, 6}
{2, 4} and {6, 8}
{2, 4} and {6, 8, 10}
{2, 4, 6} and {8, 10, 12}
and so on. You see how it is continued. And some believe that the limit of S_n is empty. But this error will soon be fixed, if we rename the elements of S_n in the following way:

A_n and S_n (renamed)
$\emptyset$ and {1}
{2} and {1}
{2} and {1, 3}
{2, 4} and {1, 3}
{2, 4} and {1, 3, 5}
{2, 4, 6} and {1, 3, 5}
and so on. You see how it is continued. And now, I am sure, none of you will any longer believe that the limit of S_n is empty. Won't you?

Die Antfrage existierte mindestens 6 Minuten lang. Dann war sie nicht mehr auffindbar. Der Link führte stattdessen auf eine Seite mit dem Satz: That page can't be found, but in the grand scheme of things, it does not matter

Ich wiederholte meine Antfrage nach einer Stunde unter dem Titel:

An answer to an answer to a disappeared question

ergänzt um eine Ouvertüre:

That page can't be found, but in the grand scheme of things, it does not matter - because its contents cannot be deleted. Here it is again.

und um ein Finale:

And another question: Do you think deleting this file will delete the truth?

Die beiden Antfragen von Primus inter Parias wurden von ca. 50 Lesern gesichtet und erhielten mindestens 8 negative Voten, bevor sie ersatzlos ausgelöscht wurden.

466 Das Kalenderblatt 100913 Meine MathOverflow-Episode (44)

Am. 8. 7. formulierte ich meine Frage zum Mengenlimes noch überzeugender, nämlich in der auch parallel dazu im KB100709 dargestellten Form:

6 Sequences are given. What is the limit of the last one?

The sets E_n = {2, 4, 6, ..., 2n}
can be separated into
S_n = {x | $x\in E_n \wedge x>n$}
and
$E_n - S_n = A_n$.

A_n and S_n
$\emptyset$ and {2}
{2} and {4}
{2} and {4, 6}
{2, 4} and {6, 8}
{2, 4} and {6, 8, 10}
{2, 4, 6} and {8, 10, 12}
$\rightarrow$
E and $\emptyset$

A_n and O_n (the positive odd numbers)
$\emptyset$ and {1}
{2} and {1}
{2} and {1, 3}
{2, 4} and {1, 3}
{2, 4} and {1, 3, 5}
{2, 4, 6} and {1, 3, 5}
$\rightarrow$
E and O

And here comes a real question:

A_n and {Letters}
$\emptyset$ and {a}
{2} and {a}
{2} and {a, b}
{2, 4} and {a, b}
{2, 4} and {a, b, c}
{2, 4, 6} and {a, b, c}
$\rightarrow$
E and ?

Can the limit of a sequence depend on how its elements are named?

Diese Frage rief ein paar Kommentare hervor:

supercooldave: Looks like nonsense.

Gjergji Zaimi: Here's a solution: Your last sequence is not defined because you are going to run out of letters... More seriously, be careful with what you mean by "limit".

primus inter parias {{WM}}:
@dave: Regards to your girlfriend. {{Das ist die Dame, die sich von ihrem supercooldave keine unterschiedlichen Unendlichkeiten einreden lassen will.}} She is better in real mathematics than you are. But with nonsense you are not far from the goal.
@Gjergji The limit has a clear definition in set theory. Hasn't it?

Gjergji Zaimi: @primus inter parias: Then your question has a clear answer in set theory. Hasn't it?

primus inter parias {{WM}}: Yes, I think so. But I don't know it. Can you help me? For that purpose I put the question.

Dann ergab der Link nur noch die Weisheit: You step in the stream, but the water has moved on. This page is not here. Wie der geneigte Leser sicherlich vermuten wird, war das noch nicht das Ende vom Lied, denn das eigentliche Problem erkannte kein Leser. Zumindest hat keiner die Erkenntnis mitgeteilt. Der Grund dafür kann die kurze Lebensdauer des Textes gewesen sein. Das eigentliche Problem liegt nämlich darin, dass ZFC einen Widerspruch ergibt: Die Aussagen |{a, b, c, ...}| = 0 und |{a, b, c, ...}| = $\aleph_0$ sind beide ableitbar.

467 Das Kalenderblatt 100914 Meine MathOverflow-Episode (45)

Nachdem die gestern vorgestellte Frage von einem Computerprogramm in MathOverflow gelöscht worden war, wiederholte ich sie mit dem Vorspann:

You step in the stream, but the water has moved on. This page is not here.
You are in error, you stupid computer, it is just here.

und mit der Unterschrift: Regards, W M

Denn weil mir das Leben unter Pseudonym unangenehm ist, beschloss ich, einen neuen Versuch unter eigenen Initialen zu wagen. Da mein Gegner ein Computer war, ließ er sich mit einem Spatium austricksen. Ich verwendete als "Pseudonym" W M.

Die Frage existierte auf diese Weise längere Zeit und wurde ca. 100 Mal angesehen.

Ein verwunderte Leser fragte: What do you mean with: "You step in the stream, but the water has moved on. This page is not here. You are in error, you stupid computer, it is just here"? And isn't this more like a homework question?
Chris Phan hatte es erkannt: This question was posted earlier today, by a different account. It was deleted. He's quoting the 404 page.

Das eigentliche Problem erkannte kein Leser. Zumindest hat keiner seine Erkenntnis mitgeteilt. Der Grund dafür kann die kurze Lebensdauer des Textes gewesen sein. Das eigentliche Problem liegt nämlich darin, dass ZFC einen Widerspruch ergibt: Die Aussagen |{a, b, c, ...}| = 0 und |{a, b, c, ...}| = $\aleph_0$ können beide aus ein und demselbem Fall abgeleitet werden, was hier an einem sehr einfachen Beispiel noch einmal deutlich gemacht werden soll.

Sei (A_k) die unendliche Folge der endlichen Folgen
A_k = k+1, k+2, ..., k+k
mit (k in |N). Die unendliche Folge (A_k) konvergiert nach dem gängigen Konvergenzkriterium der Mengenlehre
http://en.wikipedia.org/wiki/Set-theoretic_limit
gegen den endlichen Grenzwert leere Menge. Wenn im Grenzfalle alle Elemente verschwinden, so müssen auch die zweiten Summanden aller Elemente verschwinden. Die Folge der zweiten Summanden jedes Elementes konvergiert aber nach demselbem Konvergenzkriterium gegen den unendlichen Grenzwert |N. Die Menge der zweiten Summanden besitzt demnach im Limes sowohl die Kardinalzahl 0 (da sie leer ist) als auch die Kardinalzahl $\aleph_0$ (da sie $\mathbb{N}$ ist). Anstelle der zweiten Summanden kann man auch mit den Indizes der Elemente der Folgen argumentieren. Das wird im nächsten KB wieder aufgenommen.

468 Das Kalenderblatt 100915 Meine MathOverflow-Episode (46)

Da die sechs Mengenfolgen aus dem KB100913 eine zwar schlagende, aber doch recht langwierige Beweisführung ergeben, ließ ich mir eine verkürzte Form einfallen, die genau so überzeugend ist wie die längere und für MO-Latex-unkundige Leser folgendermaßen anzuschreiben ist: If in the sequence

(E_n) of sets $E_n = \{2, 4, 6, ..., 2n\}$

only the elements x of the subsets

$S_n = \{ x \mid x \text{ in } E_n \text{ and } x > n \}$ are indexed:

$(E_n) = \{2_1\}, \{2, 4_1\}, \{2, 4_1, 6_2\}, \{2, 4, 6_1, 8_2\}, \{2, 4, 6_1, 8_2, 10_3\}, ...$

the sequence of the subsets S_n containing all the indexed elements has as its limit the empty set, but the sequence of the set of indices has the limit ∞.

Has this paradoxon been overlooked?

Das Problem besitzt eine ganz anschauliche Interpretation: Man legt Kugeln O aus, welche die positiven geraden Zahlen enthalten. Diejenigen, die die Kardinalzahl der Menge übertreffen, legt man in Mulden |_|, wobei die Zahl der Kugeln und der Mulden wächst. Hier die Visualisierung des Anfangs der obigen Folge:

|O|
O |O|
O |O| |O|
O O |O| |O|
O O |O| |O| |O|

Am Ende des Endlichen, was laut Mengenlehre ja tatsächlich existiert (ob von Cantors Gott oder Zermelos Axiom gegeben, ist hier gleichgültig), sind alle Mulden noch da, aber alle sind leer. Nach unendlich vielen Kugeln O O O ... folgen ebensoviele leere Mulden |_| |_| |_| ...

Um diese Sicht zu verhinden, waren aufmerksame Löschmannschaften am Werk. Deshalb musste ich die Frage mehrmals leicht variiert wiederholen:

Has this paradoxon really been overlooked?
How can this be understood?
How can that be understood?
Important question
Most important question

Mein Text war jeweils für ein kurzes Zeitfenster lesbar. Er wurde von ca. 100 Lesern angesehen, und es wurden auch einige Kommentare abgegeben, die ich aber leider nicht gespeichert habe und die nun auf ewig verloren sind, ausgenommen der folgende:

Anweshi: So what's the problem?

Es ist dies: Aus der Existenz aller endlichen Anfangsabschnitte der Form

1
1, 2
1, 2, 3
...

können wir manchmal auf den Grenzwert |N und manchmal auf den Grenzwert { } schließen - allein, dieser Schluss ist sehr willkürlich, denn es gibt keinen "schlüssigen" Hinweis darauf, welche Wahl zu treffen ist. Das darf in der Mathematik nicht sein, denn "zu recht schreibt Spinoza der Mathematik die Kraft zu, den Menschen Norm und Richtschnur beim Erkennen der Wahrheit in allen Dingen zu sein." [Zweite These der Habilitationsschrift von Georg Cantor: "De transformatione formarum ternariarum quadraticarum", Halle 1869]

Wozu gehören die auch im Grenzfalle vorhandenen unendlich vielen Indizes in Wahrheit, wenn im Grenzfalle keine indizierbaren Elemente mehr vorhanden sind? Ist das Kugeln der Kugeln in die Mulden ein Supertask? (also die übliche Ausrede, die Mengenlehrer murmeln, wenn unendlich viele Murmeln verschwinden). Hier sehen wir einen eklatanten Widerspruch zu der Annahme des vollendeten Unendlichen. Die Lösung ist aber ganz einfach und gar nicht paradox: Weder verschwinden die indizierten Elemente noch wird die Menge der Indizes vollendet. Beide Mengen wachsen immer weiter, ohne je zur Apotheose zu gelangen. Es gibt nämlich keine Grenzen im Grenzenlosen.

469 Das Kalenderblatt 100916 Meine MathOverflow-Episode (47)

Jean-Philippe Burelle hatte das aus vielen Quellen bekannte Urnenproblem zur Sprache gebracht: A problem of an infinite number of balls and an urn. [...] You have a countably infinite supply of numbered balls at your disposal. They are all labeled with the natural numbers {1,2,3,...}. At 11h30, you put in the urn the balls labeled 1 to 10, and then right after remove the ball labeled 1. Then, at 11h45, you put into the jug balls 11 to 20, and remove the ball number 2, etc. In general at 1/2^n hours before midnight, you put in balls (n-1)10+1 to 10n, and remove the ball labeled n. [...] The question is: how many balls are left in the urn at (or after) midnight? (that is, after a countably infinite number of steps). {{Er wandelte es noch ein wenig ab, doch das möge der interessierte Leser ebenso wie die mehr oder weniger von Formalismusglauben oder Verstand geprägten Antworten im Original nachlesen:
http://mathoverflow.net/questions/7063/a-problem-of-an-infinite-number-of-balls-and-an-urn/31160#31160
}}

Eine Antwort von Daniel Asimov begann so: The reason this problem has the generally accepted answer of 0 balls in the jug {{im Originaltext war von jug statt urn die Rede gewesen, was Gerald Edgar zu der Bemerkung veranlasst hatt: Write about balls and jugs ... someone may think you intend some sexual double-entendre... Isn't that mathematical item you put the balls in usually known as an urn?}} at midnight -- among mathematicians -- is that for any given ball, one may follow its itinerary: at some point it goes into the jug, and then at some point no earlier it leaves the jug, never to be moved again. {{Tatsache ist, dass für jeden ausgehenden Ball, zehn Bälle eingetzt werden. Mathematiker könnten 10 - 1 = 9 rechnen und beweisen, dass die unendliche Summe 9 + 9 + 9 + ..., ob definiert oder nicht, unmöglich kleiner als 10^{10} und erst recht nicht kleiner als 1^1 sein kann. Matheologen haben diese einfache Art der Argumentation leider verlernt. Das wäre tolerierbar, würden sie ihre einseitige Denkungsart nicht als "die Mathematik" bezeichnen.}}

Diese Antwort kommentierte Victor Protsak: I am a mathematician and I don't accept "0 balls" as "the" answer (because of implicit continuity assumptions). There is ample evidence at this page that I am not alone in that. {{Wie sollte auch im Unendlichen eine Diskontinuität zustandekommen, wo es doch nichts weiter als die unabgebrochene Fortsetzung des nämlichen Prozesses ist?}}

Andrea Ferretti: I'm just rephrasing what other people have said, but more or less you are telling us this. You have function f, defined on ℕ which is the number of balls after n steps. One can actually compute f(n) = 9n. The question is: if we extend this function as a "function" from ordinals to say ℕ U ∞ what is the value of f(ω)? You are arguing that it should be ∞ and indeed it is if you require some sort of continuity of f at ω. But you have just shown a (discontinous) extension with f(ω) = 0. There is nothing paradoxical about it. {{Doch, natürlich ist das ein Paradoxon, denn ebenso wie die Mathematik keine Wissenschaft ist, die unabhängig von der Realität existiert, ist die Kardinalzahl keine "function", die unabhängig von der Menge existieren und und einen davon unabhängigen Grenzwert besitzen kann. Die Kardinalzahl einer Menge ist nicht von dieser unabhängig, sondern gibt genau deren Elementzahl an. Das Verleugnen dieser Tatsache zeigt, dass die Matheologie genau so ein Irrweg der Evolution ist wie die Schwanzfedern des Argusfasans. Eine Menge, die stets ein Element enthält - auch im Grenzfall - besitzt die Kardinalzahl 1 - auch im Grenzfall. Denn was sollte die Grenzkardinalzahl betreffen, wenn nicht die Grenzmenge? Um dies zu verkennen muss eine geradezu menschenrechtswidrige geistige Verstümmelung stattgefunden haben, eine intellektuelle Beschneidung in den Initiationsriten der Matheologen, die dem Außenstehenden als ebenso schmerzhaft erscheint wie die Beschneidung von Mädchen in den afrikanischen Tiefkulturen - aber vermutlich wird sie von den Betroffenen nicht als so schmerzhaft empfunden.}}

470 Das Kalenderblatt 100917 Meine MathOverflow-Episode (48)

Alle in den vorhergehenden Beiträgen zu Mengenfolgen und zur Urne mit Ballein- und -auswurf (s. KB100916) geschilderten Absurditäten erwachsen allein aus Cantors religiösem oder Zermelos axiomösem Glauben, dass die natürlichen Zahlen irgendwann erschöpft sein und ω als Argument einer Funktion erreicht werden könne. Diese Ansicht erfreut sich in Matheologenkreisen großer Popularität. Mich verwunderte deswegen, dass Andrea Ferretti für seine diesbezügliche Aussage keine positive Bewertung erhalten hatte. Jedenfalls wollte ich gern den von Vernunft diktierten Kommentar Victor Protsaks unterstützen. Das konnte aber nicht auf dem Wege eines Kommentars geschehen, da ich inzwischen alle Punkte eingebüßt hatte (zum Kommentieren muss man eine gewisse Reputation in Matheologenkreisen besitzen). Deswegen wählte ich den Geschäftsordnungstrick einer offiziellen Antfrage:

"I am a mathematician and I don't accept '0 balls' as 'the' answer (because of implicit continuity assumptions). There is ample evidence at this page that I am not alone in that. – Victor Protsak"

@ Victor Protsak
Excuse me quoting you here, but I cannot add a comment.

You are not alone! The solution came yesterday in a question that I cannot find today. {{Sie war natürlich von den Gedankenstimmigkeitsapostaten gelöscht worden.}} However, the solution is this: If "0 balls" were the correct solution, then the sequence of natural numbers used as indices in the following sequence of positive even numbers must approach the empty set. Only in a "mathematics" were this would be possible "0 balls" could be the correct answer. But I doubt that that sort of "mathematics" could yield any correct answers at all.

{{Ich habe die Originalantwort schon im vorgestrigen KB wiedergegeben. In der Folge der Anfangsabschnitte der positiven geraden Zahlen, werden nur die Zahlen, die die Kardinalzahl des Abschnitts übertreffen, indiziert:

$\{2_1\}, \{2, 4_1\}, \{2, 4_1, 6_2\}, \{2, 4, 6_1, 8_2\}, \{2, 4, 6_1, 8_2, 10_3\}, ...$

Da ich mit Miles A More ein neues Pseudonym verwendete, brauchten die Hüter der Wahrheit einige Zeit, um die Gefährlichkeit des Textes zu erkennen und einen ausreichend großen Löschtrupp zusammenzustellen. Mein Beitrag existierte ca. 5 Stunden und erhielt, wie ich stolz hinzufügen darf, fünf negative Bewertungen. Eine Wiederholung überlebte nur 3 Minuten. Daraufhin wechselte ich das Pseudonym.}}

471 Das Kalenderblatt 100918 Meine MathOverflow-Episode (49)

Ich hatte die folgende Unterstützung für Victor Protsaks Position im Urnenproblem (s. KB100916) gepostet:

You are not alone! If "0 balls" were the correct solution, then the sequence of natural numbers used as indices in the following sequence of positive even numbers must approach the empty set:

$\{2_1\}, \{2, 4_1\}, \{2, 4_1, 6_2\}, \{2, 4, 6_1, 8_2\}, \{2, 4, 6_1, 8_2, 10_3\}, ...$

Only in a "mathematics" were this would be possible "0 balls" could be the correct answer. But I doubt that that sort of "mathematics" could yield any correct answers at all.

Nachdem der erste Beitrag von Miles A More 5 Stunden, der zweite, sehr ähnlich lautende aber nur 3 Minuten bestand, bevor er gelöscht wurde, wechselte ich zu Hippasos. Doch die Lebensdauer betrug nur 5 Minuten, eine Wiederholung sogar nur 3 Minuten. Nun war mein sportlicher Ehrgeiz geweckt. Dürfen Intoleranz und Ignoranz wirklich in der Welt des mathematischen Überflusses triumphieren? Ist es eine ausreichende Entschuldigung, dass einige, zugegeben sehr intelligente, Dogmatiker an ihre absurde Lehre glauben? Die sicher nicht weniger intelligenten Dominikaner glaubten ebenso fest an die Gottgefälligkeit der Hexenverbrennungen. Ich meine, in beiden Fällen passt hier ein Zitat von Bertrand Russell: "This is an instance of the amazing power of desire in blinding even very able men to fallacies which would otherwise be obvious at once." ["What I believe" aus "Why I Am Not A Christian and Other Essays on Religion and Related Subjects", (Paul Edwards, ed.), London: George Allen & Unwin (1957)]

Es kostete mich nur einen Knopfdruck, um den Beitrag nochmals zur Diskussion zu stellen. Diesmal schien der (im Widerspruch zu allen Gerüchten über Mathematiker) recht phantasielos mathoverflow genannte Automat zu schlafen. Oder war er anderweitig beschäftigt, bewies vielleicht gerade etwas von matheologischer Wichtigkeit? Derweil gab ich bei jedem Ansehen der Seite einen Kommentar ab:

Hippasos {{WM}}: How long will we survive this time?
Hippasos {{WM}}: Two minutes have passed.
Hippasos {{WM}}: Three minutes. mathoverflow, you have become very slow. Some oil needed?
Hippasos {{WM}}: 5 minutes. Seems to get a long run.
Hippasos {{WM}}: Come on! This is dangerous stuff. Poisoned maths. How long will you resist from censorship?
Hippasos {{WM}}: KGB-methods no longer in good function after so many spys have been deported? {{Die USA hatten mit Russland gerade ein paar Spione ausgetauscht.}}
Hippasos {{WM}}: Ah, the first -1. I am discovered. But 13 minutes is a good score. Bye.
Hippasos {{WM}}: I am really disappointed! Shall evil rule the world of matheology? How many guileless people may have read these condemned lines meanwhile?
Hippasos {{WM}}: 31 min. A good run.
Hippasos {{WM}}: 1 hour! Are you sleeping?

Dieses Spiel wiederholte ich noch ein paar Mal, mit wechselndem Erfolg. Als Hippasos zu bekannt war, wechselte ich zu Eudoxos. Dabei setzte ich die Kommentarserie fort.

Hippasos {{WM}}: By the way, do you know who Hippasos was? A very interesting person who published that the foundations of pythagorean mathematics were nonsense.
Hippasos {{WM}}: Of course, they tried to silence him.

Der Beitrag verschwand. Er war tauchte wieder auf.

Hippasos {{WM}}: But they did not succeed!

Der Beitrag verschwand. Er war tauchte wieder auf.

Eudoxos {{WM}}: He had successors!

Eudoxos {{WM}}: Last time you were really fast. But now? Again a quarter of an hour.

Die 5 Beiträge des Hippasos erzielten 14 negative Bewertungen, genau so viele wie die drei des Eudoxos. Zusammen mit den 9 negativen Bewertungen der beiden Beiträge von Miles A More kommt obiger Text also auf eine Summe von 37 Bewertungen, wovon allein der letzter Beitrag 7 negative Bewertungen erhielt - und zwar innerhalb von 10 Minuten. Er muss von einer unerhörten Brisanz für die Generalstabspogromatiker sein.

472 Das Kalenderblatt 100919 Meine MathOverflow-Episode (50)

Drei Beweise gegen die transfinite Mengenlehre wurden ausführlich und für jeden interessierten Geist verständlich diskutiert:

1) Nach Cantors Theorem enthält das Einheitsintervall überabzählbar viele reelle Zahlen, der Binäre Baum (BB) also überabzählbar viele unendliche Pfade oder Binärziffernfolgen. Ich zeige dagegen, dass sich der BB mit nur abzählbar vielen unendlichen Pfaden restlos konstruieren lässt, so dass kein Pfad, d. h. keine Binärziffernfolge fehlt. Der Cantorsche Trick der Zifferninversion versagt. Jede Ziffernfolge, die sich durch das Austauschen von Ziffern aus einer im BB vorhandenen Ziffernfolge ergibt, ist im BB ebenfalls vorhanden. Damit ist bewiesen, dass es im Einheitsintervall höchstens abzählbar unendlich viele reelle Zahlen gibt, die sich durch Ziffernfolgen definiert lassen. (Zur Erinnerung: Das Cantorsche Diagonalverfahren beruht allein auf Ziffern.)

Sollten also mehr reelle Zahlen existieren, so müssten sie durch andere, also endliche Definitionen wie "π" oder "0,111..." definiert sein.

2) Eine abzählbare "List of Everything"

0
1
00
01
10
11
000
...

widerlegt die Möglichkeit, überabzählbar viele reelle Zahlen endlich zu definieren. Da die Möglichkeit von überabzählbar vielen durch Ziffernfolgen definierbaren Zahlen unter (1) ausgeschlossen wurde, ist Cantors Theorem widerlegt.

3) Es gibt keine konsistente Limesordinalzahl, denn ein und dieselbe Mengenfolge wie

(A_k) mit $A_k = k+1, k+2, ..., k+k$

kann verschiedene Grenzwerte besitzen, hier die leere Menge (bezüglich der Glieder) und $\mathbb{N}$ (bezüglich der zweiten Summanden bzw. der Indizes). Mit (3) ist schon die kleinste vollendete Unendlichkeit als inkonsistent ausgeschlossen. (1) und (2) sind eigentlich überflüssig.

Der interessierte Leser mag noch erfahren, dass das Urnenproblem, von dem zuletzt die Rede war, inzwischen nicht mehr aktiv ist. Die am 28. November 2008 gestartete, also für

MathOverflow-Verhältnisse schon denkmalschutzwürdige Frage ward "closed as no longer relevant by Robin Chapman, François G. Dorais". Wenn der Erithacus aus dem MOttingham MOrass das so sieht, dann muss es wohl so sein. Aber nur dort!

Alles hat einmal ein Ende. Meine MathOverflow-Episode auch. Ich danke für die mehr oder weniger freundliche Aufmerksamkeit der sehr und der weniger geschätzten Leser.

473 Das Kalenderblatt 100920

In 1960 the physicist Eugene Wigner published an influential article on "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences". [E. P. Wigner: "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", Communications on pure and applied mathematics, 13 (1960)] I counter the claim stated in its title with an interpretation of science in which many of the uses of mathematics are shown to be quite reasonable, even rational, although maybe somewhat limited in content and indeed not free from ineffectiveness. The alternative view emphasizes two factors that Wigner largely ignores: the effectiveness of the natural sciences in mathematics, in that much mathematics has been motivated by interpretations in the sciences, and still is; and the central place of theories in both mathematics and the sciences, especially theory-building, in which analogies drawn from other theories play an important role. {{Alle richtige Mathematik hat sich an den Naturwissenschaften orientiert. Mathematik ist angewandte Physik. Cantor hatte das auch für die transfinite Mengenlehre beabsichtigt, die er nach eigenen Angaben vor allem zu diesem Zweck entworfen hatte (vgl. z. B. KB090616, KB091213 oder KB100403), jedoch war seine Naturvorstellung (im Gegensatz zu der vieler seiner Zeitgenossen) dermaßen falsch, dass daraus nur falsche Mathematik entspringen konnte.}}

[Ivor Grattan-Guinness: "Solving Wigner's Mystery: The Reasonable (Though Perhaps Limited) Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences" Springer Science+Business Media, Inc., Volume 30, Number 3 (2008)]

474 Das Kalenderblatt 100921

Von der Kühnheit der Cantor'schen Begriffsschöpfungen zu sprechen, erfaßt jedoch nur den einen Teil seiner Leistungen - Mut, schließlich, hat auch der Mameluck. Was als anderer Teil wesentlich hinzukam, war der Reichtum an mathematischem Inhalt, der den Cantor'schen Begriffen innewohnte [...] {{wo der Reichtum in prächtigen Farben changiert}}.

Sollte dann aber immer noch ein Störenfried nachfragen, was es denn mit dieser Existenz Genaueres auf sich habe, so kann man allemal auf einen rein syntaktischen, formalen Standpunkt retirieren [...] {{und die Farben verblassen}}.

[Walter Felscher: "Naive Mengen und abstrakte Zahlen III", Bibl. Inst., Mannheim (1979) 25, 27]

475 Das Kalenderblatt 100922

"Unsterblichkeit, nun bist du endlich mein" war früher ein gängiger Text bei Grabinschriften. Tote sind ganz bestimmt unsterblich. Steine auch. Aber das heißt nicht, dass sie ewig lebten.

Mit der Überabzählbarkeit ist's ähnlich. Die reellen Zahlen im Einheitsintervall oder die Mistkäfer in Ägypten kann man nicht zählen. Aber das bedeutet nicht, dass es überunendlich viele gäbe.

Solche Schlüsse sind Flausen. (Beim ewigen Leben bin ich mir aber nicht ganz sicher.)

476 Das Kalenderblatt 100923

[...] können wir nämlich in der Zahlenreihe weitergehen und uns die Menge aller Zahlen 1, 2, 3, ... und so weiter fort ohne Ende, die Menge aller "natürlichen Zahle" gebildet denken.

Die aus den Elementen der Arithmetik geläufigen einfachsten Eigenschaften der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... besonders auch das Rechnen mit ihnen, werden nicht nur zwecks Bildung von Beispielen als bekannt vorausgesetzt, sondern auch öfters systematisch als Beweishilfsmittel herangezogen. {{Hier war die Null noch nicht naturalisiert.}}

[A. Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre", Springer, Berlin (1928) p. 7]

477 Das Kalenderblatt 100924

Die Glieder der Folge

$a_1 = 0{,}9$
$a_2 = 0{,}99$
$a_3 = 0{,}999$
...

mit dem allgemeinen Glied $a_n = 1 - 10^{-n}$ können, hinsichtlich der Neunen in der Dezimaldarstellung, als eine Unärdarstellung für die natürlichen Zahlen dienen.

Da die Folge nicht endet, gibt es zu jeder Dezimaldarstellung eine mit mehr Neunen. Das ist potentielle Unendlichkeit:

$$\forall n\ \exists m : a_m > a_n$$

Der Grenzwert 1 = 0,999... wird so allerdings nur im Sinne von Cauchy approximiert, niemals aktual erreicht. Cantor und seine Nachfolger behaupten dagegen, dass es für jede reelle Zahl eine genaue Dezimaldarstellung gäbe (und für die Zahl 1 sogar zwei), so dass nichts hinzugefügt und nichts fortgelassen werden darf. Die Darstellung 0,999... erfordert $\aleph_0$ Neunen, denn für jede kleinere Anzahl von Neunen ist der Wert des Folgengliedes $a_n \neq 1$. Wenn also der Grenzwert mit Hilfe einer Neunerfolge genau darstellbar sein soll, so muss gelten

$$\exists m\ \forall n : a_m > a_n$$

Die Zahl 1 = 0,999... unterscheidet sich allein durch Ziffern von allen Gliedern der Folge (a_n). Ziffern an endlich indizierten Stellen können diese Aufgabe nicht erfüllen, denn alle sind bereits in Folgengliedern a_n verwendet, ohne dass die Zahl 1 erreicht würde. Cantors Behauptung erzwingt demnach mindestens eine nicht natürlich indizierte, eine "ω-te" Ziffer. Sie heißt so, weil ihr Index $m = \omega$ ist.

478 Das Kalenderblatt 100925

Infolgedessen kann eine Menge m außer durch Angabe ihres "Namens“ m auch durch Angabe sämtlicher in ihr vorkommenden Elemente eindeutig bezeichnet werden. Will oder kann man diese Elemente nicht alle aussprechen bzw. anschreiben, so wird man sich oft unmißverständlich mit "usw.“ oder mit Punkten behelfen können. {{Na, wenn das nur keinen Punktabzug gibt!}} Man gelangt so zu unserer [...] Schreibweise M = {a, b, c, ...}, wo a, b, c, ... die sämtlichen Elemente der Menge M bezeichnen; im Gegensatz zu dort stellen hier die Elemente selbst notwendig Mengen dar, da in unserer Axiomatik ja überhaupt nur Mengen auftreten.

{{Infolgedessen kann eine Zahl (oder ein Pfad) P außer durch Angabe ihres "Namens“ P auch durch Angabe sämtlicher in ihrer Binärentwicklung vorkommenden Bits eindeutig bezeichnet werden. Will oder kann man diese Bits nicht alle aussprechen bzw. anschreiben, so wird man sich abzählbar oft unmißverständlich mit "usw.“ oder mit Punkten behelfen können. Man gelangt so zu der Schreibweise P = a, b, c, ..., wo a, b, c, ... die sämtlichen Bits der Zahl P bezeichnen.}}

[Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre" 3. Aufl., Springer, Berlin (1928) 275]

479 Das Kalenderblatt 100926

Hiermit {{mit einem Namen oder mit Hilfe von drei Pünktchen}} wird freilich nur ganz formal wieder die Bestimmung und Bezeichnung einer Menge durch ihre Elemente erreicht, wie sie uns ganz im Anfang entgegengetreten ist. Das damals allenfalls mögliche Mißverständnis, als "bestehe" eine Menge aus ihren Elementen, hat jetzt sicherlich keine Berechtigung mehr; es ist eine völlig inhaltsfreie, übrigens eindeutige Zuordnung, vermöge deren jeweils gegebenen Objekten eine "Menge“ entspricht, die jene "als Elemente enthält“. [Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre" 3. Aufl., Springer, Berlin (1928) 275]

{{Eine Menge enthält, aber sie besteht nicht aus. Das ist wohl ein bedeutender Unterschied in der Axiomatischen Mengenlehre - vielleicht sogar zur Beseitigung von Widersprüchen notwendig? In der Realität wäre es allerdings kein Unterschied. (Es sei denn, unter "Menge" subsummieren wir auch noch einen die Elemente enthaltenden Behälter - einen Enthälter sozusagen. In diesem Falle stellt man sich eine leere Menge am besten als einen dünnen durchsichtigen Plastikbeutel vor, wie sie im Supermarkt zum Verwahren von Obst ausliegen. Dann wären aber schon zwei leere Mengen von einer leeren Menge verschieden, nicht erst, wenn eine die andere enthielte. Doch das ist wohl traumhaft traumatische Mengenlehre und hat mit Realität oder Natur nichts zu tun.) Cantor scheint sich also geirrt zu haben mit seiner Äußerung:}} Von Hypothesen ist in meinen arithmetischen Untersuchungen über das Endliche und Transfinite überall gar keine Rede, sondern nur von der Begründung des Realen in der Natur Vorhandenen. [Cantor an Veronese, 17.11.1890]

480 Das Kalenderblatt 100927

Ein besonders schwieriger Punkt in dem Systeme des Spinoza ist das Verhältnis der endlichen Modi zu den unendlichen Modis; es bleibt dort unaufgeklärt, wieso und unter welchen

Umständen sich das Endliche gegenüber dem Unendlichen oder das Unendliche gegenüber dem noch stärker Unendlichen in seiner Selbständigkeit behaupten könne. Das im § 4 bereits berührte Beispiel scheint mir in seiner schlichten Symbolik den Weg zu bezeichnen, auf welchem man der Lösung dieser Frage vielleicht näher kommen kann. Ist ω die erste Zahl der zweiten Zahlenklasse, so hat man $1 + \omega = \omega$, dagegen $\omega + 1 = (\omega + 1)$, wo $(\omega + 1)$ eine von ω durchaus verschiedene Zahl ist. Auf die Stellung des Endlichen zum Unendlichen kommt also, wie man hier deutlich sieht, alles an; tritt das erstere vor, so geht es in dem Unendlichen auf und verschwindet darin; bescheidet es sich aber und nimmt seinen Platz hinter dem Unendlichen, so bleibt es erhalten und verbindet sich mit jenem zu einem neuen, weil modifizierten Unendlichen. [Ernst Zermelo (Hrsg.): "Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer, Berlin (1932) p. 177]

Zu recht schreibt Spinoza der Mathematik die Kraft zu, den Menschen Norm und Richtschnur beim Erkennen der Wahrheit in allen Dingen zu sein. [G. Cantor, zweite These der Habilschrift: "De transformatione formarum ternariarum quadraticarum", Halle (1869)] {{Welche Wahrheit ruht aber in der Behauptung, dass die Zahl 0,999... $\aleph_0$ Ziffern 9 besitzt, wobei $\aleph_0$ eine Zahl größer als alle natürliche Zahlen ist, und doch keine Ziffer 9 existiert, die nicht auch in einer endlichen Neunerfolge enthalten wäre? In Wahrheit ist diese Behauptung falsch, wie jeder Vernunftbegabte leicht erkennen kann und wie vor dem Dunklen Jahrhundert der Mathematik auch von hervorragenden Mathematikern erkannt wurde. Hier von Kronecker zu sprechen, hieße Eulen nach Athen tragen. Doch auch sein womöglich noch berühmterer Kollege Weierstraß ließ keinen Zweifel daran:}} b > a, wenn es eine Zahl c gibt, die wohl von b, nicht aber auch von a Bestandteil ist. {{Geisterglaube und Quantorenmagie sind hier fehl am Platze.}}

481 Das Kalenderblatt 100928

Sir Arthur Eddington (1882 - 1944): There was just one place where (Einstein's) theory did not seem to work properly, and that was - infinity. I think Einstein showed his greatness in the simple and drastic way in which he disposed of difficulties at infinity. He abolished infinity. ... Since there was no longer any infinity, there could be no difficulties at infinity. [Eli Maor: "To Infinity and Beyond. A Cultural History of the Infinite", Birkhäuser, Basel (1987) p. 221]

482 Das Kalenderblatt 100929

Abstract. This paper examines the possibilities of extending Cantor’s two arguments on the uncountable nature of the set of real numbers to one of its proper denumerable subsets: the set of rational numbers. The paper proves that, unless certain restrictive conditions are satisfied, both extensions are possible. It is therefore indispensable to prove that those conditions are in fact satisfied in Cantor’s theory of transfinite sets. Otherwise that theory would be inconsistent.

We have just proved [...] the alternatives of Cantor 1874-argument on the cardinality of the real numbers can be applied to the set $\mathbb{Q}$ of rational numbers, except the last one, that applies only if the common limit of the sequences of left and right endpoints of the QP-intervals is rational. Evidently, if Cantor’s 1874-argument could be extended to the rational numbers we would have a contradiction: the set $\mathbb{Q}$ would and would not be denumerable. Accordingly, in order to ensure the impossibility of that contradiction, each of the following points have to be proved: Whatsoever be the rational interval (a, b) and whatsoever be the reordering of <q_i>, it must hold:

(1) The number of QP-intervals can never be finite.

(2) The sequences of endpoints $<a_i>$ and $<b_i>$ can never have different limits.
(3) The common limit of $<a_i>$ and $<b_i>$ can never be rational.

[...] Until those proofs be given, Cantor’s 1874-argument should be suspended, and the possibility of a contradiction involving the foundation of (infinitist) set theory should be considered.

[Antonio Leon Sanchez: "Cantor versus Cantor" (2010)]
http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1001/1001.2874v3.pdf

On the other hand, the proof can feign the uncountability of a countable set. If, for instance, the alternating harmonic sequence

$$\omega_n = (-1)^n/n \to 0$$

is taken [...], yielding the intervals (-1, 1/2), (-1/3, 1/4), ... we find that its limit 0 does not belong to the sequence, although the set of numbers involved, $\mathbb{N}$ U {0}, is obviously denumerable [...]

The alternating harmonic sequence does not, of course, contain all real numbers, but this simple example demonstrates that Cantor's first proof is not conclusive. Based upon this proof alone, the uncountability of this and every other alternating convergent sequence must be claimed. Only from some other information we know their countability (as well as that of $\mathbb{Q}$), but how can we exclude that some other information, not yet available, in future will show the countability of $\mathbb{T}$ or $\mathbb{R}$?

[W. Mueckenheim: "On Cantor's important proofs" (2003)]
http://arxiv.org/pdf/math.GM/0306200

483 Das Kalenderblatt 100930

Cantor’s diagonal argument makes use of a hypothetical table T containing all real numbers within the real interval (0, 1). That table can be easily redefined in order to ensure it contains at least all rational numbers within (0, 1). In these conditions, could the rows of T be reordered so that the resulting diagonal and antidiagonal were rational numbers? In that case not only the set of real numbers but also, and for the same reason, the set of rational numbers would be non denumerable. And then we would have a contradiction since Cantor also proved the set of rational numbers is denumerable. Should, therefore, Cantor’s diagonal argument be suspended until it be proved the impossibility of such a reordering? Is that reordering possible? The discussion that follows addresses both questions.

{{Wenn aber irrationale Zahlen gar kein ω-tes Element besitzen und nur eine Überlagerung endlicher Anfangsabschnitte sind, so ist die folgende Diskussion überflüssig, denn dann kann Cantors Liste ja nur rationale Diagonalzahlen enthalten, jedenfalls soweit man es prüfen kann, weil alle Ziffern zu endlichen Anfangsabschnitten und damit zu rationalen Zahlen gehören.}}

[Antonio Leon Sanchez: "Cantor versus Cantor" (2010)]
http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1001/1001.2874v3.pdf

484 Das Kalenderblatt 101001

Haben Sie schon das neueste opus von Paul Dubois gesehen, betitelt: Die allgemeine Functionentheorie, Tübingen, Lauppsche Buchhandlung {{1882}}? Ich habe es nicht für möglich gehalten, daß heutigen Tages so viel Unrichtiges über den wichtigen Gegenstand geschrieben werden könne von einem professionellen Fachgenossen. [Cantor an Mittag-Leffler, 10. Mai 1882] Nun erfahre ich, daß er für sein, auch im Uebrigen recht sonderbares und confuses Buch einen französischen Bearbeiter gefunden hat. [Cantor an Mittag-Leffler, 30. Mai 1888] Dubois' Arbeiten sind zum grössten Theil nichts werth und wenn er einmal was Gutes gefunden hat, so sind doch seine Methoden schlecht. [Cantor an Dedekind, 7. Okt. 1882]

{{Was Gutes}} ist heute als "Cantorsches Diskontinuum" bekannt. Cantor erwähnt es in diesem Brief {{an Mittag-Leffler, 25. Juni 1882}} zum ersten Mal; Cantor war jedoch nicht der erste, der eine Menge dieses Typs angegeben hat. In dem von ihm so geschmähten Buch du Bois-Reymonds "Die allgemeine Functionentheorie" beschreibt dieser schon ihr Bildungsprinzip (S.188). Bei der Intensität, mit der Cantor andere Werke zu studieren pflegte, ist kaum anzunehmen, daß ihm dieses Beispiel entgangen ist. Cantor hat einem Spezialfall (Intervalldrittelung) eine arithmetische Form gegeben; die Priorität der Veröffentlichung des Verfahrens zur Gewinnung solcher Mengen muß man wohl du Bois-Reymond zusprechen. [H. Meschkowski, W. Nilson (Hrsg.): "Georg Cantor Briefe", Springer, Berlin (1991) p. 78]

{{Und noch was Gutes}} ist heute als "Cantorsches Diagonalverfahren" bekannt, doch hat P. du Bois-Reymond schon ca. 15 Jahre früher eine solche Diagonalargumentation verwendet (Math. Ann. 8 (1875) 365). [a.a.O. p. 37]

Das Hauptwerk des Herrn Mückenheim, "Mathematik für die ersten Semester", Oldenbourg 2009, enthält [...] natürlich auch die Funktionentheorie, wofür Herr Mückenheim knapp zwei Seiten benötigt. [...] Er hat überhaupt nicht kapiert, worum es bei der Ableitung einer komplexen Funktion nach einer komplexen Variablen geht! Aber richtig haarsträubend wird es erst im nächsten Abschnitt, wo die Cauchy-Riemann'schen Gleichungen hergeleitet werden [...] [Jürgen R. in dsm
http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/msg/1e2ac1db64a229e1?dmode=source
über
http://www.oldenbourg-wissenschaftsverlag.de/olb/de/1.c.1845646.de?hasjs=1285837959&submittedByForm=1&_lang=de&gsid=1.c.325875.de&id=1845646
]

Folgen können sehr wohl mehrere Grenzwerte haben. [Jürgen R. in dsm über Mathematik und so
http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/msg/1974a8dd7e8ded8a?dmode=source
]

Jaja, die Funktionentheorie. - Sie fordert immer wieder engagierte Kommenta-toren heraus.

485 Das Kalenderblatt 101002 Cantors Weltbild (1): Corpswesen

In bildungsfernen Schichten gilt Adam Riese als größter (und häufig auch als einziger) deutscher Mathematiker. Für die breite Masse nimmt Carl-Friedrich Gauß diese Position ein. Die Mathematiker selbst aber verehren ihren größten Kollegen in Georg Cantor. Die höchste Auszeichnung der DMV trägt sein Konterfei und seinen Namen, denn er hat die Mathematik unendlich erweitert und bereichert --- so glauben jedenfalls die meisten. Über Georg Cantor, Schöpfer der Mengenlehre und Gründer und erster Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-

Vereinigung, wurden mehr biografische Notizen gesammelt und veröffentlich als über jeden anderen Mathematiker des 19. Jahrhunderts. Aus diesen Mosaiksteinen lässt sich ein plastisches Bild seiner Weltsicht zusammensetzen. Einige Aspekte, vor allem nichtmathematischer Natur, sollen nachgezeichnet und in die Kalenderblätter in loser Folge eingestreut werden. Drückt sich darin doch "eine Grundüberzeugung Cantors aus: daß jede Wissenschaft - also auch die Mathematik - in einen größeren Rahmen eingebettet ist, zu dem man wirklichen Zugang nur dann findet, wenn man den 'Geist' der vergangenen Jahrhunderte erfaßt hat." [H. Meschkowski, W. Nilson: "Georg Cantor Briefe", Springer, Berlin (1991) p. 428]

Das Weltbild Georg Cantors (1): Corpswesen

Die Einstellung Georg Cantors zum Corpswesen wurde von seinem Vater Georg Woldemar Cantor, einem erfolgreichen Kaufmann, geprägt. Der schrieb in einem Brief vom 9. 5. 1860: "Möchtest Du doch jetzt soviel eigene Einsicht gewinnen, um selbst die lebhafte Überzeugung daraus zu schöpfen, welche ungeheuren Nachteile Dir das frühzeitige Sichgehenlassen in diesem lässigen Treiben jenes lächerlichen, äffischen Corpswesens bringen muß, umso mehr als letzteres doch bloß im leeren Kneipen seinen Ausdruck sucht, ..." Dieser Brief scheint seinen Zweck nicht verfehlt zu haben, denn schon am 10. 7. 1860 konnte der Vater seiner Genugtuung Ausdruck geben: "Ich gratuliere Dir daher zu Deinem tüchtigen Entschlusse, aus dem Corps auszutreten von ganzer Seele und freue mich umso mehr darüber, gerade weil ich es vollkommen begreife, wie schwer in Deinem Alter ein solcher männlicher freiwilliger Entschluß Dir werden mußte! Und ich habe doppelte Ursache mich darüber zu freuen, weil Dein Entschluß nicht durch ein von mir ausgehendes Verbot oder einen Befehl hervorgerufen ist ... In der Tat: es widerstrebt mir zu sehr in solchen Sachen etwas zu verbieten, was nur vom eigenen Urteil und Willen eines jungen Menschen abhängen sollte. In reiferen Jahren wirst Du auf diese männliche Überwindung mit wahrer Genugtuung und Freude zurückblicken!"

Diese Einstellung hat Georg Cantor beibehalten: "Es ist dies eine traurige rüde hohlphrasige Gesellschaft {{Bismarck nahestehende antisemitische, deutschnationale Studenten}} von Maulhelden, die ich von Halle her, wo sie eine Filiale in dem hiesigen 'Verein deutscher Studenten' hat, sehr genau kenne. In der jüngst erschienenen Historie dieser Leute von Dr. phil. Herm. von Petersdorff (betitelt Die Vereine deutscher Studenten. Neun Jahre akademischer Kämpfe, Leipzig, Breitkopf u. Härtel) werde ich lügenhafterweise pag 80 als ein 'Rufer im Kampfe für die Juden' bezeichnet, weil ich von Anfang an diesen Kinder- und Pastorenantisemitismus, der dem deutschen Volke nichts nützt, sondern nur schadet, als er auch mich kaufen wollte, höflich aber bestimmt und ehrlich abgelehnt habe, was sie mir fürchterlich übelgenommen haben, ich wurde damals vor 9 Jahren in den antisemitischen Zeitungen viel angegriffen." [Georg Cantor an Julius Langbehn, 26. 8. 1891]

486 Das Kalenderblatt 101003

Zunächst mache ich auf die *Allgemeinheit*, *Schärfe* und *Bestimmtheit* meiner Zahlendefinitionen aufmerksam; sie sind *gleichlautend*, gleichviel ob sie auf *endliche* oder *unendliche* Mengen bezogen werden. Jede transfinite Zahl der zweiten Zahlenklasse z. B. hat ihrer Definition nach *dieselbe Bestimmtheit*, *dieselbe Vollendung in sich wie jede endliche Zahl*. Der Begriff ω beispielsweise enthält *nichts Schwankendes*, *nichts Unbestimmtes*, *nichts Veränderliches*, *nichts Potenzielles*, er ist kein απειρον, sondern ein αφωρισμενον, und das gleiche gilt von allen andern transfiniten Zahlen. Er bildet ebenso wie jede endliche Zahl, z. B. 7 oder 3, einen *Gegensatz* zu den unbestimmten Zeichen *x, a, b* der Buchstabenrechnung, mit welchen *Sie* unzutreffenderweise die transfiniten Zahlen in Ihrem Schreiben vergleichen. [Georg Cantor an Kurd Laßwitz, 15. Feb. 1884]

Wir merken uns: ω enthält nichts Potentielles.

Damit gilt das von Weierstraß 1878 in seiner Vorlesung "Einführung in die Theorie der Analytischen Funktionen" eingeführte Kriterium: "$b > a$, wenn es eine Zahl c gibt, die wohl von b, nicht aber auch von a Bestandteil ist." Denn das ist die Definition von "mehr" oder "größer". Die Dezimaldarstellung 0,999... der Zahl 1 enthält genau dann nichts Potentielles, sondern aktual mehr Neunen als alle endlichen Neunerfolgen in den Zahlendarstellungen für $1 - 10^{-n}$, wenn es eine Ziffer 9 gibt, die zu 0,999... = 1 gehört aber nicht zu allen endlichen Neunerfolgen. Gibt es eine solche "ω-te" 9 nicht, so muss man matheologisch glauben: Es gibt in 1 = 0,999... eine 9 mehr, als jede endliche Folge besitzt, aber es gibt in 1 = 0,999... keine 9 mehr als alle endlichen Folgen besitzen.

Dazu muss man Bedenken einfachster Logik überwinden. Manchem will das nicht gelingen.

Und was sich noch desaströser für die Idee der Überabzählbarkeit auswirkt: ist 0,999... nicht nach dem Weierstaßschen Kriterium substantiell (d. h. durch eine Ziffer) von allen endlichen Neunerfolgen unterscheidbar, so ist auch keine Irrationalzahl substantiell von allen ihren rationalen Approximationen verschieden (zwar von jeder, aber nicht von allen). Und damit gibt es nichts, was die unendliche Menge der rationalen Approximationen zu einer überabzählbaren Menge aufpolstern könnte.

487 Das Kalenderblatt 101004

formalism was not created in the twentieth century

nor did it arise spontaneously in the nineteenth century
  or blossom in the eighteenth
or any such recent history

the fact that language is possible at all
is the foundations of formalism
  and this goes back hundreds of thousands of years

all language is based on formal negotiations
exchanging information

the pointing metaphor goes well into our great ape ancestry
  and aparently is found in many animals
(several pack marine animals to many land animals)

so?

well logic isn't something
  born when they created the word "axiomatic"

the structure of language itself is built of the primitives
  with which all logical calculi are constructed

rigorousness has one valid scientific criteria:
  repeatability

[...]

now flash forward to goldblatt's book "topoi"

if you expect to see axioms as strings
  you may be disappointed

most of the axioms are expressed in strings
  commonly the natural language of english
but often much informational content is expressed
in diagrams of directed graphs

now i will make a desperate confession

when i first read goldblatt
  i didn't think it was truly a formalisation

i thought it had too many hand-wavy
  "well-you-know-what-i-mean"s
to be correctly seen as an axiom system

so i made my own axiom system

but i thought you needed to actually change the symbology
  to reach true rigor

so i actually had four different types of objects
  and four different types of morphisms

rules of formation were diagram productions

i used a named dotted arrow

  a
.....>

to mean forAny morphism a

[...]

i went through and translated many of the theorems
into this new language i created
  and i thought myself so clever and bright
that i showed this to a professor i knew from the putnam tests

he looked them over
and then turned and asked me a question i'll never forget

"so what can you do with this?"

well

it's a formalisation
  and it makes things explicit
  and it shows how a computer might see it
  and...

"but where did you learn the rules in the first place?"
  he said

and i told of the main sources
  all the standards of mac lane and bell and others
and i felt so happy for myself
  because none of it was taught at the school
and...

"can your diagrams do anything you didn't learn from the books?"

he got me

because
  well
no they really couldn't

they were just there to "make rigorous"
  what the books taught

but the books obviously had rigor
since i was able to repeatably duplicate their theorems

so i swallowed my pride
  which was quite a big gulp in those days
and confessed that i couldn't explain why i thought it was better

and he said
  and this was a guy i did not regularly respect
he said
"don't get lost in aesthetic fetishes"

[...]

by the end of this fiasco
i had come to a very hard conclusion:

i really was stuck on a preference
  that was purely an aesthetic difference

formalisation is a reduction to negotiated primitives
and this could come in many different forms

suddenly
  the whole foundational scare of the twentieth century
seemed a silly bravado
as if the chasm no previous generation had faced

were a simple linguistic game
translating ancient paradoxes into new symbologies

fascinating themselves

i understood why many constructivists
who already recognise those negotiated primitives
don't commit deeply to formalism

because it often deteriorated
into religious battles over coding standards

and over the years as i entered the computer science field
i saw many religious battles over coding standards

[...]

what matters is how it acts

how it looks is pure aesthetic fetish

-=-
galathaea: prankster, fablist, magician, liar

[galathaea: "aesthetic fetishes of logical type", sci.math, sci.logic, alt.philosophy, sci.lang (2008)]
http://www2.nnseek.com/e/alt.philosophy/aesthetic_fetishes_of_logical_type_190596352t.html

Wer bestimmte Informationswege grundsätzlich ausschließt, engt seinen Horizont ein. Die Struktur des menschlichen Gehirns gibt zwar optischen und akustischen Reizen den Vorzug gegenüber taktilen, gustatorischen oder olfaktorischen, aber gedruckte, geschriebene, gesprochene Sprache, Zeichnungen, Bilder und Modelle sind sowohl zum Denken (Beweisen) als auch zur Kommunikation geeignet. Eine Zeichnung sagt mehr als tausend Worte. Das rigorose Bestehen auf formaler Sprache und das Verbot von Bildern (man beachte die religiöse Reminiszenz) für oder als mathematische Beweise ist intellektuelle Selbstverstümmelung.

Das ständige Verlangen nach breiförmiger Kost deutet auf einen Mangel an dentaler Schärfe.

488 Das Kalenderblatt 101005

Die Frage, was die Irrationalzahlen sind, ist nach den bisherigen Erörterungen dahin zu beantworten, dass sie sehr verschiedenes sein können, und dies ganz von unserer Willkür abhängt. Ob man sie als "Schnitt" oder "Zeichen" oder sonst etwas definieren will, ist schließlich Sache des persönlichen Geschmacks. Wesentlich ist aber, daß sie in jedem Fall unsere eigenen Schöpfungen sind und durchaus nichts Mystisches an sich haben. Aber erst durch diese Erkenntnis gewinnt die weitere Frage, was sollen die Irrationalzahlen, überhaupt einen Sinn. Denn wären sie nicht von uns selbst erschaffen, wären sie etwas Aprioristisches, von außen Herangekommenes, so würde uns eine Urteil, was sie sollen, ohne metaphysische Spekulationen in keiner Weise möglich sein. Nachdem wir aber diese Zahlen selbst erschaffen, müssen wir und wohl auch Rechenschaft darüber ablegen können, warum wir sie gerade so erschaffen und nichts anders; mit anderen Worten: Was wollten wir damit anfangen? was sollten sie uns leisten? {{Ganz gewiss nicht die Idee des Überabzählbaren "realisieren", denn alles, was der Mensch schaffen kann, ist endlich. Einer erschafft "eine Menge" irrationaler Zahlen und ein anderer auch. Beide Mengen enthalten eine Handvoll prominente Zahlen, wie pi oder e oder die Wurzel aus 2, und unüberschaubar viele weniger bedeutende, wie log2 oder sin(π/3) oder π^π. Manch einer bezeichnet diese Unüberschaubarkeit in seinem Kleinmut als Unendlichkeit. Denn wer meint, alle aufgelistet zu haben, dem fällt noch eine ein. Das ist aber nicht anders als bei den natürlichen Zahlen und gar nicht verwunderlich.}} [Oskar Perron: "Was sind und was sollen die Irrationalen Zahlen?", Habilitationsrede, München 1906, Jahresberichter der DMV (1907) 142-155]

489 Das Kalenderblatt 101006

Wenn eine unendliche Reihe rationaler Zahlen
(A) $a_1, a_2, a_3, ..., a_\nu, ...$
gegeben ist, welche die Eigenschaft hat, daß lim $(a_{\nu+\mu} - a_\nu) = 0$, so sagt man, daß sich die Brüche (A) einer Gränze nähern {{welcher Limes ist hier denn eigentlich gemeint?}}; die Berechtigung, diese Gränze als eine bestimmte Zahlengröße Ω zu fassen, wird darin gefunden, daß man für die so definirten Zahlengrößen die Begriffe des Größer, Kleiner und Gleichseins aufstellen kann. {{Die Berechtigung, diese Grenze als durch eine Ziffernfolge vollständig darstellbare Zahl anzusehen, selbst dann, wenn die Grenze irrational ist, ergibt sich daraus aber nicht, sondern ist ein Kurzschluss. (Detlef Laugwitz), KB090915}} [Georg Cantors Skript zur Vorlesung über DI vom SS 1870 nach W. Purkert, H.J. Ilgauds :"Georg Cantor 1845-1918", Birkhäuser, Basel (1987) p. 37]

490 Das Kalenderblatt 101007

Nur wo eine Methode zu einem Ende führt, führt sie zu einem Resultat und lässt die Feststellung zu, dass alles erfasst ist. Lässt sich die Zuordnung, die Auswahl oder Projektion nicht zu Ende führen, führt sie zu keinem Ergebnis, sondern nur zur tautologischen Feststellung, dass sie endlos, unendlich ist. Ein Abbruch des Verfahrens ergibt kein Resultat, sondern trivialerweise den Stand bei Verfahrensabbruch. [Norbert Domeisen, KB090624]

Zu einer Definition der Äquivalenz gelangt man durch folgende Überlegung: Sind *M* und *N* zwei äquivalente elementefremde Mengen, läßt sich eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen ihren Elementen offenbar deuten als die Bildung einer Menge von Elementepaaren {*m*, *n*} [...] *m* durchläuft alle Elemente von *M*, *n* alle Elemente von *N*, so daß ein derartiges Paar {*m*, *n*} stets dem Produkt $M \cdot N$ als Element angehört; [Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre" 3. Aufl., Springer, Berlin (1928) p. 314]

{{Nur wenn Fraenkels Methode greift und unendliche Mengen restlos durchlaufen werden können, ist Äquivalenz von unendlichen Mengen ein wohldefinierter Begriff. Dabei gilt,}} daß gewisse Prozesse von unendlichvielen Schritten dann völlig durchgeführt werden können, wenn sich je ein einzelner Schritt des Prozesses stets vornehmen läßt. [Adolf Fraenkel, a.a.O. p. 371]

Auf diese Weise kann $m = 2n$ die Folge aller positiven geraden Zahlen durchlaufen, und wir erhalten mit dem Limes der Folge der Anfangsabschnitte (2, 4, 6, ..., m) die Folge alle positiven geraden Zahlen zurück

Die einzelnen Glieder der Folge der Anfangsabschnitte können in zwei Teile aufgespalten werden, nämlich in einen Teil, der alle positiven geraden Zahlen enthält, die nicht größer als die Kardinalzahl des Anfangsabschnittes sind, und einen Teil, der alle positiven geraden Zahlen enthält, die größer als die Kardinalzahl des Anfangsabschnittes sind:

(2) & ( )
(2) & (4)
(2) & (4, 6)
(2, 4) & (6, 8)
(2, 4) & (6, 8, 10)

Wie zufällig - oder auch gewollt - kann man unter beiden Teilen eines Anfangsabschnittes, gleichwohl als Indizes, die dazu gleichmächtigen Anfangsabschnitte der natürlichen Zahlen eintragen. Der nächste Anfangsabschnitt ergibt so das Bild

(2, 4, 6) & (8, 10, 12)
(1, 2, 3) & (1, 2, 3)

Da sich jeder einzelne Schritt des Prozesses stets vornehmen lässt, kann nach Fraenkel der unendliche Prozess vollständig durchlaufen werden. Er führt zu dem Ergebnis

(2, 4, 6, ...) & ( )
(1, 2, 3, ...) & (1, 2, 3, ...)

d. h. die Folge aller natürlichen Zahlen wird zweimal gebildet, jedenfalls wenn sie wie unabsichtlich angebracht wird. Wenn dagegen die natürlichen Zahlen als Indizes für die geraden Zahlen fungieren und mit ihnen verknüpft gedacht werden, dann ist der Grenzwert der zweiten Indexfolge - mangels Partner - leer.

Und die Moral von der Geschicht': Das Ergebnis derartiger Prozesse existiert, aber es hängt entschieden von der Intention des Prozessierenden ab.

Manche mögen das Ganze als unausführbare Supertask bezeichnen. Sie haben Recht. Aber dasselbe gilt schon für den Limes (1, 2, 3, ..., *n*). *n* kann nicht alle natürlichen Zahlen restlos durchlaufen. Und damit sind wir wieder am Anfang: Lässt sich die Zuordnung, die Auswahl oder Projektion nicht zu Ende führen, führt sie zu keinem Ergebnis, sondern nur zur tautologischen Feststellung, dass sie endlos, unendlich ist.

491 Das Kalenderblatt 101008 Cantors Weltbild (2): Bismarck und der Kaiser

Cantor bezeichnet sich selbst als einen "königstreuen preussischen Beamten und grundsätzlichen langjährigen Gegner des Fürsten Bismarck" [Cantor an Alex Baumgartner S. J., 4. 6. 1891] und "als practischen hohenzollerschen Royalisten".

Heute findet im ganzen deutschen Reich Reichtagswahl statt; dass ich nicht zu den Anhängern des Fürsten Bismarck gehöre, brauche ich Ihnen wohl nicht erst zu sagen! [Cantor an Mittag-Leffler, 28. 10. 1884]

Julius Langbehn, Autor eines sehr populären gesellschaftskritischen Buchs ("Rembrandt als Erzieher", Leipzig (1890), 39 Auflagen innerhalb von zwei Jahren), hatte seiner Bismarck-Verehrung darin Ausdruck verliehen und Cantor um ein Urteil gebeten. Ihm schrieb Cantor: "So kann ich beispielsweise mein Auge nicht verschließen gegen die in der Politik durch den inzwischen eingetretenen Verlauf der Dinge in Deutschland {{#}} erwiesenen Irrthümer des Buches, wie auch mir, als practischen hohenzollerschen Royalisten seine eigenthümliche politische Tendenz nicht zusagen kann." [Cantor an Julius Langbehn, 26. 5. 1890]

An anderer Stelle gesteht Cantor seine Ablehnung deutlicher: "Ich sehe darin nichts als einen der vielen Versuche, das deutsche Volk hinterrücks zu verbismarckern. Denn Rembrandt dient hier nur als Maske für Bismarck. Ein gewisser Max Bewer, der mit dem Verfasser, der ein gewisser Dr. Julius Langbehn aus Eckernförde ist, zusammenarbeitet, hat dies in einer Broschüre "Rembrandt und Bismarck" ziemlich deutlich erklärt. Und von jenem wüsten Schwindelbuch hat das deutsche Volk in Jahresfrist über 30 Auflagen verschlungen! Ein Beweis für seinen guten Magen." [Cantor an Baumgartner, 20. 5. 1891] "Von einigen der Max Bewerschen Broschüren, namentlich der Gedanken über Bismarck habe ich die starke Vermuthung, daß sie von Langbehn gemacht sind. Die beiden arbeiten Hand in Hand. Neujahr sind sie Beide Gäste am Hofe Friedrichsruh {{Bismarcks Wohnsitz}} gewesen." [Cantor an Baumgartner, 25. 5. 1891]

{{#}} Fürst Otto v. Bismarck
http://de.wikipedia.org/wiki/Otto_von_Bismarck
war 1890 von Kaiser Wilhelm II. entlassen worden. Es ist zwar unwahrscheinlich, dass das kürzlich erfundene Automobil (am 29. Januar 1886 meldete Carl Benz seine Erfindung zum Patent an, am 2. November des gleichen Jahres wurde ihm dieses unter der Reichspatentnummer 37435 erteilt.
http://www.spiegel.de/auto/fahrkultur/0,1518,716209,00.html
)
den Anlass des Streites bildete. Aber bei der (den Kaiser und andere deutsche Staatsoberhäupter) überragenden Intelligenz Bismarcks hätte es leicht so sein können, denn der Kaiser meinte: "Das Auto ist eine vorübergehende Erscheinung. Ich glaube an das Pferd." (Das geschah allerdings erst 1904
http://www.region-stuttgart.de/sixcms/detail.php/267391
und bei seiner erwiesenen Dysprophetie kann er 1890 seine Meinung von 1904 noch nicht gekannt haben.)

492 Das Kalenderblatt 101009

Wer heute probeweise ein bestimmtes erkenntnistheoretisches oder ethisches Problem den Philosophen der Welt zur Lösung stellen wollte, der könnte im voraus sicher sein, eine Reihe nicht nur aneinander vorbeigehender, sondern sogar einander widersprechender Antworten zu erhalten. Das ist einfach darauf zurückzuführen, daß (auch eine vollkommen deduktive und zwingende Schlußführung in den eigentlichen Beweisen angenommen) die Voraussetzungen und Ausgangsthesen verschieden sind und einander mehr oder weniger zuwiderlaufen. Wenn dagegen das versuchsweise gestellte Problem eigentlich mathematischer Natur ist - mag es selbst den schwierigsten Teilen der Mengenlehre angehören -, so ist schlimmstenfalls, etwa von intuitionistischer Seite, die Antwort zu gewärtigen, das gestellte Problem sei sinnlos; von all denen aber, die seinen Sinn bejahen und zu einer lückenlosen Lösung gelangt zu sein glauben, sind nach allen bisherigen Erfahrungen nur übereinstimmende Antworten auf die gestellte Frage zu erwarten. Dieses Ergebnis mag dem als seltsam erscheinen, der die intuitionistische Kritik als berechtigt oder wenigstens als in sich möglich anerkennt und somit in der Benutzung der ichtprädikativen Schlußweisen, des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, der reinen Existenzprinzipien von der Art des Auswahlaxioms usw. unzulässige Voraussetzungen verwendet glaubt; warum führen diese nicht wie überall sonst zu Widersprüchen, sondern zu

Schlußfolgerungen, die, wenn nicht richtig, so doch zum mindesten übereinstimmend sind? [Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre" 3. Aufl., Springer, Berlin (1928) p. 363f]

Hatte seinerzeit wirklich noch niemand an den Binären Baum [KB091206] oder Mengenfolgen, wie sie zuletzt in KB101007 behandelt wurden, gedacht? Hatte Fraenkel Skolem [KB091116, KB091130], König [KB100510], Poincaré [KB060609] und viele andere, vor allem französische Mathematiker [KB100428] vergessen? Hatte Fraenkel noch nie etwas von vom Banach-Tarski-Hausdorff-Paradoxon [KB100329], [KB 090730] gehört? Glaubte Fraenkel wirklich an die Widerspruchsfreiheit seiner Lehre? Oder spricht aus ihm hier der blanke Sarkasmus? So wie der Folterknecht zum Delinquenten auf der Streckbank sagt: "Liegen Sie bequem! Sie müssen sich ganz entspannen!" Naja, das ist wohl nicht mehr ganz aktuell. Aber da gab es doch noch kürzlich diese Amateurtaucher, die immer wieder von freundlichen CIAgenten zu hören bekamen: So, jetzt schön tief einatmen und dann die Luft .... gurgel, gurgel, sprudel, zisch. Das fällt mir spontan bei Fraenkels Frage ein.

493 Das Kalenderblatt 101010 Cantors Weltbild (3): Julius Langbehn

Wie ich versprach, bin ich dabei den Rdt {{Rembrandt als Erzieher, Langbehns Bestseller http://de.wikipedia.org/wiki/Julius_Langbehn
}} aufmerksam durchzulesen, jede mir von meinen Arbeiten und Verpflichtungen übrig gelassene Minute dazu verwendend; ich bin an pag. 115 und in zwei bis drei Wochen hoffe ich fertig zu sein. Dann werde ich Ihnen schreiben, nicht was mir daran gefällt, dessen wäre schon jetzt zu viel für meine Zeit, sondern was ich darin vermisse; so werde ich Beides erreichen, Vollständigkeit des Wissens über meine Meinung für Sie und Kürze der Aussprache für mich. [Cantor an Langbehn, 31. 10. 1890]

Vor allem vielen Dank für die mir freundlichst übers. 23. Auflage Ihres Rdt. Zu einem definitiven Urtheile über dieses inhaltlich und stylistisch ausgezeichnete Buch werde ich wohl nicht so schnell gelangen. Bei der sehr knappen Zeit, die ich auf die Lektüre verwenden kann und der eigenthümlichen Gruppirung, in welcher die allerverschiedensten Stoffe darin behandelt werden, ist mein Fortschritt im Verstehen Ihres eigenthümlichen Gedankenganges nur ein Langsamer. [Cantor an Langbehn, 16. 11. 1890]

Indem ich manche der von Ihnen geistvoll geschilderten Mängel in den Verhältnißen der Wissenschaft anerkenne, kann ich doch viele Ihrer Urtheile über wissenschaftliche Gegenstände nicht für zutreffend und richtig halten. Jedenfalls erscheinen Sie mir in Sachen der Kunst competenter als in den übrigen Gebieten. {{Zu weiterer Kritik Cantors s. KB101008.}} Davon ganz unabhängig ist der Eindruck, den ich von Ihrer achtungswerthen Persönlichkeit und Ihrem Talent gewonnen habe, womit ich die Hoffnung verbinde, daß Sie mir den Freimuth, mit dem ich Ihnen alles dieses schreibe, nicht übel nehmen werden. [Cantor an Langbehn, 26. 5. 1891]

Verehrter lieber Freund [...] Die Vorbereitungen zur Naturforscherversammlung und die letztere selbst werden mich keineswegs so sehr in Anspruch nehmen, daß ich nicht während Ihres Hierseins ein bis zwei Stunden täglich Ihnen, oder vielmehr meiner eigenen Erholung bei Ihnen werde widmen können. Während Sie zu der Erkenntniß gekommen zu sein scheinen, daß ich Sie "in einigen Hauptpuncten ganz und gar nicht verstehe", muß ich bekennen, daß unter den hunderten von Collegen, die sich in diesem Monate hier um mich vereinigen werden, keiner ist, der mich so gut versteht wie Sie, und dies ist mir genug und ich werde dankbar sein, wenn ich aus dem Gedränge heraus auf kurze Zeit im traulichen Zwiegespräch mit Ihnen werde ausruhen können. [Cantor an Langbehn, 5. 9. 1891]

Soeb. erh. ich Ihren Befehl, Ihnen das mir s. Z. verehrte Exemplar der 37. Aufl. Ihres Rdt umgehends zurückzuschicken. {{Der Autor wollte darin eine persönliche Widmung nachtragen, hat dann aber vor allem Cantor dessen Einträge nachgetragen. Ich trage deshalb Widmungen immer vorher ein.}}. Da ich bis heute dasselbe als mein Eigenthum zu betrachten Ursache hatte, so dürfen Sie sich nicht wundern, darin, wie es meine Gewohnheit ist, Beifalls- sowohl wie Zweifelsäußerungen, in Gestalt von Strichen und Fragezeichen zu erblicken. [Cantor an Langbehn, 7. 9. 1891]

Was soll ich Ihnen nun auf Ihren vorletzten Brief schreiben? [...] Ihre Mißverständniße beruhen der Hauptsache nach auf einem Fehler meinerseits, daß wenn ich etwas nicht verstehe und den Grund nicht sehe, ich oft eine sarkastische Bemerkung oder einen guten oder selbst schlechten Witz nicht unterdrücke. [...] Wenn Sie glauben, daß ich Sie beleidigt oder verletzt habe, werden Sie mich bei der nächsten Zusammenkunft so bereit wie möglich finden, Alles wieder gut zu machen, soweit es nicht durch diese abgebrochenen Sätze etwa schon geschehen sein sollte. [Cantor an Langbehn, 11. 9. 1891] {{Doch das Verhältnis war zerrüttet. Im November 1891 schrieb Cantor EOD.}}

Ein großer Teil dieser Korrespondenz ist enthalten und kommentiert in:
[W. Purkert, H.J. Ilgauds: "Georg Cantor 1845-1918", Birkhäuser, Basel (1987)]
[H. Meschkowski, W. Nilson (Herausgeber): "Georg Cantor Briefe", Springer, Berlin (1991)]

494 Das Kalenderblatt 101011

We first consider the total amount of energy that one can harvest centrally. [...] one finds $E_{max} = 3.5 \cdot 10^{67}$ J, comparable to the total rest-mass energy of baryonic matter within today's horizon. This total accessible energy puts a limit on the maximum amount of information that can be registered and processed at the origin in the entire future history of the Universe. [...] Dividing the total energy by this value yields a limit on the number of bits that can be processed at the origin for the future of the Universe: Information Processed [...] = $1.35 \cdot 10^{120}$. [..] It is remarkable that the effective future computational capacity for any computer in our Universe is finite, although, given the existence of a global event horizon, it is not surprising. Note that if the equation of state parameter w for dark energy is less than -1, implying that the rate of acceleration of the Universe increases with time, then similar although much more stringent bounds on the future computational capacity of the universe can be derived. In this latter case, distributed computing is more efficient than local computing (by a factor as large as 10^{10} for $w = -1.2$, for example), because the Hawking-Bekenstein temperature increases with time, and thus one gains by performing computations earlier in time. [...]
On a more concrete level, perhaps, our limit gives a physical constraint on the length of time over which Moore's Law can continue to operate. In 1965 Gordon Moore speculated that the number of transistors on a chip, and with that the computing power of computers, would double every year. Subsequently this estimate was revised to between 18 months and 2 years, and for the past 40 years this prediction has held true, with computer processing speeds actually exceeding the 18 month prediction. Our estimate for the total information processing capability of any system in our Universe implies an ultimate limit on the processing capability of any system in the future, independent of its physical manifestation and implies that Moore's Law cannot continue unabated for more than 600 years for any technological civilization. {{Keine atemberaubend große Zahl.}}
[Lawrence M. Krauss, Glenn D. Starkman: "Universal Limits on Computation" (2004)]
http://aps.arxiv.org/PS_cache/astro-ph/pdf/0404/0404510v2.pdf

Es ist demnach nicht nur theoretisch falsch, daß ein Prozesse von unendlichvielen Schritten dann völlig durchgeführt werden kann, wenn sich je ein einzelner Schritt des Prozesses stets vornehmen läßt [Adolf Fraenkel, KB101007], sondern es ist praktisch schon unmöglich, einen Schritt durchzuführen, dessen Identifikation mehr als 10^{130} Bits erfordert. Mathematiker jedenfalls würden davon absehen, grundsätzlich unidentifizierbare Schritte zur Mathematik zu rechnen - das bleibt Matheologen und Schlafwandlern überlassen.

495 Das Kalenderblatt 101012

[...] the situation {{in the foundations of mathematics}} is not so critical as one could think from listening to those who speak of a foundational crisis. From certain points of view, this expression can be justified; but it could give rise to the opinion that mathematical science is shaken at its roots. The truth is that the mathematical sciences are growing in complete security and harmony. The ideas of Dedekind, Poincare, and Hilbert have been systematically developed with great success, without any conflict in the results.

{{Ist das denn die Möglichkeit?

"For my part, I think, and I am not the only one, that the important thing is never to introduce entities not completely definable in a finite number of words. Whatever be the cure adopted, we may promise ourselves the joy of the doctor called in to follow a beautiful pathologic case." [H. Poincaré, KB090606]

"Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können. [...] seine Theorie der transfiniten Zahlen; diese erscheint mir als die bewundernswerteste Blüte mathematischen Geistes und überhaupt eine der höchsten Leistungen rein verstandesmäßiger menschlicher Tätigkeit." [D. Hilbert, KB090813]

Es scheint, dass uns hier wieder der schon in KB101009 gewürdigte Sarkasmus entgegentritt.}}

An example of this way of setting up a theory can be found in Hilbert's axiomatization of geometry. If we compare Hilbert's axiom system to Euclid's, ignoring the fact that the Greek geometer fails to include certain [necessary] postulates, we notice that Euclid speaks of figures to be constructed whereas, for Hilbert, system of points, straight lines, and planes exist from the outset. Euclid postulates: One can join two points by a straight line; Hilbert states the axiom: Given any two points, there exists a straight line on which both are situated. {{Hat man sich das etwa so vorzustellen, wie schon jeder Bauplan existiert und jeder Roman und jede Genkombination jeder drosophila melanogaster?}} "Exists" refers here to existence in the system of straight lines. {{Nur kann leider kein Matheologe sagen, was ein Matheloge mit "exists" sagen will. Und wenn die Punkte nicht gegeben sind? Wer gibt sie eigentlich? Sind vom Gott der Matheologen schon alle Punkte gegeben? Dann bildet sich einfach eine schwarze Fläche, in der gar keine Linie mehr erkennbar ist - ob sie nun matheologisch "existiert" oder nicht.}} Since this tendency asserted itself especially in the philosophy of Plato, allow me to call it "platonism." [...] The value of platonistically inspired mathematical conceptions is that they furnish models of abstract imagination. These stand out by their simplicity and logical strength. {{Mit logischer Strenge liefert Hilbert's Implikation schon dann eine Gerade, wenn die Prämisse falsch ist, also gar keine Punkte "gegeben" sind. Und dabei sind doch nach Dedekind zumindest die Koordinaten niemals "gegeben", denn "die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes" [R. Dedekind, KB090715]. All das existiert in der mathematischen Logik "without any conflict in the results".}}

[Paul Bernays: "On Platonism in Mathematics", (Sur le platonisme dans les mathématiques. Lecture delivered June 18, 1934, in the cycle of Conférences internationales des Sciences mathématiques organized by the University of Geneva, in the series on Mathematical Logic.) Translation by Charles Parsons] {{Mathematical logic has completely deformed the thinking of mathematicians and of philosophers." [L. Wittgenstein, KB090724]}}
http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/platonism.pdf

496 Das Kalenderblatt 101013

Vergleiche dir unsere Natur in bezug auf Bildung und Unbildung folgendem Zustande. Sieh nämlich Menschen wie in einer unterirdischen, höhlenartigen Wohnung, die einen gegen das Licht geöffneten Zugang längs der ganzen Höhle hat. In dieser seien sie von Kindheit an gefesselt an Hals und Schenkeln, so daß sie auf demselben Fleck bleiben und auch nur nach vorne hin sehen, den Kopf aber herumzudrehen der Fessel wegen nicht vermögend sind. Licht aber haben sie von einem Feuer, welches von oben und von ferne her hinter ihnen brennt. Zwischen dem Feuer und den Gefangenen geht obenher ein Weg, längs diesem eine Mauer längs dieser Menschen allerlei Geräte tragen, die über die Mauer herüberragen, und Bildsäulen und andere steinerne und hölzerne Bilder. Meinst du wohl, daß dergleichen Menschen von sich selbst und voneinander je etwas anderes gesehen haben als die Schatten? - Wie sollten sie! - Wenn sie nun miteinander reden könnten, glaubst du nicht, daß sie auch pflegen würden, dieses Vorhandene zu benennen, was sie sähen? - Notwendig. - Und wenn einer von den Vorübergehenden spräche, sie würden denken, etwas anderes rede als der eben vorübergehende Schatten? Auf keine Weise also können diese irgend etwas anderes für das Wahre halten als die Schatten jener Kunstwerke? - Ganz unmöglich. -

Wenn einer entfesselt wäre und gezwungen würde, gegen das Licht zu sehn, und, indem er das täte, immer Schmerzen hätte und wegen des flimmernden Glanzes nicht recht vermöchte, jene Dinge zu erkennen, wovon er vorher die Schatten sah: meinst du nicht, er werde ganz verwirrt sein und glauben, was er damals gesehen, sei doch wirklicher als was ihm jetzt gezeigt werde? Und wenn man ihn gar in das Licht selbst zu sehen nötigte, würden ihm wohl die Augen schmerzen, und er würde fliehen und zu jenem zurückkehren, was er anzusehen imstande ist, fest überzeugt, dies sei in der Tat deutlicher als das zuletzt Gezeigte? Gewöhnung also, meine ich, wird er nötig haben, um das Obere zu sehen. Und zuerst würde er Schatten am leichtesten erkennen, hernach die Bilder der Menschen und der andern Dinge im Wasser, und dann erst sie selbst. Zuletzt aber wird er auch die Sonne selbst, nicht Bilder von ihr im Wasser, anzusehen und zu betrachten imstande sein.

Wenn ein solcher nun wieder hinunterstiege: würden ihm die Augen nicht ganz voll Dunkelheit sein? Und wenn er wieder in der Begutachtung jener Schatten wetteifern sollte, würde man ihn nicht auslachen und von ihm sagen, er sei mit verdorbenen Augen von oben zurückgekommen.

Dieses ganze Bild nun, lieber Glaukon, mußt du mit dem früher Gesagten verbinden. Gott mag wissen, ob es richtig ist; was ich wenigstens sehe, das sehe ich so, daß zuletzt unter allem Erkennbaren und nur mit Mühe die Idee des Guten erblickt wird.

Wundere dich nicht, wenn diejenigen, die bis hierher gekommen sind, nicht Lust haben, menschliche Dinge zu betreiben, sondern ihre Seelen immer nach dem Aufenthalt oben trachten. Kommt dir das wunderbar vor, daß, von göttlichen Anschauungen unter das menschliche Elend versetzt, einer sich übel gebärdet und gar lächerlich erscheint, solange er noch trübe sieht? Sondern, wenn einer Vernunft hätte, so würde er bedenken, daß durch zweierlei und auf zwiefache Weise das Gesicht gestört sein kann, wenn man aus dem Licht in die Dunkelheit versetzt wird, und wenn aus der Dunkelheit in das Licht. Und ebenso, würde er denken, gehe es auch mit der Seele, und würde, wenn er eine verwirrt findet und unfähig zu sehen, nicht unüberlegt lachen, sondern erst zusehen, ob sie wohl von einem lichtvolleren Leben herkommend aus Ungewohnheit verfinstert ist oder ob sie, aus größerem Unverstande ins Hellere gekommen, durch die Fülle des Glanzes geblendet wird; und so würde er dann die eine wegen ihres Zustandes und ihrer Lebensweise glücklich preisen, die andere aber bedauern; oder, wenn er über diese lachen wollte, wäre sein Lachen nicht so lächerlich als das über die, welche von oben her aus dem Licht kommt.

{{Es geht um Gott, dessen lichte Anschauung und Seelen, das Metier der Theologen also. Wenn solche Theologie als Grundlage der Mathematik gewählt und dafür die Bezeichnung "Realismus" benutzt wird, so ist das Zynismus.}}

[Platon: "Politeia, Buch VII, Das Höhlengleichnis", hier in der Übersetzung von Friedrich Schleiermacher, stark gekürzt.]
http://gutenberg.spiegel.de/?id=5&xid=2027&kapitel=1#gb_found

497 Das Kalenderblatt 101014

The value of platonistically inspired mathematical conceptions is that they furnish models of abstract imagination. These stand out by their simplicity and logical strength. They form representations which extrapolate from certain regions of experience and intuition. {{Diese Extrapolation wurde im vorhergehenden KB101013 eingehend beleuchtet. Sie erfordert die Existenz mindestens eines Gottes.}}

The weakest of the "platonistic" assumptions introduced by arithmetic is that of the totality of integers. The tertium non datum for integers follows from it; viz.: if P is a predicate of integers, either P is true of each number, or there is at least one exception.
By the assumption mentioned, this disjunction is an immediate consequence of the logical principle of the excluded middle; in analysis it is almost continually applied.
For example, it is by means of it that one concludes that for two real numbers a and b, given by convergent series, either a = b or a < b or b < a; and likewise: a sequence of positive rational numbers either comes as close as you please to zero or there is a positive rational number less than all the members of the sequence. {{Diese Annahmen sind beim Ausfall des zuständigen Gottes also falsch.}}
At first sight, such disjunctions seem trivial, and we must be attentive in order to notice that an assumption slips in. But analysis is not content with this modest variety of platonism; it reflects it to a stronger degree with respect to the following notions: set of numbers, sequence of numbers, and function. It abstracts from the possibility of giving definitions of sets, sequences, and functions. These notions are used in a "quasi combinatorial" sense, by which I mean: in the sense of an analogy of the infinite to the finite.
Consider, for example, the different functions which assign to each member of the finite series 1, 2, ..., n a number of the same series. There are n^n functions of this sort, and each of them is obtained by n independent determinations. Passing to the infinite case, we imagine functions engendered by an infinity of independent determinations which assign to each integer an integer, and we reason about the totality of these functions.
In the same way, one views a set of integers as the result of infinitely many independent acts deciding for each number whether it should be included or excluded. We add to this the idea of the totality of these sets. Sequences of real numbers and sets of real numbers are envisaged in an analogous manner. From this point of view, constructive definitions of specic functions,

sequences, and sets are only ways to pick out an object which exists independently of, and prior to, the construction.
The axiom of choice is an immediate application of the quasi-combinatorial concepts in question. {{Und das alles wird hinfällig, falls kein Gott existiert oder falls er keine Lust gehabt hat, alle reellen Zahlen zu schaffen (weil er sich sowieso nicht alle merken könnte; vgl. KB090605, das erste Kalenderblatt).}}
[Paul Bernays: "On Platonism in Mathematics", (1934)]
http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/platonism.pdf

498 Das Kalenderblatt 101015

This kind of definition depends on the assumption of [the existence of] the totality of sequences of integers, because a real number is represented by a decimal fraction, that is to say, by a special kind of sequence of integers. It is used in particular to prove the fundamental theorem that a bounded set of real numbers always has a least upper bound.
In Cantor's theories, platonistic conceptions extend far beyond those of the theory of real numbers. This is done by iterating the use of the quasicombinatorial concept of a function and adding methods of collection. This is the well-known method of set theory. {{Dazu ist also die Totalität der Zahlen, d. h. Gott und das von ihm erschaffene aktual Unendliche unverzichtbare Voraussetzung. Denn die übliche Ausrede, ZFC unterscheide nicht zwischen verschiedenen Arten des Unendlichen, ist falsch. Sie zeugt allein von mathematischer Unbildung. Ironischerweise pflegen drittklassige Mengenlehrer sich damit genauso zu brüsten wie erfolgreiche Politik- und Kulturschaffende sich damit brüsten, in der Schule kaum die Bruchrechnung verstanden zu haben.}}
[Paul Bernays: "On Platonism in Mathematics", (1934)]
http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/platonism.pdfs

499 Das Kalenderblatt 101016

The platonistic conceptions of analysis and set theory have also been applied in modern theories of algebra and topology, where they have proved very fertile.
This brief summary will suffice to characterize platonism and its application to mathematics. This application is so widespread that it is not an exaggeration to say that platonism reigns today in mathematics. {{Das gilt leider auch noch heute, achtzig Jahre später, allerdings nicht uneingeschränkt: "Platonism is the medieval metaphysics of mathematics; surely we can do better." (Solomon Feferman, KB090614)}}
But on the other hand, we see that this tendency has been criticized in principle since its first appearance and has given rise to many discussions. This criticism was reinforced by the paradoxes discovered in set theory, even though these antinomies refute only extreme platonism. {{Das hat mich immer schon gewundert: Wenn einer so recht ein Platonist ist, dann muss er doch jede Menge glauben und damit auch an die Menge aller Mengen! Welches Element welcher Menge sollte wohl fehlen? Aber was hätte das mit Extremismus zu tun? Das ist nichts weiter als folgerichtiges und konsequentes Denken. Und so einer wird nun schon zum Extrem-Platonisten hochstilisiert? So wie es Extrem-Bergsteiger und Extrem-Bügler http://www.google.de/images?hl=de&expIds=17259,24683,24815,26637&xhr=t&q=extremb%C3%BCgeln&cp=7&wrapid=tljp1287069851671110&um=1&ie=UTF-8&source=univ&ei=pCC3TMvrK4XAswbu-9CSCw&sa=X&oi=image_result_group&ct=title&resnum=1&sqi=2&ved=0CCMQsAQwAA gibt?}}
[Paul Bernays: "On Platonism in Mathematics", (1934)]

http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/platonism.pdfs

500 Das Kalenderblatt 101017

Several mathematicians and philosophers interpret the methods of platonism in the sense of conceptual realism, postulating the existence of a world of ideal objects {{Ah so! Weil es um ideale Objekte geht, nennt man das Realismus. Dazu passt die Bezeichnung des Unendlichen als etwas Vollendetem.}} containing all the objects and relations of mathematics. It is this absolute platonism which has been shown untenable by the antinomies, particularly by those surrounding the Russell-Zermelo paradox.
If one hears them for the first time, these paradoxes in their purely logical form can seem to be plays on words without serious significance. {{Die übliche ablehnende Haltung der Zeitgenossen, die von einer neuen Idee überrascht werden: Nichts Formales. Nur Worthülsen.}} Nonetheless one must consider that these abbreviated forms of the paradoxes are obtained by following out the consequences of the various requirements of absolute platonism.
[Paul Bernays: "On Platonism in Mathematics" (1934)]
http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/platonism.pdfs

Platonismus kann nicht partiell sein! Entweder gibt es alle mathematischen Objekte in Platons Regal oder nicht. Wenn nicht, dann mag er auch seine Ladenhüter behalten. Niemand braucht sie. Und wenn doch, dann kommt man an der Menge aller Mengen nicht vorbei. Schön, dass das einmal so klar festgehalten worden ist.

Aber es gibt ja schon im partiellen Platonismus Widersprüche. Man braucht nur die für jeden Matheologen unverzichtbare vollständige Menge der natürlichen Zahlen, um das zu zeigen. Ein einfach zu verstehendes Beispiel dafür wurde in KB101007 angegeben und sei hier zur Bequemlichkeit des Lesers und zur Feier des 500. Kalenderblattes wiederholt:

Ein unendlicher Prozess kann genau dann vollständig durchgeführt werden, wenn jeder einzelen Schritt aus dem vorhergehenden folgt. Auf diese Weise kann m = 2n die Folge aller positiven geraden Zahlen durchlaufen, und wir erhalten mit dem Limes der Folge der Anfangsabschnitte (2, 4, 6, ..., m) die Folge alle positiven geraden Zahlen zurück.

Die einzelnen Glieder der Folge der Anfangsabschnitte können in zwei Teile aufgespalten werden, nämlich in einen Teil, der alle positiven geraden Zahlen enthält, die nicht größer als die Kardinalzahl des Anfangsabschnittes sind, und einen Teil, der alle positiven geraden Zahlen enthält, die größer als die Kardinalzahl des Anfangsabschnittes sind:

( ) & (2)
(2) & (4)
(2) & (4, 6)
(2, 4) & (6, 8)
(2, 4) & (6, 8, 10)

Wie zufällig - oder auch gewollt - kann man unter beiden Teilen eines Anfangsabschnittes, gleichwohl als Indizes, die dazu gleichmächtigen Anfangsabschnitte der natürlichen Zahlen eintragen. Der nächste Anfangsabschnitt ergibt so das Bild

(2, 4, 6) & (8, 10, 12)
(1, 2, 3) & (1, 2, 3)

Wird der unendliche Prozess vollständig durchlaufen, so führt er zu dem Ergebnis

(2, 4, 6, ...) & ( )
(1, 2, 3, ...) & (1, 2, 3, ...)

d. h. die Folge aller natürlichen Zahlen wird zweimal gebildet, jedenfalls wenn sie wie unabsichtlich angebracht wird. Wenn dagegen die natürlichen Zahlen als Indizes für die geraden Zahlen fungieren und mit ihnen verknüpft gedacht werden, dann ist der Grenzwert der zweiten Indexfolge - mangels Partner - leer.

Was für Beweise möchtet Ihr Matheologen denn noch sehen, bis Ihr erkennt, dass Ihr an Humbug glaubt? Und der führt nur deswegen nicht zu einem bleibenden Schaden für die richtige Mathematik, weil er keinerlei Bezug dazu besitzt.

501 Das Kalenderblatt 101018 Cantors Weltbild (4): Platonismus

{{Cantor war kein reiner Platonist im heutigen Sinne, denn er fand seine Mathematik nicht allein in Platons Regalen oder Gottes Bewusstsein, sondern vor allem auch in der Realität. Er bezeichnete nicht nur das Grüne sondern die gesamte Realität als "Natur", also das Geborene, das Hervorgebrachte, kurz die Schöpfung, womit er natürlich [sic] im Grunde alles wieder auf Gott zurückführte. Seine Einstellung geht am besten aus Selbstzeugnissen und Zitaten von Kennern hervor:}}

Hier tritt nun die der obigen analoge Forderung und Aufgabe hervor, die in der Natur vorkommenden Zahlen oder Anzahlen wohlgeordneter Mengen zu bestimmen und sachgemäß mit Hülfe geeigneter Zeichen zu unterscheiden. [Cantor an Laßwitz, 15. 2. 1884]

Eine der wichtigsten Aufgaben der Mengenlehre, welche ich im Princip in der erwähnten Abhandlung „Grundlagen" gelöst zu haben glaube, besteht in der Forderung, die verschiedenen Valenzen oder Mächtigkeiten der in der Gesamtnatur (soweit als sie sich unserer Erkenntniß aufschließt) vorkommenden Mengenclassen zu bestimmen und sachgemäß mit Hülfe geeigneter Zeichen zu unterscheiden, dazu bin ich durch die Ausbildung des allgemeinen Anzahlbegriffes wohlgeordneter Mengen gelangt. [Cantor an Mittag-Leffler, 8. 4. 1883]

Hier müssen wir durch den Formalismus des 20. Jahrhunderts geschulten Mathematiker uns daran erinnern, daß für Cantor (und die meisten seiner Zeitgenossen) die Aussagen der Mathematik ein solides ontologisches Fundament hatten. Sie waren Aussagen über die platonische Welt der Ideen, aber sie hatten auch ihre Entsprechung in der physikalischen Welt. Und gerade der Begriff des Kontinuums war von physikalischer Bedeutung. [Herbert Meschkowski: "Georg Cantor: Leben, Werk und Wirkung", 2. Aufl. BI, Mannheim (1981) p. 56]

Eine notwendige Bedingung für Existenz war für Cantor die Widerspruchsfreiheit; selbstverständlich ist diese Bedingung, wenn man eine platonistische Ontologie vertritt, nicht hinreichend: [W. Purkert, H.J. Ilgauds: "Georg Cantor 1845-1918", Birkhäuser, Basel (1987) p. 107]

Wenn ich von einem ein Sein bedeutenden Begriff die innere Widerspruchslosigkeit erkannt habe, so zwingt mich die Idee der Allmacht Gottes das von dem betreffenden Begriff ausgesagte Sein auch in irgendwelcher Weise als actuell realisirbar zu denken und in Rücksicht darauf nenne ich das betreffende Sein ein "mögliches"; damit ist also nicht gesagt, dass es irgendwo und wann und wie in Wirklichkeit existirt. [Cantor an Illgens, 21. 5. 1886]

Wenn Sie mich [...] als „pur idéaliste, comme principes et comme méthodes" bezeichnen, so haben Sie von einem gewissen Gesichtspunkte aus gewiss Recht; doch dem modernen Idealismus, wie er sich seit Kant entwickelt hat, stehe ich durchaus fern; mein Idealismus ist verwandt mit dem Aristotelisch-Platonischen, welcher wie Sie wissen zugleich Realismus ist. Ich bin ebensowohl Realist, wie Idealist. [Cantor an Tannery, 10. 10. 1888]

{{Allerdings mochte der Realist Cantor eine metaphysische Basis der Mathematik nicht leugen:}} Zum Verständnis der Lehre vom Transfiniten bedarf es keiner gelehrten Vorbereitung in der neueren Mathematik; sie kann für diesen Zweck eher schädlich als nützlich sein, weil die modernen Mathematiker in ihrer Mehrheit durch die glänzenden Erfolge ihres sich immer vervollkommnenden Formelwesens, das immer mehr Anwendungen auf die mechanische Seite der Natur zuläßt, in einen Siegesrausch hineingeraten sind, der sie zur materialistischen Einseitigkeit verkommen läßt und sie für jegliche objektiv-metaphysische Erkenntnis und daher auch für die Grundlagen ihrer eigenen Wissenschaft blind macht. [Cantor an Pater I. Jeiler, Pfingsten = 20. 5. 1888]

Im Hinblick auf die Basisdisziplin der Mathematik, der (endlichen und transfiniten) Arithmetik, hält Cantor unverrückbar an seiner platonisch-ontologischen Grundhaltung fest. Zahlen - und insbesondere auch die Alefs - haben „Realität", und zwar nicht nur „immanente" sondern damit notwendig verbunden auch „transiente Realität", wenngleich die Feststellung der letzteren „meist zu den mühsamsten und schwierigsten Aufgaben der Metaphysik gehört und oft den Zeiten überlassen werden muß". Folglich müssen die Vielheiten, die den (endlichen wie transfiniten) Zahlen zugrundeliegen, ohne Widersprüche als existent gedacht werden können. Die - metaphysischen - Axiome der Arithmetik sind eben Grundwahrheiten (Axiome „im alten Sinne des Wortes"), die nicht austauschbar sind. [H. Meschkowski, W. Nilson (Herausgeber): "Georg Cantor Briefe", Springer, Berlin (1991) p. 428]

502 Das Kalenderblatt 101019

The essential importance of these antinomies {{z. B. Menge aller Mengen}} is to bring out the impossibility of combining the following two things: the idea of the totality of all mathematical objects and the general concepts of set and function; for the totality itself would form a domain of elements for sets, and arguments and values for functions. We must therefore give up absolute platonism. {{Es fragt sich dann, wo die Grenze zu ziehen ist. Wie viele Elemente jeder Menge müssen fehlen, damit der Platonismus partiell genug ist?}} But it must be observed that this is almost the only injunction which follows from the paradoxes. Some will think that this is regrettable, since the paradoxes are appealed to on every side. But avoiding the paradoxes does not constitute a univocal program. In particular, restricted platonism is not touched at all by the antinomies. {{Er *ist* eine Antinomie! Platonismus bedeutet: Alle Objekte der Mathematik sind da! Die Vollständigkeit aller Objekte, die doch nicht ganz vollständig ist, die unvollständige Vollständigkeit, bietet eine neue Facette der Widerspruchsvermeidung in der transfiniten Mengenlehre, der Theorie des beendeten Unbeendbaren.}}
Still, the critique of the foundations of analysis receives new impetus from this source, and among the different possible ways of escaping from the paradoxes, eliminating platonism offered itself as the most radical. [...] The first step is to replace by constructive concepts the concepts of a set, a sequence, or a function, which I have called quasi-combinatorial. The idea of an infinity of independent determinations is rejected {{die Idee, eine Zahl durch eine unendlich lange Ziffernfolge zu definieren also!}}. One emphasizes that an infinite sequence or a decimal fraction can be given only by an arithmetical law {{eines von höchstens abzählbar unendlich vielen also?}}, and one regards the continuum as a set of elements defined by such laws. {{Und davon

gibt es bekanntlich nur abzählbar unendlich viele. Schon wieder sehen wir, wie einer Cantor widerlegt - ohne dass er es selbst bemerkt.}}

Nonetheless, if we pursue the thought that each real number is defined by an arithmetical law, the idea of the totality of real numbers is no longer indispensable {{Nicht länger unentbehrlich! - Der krasse Missgriff in der Wahl dieses Prädikates lässt sich nur durch das Bemühen um Höflichkeit entschuldigen.}}, and the axiom of choice is not at all evident {{das war es noch nie}}.

[Paul Bernays: "On Platonism in Mathematics", (1934) p. 6f]
http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/platonism.pdfs

503 Das Kalenderblatt 101020

Platonism about mathematics (or mathematical platonism) is the metaphysical view that there are abstract mathematical objects whose existence is independent of us and our language, thought, and practices. Just as electrons and planets exist independently of us, so do numbers and sets.
{{Nein, da gibt es einen Unterschied. Alle Elektronen und Planeten existieren ausnahmslos. Aber nicht alle Mengen existieren, denn dann hätte das platonische Regal, in dem alle Mengen existieren, eine größere Mächtigkeit als das platonische Regal, in dem alle Mengen existieren. Mit dem Nachweis, dass die Potenzmenge einer unendlichen Menge eine größere Mächtigkeit besitzt als die unendliche Menge, hat sich gezeigt, dass es keine aktual unendliche Menge gibt. Nur hat es leider niemand bemerkt.}} And just as statements about electrons and planets are made true or false by the objects with which they are concerned and these objects' perfectly objective properties, so are statements about numbers and sets. Mathematical truths are therefore discovered, not invented.
The most important argument for the existence of abstract mathematical objects derives from Gottlob Frege and goes as follows {{Gottlob Frege: "Foundations of Arithmetic", Blackwell, Oxford, Übersetzung von J.L. Austin (1953)}}. The language of mathematics purports to refer to and quantify over abstract mathematical objects. And a great number of mathematical theorems are true. But a sentence cannot be true unless its sub-expressions succeed in doing what they purport to do. So there exist abstract mathematical objects that these expressions refer to and quantify over. {{So ähnlich verlief auch Kants Gottesbeweis (KB100407): Gott wäre gar nicht vollkommen und also nicht Gott, wenn er nicht existierte. Deshalb müsse er existieren. Im Gegensatz zu Frege hat Kant seinen Irrtum aber noch zu Lebzeiten bemerkt. Gödel's Gottesbeweis ist ganz ähnlich aufgebaut.}}
[Øystein Linnebo: "Platonism in the Philosophy of Mathematics", Stanford Encyclopedia of Philosophy (2009)]
http://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/

"The global unity of mathematics with religion is central in Plato's work, and in his followers' such as Plotinus and Proclus, but also much later in modern times." (Jean-Michel Kantor, KB 100406)

504 Das Kalenderblatt 101021

Gödel has sketched a revised version of Anselm's traditional ontological argument for the existence of God.
How does a mathematician get mixed up in the God-business? Gödel was a mystic, whose mathematical research exemplified a philosophical stance akin to the Neo-Platonics. [...]
However, a deeper reason for Gödel's contribution to the ontological argument is that the most

sophisticated versions of the ontological argument are nowadays written in terms of modal logic, a branch of logic that was familiar to the medieval scholastics [...]. It turns out that modal logic is not only a useful language in which to discuss God, it is also a useful language for proof theory, the study of what can and cannot be proved in mathematical systems of deduction. Issues of completeness of mathematical systems, the independence of axioms from other axioms, and issue of the consistency of formal mathematical systems are all part of proof theory. {{Schön, dass einmal jemand den Zusammenhang zwischen Theologie und Matheologie, zwischen Mythologie und Mythologik klar herausarbeitet.}} Talking about proof theory often feels like discourse about God: When you talk about God, you have to discuss issues like "if God created the Universe, then who created God?" In proof theory you have to discuss issues like "if a statement is true, then is it true that we can prove the statement?" There is a bit of a feeling that we are arguing by pulling ourselves up by our own bootstraps.

In metaphysics, one discusses the possible existence of counterfactual worlds in which God does not exist. In proof theory, one examines the independence of an axiom by finding models in which the axiom fails. [...] the most common setting for the discussion of ontological arguments for the existence of God is the framework of modal logic.

What is modal logic and why do we need it?

Consider the following "proof" for the existence of God. Let us call it the argument from omniscience.

God is understood to be an individual or being who knows everything, i.e., is omniscient. If something is true, God (real or fictitious) would know it. Similarly, if something is false, God (real or fictitious) would know that as well. Along with this goes the fact that we conceive of God as encompassing all rationality. A being who created the universe but was irrational, for example, would not appropriately be called God.

All rational individuals believe in their own existence. Even if they don't exist, this is presumed to be the case.[...] Descartes claimed Cogito ergo sum, and most of us accept that to doubt your own existence would be a pretty strange state of mind. {{Matheologen sollten auch dazu in der Lage dazu sein.}}

The real problem is that the argument makes an assumption that is not brought out explicitly. It assumes that it is possible for an omniscient rational individual to exist, where omniscience includes knowledge about one's own existence. So what the argument really seems to show is that (for God as defined):

IF it is possible for a rational omniscient being to exist THEN necessarily a rational omniscient being exists.

[...] While modal logic may look a bit strange, it is in many respects more consistent with the logic of ordinary discourse than is the propositional logic that mathematicians use. One area where modal logic is useful is in discussing counterfactual propositions. For example, the statement:

"If Napoleon had won the battle of Waterloo, then French would have replaced English as the language of international relations" can be meaningfully debated in modal logic. However, in propositional logic, this statement would be trivially true.

[Christopher Small: "Kurt Gödel's Ontological Argument"]
http://www.stats.uwaterloo.ca/~cgsmall/ontology.html

505 Das Kalenderblatt 101022

To formalize the idea of a positive property, Gödel introduced a positivity operator. Just as a predicate or property provides a truth-functional assignment to individuals (i.e., Rx, where "x=Santa Claus" and R="wears a red suit"), so the positivity operator Pos provides a truth-functional assignment to properties themselves. We say that Pos(F) is true if F is a positive property.

Gödel suggested that a property could be said to be positive in a moral-aesthetic sense or in a sense of pure attribution. While many of us would differ over the details, a moral-aesthetic interpretation of Pos(F) is reasonably clear.

The only other indication that Gödel gave for his intensions here is to say that positivity is "independent of the accidental structure of the world".

With these ideas defined, we can now proceed to our first theorem, namely, that all positive properties are consistent. [...] Theorem G1 is a remarkably cheery theorem, which tells us that everything that is positive is also possible.

Surprisingly, Theorem G1 supports a principle that Immanuel Kant elaborated, despite the fact that Kant was a vigorous opponent of the Ontological Argument. {{Das gilt erst für den späten Kant (vgl. KB100407).}}

The argument now proceeds as follows. An individual x will be said to be God-like, that is, Gx will be said to be true, if every essential property of x is positive and if x has every positive property as an essential property.

Note that Gödel carefully distinguishes between existence proofs and uniqueness. There is nothing in Definition G1 which says that there is at most one God-like individual (monotheism). He carefully sets his signs on the existence part of the argument and leaves out the uniqueness issue. This is more a matter of logical precision than any dalliance with polytheism. When we were discussing the existence of Santa Claus earlier, we made the implicit and unwarranted assumption that there could be only one Santa Claus. However, there is no logical reason why two Santas could not exist, perhaps working as partners to ensure that all the presents get delivered on time. A more carefully constructed question would have been whether there exists a Santa Claus-like individual. As any mathematician would agree, having established the existence of a Santa Claus-like individual, one is in a position to try to prove that there is only one.

The idea behind Definition G1 is to define a God-like individual as one having perfection (i.e., maximally positive properties) as the individual's essence.

The third concept that we shall introduce in this section is the property of necessary existence. Although predicate logics have existential quantifiers, these quantifiers are not properties (as Kant reminded us). However, we can introduce the concept of necessary existence as a property by making it derivative from the notion of essence. We say that an individual x exists necessarily if every property which is an essence of x is necessarily realized in some individual.

The Rest of the Argument {{Um Überlänge zu vermeiden, wird der Leser auf die beiden folgenden Kalenderblätter KB101023 und KB101024 oder die hier zitierte Quelle
http://www.stats.uwaterloo.ca/~cgsmall/ontology2.html
oder
http://www.uni-koblenz.de/~beckert/Lehre/Seminar-LogikaufAbwegen/graf_folien.pdf
verwiesen.}}

So that's it. The obvious question to ask is whether Gödel's proof is correct. {{Nein, diese Frage stellt sich eigentlich nicht.}} To my way of thinking, this adds up to saying that Gödel's proof is really an argument, because the axioms [...] are not sufficiently self-evident to warrant calling the whole thing a proof. {{Alle berühmten Beweise Gödels basieren auf der Prämisse, dass das aktual Unendliche in abzählbarer und in überabzählbarer Ausformung existiert (vgl. KB091108). Deshalb sind Gödels Sätze - sofern sie diese Prämisse nennen - ebenso wahr und auch ebenso fruchtbar wie der Satz:}} If the Roman empire had not fallen to barbarians, then computers would be using Roman numerals these days.

[Christopher Small: "Kurt Gödel's Ontological Argument"]
http://www.stats.uwaterloo.ca/~cgsmall/ontology.html

506 Das Kalenderblatt 101023

Wirklich neue Ideen hat Gödel nicht gebracht. Die Idee, dass man aus Gottes möglicher Existenz auf seine notwendige schließen kann, findet sich schon bei Kant {{der sie aber nach einem Reifungsprozess wieder verworfen hat.}} Und dass man für diese Beweisführung zeigen muss, dass Gottes Existenz möglich ist, hat Leibniz als erster formuliert. Von Ihm stammt auch die Idee der positiven Eigenschaft: Eine Eigenschaft ist positiv, wenn sie keiner anderen Eigenschaft widerspricht.
Bei dem Versuch, diese Eigenschaften genauer zu bestimmen, verzettelt er sich. Der Beweis scheint nicht durchführbar zu sein, ohne dass man sich irgendwo widerspricht. Gödel hat bewiesen, dass es kein formales System gibt, das absolut widerspruchsfrei ist. {{Der Beweis basiert aber auf der Existenz einer Hierarchie aktualer Unendlichkeiten und ist daher falsch bzw. wäre nur in einer kontrafaktualen und unrichtigen Mathematik richtig.}} Wenn der ontologische Gottesbeweis im Widerspruch mündet, liegt das also nicht notwendig am Beweis, sondern kann an dem formalen System, der Sprache liegen, in der der Beweis geführt wird. Gödel formuliert für seine Beweisführung also ein eigenes formales System. Er setzt die Existenz der positiven Eigenschaften einfach voraus. Beispiele nennt er keine, sondern formuliert: Eine Eigenschaft ist entweder positiv oder negativ. {{Die leere oder Null-Eigenschaft scheint er noch nicht zu kennen.}} Und weiter: Jede Eigenschaft, die notwendig eine positive Eigenschaft enthält, ist ebenfalls positiv. In dem System definiert Gödel dann göttlich: Ein göttliches Wesen enthält alle positiven Eigenschaften. Daraus folgt: Göttlich ist eine positive Eigenschaft, sie enthält ja alle anderen positiven Eigenschaften. {{Ein Sack Kartoffeln ist also eine Kartoffel, denn er enthält ja viele Kartoffeln. Oder sollte man lieber gleich die Mengen aller Kartoffeln ansetzen?}}

Gödel hat damit die Vorraussetzung geschaffen, um den Ansatz von Leibniz, die mögliche Existenz Gottes zu beweisen, widerspruchsfrei durchführen zu können. Dazu behauptet er: Es ist möglich, dass es zu jeder positiven Eigenschaft mindestens ein Wesen gibt, das diese Eigenschaft besitzt. Beweisen will er seine Behauptung, indem er vom Gegenteil ausgeht. Dazu überlegt er, was passiert, wenn ein Wesen eine positive Eigenschaft hat, die von keinem Wesen besessen werden kann. Die Annahme führt zu einem Widerspruch, z.B. das Wesen ist nicht mit sich selbst identisch. Also wäre die Eigenschaft, nicht mit sich selbst identisch zu sein, positiv. Also wäre das Gegenteil - die Selbstidentität - eine negative Eigenschaft. Wir wissen aber, dass jedes Wesen mit sich selbst identisch ist. Also ist die Selbstidentität eine positive Eigenschaft. Eine Eigenschaft kann aber nicht positiv und zugleich negativ sein. Also gibt es keine positive Eigenschaft, die von keinem Wesen besessen werden kann.

Jetzt kann Gödel den ontologischen Gottesbeweis selber angehen. Dazu definiert er die "notwendige Existenz“: Etwas existiert genau dann notwendig, wenn für alle Eigenschaften, die sein Wesen ausmachen, gilt: Es ist möglich, dass es zu dieser Eigenschaft mindestens ein Wesen gibt, das diese Eigenschaft besitzt. Gottes Wesen macht es aus, dass er alle positiven Eigenschaften besitzt. Das bedeutet zum einem, dass die notwendige Existenz ebenfalls eine positive Eigenschaft ist. Zum anderen existiert Gott notwendig, wenn es ihn gibt.

Weil Gödel aber zeigen will, dass Gott auch notwendig existiert, wenn seine Existenz möglich ist, verwendet er eine logische Regel: Wir können sagen, wenn wir etwas Heißes anfassen, verbrennen wir uns die Finger. Daraus können wir schließen: Wenn wir etwas Heißes anfassen können, können wir uns die Finger verbrennen. Mit Hilfe dieser Regel formuliert Gödel: Wenn es möglich ist, dass Gott existiert, dann ist es möglich, dass Gott notwendig existiert. Wenn Gott aber in irgendeiner Welt notwendig existiert, existiert er in allen möglichen Welten, auch in unserer. {{Und zugegeben, dann existiert auch die aktuale Unendlichkeit, zumindest ist es möglich, dass sie notwendig existiert und es ist notwendig, dass sie möglicherweise existiert.}}

[Benedikt Richter, redaktion@kath.de]
http://www.kath.de/lexikon/philosophie_theologie/gottesbeweis_goedel.php

507 Das Kalenderblatt 101024

Der faszinierendste Fund in Gödels Nachlaß war sein "ontologischer Gottesbeweis". Ein solcher Beweis war mit rein logischen Gründen und nicht aufgrund von Hinweisen aus der physikalischen Welt erstmals im 11. Jahrhundert von Anselm von Canterbury versucht worden. Gödel stützte sich auf den Leibnizschen Begriff "positiver" und "negativer" Eigenschaften und schloß:

Axiom 1: Eine Eigenschaft ist genau dann positiv, wenn ihre Negation negativ ist.
Axiom 2: Eine Eigenschaft ist positiv, wenn sie notwendigerweise eine positive Eigenschaft enthält.
Theorem 1: Eine positive Eigenschaft ist logisch widerspruchsfrei (das heißt, sie trifft möglicherweise in einem Beispiel zu).
Definition: Etwas ist gottähnlich genau dann, wenn es nur positive Eigenschaften hat.
Axiom 3: Gottähnlichkeit ist eine positive Eigenschaft.
Axiom 4: Positiv sein ist logisch und deshalb notwendig.
Definition: Eine Eigenschaft P ist genau dann das Wesen von *x*, wenn *x* die Eigenschaft P hat und P notwendigerweise minimal ist.
Theorem 2: Wenn *x* gottähnlich ist, macht Gottähnlichkeit das Wesen von x aus.
Definition: *x* existiert notwendigerweise, wenn es eine wesentliche Eigenschaft hat.
Axiom 5: Notwendig existent sein ist gottähnlich.
Theorem 3: Notwendigerweise gibt es ein *x* so, daß *x* gottähnlich ist.

Als er nach solchen Ausflügen in die logische Phantasie befragt wurde, bemerkte er mit einem Lächeln, die "axiomatische Methode sei sehr mächtig". {{Das ist bekannt. Sie vollendet Unvollendbares und ermöglicht die Notwendigkeit, dass Nichtexistentes existiert. Es lebe hoch! Es lebt. Aber was ist das denn für ein Leben?}}

[John D. Barrow: "Ein Himmel voller Zahlen" Rowohlt, Reinbek (1999)]
http://www.rowohlt.de/buch/John_D_Barrow_Ein_Himmel_voller_Zahlen.6958.html
http://www.physiologus.de/gottesbew.htm

508 Das Kalenderblatt 101025

Gödel makes a rather strong comparison between "the question of the objective existence of the objects of mathematical intuition" and the "question of the objective existence of the outer world" which he considers to be "an exact replica."

Gödel's rejection of Russell's "logical fictions" may be seen as a refusal to regard mathematical objects as "insignificant chimeras of the brain."

Gödel's realism, although similar to that of Locke and Leibniz, places emphasis on the fact that the "axioms force themselves upon us as being true." This answers a question, untouched by Locke and Leibniz, why we choose one system, or set of axioms, and not another; that the choice of a mathematical system is not arbitrary.

Gödel, in the "Supplement to the Second Edition" of "What is Cantor's Continuum Problem?" remarked that a physical interpretation could not decide open questions of set theory, i.e. there was (at the time of his writing {{und auch später}}) no "physical set theory" although there is a physical geometry.

Gödel remarked that because "the whole theory of Aleph's greater than Aleph(1) is rejected as meaningless," Brouwer's intuitionism is "utterly destructive in its results." Gödel's meaning of 'intuition', 'general mathematical concepts', and 'sufficiently clear' in the following is patently and irreconcilably different from the meanings assigned by the intuitionists: "For someone who considers mathematical objects to exist independently of our constructions and of our having an intuition of them individually, and who requires only that the general mathematical concepts must be sufficiently clear for us to be able to recognize their soundness and the truth of the axioms {{Für den Platonisten müssen die Axiome mit der platonischen Kollektion übereinstimmen, also wahr sein. Für den modernen Mathematiker sind die Axiome frei wählbar. Folglich kann seine Mathematik nicht auf die platonische Vollständigkeit oder, nach Bernays, "Teilvollständigkeit" zurückgreifen. Folglich gilt für ihn der Cantorsche Überabzählbarkeitsbeweis nicht. Leider vergessen die meisten modernen Mathematiker diesen Zusammenhang oder haben ihn nie kennengelernt.}} concerning them, there exists, I believe, a satisfactory foundation of Cantor's set theory...namely axiomatics of set theory..." {{Wie viele Kalenderblätter zeigen, zuletzt KB101017, ist das zwar falsch, aber so nützlich zum Beweis anderer falscher Sätze, dass wir es trotzdem glauben wollen. (nach HR - hier allerdings nicht Harold Ravitch)}}

[Harold Ravitch: "On Gödel's Philosophy of Mathematics"]
http://www.friesian.com/goedel/
http://www.friesian.com/goedel/chap-2.htm

509 Das Kalenderblatt 101026

Chapter I. Tous les rêves sont une création du Rêveur. This chapter expresses the meaning and the importance of dreams and the author's empirical conviction that dreams are sent by an outside force, called "le Rêveur", who knows each of us intimately and sends dreams in order for each of us to know himself fully. Although all dreams are message, he signals the existence of particularly powerful ones which should act as a call, and warns against the inertia (fear of change) which prevents the dreamer from the meaning contained in it.

He gives a description of his first encounter with the fact that a dream was carrying an important message; his hours of analysis, his inability to go back to sleep until he had examined it fully. However, he never describes either the dream or its analysis. The question "where do dreams come from" is essential here. Grothendieck examines notions that our languages contain about "gifts", or the expressions "ajouter foi" or "Glauben schenken" which indicate that our languages actually contain the idea that things come to us from some outside source. He describes how he himself wondered what part of dreams come from outside (as gifts) and what part from reflexes of our own psyches, impulses etc. He anticipates by telling us that he reached the final conclusion that dreams are entirely and completely messages sent to us by the Dreamer to indicate fundamental truths about ourselves (which we may ignore or not as we wish). Grothendieck's experience of the procedure of dream analysis is taken as a paradigm of the fundamental rhythm of the creative process and described carefully (section 12). The remainder of this chapter is devoted to a description of the process of dream analysis, based on his own experience, but it is entirely abstract ("we penetrate deeper and deeper into successive layers of our psyche"), with various metaphors of onions, garlic etc. It ends with a portion of a dream analysis of his own from which all dream content is absent.

Chapter II. Dieu est le rêveur. This chapter explains Grothendieck's personal experience of coming to the conclusion that God exists and dreams are sent by him: "Dieu est le Rêveur." His first experience of God (meditation, then self-discovery via dreams) in 1976 is followed, six years later (1982) by a 'personal encounter' with the 'Rêveur' (in dreams). Grothendieck promises an account of several dreams and their interpretations [...] He expresses his empirical, primary knowledge of the identification of God with the Dreamer, and asserts that each individual has his own Dreamer, but they are all one and the same of infinite knowledge. However, he says that such a thing cannot be proven (gently mocking those who gave logical proofs of the existence of God) {{womit der G-G-Übergang geschafft wäre}} but only known first-hand by revelation and experience. He also briefly describes the prophetic contents of his dreams (a cataclysm for humanity within his lifetime, leading to a spiritual renewal of the remaining portion of humanity) and asserts that the realisation of these events is obviously the only 'proof' which can be offered to the doubting.

Chapter V. Aspects d'une mission (2): la connaissance spirituelle. In this chapter Grothendieck examines the theme of the triple form (carnal, mental, spiritual) of Creativity introduced at the end of the previous one. He notes that the "great religions" cut the three forms apart by classing them as superior or inferior and encouraging the total suppression of the "inferior" one, whereas so-called "primitive" religions do not. Section 49 contains a very beautiful passage describing the spiritual aspect of doing mathematics, an essentially intellectual activity; the spiritual aspect is not so much related to mathematics itself, but to the relations between the psyche and the mathematics, and the individual apprehension of the beauty of mathematics.

[Leila Schneps: "A brief description of La Clef des Songes, by A. Grothendieck"]
http://www.math.jussieu.fr/~leila/grothendieckcircle/Clefsummary.pdf
http://www.math.jussieu.fr/~leila/

510 Das Kalenderblatt 101027

1966 wurde Grothendieck mit der Fields-Medaille, der höchsten Auszeichnung der mathematischen Forschungsgemeinschaft, geehrt.

Ab 1970 begann Grothendieck seinen Rückzug aus der Mathematik und wandte sich zunehmend der Ökologie, der Philosophie und der Esoterik zu.

Die Anfang der 1970er Jahre in Paris gehaltenen Vorlesungen am College de France und Orsay in Paris nutzte er dazu, über Umweltschutz und Friedenstheorie zu reden, und bekam Schwierigkeiten mit seinen Vorgesetzten. Auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1970 in Nizza verkaufte er die Zeitung seiner Gruppe und eckte bei dem Organisator des Kongresses Jean Dieudonné an, 1973 opponierte er auf der Antwerpen-Konferenz über Modulformen gegen die Finanzierung durch die NATO und verärgerte seinen langjährigen Freund Jean-Pierre Serre. 1974 wurde er Professor in Montpellier und hatte ab 1984 eine Stelle beim nationalen Zentrum für wissenschaftliche Forschung (CNRS) inne. Er hielt bis 1984 Vorlesungen, allerdings nicht über sein früheres Forschungsprogramm, sondern auf elementarer Ebene – und nach Auskunft ehemaliger Studenten erfolgreich.

Andererseits kursieren Gerüchte über irritierende Äußerungen (goldenes Zeitalter nach einem neuen Holocaust, kleine Abweichungen in den Naturkonstanten seien das Werk des Teufels, Kritisches über ehemalige Kollegen usw.) in seinen Schriften Säen und Ernten (1983–1986) und Der Schlüssel der Träume, in denen er der Idee nachging, Gott würde mit ihm in seinen Träumen reden. Säen und Ernten war ursprünglich als Einleitung zu Pursuing stacks gedacht und sollte seinen neuen Arbeitsstil intuitiver Vermutungen erläutern, entwickelte sich dann aber zu einer komplexen Tagebuch-artigen Gedankensammlung über die unterschiedlichsten Themen. In einem 1000-Seiten-Exkurs (The Burial) beschuldigte er ehemalige Schüler und Mitarbeiter, sein Werk und seinen Arbeitsstil zu Grabe getragen zu haben, indem sie seine Ideen stahlen und seine 1970 hinterlassenen „Baustellen“ nicht weiterentwickelten. In einem La Lettre de la Bonne Nouvelle (Brief der frohen Botschaft) an seine Freunde kündigte er 1990 das baldige Heraufziehen eines „Neuen Zeitalters der Befreiung“ an, nur um die Visionen in einem Brief kurz darauf wieder zurückzunehmen.

Anfang 2010 erklärte Grothendieck in einem Brief, er wünsche, dass seine Schriften nicht mehr publiziert würden. Die Internetseite Grothendieck Circle
http://www.math.jussieu.fr/~leila/grothendieckcircle/mathtexts.php
kam diesem Wunsch nach und entfernte alle Schriften Grothendiecks aus ihrem Angebot.
http://de.wikipedia.org/wiki/Alexander_Grothendieck

511 Das Kalenderblatt 101028 Cantors Weltbild (5): Worin wir uns alle einig wissen?

Die [...] Ausdrücke „natura naturans" und „natura naturata" gebrauche ich in derselben Bedeutung, welche ihnen die Thomisten gegeben haben, so dass der erstere Ausdruck Gott als den ausserhalb der aus nichts von ihm erschaffenen Substanzen stehenden Schöpfer und Erhalter derselben, der letztere Ausdruck dagegen die durch ihn geschaffene Welt bezeichnet. Dementsprechend unterscheide ich ein „Infinitum aeternum sive Absolutum", das sich auf Gott und seine Attribute bezieht und ein „Infinitum creatum sive Transfinitum", das überall dort ausgesagt wird, wo in der natura creata ein actual Unendliches constatirt werden muß, wie beispielsweise in Beziehung auf die meiner festen Ueberzeugung nach actual unendliche Zahl der geschaffenen Einzelwesen, sowohl im Welt All, wie auch schon auf unsrer Erde und allerwahrscheinlichkeit nach selbst in jedem noch so kleinen ausgedehnten Teil des Raumes, worin ich mit Leibniz ganz übereinstimme. [Cantor an Kardinal Franzelin, 22. Jan. 1886]

Die Worte "endlicher Verstand", welche man so vielfach zu hören bekommt, treffen, wie ich glaube, in keiner Weise zu: so beschränkt auch die menschliche Natur in Wahrheit ist, vom Unendlichen haftet ihr doch sehr vieles an, und ich meine sogar, daß wenn sie nicht in vielen Beziehungen selbst unendlich wäre, die feste Zuversicht und Gewißheit hinsichtlich des Seins des Absoluten, worin wir uns alle einig wissen, nicht zu erklären sein würde. Und im besondern vertrete ich die Ansicht, daß der menschliche Verstand eine unbegrenzte Anlage für die stufenweise Bildung von ganzen Zahlenklassen hat, die zu den unendlichen Modis in einer bestimmten Beziehung stehen und deren Mächtigkeiten von aufsteigender Stärke sind. [E. Zermelo: "Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer (1932) 176f]

512 Das Kalenderblatt 101029

§1. Introduction. I dedicate this essay to the two-dozen-odd people whose refutations of Cantor's diagonal argument (I mean the one proving that the set of real numbers and the set of natural numbers have different cardinalities) have come to me either as referee or as editor in the last twenty years or so. [...] Cantor's argument is short and lucid. It has been around now for over a hundred years. Probably every professional mathematician alive today has studied it and found no fallacy in it.

{{Paul Bernays ist zwar tot, aber die von ihm verbreitete Erkenntnis ist doch ein Allgemeinplatz, so dass sie jeder heute lebende Mathematiker kennen kann (und kennen sollte): "if we pursue the thought that each real number is defined by an arithmetical law" und das ist unerlässlich - ohne platonischen Glauben, dessen Eingrenzung ebenso zu Widersprüchen führt, wie der unumschränkte platonische Glaube, "the idea of the totality of real numbers is no longer indispensable" (KB101019). Mit dem Platonismus fällt auch Cantors Diagonalargument. Wer dies weiß und zudem ungläubig ist, wie z. B. Solomon Feferman: "I am convinced that the platonism which underlies Cantorian set theory is utterly unsatisfactory as a philosophy of our subject [...] platonism is the medieval metaphysics of mathematics; surely we can do better" (KB090614) kann doch den Absolutheitsanspruch des Kollegen Hodges nicht mehr teilen. Das sollte dieser eigentlich wissen. Und wenn er es weiß, so sollte er es sagen.}}

There is a point of culture here. Several of the authors said that they had trained as philosophers, and I suspect that in fact most of them had. In English-speaking philosophy (and much European philosophy too) you are taught not to take anything on trust, particularly if it seems obvious and undeniable. You are also taught to criticise anything said by earlier philosophers. Mathematics is not like that; one has to accept some facts as given and not up for argument.

{{Philosophen werden ja oft für schlechte Mathematiker gehalten. Ich denke da nur an Kant, der, glaubt man Cantor, "was so bad a mathematician" (KB090727) oder an Schopenhauer, dessen Beweis des Satzes von Pythagoras manchen Ansprüchen nicht genügt
http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek1/geometrie/pyth/beweise/schopi
oder an Hegel, der "bedauert, daß die Physik ihre Gesetze aus der Mathematik bezieht anstatt sie mittels Vernunft zu konstruieren" (KB090821).}}

Nobody should be surprised when philosophers who move into another area take their habits with them. (In the days when I taught philosophy

[Wilfrid Hodges: "An editor recalls some hopeless papers", The Bulletin of Symbolic Logic 4,1 (1998)]

513 Das Kalenderblatt 101030

{{Zum Abschluss der Mythologik-Serie ein Zitat aus einem Essay über Bernays, in dem allerdings von dessen 1934 gezeigter Nüchternheit (s. KB101019) rein gar nichts wiedererkennbar ist - auf keiner der gut 20 Seiten! Liegt es an Bernays' späterer Entwicklung oder am Eklektizismus des Referenten?}}

Given Bernays' modest approach to classes in his 1958 text, how are we to take this incursion by him into what we would now regard as full second-order logic? Gödel in his late sixties, and despite his own earlier pronouncements about how the Continuum Hypothesis is false and how new large cardinal axioms might establish this, worked on “orders of growth” axioms that might actually establish the Continuum Hypothesis. In this Gödel exhibited a remarkable fluidity, to see simply where the mathematics leads. So too Bernays, despite his lack of commitment to classes as “real mathematical objects”. In the end Bernays’ mathematical instincts manifested themselves and he, stimulated by Levy’s work, established a significant result properly of second-order set theory.

Bernays’ work itself would soon be subsumed into set theory with V_k playing the role of the universe V and quantification over classes, etc. carried forth with higher-order quantifiers. In a 1961 abstract William Hanf and Dana Scott formulated the indescribable cardinals by thus ascribing reflection properties to domains V_k. In this context, Bernays’ principle amounts to the ascription of second-order indescribability, $\Pi^1{}_n$-indescribability for all n, to the class On of all ordinals. Here, $\Pi^1{}_n$ refers to the quantifier complexity for the second-order quantifiers with just n alternations of quantifiers starting with ∀. Hanf and Scott characterized the weakly compact cardinals, large cardinals arising from the investigation of infinitary languages, exactly as the $\Pi^1{}_1$-indescribable cardinals, and in fact Bernays’ argument for subsuming the Mahlo hierarchy with his reflection schema requires only universal class quantification. This raises a historically interesting point:

In his Berkeley Ph. D. work done by 1960, Hanf had in effect shown through their incipient infinitary language formulation that weakly compact cardinals k are α-Mahlo for every $\alpha < k$. This in a strong sense had answered a pivotal, classical question of Tarski in the theory of large cardinals: Can the least inaccessible cardinal be measurable? The answer is most decidedly no, as measurable cardinals are weakly compact and α-Mahlo cardinals are highly inaccessible. This result was greeted by Abraham Robinson as “a spectacular success” for metamathematical methods. Hanf’s work radically altered size intuitions about problems that were coming to be understood in terms of large cardinals. {{Von Intuition wollen wir in diesem Zusammenhang lieber nicht reden. Lasst dem Verstand, was des Verstandes ist.}}
[A. Kanamori: "BERNAYS AND SET THEORY" Bulletin of Symbolic Logic 15,1 (2009) 43-69]

{{Das Thema wurde in KB 091217 bereits aufgegriffen, doch ein Climax erscheint nicht möglich - denn wahrscheinlich hat auch der eine oder andere Neuerer schon darüber nachgedacht, "infinitary languages" mit "uncountable languages" zu übertrumpfen -, allenfalls eine Fortsetzung mit anderen Mitteln:}}
http://www.zdf.de/ZDFmediathek/hauptnavigation/startseite/#/kanaluebersicht/508/sendung/Neues-aus-der-Anstalt

514 Das Kalenderblatt 101031 Cantors Weltbild (6): Haeckel

Vielen Dank für ihren "Anti-Häckel". Ich halte es für sehr werthvoll, daß den schamlosen Angriffen Haeckels gegen das Christenthum der angemasste Schein der Wissenschaftlichkeit nunmehr vor dem weitesten Kreise entrissen wird.
Die vornehme Scheu vor herzhafter Polemik (in unseren Kreisen so verbreitet) musste gegenüber solchen Nichtswürdigkeiten weichen.
Hoffentlich gesellen sich zu Ihnen Mitkämpfer, so daß Sie es nicht nöthig haben werden, in Person noch einmal auf die Sache zurückzukommen.
Übrigens habe ich erst kürzlich Gelegenheit erhalten, mir über die sogenannte Nietzschesche Philosophie (ein Pendant zu Häckels monistischer Entwicklungsphilosophie) ein genaues Bild zu machen. Wegen der stilistischen Reize findet sie bei uns eine kritiklose Anerkennung, die im Hinblick auf den perversen Inhalt und die herostratischen antichristlichen Motive mir höchst bedenklich zu sein scheint.

Das Bedürfnis nach Neuheit und Füllung des philosophiegeschichtlichen Schemas macht unsere Philosophen moralisch blind und eilfertig bereit, Jeden mit dem Anspruch eines neuen Systems Auftretenden in ihre historische Darstellung einzufügen. So erreicht der ehrgeizige Neuerer stets seinen Zweck; er wird zum berühmten Philosophen und die Verderbniss der Jugend vollzieht sich im großen Stile.
[Cantor an Friedrich Loofs, Prof. für Kirchengeschichte in Halle, 24. 2. 1900]

Ernst Haeckel (1834 - 1919) war ein deutscher Zoologe, Philosoph und Freidenker, der die Arbeiten von Charles Darwin in Deutschland bekannt machte und zu einer speziellen Abstammungslehre ausbaute.
Haeckel war urspr. Arzt, später jedoch Professor für vergleichende Anatomie und für Zoologie. Er prägte einige heute geläufige Begriffe der Biologie wie Stamm oder Ökologie. Auch bezeichnete Haeckel die Politik als angewandte Biologie. Er vertrat einen Monismus auf naturwissenschaftlicher Grundlage.
Haeckel trug durch seine populären Schriften sehr zur Verbreitung des Darwinismus in Deutschland bei. Darüber hinaus erarbeitete er eine ausführliche embryologische Argumentation für die Evolutionstheorie und formulierte in diesem Zusammenhang das biogenetische Grundgesetz: "Die Ontogenese rekapituliert die Phylogenese“
http://de.wikipedia.org/wiki/Ernst_Haeckel

515 Das Kalenderblatt 101101 Cantors Weltbild (7): Darwinismus

Dass aber ein „Infinitum creatum" als existent angenommen werden muss, lässt sich mehrfach beweisen. Um Ew. Eminenz nicht zu lange aufzuhalten, möchte ich mich in dieser Sache auf zwei kurze Andeutungen beschränken. Ein Beweis geht vom Gottesbegriff aus und schliesst zunächst aus der höchsten Vollkommenheit Gottes Wesens auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum ordinatum, sodann aus seiner Allgüte und Herrlichkeit auf die Nothwendigkeit der thatsächlich erfolgten Schöpfung eines Transfinitum. [Cantor an Franzelin, 22. 1. 1886]

{{Das lässt sich natürlich, auf natürlichem Wege nach Darwin
http://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Darwin
nicht bewerkstelligen. Der Geburtskanal der Natur fördert weder Engel noch Unendlichkeiten zutage (abgesehen vielleicht von der, an die auch Einstein geglaubt haben soll). Deshalb wohl:}}

Cantor wünscht, daß philosophische Lehrstühle in Deutschland nicht mit Darwinisten oder Atheisten besetzt werden, und versuchte dies auch unter Umgehung des offiziellen Berufungsprocederes durchzusetzen, allerdings stets ohne Erfolg. [H. Meschkowski, W. Nilson (Herausgeber): "Georg Cantor Briefe ", Springer, Berlin (1991) 13]
Die Briefe an Lüroth, Woker und Heiner zeigen, mit welcher Raffinesse Cantor sein Vorhaben verfolgt. [a.a.O. p. 374]

Nun ist aber Husserl, wie ich bestimmt weiß und auch aus seinen hier gehaltenen Vorlesungen über die Gottesbeweise und gegen den Darwinismus zweifellos hervorgeht, ein Theist und paßt sowohl aus diesem Grunde ... viel mehr zum Lehrer katholischer Studenten, als die von Prof. Riehl begünstigten Candidaten. [Cantor an Woker, 30.11.1895]

Bei alledem halte ich es aber vom kathol. Standpuncte aus, auf dem ich ja selbst seit Jahren stehe [...] Namentlich scheint es mir [...] nicht gleichgültig zu sein, ob der Ordinarius für Philosophie in der philosophischen Fakultät Theist oder Atheist ist, ob er pro Darwinismus oder contra Darwinismus wirkt. Haben doch die Freiburger Theologen an dem nach Kiel zu Ostern abziehenden Professor Riehl die schlimmsten Erfahrungen gemacht, die sich bei seinem

Schüler Rickert (Sohn des bekannten Berliner Parlamentariers) oder bei irgend einem andren von Riehl Empfohlenen leicht wiederholen können. [Cantor an Woker, 15.12.1895]

{{Spitzer in Graz}} Hat zu Anfang der Jahre ein Buch über Darwinismus, seitdem nichts andres geschrieben. Ist vermuthlich Jude und radikal liberal in jeder Beziehung. [Cantor an Heiner, 11. 1. 1896] (vgl. auch KB 090622)

Sie stritten sich beim Wein herum,
Was das nun wieder wäre;
Das mit dem Darwin wär gar zu dumm
Und wider die menschliche Ehre.
Sie tranken manchen Humpen aus,
Sie stolperten aus den Türen,
Sie grunzten vernehmlich und kamen zu Haus
gekrochen auf allen vieren.

(W. Busch, Kritik des Herzens, 1874 (!))
http://de.wikisource.org/wiki/Sie_stritten_sich_beim_Wein_herum

516 Das Kalenderblatt 101102

The Quine-Putnam indispensability argument provides an example. First it is argued that any indispensable part of empirical science is likely to be true and therefore something we are justified in believing. Then it is argued that large amounts of mathematics are indispensable to empirical science. {{Mathematik ist empirische Wissenschaft. Geometrie ist Erdvermessung, das Messen von Figuren im Sand. Trigonometrie ist Dreiwinkelmessung, wobei alle Winkel zunächst kleiner als π sein mussten. Zahlen sind dem Zählen entnommen, wobei lediglich vom Gezählten abstrahiert wird und Mengenangaben verfeinert werden: Ein Schwarm Bienen, eine Herde Schafe, ein Rudel Wölfe und eine Flucht Tauben werden so z. B. zu 3223, 237, 8 und 17.}} If both claims are correct, it follows that Truth is likely to be true and that belief in Truth therefore is justified.
[Øystein Linnebo: "Platonism in the Philosophy of Mathematics", Stanford Encyclopedia of Philosophy (2009)]
http://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/

517 Das Kalenderblatt 101103

'Twill not be surprizing after this, if I deliver a maxim, which is condemn'd by several metaphysicians {{no, it is condemned by physicists}}, and is esteem'd contrary to the most certain principles of human reason. This maxim is that an object may exist, and yet be no where: and I assert, that this is not only possible, but that the greatest part of beings do and must exist after this manner. [L. A. Selby-Bigge (ed.): D. Hume, A Treatise of Human Nature", Oxford (1964) p. 235]

Wenn etwas existiert, so existiert es materiell unabhängig von uns oder als Idee zumindest in einem Kopf. Manches existiert manchmal auch in mehreren Köpfen. Dann meinen manche, es hätte keine materielle und lokale Existenz; sie sprechen dann von platonischer Existenz.

518 Das Kalenderblatt 101104

Another British Empiricist who employed 'real' in this context was John Locke. In Book Four, Chapter IV, "Of the Reality of Knowledge," Locke had two relevant sections. In Section 6, "Hence the reality of Mathematical Knowledge," he held that:

I doubt not but it will be easily granted that the knowledge we have of mathematical truths is not only certain, but real knowledge, and not the bare empty vision of vain, insignificant chimeras of the brain; and yet, if we will consider, we shall find that it is only of our ideas. [John Locke: "An Essay Concerning Human Understanding"]

{{Das ist so, weil die Mathematik durch Abstraktion von konkreten Umständen aus der Realität entstanden ist. Manche meinen zwar, der Satz "Eine Kugel existiert als ein mathematisches Objekt" sei nicht sinnhafter als der Satz "Mezi plochami uzavírajícími daný objem má kulová plocha nejmenší povrch a naopak," doch das zeigt nur die Verachtung folgerichtigen Denkens. Denn alle Definitionen, die beide Sätze gleichermaßen mit Sinn erfüllen können, sind aus der Realität entnommen und entwickelt. Eine Kugel existiert als mathematisches Objekt, weil jedes Wort dieses Satzes in der Realität wurzelt und dadurch zum Dialog taugt. Viele reale Kugeln existieren, aus denen die ideale mathematische Kugel und ebenso ihre Geschwister in 0, 1, 2, 4, 5 und mehr Dimensionen präpariert wurden.}}

Note that Locke distinguished between objects existing as physical objects and mathematical objects in Section 8, "Existence not required to make it real." He states that:

All the discourses of the mathematicians about the squaring of a circle, conic sections, or any other part of mathematics, concern not the existence of any of those figures; but their demonstrations, which depend on their ideas, are the same, whether there be any square or circle existing in the world or no. [John Locke: "An Essay Concerning Human Understanding"]

{{Nein. Zum Erdenken eines Gegenstandes benötigt man einen Grundgedankenschatz, so wie man zum Sprechen einen Grundwortschatz benötigt. Diese Grundschätze entstammen der Realität, so wie sie mit den Sinnen aufgenommen wird, - und die Regeln, um daraus andere Gedankendinge zu formen, ebenfalls.}}

[Harold Ravitch: "On Gödel's Philosophy of Mathematics"]
http://www.friesian.com/goedel/chap-2.htm

519 Das Kalenderblatt 101105

[...] suppose for the sake of argument that physical regions are literally modeled by subsets of R^3. Then the argument goes like this: working in a set theory with the Axiom of Choice, we perform the Banach–Tarski construction, which is physically ridiculous; we conclude that Choice has been empirically disconfirmed. But isn't it at least as reasonable to conclude that the full power set of R^3 was a poor choice as a model for physical regions? Indeed, given the many internal mathematical considerations in favor of the axiom, wouldn't it be considerably more reasonable to conclude that physical regions are more effectively modeled by measurable subsets of R^3? If, for example, our set theory includes sufficient large cardinals, we might count Banach–Tarski as a good reason to model physical space in L(R), where all sets of reals are measurable. [...] In particular, we should be alert to the ways that applied mathematics can generate phantom physical questions, and we should no longer expect science to provide the sort of methodological guidance for mathematics that it once did. [Penelope Maddy: "How applied mathematics became pure", Reviev Symbolic Logic 1 (2008) 16-41]

Den Primat der Physik und der Ratio kann man in matheologische Fragen ebensowenig wie in theologischen Fragen erwarten. Denn in beiden Fällen wird der Ventilglaube ventiliert, dass eine Einbahnstraße zur Realität führt: Die Mathematik beeinflusst die Realität, die Realität beeinflusst aber nicht die Mathematik. Dasselbe Weltbild herrscht in theologischen Kreisen: Gott kann auf die Welt wirken, die Welt wirkt aber nicht auf Gott. - Allerdings kann man da mit Hilfe von Gebeten wenigstens den Versuch unternehmen.

520 Das Kalenderblatt 101106

"The Sand Reckoner" might be the best introduction to ancient science:
1. It is addressed to the King of Syracuse, so may be the first research expository paper ever written.
2. In its goal of addressing "innumeracy", it is relevant to a modern audience. {{Nicht-Rechnen-Können? Das wäre zwar die korrekte Übersetzung, doch kein wirklich interessantes Thema. Eher ist wohl Unzählbarkeit gemeint.}}
3. It contains many details about ancient astronomy, but also motivates them by presenting them in the context of solving a specific problem.
4. The first known example of an astronomical experiment.
5. The first example of psychophysics, the study of human beings as measuring instruments.
6. Faces the problem of naming and manipulating large numbers without using modern notation.
[Ilan Vardi: "Archimedes, the Sand Reckoner"]
http://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Ilan.Vardi/sand_reckoner.ps
ilan@ihes.fr

Punkt 2 ist falsch, aber ein interessantes Beispiel der modernen Psychomathematik, denn er demonstriert, wie die Unendlichkeit heute selbst in eine Arbeit eingeschwärzt werden soll, die durch und durch dem Zweck gewidmet ist, sie zu beseitigen. Wie selbstverständlich wird vorausgesetzt, dass die "moderne Hörerschaft" nach "innumeracy" giert. Mich erinnert diese Meinungsmache an die Verpflichtung der Lehrbuchautoren im Warschauer Pakt, stets ein mehr oder weniger passendes Wörtlein von Wladimir Iljitsch Uljanow alias Lenin einzuflechten, z. B. "LENIN hatte in seinem 'Materialismus und Empiriokritizismus' bereits darauf hingewiesen, daß die Annahme irgendwelcher unveränderlicher Elemente, eines 'unveränderlichen Wesens der Dinge' u. ä., nicht Materialismus, sondern metaphysischer, d. h. antidialektischer, Materialismus ist." [E.W. Schpolski: "Atomphysik I", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (1975) p. 410]

521 Das Kalenderblatt 101107

To express this giant bombshell in terms of a small firecracker: There is a way of dividing a sphere as large as the sun into separate parts, so that no parts will have any points in common, and yet without compressing or distorting any part, the whole sun may at one time be fitted snugley into one’s west pocket {{like a pea}}. Furthermore the pea may have its component parts so rearranged that without expansion or distortion, no two parts having any points in common, they will fit the entire universe solidly, no vacant space remaining either in the interior of the pea, or in the universe. {{Glaube kann Berge versetzen. Das ist nicht neu. Aber wer das Universum in die Tasche steckt, muss einen unendlichen Glauben ans Unendliche haben.}}

Surely no fairy tale, no fantasy of Arabian nights, no fevered dream can match this theorem of hard, mathematical logic {{ausgehend von der falschen Prämisse einer beendeten Unendlichkeit - ex falso quodlibet}}. Although the theorems of Hausdorff, Banach, and Tarski cannot, at the present time, be put to any practical use {{da fällt mir aber ein Stein vom Herzen, wenigstens vorläufig (vgl. KB100329: The Banach-Tarski Gyroscope). Oder haben die Produzenten von Vorderpressschinken die erste Anwendung entdeckt? Diese neue Premium-Marke gemahnt ja auch in anderer Hinsicht an die beendete Unendlichkeit: früher war die Unendlichkeit ohne Ende und Schinken stammte stets vom hinteren Teil des Tieres.}}, not even by those who hope to learn how to pack their belongings into a week-end grip, they stand as a magnificent challenge to imagination and as a tribute to mathematical conception. {{Es kann bei diesen geschwollenen Vokabeln gar nicht oft genug betont werden: Mathematik hat mit derartigen Glaubensprüfungen für Eleven der Matheologie nicht das Geringste zu schaffen. Es handelt sich dabei wirklich nur um den matheologischen Beweis, dass der Glaube den Verstand besiegen kann - bei manchen Menschen wenigstens. Allein das ist hier "magnificient".}}

[...] Most mathematical fallacies are too trivial to deserve attention {{or too obvious}}; nevertheless, the subject is entitled to some consideration because, apart from its amusing aspect, it shows how a chain of mathematical reasoning may be entirely vitiated by one fallacious step. {{Wenn aber dieser Schritt ein so offensichtlicher Fehltritt ist, wie die vollendete Unendlichkeit (obwohl deren Annahme durch die Größe der damit begangenen Narretei beinahe gerechtfertigt erscheint), und wenn das Ergebnis so gigantisch falsch ist wie das Universum in der Erbse ... - ist das nicht eher traurig?}}

[J.R. Newman (ed.): "The world of mathematics“, Vol. 3“, Simon & Schuster, New York (1956) 1945f]
http://www.amazon.de/gp/search?index=books&linkCode=qs&keywords=0486411516

522 Das Kalenderblatt 101108

Vorgestellt wird eine unendliche Folge leerer Mengen, deren Vereinigung alle natürlichen Zahlen enthält.

Es ist wohlbekannt, dass der Grenzwert alternierender Reihen und Doppelreihen durch Umordnung der Terme verändert werden kann. Bei absoluter Konvergenz ist das nicht möglich. Das gilt auch für Reihen aus Elementen von Banach-Räumen und überall sonst in der Mathematik. Aber es gilt nicht für Reihen von Mengen.

Die Folge S der Mengen $S(n) = (n, n\text{-}1, ..., 3, 2, 1)$ konvergiert, weil lim sup und lim inf existieren und gleich sind,
http://en.wikipedia.org/wiki/Limit_superior_and_limit_inferior
und zwar gegen den Grenzwert $\omega^* = (..., 3, 2, 1)$.

Teilen wir die Menge $S(n)$ in zwei Mengen $S_1(n)$ und $S_2(n)$, sodass $S_1(n)$ alle $n > |S(n)|/2$ enthält und $S_2(n)$ alle $n \leq |S(n)|/2$, dann besitzt die Folge S_2 den Grenzwert ω^*, während der Grenzwert der Folge S_1 leer ist. Die ersten Terme der Folgen sind

n	S_1	S_2
1	(1)	( )
2	(2)	(1)
3	(3, 2)	(1)
4	(4, 3)	(2, 1)
...	...	...

Nun spalten wir aus der Menge $S_2(n)$ die Elemente ab, die nicht größer als $|S_2(n)|/2$ sind, und vereinigen sie in einer neue Menge $S_3(n)$. Die ersten Terme der Folgen sind

n	S_1	S_2	S_3
1	(1)	( )	( )
2	(2)	(1)	( )
3	(3, 2)	(1)	( )
4	(4, 3)	(2)	(1)
...	...	...	

Das Verfahren kann ohne Ende fortgesetzt werden: Sobald es m Mengen S_1, S_2, ..., S_m gibt, spalten sich aus der Menge $S_m(n)$ die Elemente ab, die nicht größer als $|S_m(n)|/2$ sind, und vereinigen sich in der neue Menge $S_{m+1}(n)$.

Für $n \to \infty$ ergeben sich unendlich viele Folgen. Jede von ihnen besitzt als Grenzwert die leere Menge. Die Vereinigung der k im Schritt n entstandenen Mengen $S_1(n)$ U $S_2(n)$ U ... U $S_k(n)$ ist die n-te Partialsumme der unendlichen Reihe $S_1(n)$ U $S_2(n)$ U ... . Sie enthält alle Zahlen von (n, n-1, ..., 3, 2, 1), und der Grenzwert der Folge dieser Vereinigungen, der Wert der Reihe also, ist ω^*.

Diese Rechnung ist ZF-tauglich und besitzt bezüglich der Kardinalzahlen der Grenzwerte der Mengenfolgen und der Kardinalzahl der Mengenreihe das Ergebnis

$$0 + 0 + 0 + ... = \infty.$$

523 Das Kalenderblatt 101109

Beweisprinzip: Schwarzes Loch

In KB101108 wurde gezeigt, dass die transfinite Mengenlehre einen Widerspruch enthält. Hier wird nun das Prinzip erklärt, das die Produktion von Beweisen dieses Sachverhaltes zu einem Kinderspiel macht.

Die transfinite Mengenlehre ruht auf zwei Säulen:
1) Die unendliche Menge der natürlichen Zahlen ist vollständig oder beendet, so dass keine weitere natürliche Zahl denkbar ist.
2) Es gibt keine letzte natürliche Zahl.

Werden die Elemente einer Menge M mit der Kardinalzahl $|M|$ den natürlichen Zahlen zugeordnet, so ändert sich weder M noch $|M|$. (Beispiele sind die berühmten Bijektionen von Galilei oder Cantor.)

Werden die Elemente von M aber nach der Zuordnung zu den natürlichen Zahlen ohne Ende zu größeren Zahlen weitergeschoben, so müssen sie verschwinden, weil die natürlichen Zahlen vollständig ausgeschöpft werden können, aber keine letzte vorhanden ist.

Eigentlich ist das Prinzip ganz einfach. Der Name erklärt sich selbst.

524 Das Kalenderblatt 101110

Die transfinite Mengenlehre erlaubt die vollständige Aufzählung abzählbar unendlicher Mengen. Mit dem Prinzip der transfiniten Induktion können sogar beliebig große wohlgeordnete Mengen vollständig abgearbeitet werden.

Unter dieser Prämisse ist eine wiederholte Umordnung wohlgeordneter Mengen möglich, so dass deren Elemente nach einem beliebigen weiteren wohldefinierten Ordnungsmerkmal angeordnet werden können.

Beispiel: Die durch Bijektion mit den natürlichen Zahlen wohl- und sogar vollständig linear geordnete Menge der rationalen Zahlen q_n aus dem Intervall (0, 1)

$$q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \ldots \quad (\#)$$

soll nach Größe der Elemente geordnet werden:

Zunächst werden die ersten beiden Elemente abgeteilt und nach Größe geordnet:

$$|\ q_1, q_2\ |\ q_3, q_4, q_5, \ldots$$

wird zu

$$|\ q'_1, q'_2\ |\ q_3, q_4, q_5, \ldots$$

Im zweiten Schritt wird das dritte Element hinzugenommen und nach Größe eingeordnet:

$$|\ q''_1, q''_2, q''_3\ |\ q_4, q_5, \ldots$$

Im dritten Schritt folgt das vierte Element, usw. Solange nur endlich viele Elemente abgeteilt sind, ist eine Einordnung möglich.

Auf diese Weise wird jeder beliebig große Anfangsabschnitt der linearen Ordnung (#) auch nach Größe geordnet.

Was aber für jeden beliebig großen Anfangsabschnitt erreicht werden kann, das kann für alle natürlichen Zahlen erreicht werden, denn es gibt keine natürliche Zahl, die zu keinem Anfangsabschnitt gehörte.

"Klar ist zunächst, daß auf diese Weise *allen* Intervallen der Reihe (3) bestimmte Punkte der Reihe (5) zugeordnet werden; denn wegen des Überalldichtseins der Menge $\{\varphi_\nu\}$ im Intervall (0...1), und weil die Endpunkte 0 und 1 nicht zu $\{\varphi_\nu\}$ gehören, gibt es in dieser Reihe unendlich viele Punkte, die eine geforderte Lagenbeziehung zu einer bestimmten endlichen Anzahl von Punkten derselben Menge $\{\varphi_\nu\}$ besitzen, und es erfährt daher der aus unsrer Regel resultierende Zuordnungsprozeß *keinen Stillstand*." [E. Zermelo (Hrsg.): "Georg Cantor: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer (1932), p. 239] Kursivdruck vom Autor.

525 Das Kalenderblatt 101111

Die Umordnung der linear geordneten Menge der rationalen Zahlen aus dem Intervall (0, 1) kann automatisiert werden. Dazu wird die gesamte (z. B. nach Cantor) geordnete Menge in Paare abgeteilt und jedes Paar so umgeordnet, dass der kleinere Partner den kleineren Index erhält. Das Ergebnis sei

$| q_1, q_2 | q_3, q_4 | q_5, q_6 | ...$

Im zweiten Schritt werden Paare der folgenden Form gebildet

$q_1 | q_2, q_3 | q_4 , q_5 | q_6, q_7 | ...$

und so umgeordnet, dass der kleinere Partner den kleineren Index erhält. Das Ergebnis sei

$q_1 | q'_2, q'_3 | q'_4 , q'_5 | q'_6, q'_7 | ...$

Im dritten Schritt werden wieder Paare aus allen Zahlen gebildet

$| q_1, q'_2 | q'_3, q'_4 | q'_5, q'_6 | ...$

und so umgeordnet, dass der kleinere Partner den kleineren Index erhält.

Nachdem der Automat $\aleph_0$ Mal $\aleph_0$ Paare umgeordnet hat, ist die endgültige, beendete, vollständige und wohlgeordnete Anordnung der rationalen Zahlen nach Größe fertig. Oder sollte ausgerechnet diese Menge nicht als fertige Menge existieren können?

Ein Einwand gegen das dargestellte Verfahren ist, dass es niemals zu einem Abschluss gelangt und jede nach Größe geordnete Teilmenge unvollständig ist.

Doch dieser Einwand ist nicht stichhaltig, da *jede* Transposition vorbestimmt ist. Die Menge der Transpositionen liegt wie ein aufgeschlagenes Buch vor dem platonischen Auge - etwa so wie die Nummerierung der rationalen Zahlen aus dem Intervall (0, 1) oder die Prüfung der Cantorschen Tabelle (nicht) aller reellen Zahlen. Denn es kommt in der transfiniten Mengenlehre, wie schon Cantor erkannt hat, nur darauf an: "Klar ist zunächst, daß auf diese Weise allen Intervallen der Reihe (3) bestimmte Punkte der Reihe (5) zugeordnet werden; denn [...] es erfährt daher der aus unsrer Regel resultierende Zuordnungsprozeß keinen Stillstand." [E. Zermelo (Hrsg.): "Georg Cantor: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer (1932), p. 239] Das hätte Cantor direkt zur obigen Methode gesagt haben können.

526 Das Kalenderblatt 101112

LEONHARD EULER (1707 - 1783), als Schüler und Freund mit den BERNOULLIs verbunden, war einer der fruchtbarsten Mathematiker überhaupt. Ausgehend von der Reihe für sin*x* konnte er 1748 die Reihe der inversen Quadrate und höherer Potenzen berechnen (LEIBNIZ und die BERNOULLIs hatten es vergeblich versucht). Diese sogenannten ζ-Reihen führen abermals auf Vielfache der Zahl π

$\zeta(2) = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + ... = \pi^2/6$,
$\zeta(4) = 1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + ... = \pi^4/90$,
$\zeta(6) = 1 + 1/2^6 + 1/3^6 + 1/4^6 + ... = \pi^6/945$,
...

Die Reihenwerte für ungerade Exponenten hat EULER vergeblich gesucht. Bislang hat sie auch noch niemand sonst gefunden. Numerische Werte sind mit großer Genauigkeit berechnet worden. Man weiß überdies, dass $\zeta(3)$ irrational ist (Apery, 1979) und dass mindestens eine der Zahlen $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ irrational ist (Zudilin, 2001). Vermutlich sind sogar alle transzendent (s. Kap. X).

[Skriptum zur Vorlesung: "Die Geschichte des Unendlichen", 5. Aufl., Augsburg (2011) p. 19]

The starting point for Apéry was the series representation of $\zeta(3)$ as

$$\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}$$

Due to the success of Apéry's method a search was undertaken for a number ξ_5 with the property that

$$\zeta(5) = \xi_5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^5\binom{2n}{n}}$$

If such a ξ_5 were found then the methods used to prove Apéry's theorem would be expected to work on a proof that $\zeta(5)$ is irrational. Unfortunately, extensive computer searching has failed to find such a constant, and in fact it is now known that if ξ_5 exists and if it is an algebraic number of degree at most 25, then the coefficients in its minimal polynomial must be enormous, at least 10^{383}, so extending Apéry's proof to work on the higher odd ζ constants doesn't seem likely to work. {{Um die Koeffizienten des Minimalpolynoms empirisch zu bestimmen, könnte man dem Glück vertrauend alle Zahlen mit 383 Ziffern aufschreiben oder anders übersichtlich speichern. - Könnte man? Hier stoßen idealistische Mathematiker schmerzhaft an die Realität.}}

[R. Apéry: "Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$", Astérisque 61 (1979) pp. 11-13]
http://en.wikipedia.org/wiki/Ap%C3%A9ry%27s_theorem

527 Das Kalenderblatt 101113 Cantors Weltbild (8): Konfession

Cantors Vertrautheit mit den Kirchenvätern, der Scholastik, sein Bemühen, möglichst nicht gegen die Grundlinien der katholischen Theologie zu verstoßen, seine sehr ausgedehnte Korrespondenz mit katholischen Theologen: das alles ist erstaunlich, wenn man bedenkt, daß Cantor doch (wie sein Vater) der evangelischen Kirche angehörte.

Die Tatsache, daß seine Mutter katholisch war, kann kaum als eine ausreichende Erklärung für diese Entwicklung gelten. Sie hat ihren Grund wohl vor allem darin, daß er bei katholischen

Denkern (vor allem bei Gutberlet und Jeiler) so viel Verständnis für seine metaphysisch fundierte Theorie des Aktual-Unendlichen fand.

1891 berichtet er noch [...] sehr erfreut über die Konfirmation seiner ältesten Tochter Else in der lutherischen Kirche St. Laurenti. [Interessant ist, daß die Tochter selbst dieser kirchlichen Feier viel kritischer gegenüberstand als ihre Eltern. Sie hatte Skrupel und erwog den Verzicht auf die Konfirmation. Nur die Rücksicht auf ihre Eltern hielt sie von diesem Schritt ab.]

Einige Jahre später schreibt er an Hermite (21. Januar 1894) über seine Stellung zur Religion:

Metaphysik und Theologie haben, ich will es bekennen, meine Seele in solchem Grade ergriffen, daß ich verhältnismäßig wenig Zeit für meine erste Flamme übrig habe.

Wäre es nach meinen Wünschen vor fünfzehn, ja sogar noch vor acht Jahren gegangen, so hätte man mir einen größeren mathematischen Wirkungskreis, etwa an der Universität Berlin oder Göttingen gegeben und ich würde vielleicht meine Sache nicht schlechter gemacht haben als die Fuchs, Schwarz, Frobenius, Felix Klein, Heinrich Weber etc. Allein nun danke ich Gott, dem Allweisen und Allgütigen, daß er mir die Erfüllung dieser Wünsche für immer versagt hat, denn so hat er mich gezwungen durch ein tieferes Eindringen in die Theologie Ihm und seiner heiligen-römisch-katholischen Kirche zu dienen, als ich es nach meinen wahrscheinlich schwachen mathematischen Kräften durch die ausschließliche Beschäftigung mit der Mathematik hätte tun können.

So erstreckt sich meine durchaus irenische universelle und cosmo-politische Täthigkeit schon seit Jahren hauptsächlich nach zwei Richtungen. Erstens wirke ich nach Kräften auf die Geistlichkeit [Dahinter durchstrichen: natürlich nur auf die katholische.] mit der ich innigst befreundet bin [Dahinter durchstrichen: Die protestantische ist viel zu hochmüthig, um von mir Belehrung annehmen zu wollen.] und zwar handle ich da nach den Worten: „Ihr seid meine Lehrer in der Religion und Theologie, ich Euer dankbarer Sohn und Schüler. Von Euch und Eurem guten Willen hängt es allein ab, ob ich Euer Lehrer werde in den weltlichen Wissenschaften und so eine goldene Brücke schlage von Euch zu uns, von uns zu Euch." Zweitens wende ich mich an den Kreis der gebildeten Laien, ohne Zelotismus und frei von Ostentation, mit der nöthigen Auswahl, Vorsicht und Klugheit, um sie von den grassierenden Verirrungen des Skeptizismus, Atheismus, Materialismus, Positivismus, Pantheismus etc. abzubringen und sie allmählich dem allein vernunftgemäßen Theismus wieder zuzuführen ...

Die (von ihm selbst im Briefbuch durchgestrichenen, also wohl nicht in die Reinschrift aufgenommenen) Fußnoten deuten darauf hin, daß er inzwischen Ärger mit den Theologen seiner Kirche gehabt hat.

Vernunftgemäßer Theismus: Das ist seine Konzeption. Und wir finden in seinen Briefen immer wieder Versuche, mathematische Deduktionen auszuweiten zu „Beweisen" für metaphysische oder theologische ("kritische") Thesen.

So setzt sich Cantor ein für die (die biblische Schöpfungsgeschichte bestätigende) Auffassung, daß die Welt einen Anfang in der Zeit gehabt habe.

[Herbert Meschkowski: "Georg Cantor: Leben, Werk und Wirkung", 2. Aufl. BI, Mannheim (1981) 124f]

Darf ich Sie also um Ihre einflussreiche Befürwortung dieser Angelegenheit bitten? Es dürfte allerdings in Freiburg (ausgenommen die theol. Facultät) nicht bekannt werden, daß die Information und Bitte von mir ausgeht! Denn Sie wissen ja, daß die evangelischen Bundeskrähen aller Orten in engem Zusammenhang stehen; die hiesigen, Ihnen wohlbekannten Mitglieder dieser schwarzen Gesellschaft würden mir ja darob die Augen aushacken! [Cantor an Woker, 30. Nov. 1895]

In religiösen Fragen und Beziehungen ist mein Standpunct *kein confessioneller*, da ich *keiner der bestehenden organisirten Kirchen* angehöre. Meine Religion ist die vom dreieinigen, einen und einzigen Gott selbst geoffenbarte und meine Theologie gründet sich auf Gottes Wort und Werk, wobei ich außerdem als meine Lehrer *hauptsächlich* die apostolischen Väter, die Kirchenväter und die angesehensten Kirchenlehrer der *ersten 15 Jahrhunderte* unsrer Zeitrechnung *verehre* (d. h. der Zeit, welche der Kirchenrevolution des 16ten Jahrhunderts vorangegangen ist). [Cantor Mrs. C. Pott, 7. März 1896]

Cantor ist allerdings bis zu seinem Tode Mitglied der evangelischen Kirche gewesen und ist auch von einem evangelischen Pfarrer beerdigt worden. [W. Purkert, H.J. Ilgauds: "Georg Cantor 1845 - 1918", Birkhäuser, Basel (1987) 120]

528 Das Kalenderblatt 101114 Cantors Weltbild (9): Katholizismus

Für Cantor war die Schrift des Philosophen eine willkommene Hilfe. Nach Cantors Tode, im Jahre 1919, hat Gutberlet in der Besprechung eines Buches über seine Partnerschaft mit dem Begründer der Mengenlehre berichtete (Philos. Jahrbuch der Görres-Ges. 32, 1919, S. 364 ff): Da er sich wegen dieses kühnen Unternehmens von allen Seiten angegriffen sah, suchte er Sukkurs bei mir, dem einzigen, der, wie er glaubte, mit seiner Auffassung übereinstimmte. Da er von edler Gesinnung war, teilte er nicht die Verachtung, mit welcher die ungläubige Wissenschaft die christlichen Philosophen behandelt. Es war auch nicht die bloße Not, welche ihn zu mir führte, sondern, wie er sagte, habe er darum eine katholikenfreundliche Gesinnung, weil seine Mutter katholisch war. Er befragte mich über die Lehre der Scholastiker in betreff dieser Frage. Ich konnte ihn besonders auf den hl. Augustin und auf den P. Franzelin, den späteren Kardinal, hinweisen. Dieser mein hochverehrter Lehrer verteidigte die aktual unendliche Menge in der Erkenntnis Gottes, gestützt auf die ausdrückliche Lehre des hl. Augustin, und er war es, der mir den Anstoß zu jener Schrift gegeben, und mich bei den heftigen Angriffen damit beruhigte, daß ich nur die Lehre des hl. Augustin vortrage.
[Herbert Meschkowski: "Georg Cantor: Leben, Werk und Wirkung", 2. Aufl. BI, Mannheim (1981) 66]

Bei alledem halte ich es aber doch vom kathol. Standpuncte aus, auf dem ich ja selbst seit Jahren stehe, für discutabel, ob nicht die theol. Facultät in Freiburg ein großes Interesse daran nehmen müßte, daß auch in den anderen Facultäten möglichst friedlich gesinnte und tüchtige Kräfte wirken. [Cantor an Woker, 15. 12. 1895]

Unserem heiligsten Herrn Papst Leo XIII.
In Betracht der wohlbekannten Briefe Ihrer Apostolischen Heiligkeit, besonders jenes, unter dem 14. April 1895 gegebenen, den Du an das englische Volk geschickt hast, habe ich es für nötig gehalten, das Glaubensbekenntnis des Francis Bacon, "seines Jahrhunderts und seines Volkes Zier, Schmücker und Schmuck der Gelehrsamkeit" allen Christen und insbesondere den Anhängern der Anglikanischen Kirche ins Gedächtnis zu rufen.
Erlaube, Größter Brückenbauer, daß ich sieben Exemplare einer neuen Ausgabe jenes kleinen Werkes Dir widme, und daß ich drei Bände der Werke des Francis Bacon beifüge.
Ich bete und bitte Dich, Seeligster Vater, daß Du annehmen wollest jene 10 kleinen Gaben, die ich anzubieten wage, die Zeichen sein sollen meiner Verehrung und meiner Liebe zu Deiner Heiligkeit und der Heiligen Katholischen Römischen Kirche.
Deiner Heiligkeit demütigster und höchst zugetaner Diener
Georg Cantor
Mathematiker
[Cantor an Papst Leo XIII, 13. 2. 1896, im Original lateinisch]

Eine Antwort des Papstes ist nicht bekannt.
[H. Meschkowski, W. Nilson: "Georg Cantor Briefe", Springer, Berlin (1991) 383]

Es bleibt aber bis zum Ende der Tage auf einem unerschütterlichen Fels, Christo selbst, ruhend, die unsichtbare Kirche, welche er gegründet hat, bestehen. Er ist ihr Oberhaupt, das keinen Statthalter auf Erden braucht. [G. Cantor: " Ex Oriente Lux", Selbstverlag (1905) p. 12]

Das ist eine deutliche Absage an den Katholizismus. [H. Meschkowski: "Georg Cantor: Leben, Werk und Wirkung", 2. Aufl. BI, Mannheim (1981) 128]

529 Cantors Weltbild (10): In intellectu Divino

Auch glaube ich, dass die Worte der heil. Schrift, wie z. B. Sap. c. 11, v. 21 „Omnia in pondere, numero et mensura disposuisti", in denen ein Widerspruch gegen die actual unendlichen Zahlen vermuthet wurde, diesen Sinn nicht haben; denn gesetzt den Fall, es gäbe, wie ich bewiesen zu haben glaube, actual unendliche „Mächtigkeiten" d. h. Cardinalzahlen und a. u. Anzahlen d. h. Ordinalzahlen (welche zwei Begrifft wie ich gefunden habe, bei actual unendlichen Mengen ausserordentlich verschieden sind, während bei endlichen Mengen ihr Unterschied kaum bemerkbar ist), die ebenso wie die endlichen Zahlen feste, von Gott gegebene Gesetze befolgen, so würden ganz sicherlich auch diese transfiniten Zahlen in jenem heil. Ausspruche mitgemeint sein und es darf daher, meines Erachtens, derselbe nicht als Argument gegen die act. unendl. Zahlen genommen werden, wenn ein Cirkelschluss vermieden werden soll. [Cantor an Kardinal Franzelin, 22. Jan. 1886]

[...] in der kurzen Andeutung meines Briefes v. 22 ds. war es an der betreffenden Stelle nicht meine Meinung, von einer objectiven, metaphysischen Nothwendigkeit zum Schöpfungsact, welcher Gott der absolut Freie unterworfen gewesen wäre, zu sprechen, sondern ich wollte auf eine gewisse subjective Nothwendigkeit für uns hindeuten, aus Gottes Allgüte und Herrlichkeit auf eine thatsächlich erfolgte (nicht a parte Dei zu erfolgende) Schöpfung, nicht bloss eines Finitum ordinatum, sondern auch eines Transfinitum ordinatum zu folgern. [Cantor an Kardinal Franzelin, 29. Jan. 1886]

Gestatten Sie mir aber dazu zu bemerken, daß mir die Realität und absolute Gesetzmäßigkeit der ganzen Zahlen eine viel stärkere zu sein scheint als die der Sinnenwelt. Und daß es sich so verhält, hat einen einzigen, sehr einfachen Grund, nämlich diesen, daß die ganzen Zahlen sowohl getrennt wie auch in ihrer actual unendlichen Totalität als ewige Ideen in intellectu Divino im höchsten Grade der Realität existiren. Ich habe einen dem Ihrigen ähnlichen Gedanken im Jahre 1869 in meiner Habilitationsschrift „De transformatione formarum ternariarum quadraticarum (Halis Saxonum typis Hendeliis) ausgesprochen. Von den drei Thesen, welche ich bei dieser Gelegenheit öffentlich vertheidigte, heißt die dritte wörtlich wie folgt: „Numeros integros simili modo atque corpora coelestia totum quoddam legibus et relationibus compositum efficere."

Viel später habe ich gesehen, daß im wesentlichen derselbe Gedanke vom heil. Augustin in dem Werke De civitate Dei, lib. XII, cap. 19 (contra eos, qui dicunt ea, quae infinita sunt, nec Dei posse scientia comprehendi) vorkommt. Ich habe dieses ganze Capitel aus dem wundervollen Werke des heil. Kirchenvaters in einer Note meiner Schrift „Zur Lehre vom Transfiniten", Halle 1890, pag. 42 abgedruckt.
[Cantor an Hermite, 30. 11. 1895]

Die Bedenken, welche gegen die Existenz des Inbegriffs aller reellen Zahlen und unendlicher Mengen überhaupt geltend gemacht worden sind, verlieren bei der oben gekennzeichneten Auffassung jede Berechtigung {{bei der hier, in diesem KB also, oben gekennzeichneten Auffassung natürlich auch, aber Hilbert verweist hier auf seinen Ansatz, der ohne Gott auskommt}}: unter der Menge der reellen Zahlen haben wir uns hiernach nicht etwa die Gesamtheit aller möglichen Gesetze zu denken, nach denen die Elemente einer Fundamentalreihe fortschreiten können, sondern vielmehr - wie eben dargelegt ist - ein System von Dingen, deren gegenseitige Beziehungen durch das obige endliche und abgeschlossene System von Axiomen I-IV gegeben sind, und über welche neue Aussagen nur Gültigkeit haben, falls man sie mittelst einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen aus jenen Axiomen ableiten kann.
[D. Hilbert: "Über den Zahlbegriff", Jahresbericht DMV 8 (1900) 184]
http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN37721857X_0008

Es gibt Dinge. Sie existieren durch Energie (Joule).
Es gibt Ideen. Sie existieren durch Information (Bit).

Behauptet ein Klempner, in seiner Werkzeugtasche habe er zwanzigtausend Wasserpumpenzangen, so wird man ihn bei der Arbeit in der eigenen Wohnung wohl beaufsichtigen.

Behauptet ein Bauer, sein Zentnersack enthielte eine Million Kartoffeln, so wird man zugreifen (in der Hoffnung besonders dicke Kartoffeln zu ergattern).

Behauptet ein Mathematiker, sein Modellbaukasten enthielte unendlich viele *verschiedene* Zahlen, so erregt das kein Aufsehen.

Ist das nicht aufsehenerregend?

530 Das Kalenderblatt 101116

[...] when I found it, I thought in the beginning that it causes invincible problems for set theory that would finally lead to the latter's eventual failure; now I firmly believe, however, that everything essential can be kept after a revision of the foundations, as always in science up to now {{natürlich, so wie die Lehre von der Weltesche, das Geozentrische System, die Phlogiston-Theorie, der Weltäther oder das Kausalitätsprinzip}}. I have not published this contradiction {{oh, hier ist Hilbert aber ein böses Wort entschlüpft.}} [D. Hilbert: "Logische Principien des mathematischen Denkens, lecture course in the summer term 1905, lecture notes by Ernst Hellinger", Library of the Mathematics Seminar of the University of Göttingen, p. 204]
[...]
The paradox is based on a special notion of set which Hilbert introduces by means of two set formation principles starting from the natural numbers. The first principle is the addition principle. In analogy to the finite case, Hilbert argued that the principle can be used for uniting two sets together "into a new conceptual unit [...], a new set that contains each element of either sets." This operation can be extended: "In the same way, we are able to unite several sets and even infinitely many into a union." The second principle is called the mapping principle. Given a set M, he introduces the set M^M of self-mappings of M to itself. [Hilbert used the German term "Selbstbelegung" which is translated here by "selfmapping".] A self-mapping is just a total function which maps the elements of M to elements of M. [In classical logic, M^M is isomorphic to 2^M, and the set of all mappings from M to {0, 1} is isomorphic to $P(M)$, the power set of M.]

Now, he considers all sets which result from the natural numbers “by applying the operations of addition and self-mapping an arbitrary number of times.” By use of the addition principle which allows to build the union of arbitrary sets one can “unite them all into a sum set *U* which is well-defined.” In the next step the mapping principle is applied to *U*, and we get $F = U^U$ as the set of all self-mappings of *U*. Since *F* was built from the natural numbers by using the two principles only, Hilbert concludes that it has to be contained in *U*. From this fact he derives a contradiction.
Since “there are ‘not more’ elements” in *F* than in *U* there is an assignment of the elements u_i of *U* to elements f_i of *F* such that all elements of f_i are used. Now one can define a self-mapping *g* of *U* which differs from all f_i. Thus, *g* is not contained in *F*. Since *F* was assumed to contain all selfmappings we have a contradiction. In order to define *g* Hilbert used Cantor’s diagonalization method. [...]
Hilbert finishes his argument with the following observation: "We could also formulate this contradiction so that, according to the last consideration, the set U^U is always bigger [of greater cardinality] than *U* but, according to the former, is an element of *U*." [...]
Considering Cantor’s general definition of a set as the comprehension of certain well-distinguished objects of our intuition or our thinking as a whole, one can justly ask whether the sets of all cardinals, of all ordinals or the universal set of all sets are sets according to this definition, i. e., whether an unrestricted comprehension is possible. Cantor denies this {{Ach, hätte er doch schon gemerkt, dass auch sein zweites Prinzip zu verneinen ist! (Eine Folge ganzer Zahlen, die keine größte Zahl besitzt, führt auf eine neue ganze Zahl.)}}
Hilbert, on the other hand, introduces two alternative set formation principles, the addition principle and the mapping principle, but they lead to paradoxes as well. In avoiding concepts from transfinite arithmetic Hilbert believes that the purely mathematical nature of his paradox is guaranteed. For him, this paradox appears to be much more serious for mathematics than Cantor’s, because it concerns an operation that is part of everyday practice of working mathematicians.

[Volker Peckhaus: "Paradoxes in Göttingen"] {{Der Titel ist englisch gemeint, erhält aber auch bei deutscher Lesung einen guten Sinn.}}
http://kw.uni-paderborn.de/fileadmin/kw/institute/Philosophie/Personal/Peckhaus/Texte_zum_Download/pg.pdf

531 Das Kalenderblatt 101117

Stellen wir uns etwa vor, es bestehe ein uns bisher unbekanntes logisches Gesetz des Inhalts: Wie immer mehr als eine Billion verschiedener Begriffe miteinander logisch verknüpft werden, immer wird sich dabei notwendig schließlich ein Widerspruch ergeben. Dann wäre der uns vertraute Begriff der natürlichen Zahl unzulässig; es könnte höchstens eine Billion verschiedener Zahlen geben, über eine Billion hinaus dürfte man nicht zählen; täte man es dennoch, so müßte sich im Verlauf des Rechnens früher oder später ein Widerspruch ergeben, d. h. eine Gleichung der Art 4 = 5. {{Wie stark die ersten Schätzungen einer neuen Idee doch irren. Leibniz meinte die Existenz von Atomen ausschließen zu können, weil dann der beobachtete Formenreichtum unmöglich wäre. Man denke an den Aufbau von Körpern aus Legosteinen. Dass vermutlich noch niemals zwei identische Schneeflocken existiert haben und Schneeflocken dennoch aus Atomen bestehen, wird nur durch die unvorstellbare Anzahl der beteiligten Atome erklärbar. Genau so, wie sich Leibniz in der Anzahl der Atome verschätzte, verschätzt sich Fraenkel hier in der oberen Schranke für gleichzeitig denkbare Zahlen: Es handelt sich nicht um Billionen. Diese Grenze würde man leicht erkennen. Es handelt sich um 10^{60} oder 10^{70}. Und das gilt nur für individuell benannte Zahlen. Intervalle und die für sie gültigen Formeln kommen außerdem hinzu.}} Das würde zur Voraussetzung haben, daß die Axiome Peanos, die eine Gesamtheit von unendlichvielen verschiedenen Zahlen sichern, entweder einzeln oder in ihrer Gesamtheit einen Widerspruch enthielten. Umgekehrt schlösse der Nachweis, daß Peanos Axiomensystem widerspruchsfrei ist, jedes logische Gesetz solch fataler Art aus. {{Nein, der Nachweis, dass die Addition von n und 1 für jede "denkbare" Zahl n die Zahl n + 1 ergibt, impliziert keineswegs die Denkbarkeit "aller" Zahlen.}} [Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre" 3. Aufl., Springer, Berlin (1928) p. 360]

532 Das Kalenderblatt 101118

Der Schluss "was für jede endliche Teilmenge richtig ist, kann für die gesamte Menge nicht falsch sein" ist hier so falsch wie überall sonst. (Helmut Richter, de.sci.mathematik)
http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/msg/4b92fefb911a7b36?dmode=source

Unser Verstand, zur gleichzeitigen Auffassung gesetzmäßig geschaffener Mannigfaltigkeiten glücklich eingerichtet, mag sogar den Begriff dieser Gesamtmenge von unendlichvielen Punkten einfacher finden als den Begriff einer Teilmenge von etwa einer Milliarde dieser Punkte; einer Teilmenge, die trotz ihrer Endlichkeit infolge der großen Anzahl von Elementen der naiv-anschaulichen Erfassung vielleicht größere Schwierigkeiten bereitet als die Gesamtmenge. Näher betrachtet, liegt das letzten Endes daran, daß zur Umfangsbestimmung einer "großen“ endlichen Menge viele Schritte — abhängig von der Zahl der Elemente — erforderlich sind, während bei einer unendlichen Menge der oben geschilderten Art dafür der einheitliche, wenn auch viel tiefer liegende Schritt der "vollständigen Induktion“ eintritt. [Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre" 3. Aufl., Springer, Berlin (1928) p. 8f]

{{Die vollständige Induktion kann zur Umfangsbestimmung unendlicher Mengen dienen? Manche meinen nein, andere meinen ja. Es gilt wohl auch in diesem Falle das Prinzip: Der Zweck heiligt die Mittel.}}

533 Das Kalenderblatt 101119

Das Problem ist ja noch ein anderes. Waehrend Mathematiker darauf hoffen, mit ihren Resultaten Aufmerksamkeit zu erregen und Zuspruch zu finden, bringt Albrecht die immer gleichen Argumente (die verglichen mit heutiger mathematischer Forschung an Komplexitaet einfach laecherlich sind [...] (fiesh, dsm)
http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/msg/9649663652b67279...
(Zur Komplexität von wissenschaftlichen Überlegungen vgl. auch KB090707.)

Manchmal bringe ich Zeitungen mit in die Schule. Aber das interessiert die Schüler kaum. Wissen Sie, was die zuerst lesen? Die Horoskope! (NN)

Wissenschaftliche Astrologie: Ungefähr 1.490 Ergebnisse (0,14 Sekunden)
astrology in hindi: Ungefähr 18.700 Ergebnisse (0,20 Sekunden)
creationism: Ungefähr 83.300 Ergebnisse (0,37 Sekunden)
Moraltheologie: Ungefähr 83.700 Ergebnisse (0,42 Sekunden)
Mengenlehre: Ungefähr 88.600 Ergebnisse (0,53 Sekunden)
astrology books Ungefähr 110.000 Ergebnisse (0,17 Sekunden)
Dogmatik: Ungefähr 402.000 Ergebnisse (0,42 Sekunden)
astrology: Ungefähr 759.000 Ergebnisse (0,40 Sekunden)
esoteric: Ungefähr 814.000 Ergebnisse (0,35 Sekunden)

liturgical: Ungefähr 942.000 Ergebnisse (0,30 Sekunden)
set theory: Ungefähr 1.390.000 Ergebnisse (0,13 Sekunden)
Islamic books: Ungefähr 1.560.000 Ergebnisse (0,38 Sekunden)
buddhism: Ungefähr 1.600.000 Ergebnisse (0,31 Sekunden)
judaism: Ungefähr 1.960.000 Ergebnisse (0,32 Sekunden)
orthodox church: Ungefähr 2.580.000 Ergebnisse (0,16 Sekunden)
Horoskop: Ungefähr 10.800.000 Ergebnisse (0,05 Sekunden)
(Quelle: Google)

Ich kann hier keine Sonderstellung der Mengenlehre / set theory erkennen.

Obwohl die wissenschaftliche Komplexität der Weltreligionen durch die jahrtausendelange Arbeit von Millionen Theologen zweifellos sehr weit fortgeschritten ist und die theologischen Fakultäten seit Jahrhunderten an den angesehensten Universitäten verankert sind, müssen rein logisch betrachtet alle bis auf maximal eine verworfen werden.

534 Das Kalenderblatt 101120

In der niederen und höheren Analysis ist vielfach die Rede von veränderlichen Größen, die unendlichgroß oder unendlichklein "werden“ (nicht "sind“), und von den bei solchen Prozessen auftretenden Eigenschaften anderer Größen, die als von jenen abhängig definiert sind. Hiermit ist folgendes gemeint: jene Größen können über jeden noch so großen endlichen Betrag hinauswachsen oder sich unbegrenzt der Null annähern, ohne daß dieser Zu- oder Abnahme bestimmte Grenzen gesetzt sind. In jedem Stadium des Prozesses, wie immer und wie weit er auch durchgeführt werde, haben die Größen jedoch bestimmte endliche bzw. von Null verschiedene Werte. Es handelt sich also bei diesem Gebrauch des Begriffs "Unendlich“ nur, wie sich Gauss ausdrückte, um eine facon de parler, die eine umständlichere Ausdrucksweise entbehrlich macht ; z. B. würde der Satz: "wird die positive Zahl *n* unendlichgroß, so wird der Quotient 1/*n* unendlichklein“ ausführlicher und schärfer so zu fassen sein: "der Wert des Quotienten 1/*n* (*n* positiv) kann dadurch der Null beliebig nahegebracht werden, daß man die Zahl *n* auf hinreichend große Werte beschränkt“. Man spricht in diesem Sinne vom uneigentlichen oder potentiellen Unendlich. In scharfem und deutlichem Gegensatz hierzu ist die im vorigen Absatz betrachtete Menge (wie auch das durch sie bestimmte Ordnungsschema) ein fertiges, abgeschlossenes, in sich festes Unendliches, insofern als sie unendlichviele genau definierte Elemente (die natürlichen Zahlen) umfaßt, keines mehr und keines weniger (#). Hier liegt also ein eigentliches oder aktuales Unendlich vor, das als reines, in einem einheitlichen Akt zum Bewußtsein gebrachtes Gedankending nichts Widerspruchsvolles in sich zu bergen scheint.

(#) Hier und da immer wieder auftretenden, anscheinend unausrottbaren Mißverständnissen gegenüber werde scharf hervorgehoben, daß dieses "Unendlich“ der Menge aller ganzen Zahlen nichts zu tun hat mit einem vermeintlichen Unendlichwerden der Elemente, d. h. der ganzen Zahlen, die vielmehr alle endlich sind. Die Menge der Brüche 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 usw. stellt ja im gleichen Sinn wie die oben betrachtete Menge ein Unendlich dar! {{Dies ist wieder ein Fehlschluss Fraenkels. Aktual unendlich viele Abstände der Größe 1 können nicht im Endlichen Verweilen. Deswegen besteht ein Unterschied zwischen dem Unendlichen der harmonischen Folge und der Folge der natürlichen Zahlen! Der Grenzwert 0 der harmonischen Folge gehört zu keiner natürlichen Zahl. Gäbe es auch unendlich viele. Er gehört zu ∞. Euler schrieb deshalb 1/∞. Später nahm man davon Abstand, weil ∞ keine Zahl ist, und definierte den Grenzwert, bis Cantor den zweiten Fehlversuch startete.}}

[Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre" 3. Aufl., Springer, Berlin (1928) p. 7f]

535 Das Kalenderblatt 101121

Wir stehen am Rande der unendlichen Kronecker-Ebene. Nichts lebt hier. Kein Baum, kein Strauch, kein Grashalm ist zu sehen. Manchmal treibt der Sturm eine abgerissene Wermutstaude über den Weg, oder einen zerfetzten Plastikbeutel oder einen leeren Joghurtbecher. Sonst ist nichts. 0. In der Ferne erhebt sich entmutigend das riesige Kronecker-Gebirge. Will man die Ebene passieren, so wird man unweigerlich darauf treffen und es übersteigen müssen. Für jedes x, welches man auch wählt, ist

$$\Sigma_{y=1...\infty}\ \delta_{x,y} = 1.$$

Dies erbarmungslose Gesetz ist die Grundlage von Cantors Werk, der Cantorsche Grund-Satz, den er aus seines Lehrers Werk geschmiedet: Wer alle natürlichen Zahlen y durchläuft, der trifft einmal auf das Kronecker-Gebirge - es sei denn, er wandert auf dem Rand, also bei $x = 0$, von Süd nach Nord. Denn für Kronecker und Cantor war 0 noch keine natürliche Zahl. Das Planquadrat (0, 0) gehört nicht zur Ebene und so auch nicht zum Gebirge

$$\Sigma_{y=1...\infty}\ \mathrm{Lim}_{x\to 0}\ \delta_{x,y} = 0.$$

Und von noch einem Weg geht die Kunde: Ganz weit im Osten, wo das ω aufgeht, dessen Strahlen freilich den Wanderer versengen und verbrennen, dort bei $x = \omega$ also, kann der Mutige frei seine Bahn laufen

$$\Sigma_{y=1...\infty}\ \mathrm{Lim}_{x\to\infty}\ \delta_{x,y} = 0.$$

Leere Verheißung. Wer erreicht wohl lebend diesen Rand?

Doch halt! Dieser Limes wird immer schon von einigen davor, im Endlichen also, liegenden Planquadraten der Ebene angenommen. Für jedes y gibt es ein x, das es gestattet, dem Gebirge - im nächsten Schritt wenigstens - noch auszuweichen.

Wer traversiert, den Weg $y = x - 1$ wählt (der insbesondere sprungschwachen Fohlen empfohlen wird) kann das Kronecker-Gebirge umgehen

$$\Sigma_{y=1...\infty}\ \mathrm{Lim}_{x\to\infty}\ \delta_{y+1,y} = 0,$$

obwohl auch hier keine natürliche Zahl y ausgelassen und so das Ziel erreicht und alle Wertungspunkte kassiert werden. Das Kronecker-Gebirge erstreckt sich also gar nicht durch die ganze Ebene. Es erstreckt sich durch kaum den geringsten Teil! Denn es gibt unendlich viele Wege, die es umgehen, zum Beispiel $y = x - 2$, $y = x - 3$, ... und noch viele mehr, wenn man dividiert, wurzelt oder logarithmiert

Dies zeigt uns, dass "die Menge aller natürlichen Zahlen", wenn sie denn existiert, jedenfalls unendlich viel mehr Elemente enthält, als man zählen kann. (Früher hielt man das sogar für selbstverständlich.)

Wenn also in einer Liste mit den Zeilennummern 1, 2, 3, ... noch nicht alle reellen Zahlen vorhanden sind, dann sagt das nichts über Kardinalzahlen aus. Denn in der Kronecker-Ebene gibt es auch Planquadrate vor dem Rande ω, auf deren Koordinaten man beim einfachen "Abzählen über alle natürlichen Zahlen" nicht trifft. Zu jeder Menge natürlicher Zahlen gibt es weitere. Auch wenn es die Menge aller natürlichen Zahlen sein sollte. Man braucht nur eine jede zu verdoppeln und kann dann die entstandenen Lücken auffüllen (nach Hilbert).

(Quantorenvertauschung? Wenn alle Planquadrate aktual existieren, sicher nicht.)

536 Das Kalenderblatt 101122

Also ist dein heiliger binärer Baum immer noch unbewiesener und unbeweisbarer Unsinn (und wird es bis in alle Ewigkeit bleiben). Dass das nicht in deinen Schädel will, akzeptiere ich, und es lässt mich auch kalt. Was ich {{nicht gut}} finde, ist dass du diesen Mist deinen Studenten jahrein, jahraus verzapfst, und sie dann per Klausur dazu zwingst, diesen Mist auch wieder zu reproduzieren und weiterzugeben. (Gus Gassmann)
http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/msg/3f0cbfbc4d2eee3f?dmode=source

Falsch. Ich zwinge zu nichts. Wer herausfindet, wie man in abzählbar vielen Kästen, die sich um jeweils höchstens eine Murmel unterscheiden, überabzählbar viele Murmeln verstecken kann, der bekommt eine Eins mit Sternenstaub und Alephs. Nur hat das bisher noch niemand gewusst, weder hier in dsm noch anderswo. Aber auf die bloße Behauptung gebe ich nichts.

537 Das Kalenderblatt 101123

Cantor's proof is a constructive proof. It works for all mappings to produce a concrete counterexample. You can't just say "look, I found a mapping!", and expect to be taken seriously. You can't just rant about how Cantor was an idiot, or about how wonderful your mapping is. You need to address why Cantor's proof won't work for your mapping.

The knol article [...] is supposedly a complete enumeration of the reals. [...] His enumeration is based on trees. You can create an infinite tree of the decimal representation of the numbers between zero and one. You start with at the decimal point - exactly 0, which is the first number in the enumeration. Then as children of zero, you put 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 - representing 0.0, 0.1, 0.2, etc. Then as the children of each of those, you again put 0 through 9. Taken to infinity, this produces a tree containing every single possible decimal representation of a real number between zero and one. Therefore Cantor was wrong. [...]

Except for one minor, trivial problem. Considered as an enumeration or as a mapping from natural numbers to real numbers, the tree doesn't even contain all of the rational numbers, much less the irrationals. As an enumeration, it will never produce the value 1/3, or 1/7th. It will never produce π or e.

The catch - and it's a huge catch - is that the tree defines a representation, not an enumeration or mapping. As a representation, taken to infinity, it includes every possible real number. But that doesn't mean that there's a one-to-one correspondence between the natural numbers and the real numbers. There's no one-to-one correspondence between the natural numbers and the nodes of this infinite tree. It doesn't escape Cantor's diagonalization. It just replaces "real number" with "node of this infinite tree". The infinite tree contains uncountably many values - there's a one-to-one correspondence [...] To see the distinction, let's look at it as an enumeration. In an enumeration of a set, there will be some finite point in time at which any member of the set will be emitted by the enumeration. So when will you get to 1/3rd, which has no finite representation as a base-10 decimal? When will you get to π?

If you start at the root, and enumerate by climbing down the tree breadth first, you'll never get to anything with an infinite decimal representation. If you try to do depth-first, you'll never enumerate anything. Any traversal of the tree, any attempt to actually enumerate the values will run into exactly the same problem as you'd have enumerating the reals. The tree solves nothing: you can just re-formulate Cantor's diagonalization to show that any attempt to produce an enumeration or one-to-one mapping between the natural numbers and nodes of the tree will miss nodes.

You can't refute Cantor's proof using an enumeration without addressing Cantor's proof. This is just yet another stupid attempt to refute Cantor without bothering to actually understand it. (Mark Chu-Carroll, PhD Computer Scientist)

http://scienceblogs.com/goodmath/2009/12/another_cantor_crank_represent.php#comment-2245332

Ein typisches Beispiel für eine Baumwiderlegung ohne geistige Durchdringung des Arguments. Der Binäre Baum ist keine "Nummerierung aller reellen Zahlen". Eine solche Nummerierung ist nicht möglich, wie Cantor richtig erkannt hat. Aber das liegt nicht daran, dass es mehr reelle als natürliche Zahlen gäbe, sondern daran, dass es nicht "alle reellen Zahlen" und erst recht keine einzige Dezimaldarstellung einer irrationalen Zahl gibt. Der Baum enthält alles, was an Dezimaldarstellungsversuchen für reelle Zahlen möglich ist. All dies wird in abzählbar vielen Schritten konstruiert, wobei in keinem Schritt mehr als eine reelle Zahl konstruiert wird (denn jede Folge besitzt mindestens ein Element, aber höchstens einen Grenzwert). Folglich stellt der Binäre Baum keine Nummerierung, sondern eine Abschätzung dar, die zeigt: Es gibt einfach nicht mehr als (einfach-) unendlich viele reelle Zahlen.

As I've said before, one of the things that constantly come up in crackpot arguments is a kind of profound ignorance, where they claim to refute an argument by showing a "counterexample" which isn't a counterexample, and never actually addresses the original argument. (Mark Chu-Carroll)

538 Das Kalenderblatt 101124

Well, if you can't represent something, then how can you count it? Poor Cantor was right but not because of what he thought. His thought processes were completely wrong and he was clueless. The real numbers are uncountable because we don't know what they are! In other words they are not well-defined {{diejenigen wenigstens, die kein endliches Bildungsgesetz besitzen}}. (John Gabriel)

Diese klugen Zeilen wären längst verschüttet (denn die Quelle
http://knol.google.com/k/anonymous/are-real-numbers-uncountable/nz742dpkhqbi/10
ist trockengefallen), wenn nicht Kurt Deligne, nach eigener Auskunft Actor, Engineer, Scientist, der sich für einsichtsreicher als John Gabriel hält, sie bewahrt hätte:
http://knol.google.com/k/john-gabriel-quotes#

539 Das Kalenderblatt 101125

Wie war Mathesis doch vordem
so konkret, aber unbequem!

DMV Jahresbericht 1900
Berichte und Diskussionen über die Dezimalteilung der Winkel- und Zeitgrößen 138 - 177 (!)

Mehmke gab im Namen der "Tafelcommission" der Deutschen Mathematiker-Vereinigung einen Bericht (5 Druckseiten nebst Anmerkungen über 15 Druckseiten): So ist denn die Decimalteilung des Quadranten ohne Frage die rationellste Winkelteilung.

Bauschinger: In der Astronomie kann von den bisherigen Einheiten der Zeit und des Winkels unter keinen Umständen abgegangen werden. Die decimale Unterteilung der bisherigen Einheiten empfiehlt sich nicht für den astronomischen Gebrauch im allgemeinen.

Schülke: Wie steht es aber mit der Vorbereitung der künftigen Fachmathematiker? Für diese ist zunächst die Sechzigteilung keine Schwierigkeit, sondern eine Frage der Zweckmäßigkeit. Sodann verlangt die Geodäsie die neu Teilung, die Astronomie die alte. [...] für den Unterricht ist die Decimalteilung des Grades allen übrigen vorzuziehen [...] Dagegen hat der Unterricht an der Decimalteilung der Zeit kein Interesse [...] Für den Unterricht ist die Decimalteilung des alten Grades zu empfehlen.

Seeliger: Mit der Einführung der Dezimalteilung des Quadranten müßte notwendigerweise die jetzige Stunde als Zeiteinheit durch eine andere Zeiteinheit ersetzt werden. Es bedarf keiner Auseinandersetzung, daß dies aus Rücksichten auf das praktische Leben geradezu undenkbar ist.

Foerster: Recht nützlich würde es sein, wenn gerade im Hinblick auf gemischte Anwendungen der alten Winkelteilung und der 100-Teilung des Quadranten internationale Vereinbarungen über die zweckmäßigste, volle und abgekürzte, Bezeichnung der letzteren Einteilungsstufen getroffen werden könnten.

Klein [...] daß die abstracte Mathematik an der wesentlich praktischen Frage sehr wenig beteiligt sei.

Boltzmann: scheinen [...] die Nachteile, die aus einer Störung der gegenwärtig herrschenden Einheitlichkeit der Kreisteilung sich ergeben würden, viel größer als die Vorteile einer Hundertteilung des Quadranten. Die Sekunde als Zeiteinheit aufzugeben, würden sich die Physiker wohl nur schwer entschließen [...]

Warburg: [...] die Decimalteilung der Zeitgrößen unbedingt abzulehnen sei, und daß auch die Decimalteilung des Quadranten eine nicht zu empfehlende Neuerung bilde. Anders verhalte es sich mit der bereits vielfach geübten Decimalteilung des Grades.

Schmidt: [...] teile er persönlich die [...] gegen die Einführung der Decimalteilung geäußerten Bedenken.

Mehmke: [...] stellt, da ihm die Ausführungen des Herrn Foerster namentlich gegen den Schluß den Eindruk erweckt zu haben scheinen, als ob derselbe gegen die neue Winkelteilung (Decimalteilung des Quadranten) spreche, zunächst fest, daß derselbe dafür gesprochen habe. Ferner führt Prof Mehmke aus, daß seines Wissens noch niemand den Astronomen zugemutet habe, die in so großer Zahl vorhandenen (mit Instrumenten alter Teilung gemachten) früheren Beobachtungen in Angaben nach neuer Teilung umzuwandeln; sollten sie sich aber je dazu entschließen, so würde dadurch auf keinen Fall, wie Herr Bauschinger behaupte, alle wissenschaftliche Arbeit auf zehn Jahre unmöglich gemacht werden, denn die fraglichen Umwandlung könnte durch untergeordnete Hilfskräfte geschehen. Außerdem ließe sich für diesen Zweck eine Specialrechenmaschine construieren von der Art, daß durch Niederdrücken der Tasten, welche einer Winkelangabe in alter Teilung entsprechen, im Zählwerk der Maschine der gesuchte Winkelausdruck erscheint {{ein Königreich für einen Laptop}}.

Tesdorpf: Die ausführenden Techniker müßten sich in dieser Angelegenheit neutral verhalten und dürften den Anforderungen der Wissenschaft in keiner Weise hinderlich entgegentreten.

Der stellvertretende Vorsitzende, Herr Geheimrat F. Klein - Göttingen, faßte das Ergebnis [...] dahin zusammen, daß sich eine weitgehende Übereinstimmung der Ansichten ergeben habe. {{Er war eben nicht nur ein großer Mathematiker! Sein resultierender Antrag wurde einstimmig angenommen.}}

540 Das Kalenderblatt 101126

The bulk of Frege's critique of Hilbert consists of criticizing Hilbert's lack of terminological clarity, {{Einen solchen Vorwurf hört man häufig: Irgendetwas wäre nicht formal genug dargestellt oder unsauber definiert oder überhaupt ganz und gar unverständlich. Dieser Einwand empfiehlt sich immer dann, wenn man das Gesagte nicht versteht oder das Gemeinte gemein findet, jedenfalls nicht akzeptieren möchte, aber andererseits nichts dagegen vorzubringen weiß, weil es einem im Moment nicht einfällt oder auch weil es gar nichts dagegen vorzubringen gibt. Hinweis: Hiermit ist kein Urteil in der Frege-Hilbert-Kontroverse beabsichtigt. Ich meine hier nur Zwerge, die auf den Schultern dieser Giganten zu stehen und zu sehen glauben.}} particularly as this applies to the differences between sentences and various collections of thoughts. He takes Hilbert to task for misleadingly using the same sentences to express different thoughts, and points out repeatedly that Hilbert's use of axioms as definitions needs considerably more-careful treatment than Hilbert affords it. The more-substantial criticism flows naturally from this terminological critique: Frege takes it that once one disentangles Hilbert's terminology, it becomes clear that he is simply not talking about the axioms of geometry at all, since the sets of thoughts he actually deals with are the misleadingly-expressed thoughts about e.g. real numbers. And, adds Frege, one cannot infer the consistency of the geometric axioms proper from that of the thoughts Hilbert treats. [Patricia Blanchette (2009)]
http://plato.stanford.edu/entries/frege-hilbert/

541 Das Kalenderblatt 101127

§ 96. Auch der Mathematiker kann nicht willkürlich etwas schaffen.
Ebensogut könnte man sagen: unter den bisher bekannten Zahlen giebt es keine, welche die beiden Gleichungen $x + 1 = 2$ und $x + 2 = 1$ zugleich befriedigt; aber nichts hindert uns ein Zeichen einzuführen, das die Aufgabe löst. Man wird sagen: die Aufgabe enthält ja einen Widerspruch. Freilich, wenn man als Lösung eine reelle oder gemeine complexe Zahl verlangt; aber erweitern wir doch unser Zahlsystem, schaffen wir doch Zahlen, die den Anforderungen genügen! Warten wir ab, ob uns jemand einen Widerspruch nachweist! Wer kann wissen, was bei diesen neuen Zahlen möglich ist? Die Eindeutigkeit der Subtraction werden wir dann freilich nicht aufrecht erhalten können; aber wir müssen ja auch die Eindeutigkeit des Wurzelziehens aufgeben, wenn wir die negativen Zahlen einführen wollen; durch die complexen Zahlen wird das Logarithmiren vieldeutig.

Schaffen wir auch Zahlen, welche divergirende Reihen zu summiren gestatten! Nein! auch der Mathematiker kann nicht beliebig etwas schaffen, so wenig wie der Geograph; auch er kann nur entdecken, was da ist, und es benennen. [...] {{Er kann nur entdecken, was sich aus dem, was da ist, abstrahieren lässt.}}

§ 97. Begriffe sind von Gegenständen zu unterscheiden.
{{Aber ohne Gegenstände gäbe es auch keine Begriffe (Prädikate).}}

[G. Frege: "Grundlagen der Arithmetik", Köbner, Breslau (1884)]
http://www.archive.org/details/diegrundlagende01freggoog

542 Das Kalenderblatt 101128

Nun, wie ist es denn bei der Anzahl? Dürfen wirklich von $1000^{(1000^{1000})}$ nicht reden, bevor uns nicht soviele Gegenstände in der Anschauung gegeben sind? Ist es so lange ein leeres Zeichen? Nein! es hat einen ganz bestimmten Sinn, obwohl es psychologisch schon in Anbetracht der Kürze unseres Lebens unmöglich ist, uns soviele Gegenstände vor das Bewusstsein zu führen *); aber trotzdem ist $1000^{(1000^{1000})}$ ein Gegenstand, dessen Eigenschaften wir erkennen können, obgleich er nicht anschaulich ist. {{Dürfen wir wirklich von π nicht reden, bevor uns alle Stellen der Dezimalentwicklung gegeben sind, oder doch wenigstens die Versicherung der Matheologen, dass alle existierten? Nein! π hat einen ganz bestimmten Sinn, obwohl es mathematisch unmöglich ist, alle Dezimalziffern hinzuschreiben, und närrisch, uns ihre Existenz zu versichern.}}

*) Ein leichter Überschlag zeigt, daß dazu Millionen Jahre lange nicht hinreichen würden. {{Ein leichter Überschlag zeigt, dass das überhaupt ganz unmöglich wäre, denn spätestens bei irgendeiner nicht darstellbaren Zahl weit unterhalb von $10^{10^{100}}$ ginge es nicht mehr weiter. Schon genau auszurechnen, wie lange man bräuchte um $1000^{1000^{1000}}$-mal "eins" zu sagen, ist unmöglich, denn wenn man pro Sekunde fünfmal und so pro Jahr 10^8 mal "eins" sagen wollte, dann bräuchte man zehnmal länger als $1000^{(1000^{1000}-3)}$ Jahre. Wer zählt die Jahre nennt die Namen? (Nicht jedes der durchzählten Jahre ist mit Worten oder Zahlen benennbar.}}

[G. Frege: "Grundlagen der Arithmetik", Köbner, Breslau (1884) § 104]

543 Das Kalenderblatt 101129

Man muss die Zahlformeln, die wie 2 + 3 = 5 von bestimmten Zahlen handeln, von den allgemeinen Gesetzen unterscheiden, die von allen ganzen Zahlen gelten.
Jene werden von einigen Philosophen für unbeweisbar und unmittelbar klar wie Axiome gehalten. Kant erklärt sie für unbeweisbar und synthetisch, scheut sich aber, sie Axiome zu nennen, weil sie nicht allgemein sind, und weil ihre Zahl unendlich ist. Hankel nennt mit Recht diese Annahme von unendlich vielen unbeweisbaren Urwahrheiten unangemessen und paradox. Sie widerstreitet in der That dem Bedürfnisse der Vernunft nach Uebersichtlichkeit der ersten Grundlagen. {{Theorien, die unendliche Sprachen, und Axiomensysteme, die unendlich viele Axiome (oder schemenhafte Axiomenschemata) enthalten, widerstreiten in der Tat dem Bedürfnisse der Vernunft.}}
[...]
Dies ist auch die Meinung von H. Grassmann und H. Hankel. Jener will das Gesetz $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ durch eine Definition gewinnen, indem er sagt:

„Wenn *a* und *b* beliebige Glieder der Grundreihe sind, so versteht man unter der Summe $a + b$ dasjenige Glied der Grundreihe, für welches die Formel $a + (b + e) \equiv a + b + e$ gilt."
Hierbei soll *e* die positive Einheit bedeuten. Gegen diese Erklärung lässt sich zweierlei einwenden. Zunächst wird die Summe durch sich selbst erklärt. Wenn man noch nicht weiss, was $a + b$ bedeuten soll, versteht man auch den Ausdruck $a + (b + e)$ nicht. {{Wenn in einer Theorie eine Menge nicht erklärt wird, dann versteht man eine Menge nicht.}}

[G. Frege: "Grundlagen der Arithmetik", Köbner, Breslau (1884) §§ 5, 6]

544 Das Kalenderblatt 101130

About Gottlob Frege (1848-1925), it is customary to say that he invented quantification theory, was the founding father of mathematical logic, and thus the greatest logician since Aristotle &c&c. In fact, a cursory look at the history of logic since 1870 suggests that Frege had a marginal influence on its development. See, e.g. Grattan-Guinness, I. The Search for Mathematical Roots, 1870-1940, Princeton 2000 for a (reasonably) accurate survey of this period. The development of logic itself was more influenced by Frege's arch-rival Ernst Schroeder, whose notation (itself influenced by Peirce) was adopted by Zermelo for his formalisation of Cantor's theory. As Putnam unkindly writes "While, to my knowledge, no one except Frege ever published a single paper in Frege's notation, many famous logicians adopted Peirce-Schroeder notation, and famous results and systems were published in it."

Nonetheless, Frege's work had a huge impact on modern philosophy. It is also philsosophically better, by some way, than those of his contemporaries. Russell says that "Frege's work abounds in subtle distinctions, and avoids all the usual fallacies which best writers on Logic" (PoM § 475). Frege had a number of ideas.

* The syntax of natural language is logically useless, misleading and incoherent. Thus an adequate account of inference as expressed in ordinary language requires translation into a new idiom, expressly constructed for use by logicians. This led Frege to devise an unreadable (and unprintable) calculus for expressing logical ideas.

* A proposition like "Socrates is wise" consists of a name for an object ("Socrates"), and a name for a concept ("is wise"). The concept is like a function f, the object is like its argument, and its value is a so-called "truth value". Thus is-wise(Socrates)= The True.

* Proper names and singular definite descriptions are names for objects. Thus the expression "the concept 'horse'" is the name of an object.

* Concepts have extensions. E.g. the concept "is a bald person" has as its extension all bald people.

Some of these ideas unfortunately led to the contradiction later discovered by Russell.

{{Freges "Grundlagen der Arithmetik" findet man auch hier:}}
http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/philo/textesph/Frege.pdf

[E.D.Buckner: Philosophy and the infinite (2005)]
http://www.logicmuseum.com/cantor/Phil-Infinity.htm

545 Das Kalenderblatt 101201 Cantors Weltbild (11): Erhaltungs- und Unsterblichkeitssätze

Soll ich auch einen Punct erwähnen, worin ich mit Ihnen nicht ganz einverstanden bin, so ist es das unbedingte Vertrauen, welches von Ihnen dem modernen sogenannten Gesetz von der Erhaltung der Energie entgegengebracht wird. Ich will durchaus nicht die Lehre von der Aequivalenz der verschiedenen sich in einander umsetzenden natürlichen Kraftformen in Zweifel ziehen, soweit sie experimentell hinreichend begründet ist. Das wogegen ich ernste Bedenken hege, ist sowohl die Erhebung des angeblichen Gesetzes zu einem metaphysischen Princip, von dem die Erkenntnis so gewichtiger Sätze, wie die Unsterblichkeit der Seele abhängig sein soll - wie auch die von den Herren Thomson, v. Helmholtz, Clausius u. Genossen beliebte und durch nichts gerechtfertigte Ausdehnung und Anwendung des Satzes von der Erhaltung der Energie auf das Weltganze, woran phantastische Speculationen geknüpft werden, die ich für ganz werthlos halte. [Cantor an Gutberlet, 1. 5. 1888]

546 Das Kalenderblatt 101202

Methodological naturalism has three principal and related senses in the philosophy of mathematics. The first is that the only authoritative standards in the philosophy of mathematics are those of natural science (physics, biology, etc.). {{Dieser Standpunkt ist richtig.}} The second is that the only authoritative standards in the philosophy of mathematics are those of mathematics itself. {{Dieser Standpunkt kann richtig sein, wenn Mathematik richtig verstanden wird. Leider ist das oftmals nicht der Fall.}} The third, an amalgam of the first two, is that the authoritative standards are those of natural science and mathematics. We refer to these three naturalisms as scientific, mathematical, and mathematical-cum-scientific. Note that throughout this entry ‘science’ and cognate terms encompass only the natural sciences.
http://plato.stanford.edu/entries/naturalism-mathematics/

547 Das Kalenderblatt 101203 Cantors Weltbild (12): Das aktual Unendliche und die Jesuiten

Versuche, die ich schon vor vielen Jahren und neuerdings wiederholt gemacht habe, Mitglieder der deutschen Provinz der S.J. zu einer solchen vertraulichen wissenschaftlichen Correspondenz über das Actualunendliche zu veranlassen, sind, obgleich viele von ihnen meine Arbeiten seit mindestens zehn Jahren kennen und in Händen haben, ohne jeden Erfolg geblieben, während doch der hochselige Cardinal J. B. Franzelin S.J. in seinen gerade vor 10 Jahren an mich gerichteten Briefen auf die Bedeutung der Frage für Theologie und Philosophie deutlich genug hingewiesen hat. Dies ändert zwar an meinen liebevollen Gesinnungen zu der Gesellsch. Jesu und ihren deutschen Brüdern nicht das Geringste. Immerhin wundere ich mich aber doch sehr über dieses Verhalten und ich staune umso mehr, als die Philos. naturalis des P. Tilmann Pesch S.J. von mir, wie Sie gesehen haben werden, in meiner Schrift Zur Lehre vom Transfiniten, bei aller Hochachtung, die ich diesem Pater zolle, mehrfach ausdrücklich angegriffen worden ist. Und als P. Jos. Hontheim‘s Inst. Theodicaeae herauskamen, schrieb ich auch diesem einen 4 Folioseiten langen Brief mit Bedenken gegen seine gewagte Interpretation des S. Thomas. Er war damals gerade in England durch asketische Uebungen und Studien in Anspruch genommen und antwortete dementsprechend jede Erörterung ablehnend. Allein seitdem sind doch schon zwei Jahre vergangen, in denen er sich gewiss hätte Zeit nehmen können, auf meine Gründe einzugehen. So lange die Welt steht sind noch niemals sachliche Gründe durch bloßes Schweigen widerlegt worden. [Cantor an T. Esser, 25. Dez. 1895]

548 Das Kalenderblatt 101204 Krieg der Frösche und der Mäuse (1)

Schwebe, o Chor der Musen, o schwebe vom Helikon nieder,
Lehr zu singen mich und lächle dem streitbaren Liede,
Das mit ernstem Bemühen und mehrere Tränen vergiessend
Ich zu vollenden gewillt bin! Es schildre die wogende Feldschlacht,
Die aus irrigem Grund verderbenbringend entflammt ist,
Weithindröhnenden Lärm und spottenden Reden der Krieger:
Wie die Mäuse den Fröschen erbitterte Fehde entboten,
Wie die Frösche sodann voll Ingrimm die Mäuse bekämpften,
Sämtlich Helden fürwahr; doch alles leider um gar nichts. -
Dies künde mein Lied und klag' es noch späteren Geschlechtern.
(Homer? - wohl nicht)

[zitiert nach Yvonne Hartwich: Dissertation, Mainz (2005) 155]
http://de.wikipedia.org/wiki/Froschm%C3%A4usekrieg

549 Das Kalenderblatt 101205 Krieg der Frösche und der Mäuse (2)

Sehr geehrter Herr Kollege!
Da es mir bei der Unvereinbarkeit unserer Auffassungen in grundlegenden Fragen nicht möglich ist, mit Ihnen zusammenzuarbeiten, habe ich die Mitglieder der geschäftsführenden Redaktion der Mathematischen Annalen um die Ermächtigung gebeten und von den Herren Blumenthal und Carathéodory {{Carathéodory war ein Freund Brouwers. Sein Name wurde hier missbraucht.}} die Ermächtigung erhalten, Ihnen mitzuteilen, daß wir fernerhin auf Ihre Mitwirkung bei der Redaktion der Annalen verzichten und demnach Ihren Namen auf dem Titelblatt weglassen werden.
Zugleich spreche ich Ihnen im Namen der Annalenredaktion unseren Dank für die bisherige Tätigkeit im Interesse unserer Zeitschrift aus.
Hochachtungsvoll und ergebenst - D. Hilbert.

[David Hilbert an Luitzen Brouwer, 25. 10. 1928, G. Fischer et al. (Hrsg.): "Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990: Festschrift zum Jubiläum der DMV", Vieweg+Teubner p.56]

550 Das Kalenderblatt 101206 Krieg der Frösche und der Mäuse (3)

{{Durch die mit dem Brief an Brouwer von Hilbert eingeleitete Machtergreifung bei den Mathematischen Annalen kommen die lange schwelenden Spannungen zwischen Formalismus und Intuitionismus ans Licht, hervorgerufen durch einen eher äußerlichen Anlass: Der national eingestellte Brouwer hatte es abgelehnt, einen Mathematikerkongress in Bologna zu besuchen, für den italienische Nationalisten einen Ausflug ins "befreite" Südtirol angekündigt hatten. Sein Boykottaufruf wurde von den Berliner Mathematikern befolgt. Hilbert war anderer Ansicht und sehr verärgert. Er besuchte den Kongress mit einer Delegation deutscher Mathematiker. Auf einem Notizzettel Hilberts heißt es:}}

"In Deutschland ist ein polit[isches] Erpressertum schlimmster Sorte entstanden[:] Du bist kein Deutscher, der deutsch[en] Geburt unwürdig, wenn Du nicht sprichst und handelst, was ich Dir jetzt vorschreibe. Es ist sehr leicht, diese Erpresser loszuwerden. Man braucht sie nur zu fragen, wie lange sie im deutschen Schützengraben gelegen haben. Leider sind aber deutsche Math[ematiker] diesem Erpressertum zum Opfer gefallen[,] z. B. Bieberbach. Brouwer hat es verstanden diesen Zustand sich zu Nutze zu machen u[nd] ohne (selbst?) sich im deutsch[en]

(Schützengr[aben]??) sich zu betätigen, desto mehr zum Aufhetzen und zum Zwiespalt der Deutschen zu sorgen[,] um sich zum Herren über d[ie] deutsch[en] Math[ematiker] aufzuspielen. Mit vollem Erfolg. Zum zweiten Mal wird es ihm nicht gelingen."

[N. Schappacher, M. Kneser: "Fachverband - Institut - Staat" in G. Fischer et al. (Hrsg.): "Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990: Festschrift zum Jubiläum der DMV", Vieweg+Teubner p. 57]
http://www.vieweg.de/Buch/978-3-528-06326-9/Ein-Jahrhundert-Mathematik-1890-1990.html
http://books.google.de/books?id=W2GnlaUmPb8C&pg=PA57&lpg=PA56&ots=VqKmS93SVa&dq=%22Blumenthal+und+Carath%C3%A9odory%22#v=onepage&q&f=false

551 Das Kalenderblatt 101207 Krieg der Frösche und der Mäuse (4)

Um Brouwer auszuschalten (der es in Hilberts Augen verstanden hatte, sich zum Herren über die deutschen Mathematiker aufzuspielen), greift Hilbert zu fragwürdigen Mitteln. Unter Hinweis auf seine schwere Erkrankung verpflichtet er seine Umgebung moralisch zur Gefolgschaft - lediglich bei Einstein misslingt ihm dies. Er täuscht Brouwer über die tatsächlichen Ansichten im inneren Zirkel der Annalen-Redaktion. Und er spielt sich als Herrscher über die Annalen auf - eine Rolle die ihm zu diesem Zeitpunkt nicht zukommt. Das Führerprinzip wurde in den Annalen erst anschließend, 1929 eingeführt.

Mathematische Annalen
begründet 1868 durch
Alfred Clebsch und Carl Neumann
Fortgeführt durch
Felix Klein
unter Mitwirkung
von
Ludwig Bieberbach, Harald Bohr, L.E.J. Brouwer
Richard Courant, Walter Dyck, Otto Hölder
Theodor v. Kármán, Arnold Sommerfeld
gegenwärtig herausgegeben
von
David Hilbert Albert Einstein
Otto Blumenthal Constantin Carathéodory

Die Herausgeberschaft an den Annalen galt als eine besondere Ehre.
Brouwer was dealt one of the roughest blows of his career (Dirk van Dalen).

Brouwer wurde durch Hilberts Psychschock paralysiert, der Intuitionismus für 40 Jahre praktisch ausgeschaltet - zum Nutzen von Hilberts Zielvorstellung einer absoluten Axiomatisierung und, da dieser schon nach wenigen Jahren von Gödel der Todesstoß versetzt wurde, einer darauf folgenden diffusen Matheologie, die man in leichter Variation von Hilberts Worten so beschreiben kann: In der Mathematik ist ein schlimmes Erpressertum entstanden. Du bist kein Mathematiker, wenn Du nicht an das vollendete Unendliche glaubst. Deine Gedanken können nur richtig sein, wenn sie in der Sprache der Mathelogie vorgebracht werden oder dem vollendeten Unendlichen nicht widersprechen.

Wie konnte es zu dieser inzwischen nicht mehr übersehbaren Katastrophe für das Ansehen der Mathematik und der Mathematiker kommen? Das soll in den folgenden Kalenderblättern geschildert werden.

552 Das Kalenderblatt 101208 Krieg der Frösche und der Mäuse (5)

Already in his dissertation of 1907 Brouwer was markedly critical of Hilbert's formalism {{"Von unserem Standpunkt aus können wir in den pathologischen Geometrien von Hilbert nichts als spezielle Verallgemeinerungen der Euklidischen Bewegungsgruppe erkennen." (p. 140) "Cantor spricht über seine zweite Zahlklasse, als ob er sie wirklich vor Augen hätte" (p. 146) "Aber der Fehler der Logizismus besteht darin, dass nichts geschaffen wird als eine Sprache, die nicht in eigentliche Mathematik übersetzt werden kann." (p. 176) and of his paradise: "Die zweite Zahlklasse von Cantor existiert nicht" (These XIII, Anhang p. 5).
http://openlibrary.org/books/OL7008529M/Over_de_grondslagen_der_wiskunde_...
}}; this caused, however, no observable friction, probably because the dissertation was written in Dutch and thus escaped Hilbert's attention. [Dirk van Dalen, "The War of the Frogs and the Mice", The Mathematical Intelligencer 12, 4 (1990) 17-31]

Von 1907 an hatte L. E. J. Brouwer eine intuitionistische Sichtweise der Mathematik entwickelt, indem er sie als reine Konstruktion des menschlichen Geistes sah. Somit lehnt der Intuitionismus das Gesetz des tertium non datur ab. Reaktionen auf Brouwer's Ideen blieben zunächst weitgehend aus, bis er im Sommer 1919 Hermann Weyl auf seine Seite ziehen konnte. Dieser schrieb 1921 "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik" [Mathematische Zeitschrift 10 (1921) S. 39-79], in der er die beiden wesentlichen Kritikpunkte ausformulierte und die Alternativen vorstellte: Konstruktionen an Stelle reiner Existenzfeststellungen sowie Folgen von Auswahlen zur Vermeidung der unbegrenzten Nutzung des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten. In einem polemisch-revolutionären Stil verfasst und mit leicht kommunistischen Untertönen versehen, traf Weyl den Nerv der Zeit, in der ja die russische Oktoberrevolution gezeigt hatte, dass die bestehende Ordnung durchaus über den Haufen geworfen werden konnte. [Yvonne Hartwich: "Eduard Study (1862-1930), ein mathematischer Mephistopheles im geometrischen Gärtchen", Dissertation, Mainz (2005) 38]
http://ubm.opus.hbz-nrw.de/volltexte/2006/930/pdf/diss.pdf

{{Zudem hatte Brouwer 1927 in Berlin mehrere Vorträge gehalten und es dabei verstanden, viele Mathematiker für seine Sicht der Dinge zu begeistern.}}

553 Das Kalenderblatt 101209 Krieg der Frösche und der Mäuse (6)

The initially warm relationship between Hilbert and Brouwer began to cool in the twenties, when Brouwer started to campaign for his foundational views. Hilbert accepted the challenge - he took the threat of an intuitionistic revolution seriously. Brouwer lectured successfully at meetings of the German Mathematical Society. His series of Berlin lectures in 1927 caused a considerable stir; there was even some popular reference to a Putsch in mathematics. [Dirk van Dalen: "The War of the Frogs and the Mice", The Mathematical Intelligencer 12, 4 (1990) 17-31]

Der Intuitionismus war, wie ich bald lernte, in Berlin das Tagesgespräch. War es Sympathie für den Aufruhr im Grundlagenstreit, oder betrachteten die Berliner den Holländer Brouwer als einen der ihren im Gegensatz zum Göttinger Hilbert? Keine Revolution, sondern ein Putsch – so hatte Hilbert den Intuitionismus verurteilt, und “Putschist” wurde der Ehrenname, den die Brouwer-Supporter annahmen. [Hans Freudenthal: Berlin 1923-1930, Studienerinnerungen", Berlin (1987)]

Natürlich reagierte Hilbert sofort auf die Weyl'sche Schrift: Der "Generaldirektor", wie Mehrtens ihn nennt, sah sich als Vertreter der herrschenden Ordnung persönlich angegriffen {{andere Mathematiker empfanden das als Anmaßung. So sprach Study vom Bazillus Göttingensis, dem Bazillus des Hochmuts.}} und zahlte es Weyl mit gleicher stilistischer Münze heim, indem er u. a. die intuitionistische Revolution als "Putsch" diffamierte, um ihre geringe Anhängerzahl zu verdeutlichen. [Yvonne Hartwich: "Eduard Study (1862-1930), ein mathematischer Mephistopheles im geometrischen Gärtchen", Dissertation, Mainz (2005)]
http://ubm.opus.hbz-nrw.de/volltexte/2006/930/pdf/diss.pdf

554 Das Kalenderblatt 101210 Krieg der Frösche und der Mäuse (7)

"[...] dann habe ich mich in eine fulminante Streitschrift gegen die Intuitionisten gestürzt, deren unerhörtes Auftreten doch endlich einmal eine Antwort verlangt, denn was Hilbert als einziger gegen sie geschrieben hat, ist kläglich und zum Teil sogar falsch, wie auch seine sogenannte Beweistheorie. Die Arbeit ist nahezu fertig. [...] Empörend finde ich es auch, wie der Intuitionismus um sich frisst. Alle jüngeren Kollegen, die ich in den letzten Monaten kennen gelernt habe, hatten recht viel übrig für diesen Schwindel, denn etwas anderes ist es nicht, und die Bewunderung für Weyl, den Gipfel von Unklarheit und Frechheit, ist allgemein.[...] Das Brouwer'sche Beispiel [...] ist falsch [...]. Er [Brouwer] muss im Kopf nicht richtig sein. Seine ganze Theorie beruht auf der angeblichen Existenz einer neuen Art rechter Zahlen, und zu dem kommt er ein einfach dadurch, dass er die (richtige aber triviale) Alternative entweder-oder durch ein weder-noch ersetzt. Sollte man wohl so etwas für möglich halten?" [Yvonne Hartwich: "Eduard Study (1862-1930), ein mathematischer Mephistopheles im geometrischen Gärtchen", Dissertation, Mainz (2005) 152]
http://ubm.opus.hbz-nrw.de/volltexte/2006/930/pdf/diss.pdf

555 Das Kalenderblatt 101211 Krieg der Frösche und der Mäuse (8)

Erinnern wir uns an das Auswahlaxiom, welches Zermelo zuerst für die Mengenlehre aufgestellt und formuliert und auf welches er seinen genialen Beweis für die Wohlordnung des Kontinuums gegründet hat. {{Die Genialität dieses Beweises erinnert irgendwie an die Genialität des chinesischen Regimes beim Zusammenbasteln des Konfuzius-Friedenspreises zum Beweis seiner Menschenrechtsbestrebungen.}} Die Einwendungen, die gegen diesen Beweis und die damit verknüpften Fortschritte der Mengenlehre gemacht worden sind, richteten sich wesentlich gegen das Auswahlprinzip; {{Die Einwendungen, die gegen diesen Beweis und die damit verknüpften Fortschritte der Menschenrechte gemacht worden sind, richteten sich (nicht allein) wesentlich gegen das Auswahlprinzip}}; und auch heute wird wohl meist die Auffassung vertreten, daß die Zulässigkeit des Auswahlprinzips zweifelhaft sei, während die sonstigen Schlußweisen, wie sie in der Mengenlehre im allgemeinen und in dem Zermeloschen Beweise im besonderen zur Anwendung kommen, der Beanstandung nicht in gleicher Weise ausgesetzt sind {{neuerdings aber in zunehmendem Maße werden}}. Diese Auffassung halte ich für irrig; vielmehr stellt sich in der logischen Analyse, wie sie sich in meiner Beweistheorie vollzieht, heraus, daß der wesentliche dem Auswahlprinzip zugrunde liegende Gedanke ein allgemein logisches Prinzip ist, das schon für die gesamten Anfangsgründe des mathematischen Schließens notwendig und unentbehrlich ist. {{Dann müssen wir diese Schlussweisen leider entbehren. Offensichtliche Unfähigkeit qualifiziert für die Müllhalde: Die Natur kann zwar geschwinder als jeder Mengenlehrer jedes Vielkörperproblem lösen, aber messbare Verdopplungen messbarer Volumina (und auch das Kugelvolumen ist seit Archimedes als messbar bekannt) unterlaufen ihr nicht.}}. Wenn wir diese Anfangsgründe sichern, gewinnen wir zugleich den Boden für das Auswahlprinzip: beides geschieht durch meine Beweistheorie.

Der Grundgedanke meiner Beweistheorie ist folgender:

Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestand an Formeln wird {{und zu bizarren, sinnlosen und falschen Resultaten führt}}. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, daß außer den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen, insbesondere die für „folgt" und für „nicht" darin vorkommen. Gewisse Formeln, die als Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist eine Figur {{oder auch eine Konfiguration?}}, die uns als solche anschaulich vorliegen muß {{zum Beispiel als Anfangsabschnitt des Binäeren Baums?}}; [...] Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder ein Axiom ist bzw. durch Einsetzen aus einem Axiom entsteht oder die Endformel eines Beweises ist. [...]

Wir beginnen die Reihe der Axiome folgendermaßen:
[...]
II. Axiome der Negation.

$A \to (\neg A \to B)$
(Satz vom Widerspruch)
$(A \to B) \to \{(\neg A \to B) \to B\}$
(Prinzip des tertium non datur)

[D. Hilbert: " Die logischen Grundlagen der Mathematik", Mathematische Annalen 88 (1923) 151-165]

Der Glauben an die unbeschränkte Anwendbarkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten beim Studium der Naturgesetze impliziert mithin den Glauben an die Endlichkeit und an den atomistischen Bau der Welt. Dies heißt aber nicht, daß für den Physiker, der den letzteren Glauben besitzt, die intuitionistische Kritik bedeutungslos wäre, denn die Rechenmethoden, deren er sich bedient, beruhen auch beim Studium einer als endlich und atomistisch gedachten Natur auf Kontinuitätsmathematik, mithin auf Unendlichkeitsmathematik.

[L.E.J. Brouwer: "Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe", Jahresberich DMV, 33 (1925) 251-256]

556 Das Kalenderblatt 101212 Krieg der Frösche und der Mäuse (9)

Meine Untersuchungen zur Neubegründung der Mathematik bezwecken nichts Geringeres, als die allgemeinen Zweifel an der Sicherheit des mathematischen Schließens definitiv aus der Welt zu schaffen. [D. Hilbert: " Die logischen Grundlagen der Mathematik" Mathematische Annalen 88 (1923) 151-165]

Wir behandeln im folgenden einige Konsequenzen der intuitionistischen These, die aussagt, daß die unbeschränkte Gültigkeit des logischen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten nur für solche Teile der Mathematik besteht, die sich innerhalb eines bestimmten endliche mathematischen Systems abspielen, mithin auch nur für solche Teile der Naturwissenschaften, auf die sich ein bestimmtes endliches mathematisches System projizieren läßt.

Wir erläutern zunächst die Ungültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Unendlichkeitsmathematik an einem Beispiel: Nennen wir eine reelle Zahl *g* rational, wenn zwei solche ganze Zahlen *p* und *q* bestimmt werden können, daß $g = p/q$, und irrational, wenn die Annahme der Rationalität von *g* ad absurdum geführt werden kann, so müßte nach dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten jede reelle Zahl entweder rational oder irrational sein.

Definieren wir nun aber eine reelle Zahl r in folgender Weise: Sei d_ν, die ν-te Ziffer hinter dem Komma der unendlichen Dezimalbruchentwickelung von π und $m = k_n$, wenn es sich in der fortschreitenden Dezimalbruchentwickelung von π bei d_m zum n-ten Male ereignet, daß der Teil $d_m d_{m+1} \ldots d_{m+9}$ dieser Dezimalbruchentwickelung eine Sequenz 0123456789 bildet. Sei weiter $c_\nu = (-1/2)^{k_1}$, wenn $\nu \geq k_1$, sonst $c_\nu = (-1/2)^\nu$, und wählen wir für r die Limeszahl der unendlichen Reihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ Diese Zahl r ist weder rational, noch irrational. {{Da hier nur k_1 eingeht und die bekannte Stellenzahl von π bereits 1999 die Zweihundertmilliardengrenze überschritten hat, ist die genannte Zahl vermutlich bereits konstruiert und damit entschieden. Man kann die Auffassung vertreten, ihre Eigenschaften wären schon zu Brouwers Zeiten determiniert gewesen. Das liegt zumindest ebenso nahe wie die Annahme, jedes Elektron würde seinen Impuls und Ort genau kennen. Indessen können die Eigenschaften der mit $k_{10^{10^{100}}}$ gebildeten Zahl niemals bekannt werden. Wenn sie jemand kennt, dann kann es nur ein Gott sein.}}

(Fußnote. Nennen wir eine reelle Zahl g mit 0 vergleichbar, wenn entweder $g > 0$ oder $g \leq 0$ gilt, und mit 0 unvergleichbar, wenn die Annahme, daß g mit 0 vergleichbar wäre, ad absurdum geführt werden kann, so ist die Zahl r weder mit 0 vergleichbar, noch mit 0 unvergleichbar.)

Das eben konstruierte Beispiel zeigt gleichzeitig die Ungültigkeit des Prinzips der Reziprozität der Komplementärspecies, d. h. desjenigen Korollars des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, welches für ein beliebiges mathematisches System aus der Absurdität der Absurdität einer Eigenschaft (also insbesondere aus der Möglichkeit, die Eigenschaft aus ihrer Absurdität herzuleiten) die Richtigkeit dieser Eigenschaft folgert. Denn die Zahl r ist nicht rational, trotzdem ihre Irrationalität absurd ist.

{{Das eben konstruierte Beispiel zeigt gleichzeitig die Voreiligkeit meines obigen Kommentars: "The string 0123456789 did not occur in the first 200000000 digits of pi after position 0." Andererseits fehlt doch nur wenig: "The string 01234567 occurs at position 112,099,767 counting from the first digit after the decimal point." (Hoffentlich hat sich der π-Searcher nicht verrechnet - wie einst William Shanks. Wer wollte es nachprüfen?)
http://www.angio.net/pi/bigpi.cgi
}}
[L.E.J. Brouwer: "Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe", Jahresberich DMV, 33 (1925)]

557 Das Kalenderblatt 101213 Krieg der Frösche und der Mäuse (10)

Man kann die Lösung der Schwierigkeit, wie sie meine Beweistheorie gibt, sich so begreiflich machen. Unser Denken ist finit; indem wir denken, geschieht ein finiter Prozeß. Diese sich von selbst betätigende Wahrheit wird in meiner Beweistheorie gewissermaßen mit benutzt in der Weise, daß, wenn irgendwo sich ein Widerspruch herausstellen würde, mit der Erkenntnis dieses Widerspruches auch zugleich die betreffende Auswahl aus den unendlich vielen Dingen verwirklicht sein müßte. In meiner Beweistheorie wird demnach nicht behauptet, daß die Auffindung eines Gegenstandes unter den unendlich vielen Gegenständen stets bewirkt werden kann, wohl aber, daß man ohne Risiko eines Irrtums stets so tun kann, als wäre die Auswahl getroffen. Wir könnten Weyl wohl das Vorhandensein eines Circulus zugeben, aber dieser Circulus ist nicht vitiosus. Vielmehr ist die Anwendung des tertium non datur stets ohne Gefahr.
[D. Hilbert: " Die logischen Grundlagen der Mathematik", Mathematische
Annalen 88 (1923) 151-165]

Für Beispiele reeller Zahlen ohne Dezimalbruchentwicklung besteht bei der Weiterentwicklung der Mathematik stets die Möglichkeit, daß sie einmal hinfällig werden; dann aber können sie immer durch solche, welche ihre Gültigkeit behalten haben, ersetzt werden. [L.E.J. Brouwer: "Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung?", Mathematische Annalen 83 (1921) 201-210]

Wittgenstein radikalisiert [...] die Infragestellung der logischen Grundprinzipien, die Brouwer mit seiner Zurückweisung des tertium non datur begonnen hatte, indem er auch den Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch nicht unbedingt gelten lassen will. Sätze müssen sich nach Wittgenstein in der Wirklichkeit bewähren. {{Das ist ja unerhört!}} [Esther Ramharter: "Wittgensteins Kritik an Gödel und das versteckte tertium non datur"] http://sammelpunkt.philo.at:8080/1681/1/ramharter.pdf

558 Das Kalenderblatt 101214 Krieg der Frösche und der Mäuse (11)

Damit ist der Beweis des Zermeloschen Auswahlprinzips für Mengen von Mengen reeller Zahlen erbracht. [D. Hilbert: " Die logischen Grundlagen der Mathematik" Mathematische Annalen 88 (1923) 151-165]

Sobald Cantor seine ersten transfiniten Zahlen, die sogenannten Zahlen der zweiten Zahlklasse, entdeckt hatte, entstand [...] die Frage, ob man durch dieses transfinite Zählen auch wirklich anderwärts bekannte Mengen auszählen kann, die in gewöhnlichem Sinne nicht abzahlbar sind. [...] Die Lösung dieses Kontinuumproblems gelingt durch die von mir entwickelte Theorie, und zwar ist eben jener Nachweis der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems der erste und wichtigste Schritt zu dieser Lösung. Die Beantwortung fällt in bejahendem Sinne aus: die Punkte einer Strecke können durch die Zahlen der zweiten Zahlklasse, d. h. durch bloßes Hinüberzählen über das abzählbare Unendlich ausgezählt werden, um es in populärer Form auszudrücken. Ich mochte diese Behauptung selbst den Kontinuumsatz nennen und den Grundgedanken des Beweises dafür hier inhaltlich kurz darlegen. [...] Ausdrücklich möchte ich nochmals bemerken, daß die hier vorgetragene Darstellung des Beweises für den Kontinuumsatz nur die Grundgedanken enthält; zur vollkommenen Durchführung bedarf es außer den Beweisen der zwei Lemmata noch der Umarbeitung im Sinne der strengen Einhaltung der finiten Einstellung. [D. Hilbert: "Über das Unendliche", Math. Annalen 95 (1925) 161 - 190]

Bekanntlich haben Gödel und Cohen gezeigt, dass der oben behauptete Beweis falsch ist. Sollte der ganz oben behauptete richtiger sein?

559 Das Kalenderblatt 101215 Krieg der Frösche und der Mäuse (12)

{{In KB101210ff wurden die unvereinbaren Standpunkte Hilberts und Brouwers deutlich. Es bestand die Gefahr, dass sie zu einer Spaltung der Mathematik führten, wobei manche Mathematiker wie Study beide ablehnten und sogar einen dritten Weg gehen wollten. Study hatte sich in einer Streitschrift engagiert.}} Doch auch kurz vor Weihnachten ist Study noch nicht fertig:
"Ich sitze noch immer an der verdammten Schrift gegen die Sektierer, Brouwer, Weyl und Hilbert. Die Bücher, meist philosophische, die ich mir dazu von der Bibliothek geholt habe, nehmen nebeneinander dargestellt den Raum von zwei Metern ein (auf dem Fußboden natürlich). Es ist grässlich."

Später äußert er sich noch deutlicher über die Protagonisten: "Z. B. halte ich Brouwer, Weyl und Hilbert für geistig nicht normal. (In Bezug auf Hilbert hat mir das ein Psychiater bestätigt, der früher in Göttingen bei H.[ilbert] gehört hat.) Wird nun dadurch die Wirkung der Schriften dieser Mathematiker aufgehoben? [...] Was gedruckt ist, ist losgelöst von seinem Autor, und wer denkt, dass es schadet, hat das Recht, es zu kritisieren, wenn es ihm sachlich die Mühe wert erscheint."

[Yvonne Hartwich: "Eduard Study (1862-1930), ein mathematischer Mephistopheles im geometrischen Gärtchen", Dissertation, Mainz (2005) 152f]
http://ubm.opus.hbz-nrw.de/volltexte/2006/930/pdf/diss.pdf

560 Das Kalenderblatt 101216 Krieg der Frösche und der Mäuse (13)

{{Study gibt keiner Seite Recht:}} "Da Herr Weyl - derselbe Weyl, dessen Gottähnlichkeit die Zahlen und mit ihm alle Mathematik aus dem Nichts hervorzuzaubern versteht, immerfort von Unsinn redet [...] so wird er sich nicht beklagen dürfen, wenn ich nunmehr den letzten Satz samt allem, wovon im Abschnitt XVI die Rede war, für reinen Unsinn erkläre, und seine redseelige sogenannte Philosophie für gestaltlosen Brei." [...] "Der Formalismus, den Br.[ouwer] mit Recht, aber mit ungeeigneten Mitteln bekämpft, ist eine ganz moderne Modekrankheit! Man sieht hier so klar, wie man nur sehen kann, dass der ganze neuere Grundlagenstreit ein Familienzwist ist, in dem beide Parteien Unrecht haben; oder ein Hader zweier Sekten derselben Religion {{sic}}, deren Angehörige von Gespensterfurcht besessen sind."

Einerseits fand er das Ganze ausgesprochen lächerlich, sonst hätte er den zweiten Teil nicht mit einem Zitat aus dem "Froschmäusekrieg" begonnen {{Möglicherweise hat Einstein, der auf Studys Versendeliste stand, sein Bonmot aus einem Brief Studys entnommen. Doch hat diesen der Streit auch sehr geärgert, denn er entkleidete die Mathematik ihrer Geschlossenheit (die wesentliche Ursache dafür ist natürlich in Cantors Thesen zu sehen):}} die Mathematiker waren zweitausend Jahre lang die einzigen unter allen Menschen, die sich über Sinn und Unsinn verständigen konnten. {{Das hat die transfinite Mengenlehre über hundert Jahre lang erfolgreich verhindert!}}

[Yvonne Hartwich: "Eduard Study (1862-1930), ein mathematischer Mephistopheles im geometrischen Gärtchen", Dissertation, Mainz (2005) 152ff]
http://ubm.opus.hbz-nrw.de/volltexte/2006/930/pdf/diss.pdf

561 Das Kalenderblatt 101217 Krieg der Frösche und der Mäuse (14)

The enthusiasm for Brouwer's Intuitionism had definitely begun to warne. Brouwer came to Göttingen to deliver a talk on his ideas to the Mathematics Club.

"You say that we can't *know* whether in the decimal representation of π ten 9's occur in succession," someone objected after Brouwer finished. "Maybe we can't know - but God knows!" {{Ist die Bezeichnung "Matheologie" wirklich eine verwerfliche Verleumdung, wie einige Matheologen meinen?}}

To this Brouwer replied dryly, "I do not have a pipeline to God."

After a lively discussion Hilbert finally stood up.

"With your methods," he said to Brouwer, "most of the results of modern mathematics {{womit er offenbar Matheologie à la Cantor meinte}} would have to be abandoned, and to me the important thing is not to get fewer results but to get more results." {{Auch auf die Gefahr hin,

dass sie so wertlos sind wie die Resultate, die sich aus der jungfräulichen Geburt des Heilands folgern lassen?}}
He sat down to the enthusiastic applause. {{Vierbeiner gut, Zweibeiner schlecht.}}
The feeling of most mathematicians has been formally expressed by Hans Lewy, who as a Privatdozent was present at Brouwer's talk in Göttingen.
"It seems that there are some mathematicians who lack a sense of humor or have an over-swollen conscience. What Hilbert expressed there seems exactly right to me. If we have to go through so much trouble as Brouwer says, then nobody will want to be a mathematician any more. After all it is a human activity. Until Brouwer can produce a contradiction in classical mathematics, nobody is going to listen to him. {{Und dass kein Widerspruch produziert werden kann, ist dogmatisch festgelegt. Nicht nennbare Namen, nicht konstante Volumina und abzählbar überabzählbare Systeme sind ebensowenig Widersprüche wie vollendet Unendlichkeiten - denn all jene basieren ja auf diesen.}}
Hilbert's program, however, also received its share of cirticism. Some mathematicians objected that in his formalism he had reduced their science to "a meaningless game played with meaningless marks on paper." But to those familiar with Hilbert's work this criticism did not seem valid.
"... is it really credible that this is a fair account of Hilbert's view," Hardy demanded, " the view of the man who has probably added to the structure of significant mathematics a richer and more beautiful aggregate of theorems than any other mathematician of his time? [...]
By 1927 Hilbert was well enough to go again to Hamburg [...]
The whole talk had a strongly polemical quality: "Not even the sketch of my proof of Cantor's continuum hypothesis has remained uncriticized!" Hilbert complained and took up this proof again at length.

[Constance Reid: "Hilbert", Springer (1970) p. 184f]
http://books.google.de/books/about/Hilbert.html?id=mR4SdJGD7tEC&redir_esc=y

562 Das Kalenderblatt 101218 Krieg der Frösche und der Mäuse (15)

{{1927 hielt David Hilbert an der Univ. Hamburg einen Vortrag, in dem er seine Sicht der Grundlagen der Mathematik darstellte.}} It is a great honour and at the same time a necessity for me to round out and develop my thoughts on the foundations of mathematics, which was expounded here one day five years ago {{s. KB101212 bis KB101214}} and which since then have constantly kept me most actively occupied. With this new way of providing a foundation for mathematics, which we may appropriately call a proof theory, I pursue a significant goal, for I should like to eliminate once and for all the questions regarding the foundations of mathematics [...]
I have already set forth the basic features of this proof theory of mine on different occasions, in Copenhagen [1922], here in Hamburg [1922], in Leipzig [1922], and in Münster [1925]; in the meantime much fault has been found with it, and objections of all kinds have been raised against it, all of which I consider just as unfair as it can be.
[...]
Poincaré already made various statements that conflict with my views; above all, he denied from the outset the possibility of a consistency proof for the arithmetic axioms, maintaining that the consistency of the method of mathematical induction could never be proved except through the inductive method itself. [...] Regrettably Poincaré, the mathematician who in his generation was the richest in ideas and the most fertile, had a decided prejudice against Cantor's theory, which prevented him from forming a just opinion of Cantor's magnificent conceptions. Under these circumstances Poincaré had to reject my theory, which, incidentally, existed at that time only in its completely inadequate early stages. Because of his authority, Poincaré often exerted

a one-sided influence on the younger generation. {{Leider nicht in ausreichendem Maße. Dann werden die Einwände von Russell und Whitehead und schließlich die von Brouwer diskutiert.}} I cannot for the most part agree with their tendency; I feel. rather, that they are to a large extent behind the times, as if they came from a period when Cantor's majestic world of ideas had not yet been discovered.

[E. Artin et al. (Hrsg.): "D. Hilbert: Die Grundlagen der Mathematik" (1927). Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg, Bd. 6, Teubner, Leipzig (1928) 65-85. Englische Übersetzung in J. van Heijenoort: "From Frege to Gödel", Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass. (1967) 464-479]

563 Das Kalenderblatt 101219 Krieg der Frösche und der Mäuse (16)

Of today's literature on the foundations of mathematics, the doctrine that Brouwer advanced and called intuitionism forms the greater part. Not because of any inclination for polemics, but in order to express my views clearly and to prevent misleading, conceptions of my own theory, I must look more closely into certain of Brouwer's assertions.

Brouwer declares (just as Kronecker did in his day) that existence statements, one and all, are meaningless in themselves unless they also contain the construction of the object asserted to exist; for him they are worthless scrip, and their use causes mathematics to degenerate into a game. [...]

What, now, is the real state of affairs with respect to the reproach that mathematics would degenerate into a game? [...] The formula game that Brouwer so deprecates has, besides its mathematical value {{Leider besitzt die "Mathematik" à la Banach-Tarski überhaupt keinen Wert, so dass ein "mathematischer Wert" der von Hilbert geglaubten Beweise höchstens einen Bruchteil von Null ausmacht (also allenfalls in Lire messbar ist, wofür bekanntlich nicht einmal Euros gezahlt werden)}}, an important general philosophical significance. For this formula game is carried out according to certain definite rules, in which the technique of our thinking is expressed. These rules form a closed system that can be discovered and definitively stated {{so wie andere Religionen auch: Buddhismus, Christentum, Hinduismus, Islam, Judaismus, ...
http://de.wikipedia.org/wiki/Liste_von_Religionen_und_Weltanschauungen
Glühen ist besser als Wissen!}} The fundamental idea of my proof theory is none other than to describe the activity of our understanding, to make a protocol of the rules according to which our thinking actually proceeds. Thinking, it so happens, parallels speaking and writing: we form statements and place them one behind another. If any totality of observations and phenomena deserves to be made the object of a serious and thorough investigation, it is this one - since, after all, it is part of the task of science to liberate us from arbitrariness, sentiment, and habit and to protect us from the subjectivism that already made itself felt in Kronecker's views and, it seems to me, finds its culmination in intuitionism. {{Der irrigen subjektiven Meinung, dass eine Kugel sich niemals verdoppelt, sollte wirklich entschieden entgegengetreten werden! Leute, verteilt Luftballons! (oder Kondome).}}

Intuitionism's sharpest and most passionate challenge is the one it flings at the validity of the principle of excluded middle, [...] Existence proofs carried out with the help of the principle of excluded middle usually are especially attractive because of their surprising brevity and elegance. Taking the principle of excluded middle from the mathematician would be the same, proscribing the telescope to the astronomer or to the boxer the use of his fists. [...]

Not even the sketch of my proof of Cantor's continuum hypothesis has remained uncriticised. I would therefore like to make some comments on this proof. ...

[D. Hilbert: "Die Grundlagen der Mathematik" (1927), {{vgl. KB101218, Übersetzung entnommen aus:}}
http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ge/hilbert.htm

]

Marxisten sind eher philosophisch interessiert. Bei Hilberts "Beweis der Kontinuumhypothese" haben sie aber den Nagel auf den Kopf getroffen: "The whole of Hilbert selection for series reproduced here, minus some inessential mathematical formalism."

564 Das Kalenderblatt 101220 Krieg der Frösche und der Mäuse (17)

From my presentation you will recognise that it is the consistency proof that determines the effective scope of my proof theory and in general constitutes its core. The method of W. Ackermann permits a further extension still. For the foundations of ordinary analysis his approach has been developed so far that only the task of carrying out a purely mathematical proof of finiteness remains. Already at this time I should like to assert what the final outcome will be: mathematics is a presuppositionless science. To found it I do not need God {{I do not need Hilbert, sagte Gott - und schuf Gödel.}}, as does Kronecker {{Da ist etwas richtigzustellen. Kronecker brauchte Gott höchstens für den Anfang. Sein berühmter Satz: "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk" (KB090905) war vermutlich ebenso ironisch gemeint wie der Satz des erklärten Atheisten Albert Einstein: "Gott Würfelt nicht". Hilbert dagegen braucht Gott für alles, insbesondere für sein Paradies.}}, or the assumption of a special faculty of our understanding attuned to the principle of mathematical induction, as does Poincaré {{Hier bedarf es nur ein klein wenig gesunden Menschenverstandes: Wenn ein Satz für die natürliche Zahl k gilt und aus der Gültigkeit für n+k die Gültigkeit für n+k+1 unzweifelhaft geschlossen werden kann, dann kann n durch n+1 ersetzt werden und die Gültigkeit für n+k+2 ebenso unzweifelhaft erschlossen werden. Und dieser Ersetzungsprozess kann für alle erreichbaren natürlichen Zahlen cirkelhaft fortgesetzt werden, aber dieser Circulus ist nicht vitiosus. Darüber hinaus noch etwas beweisen zu wollen, ist eine Perversion des Beweisens - etwa so unnütz wie der Versuch 1 + 1 = 2 zu beweisen. Von welcher Basis ausgehend sollte das wohl geschehen, wo es doch die Grundlage aller Mathematik überhaupt ist!}}, or the primal intuition of Brouwer, or, finally, as do Russell and Whitehead, axioms of infinity, reducibility, or completeness, which in fact are actual, contentual assumptions that cannot be compensated for by consistency proofs. {{Das ist wieder richtig. Das Unendlichkeitsaxiom, also die Voraussetzung einer oder mehrerer vollendeter Unendlichkeiten, ist nicht durch Konsistenzbeweise absicherbar. Es ist einfach eine selbstwidersprüchlich Voraussetzung, aus der alles abgeleitet werden kann. Aber dass es in der Relativitätstheorie und anderswo in der Natur, z. B. im Fixsternstrahl vorkäme, wie Hilbert (noch 1931, abermals in Hamburg) glauben machen wollte (KB100323), darf heute wohl ebenso unverhohlen bezweifelt werden wie die angemaßte Unfehlbarkeit der römischen Bischöfe.}}

[D. Hilbert: "Die Grundlagen der Mathematik" (1927), s. KB101218 oder
http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ge/hilbert.htm
]

Hilberts nun erschienene Logik ist mehr als dürftig, und auch von seiner immer angekündigten "Grundlegung der Mathematik" erwarte ich schon nichts Überwältigendes mehr. (Ernst Zermelo, KB100323).

565 Das Kalenderblatt 101221 Krieg der Frösche und der Mäuse (18)

Towards the end of his Address on the *Unity of Knowledge,* delivered at the 1954 Columbia University bicentennial celebrations, Weyl enumerates what he considers to be the essential constituents of knowledge. At the top of his list comes

…intuition, mind's ordinary act of seeing what is given to it. (Weyl 1954, 629)

In particular Weyl held to the view that intuition, or insight—rather than proof—furnishes the ultimate foundation of mathematical knowledge. {{Was sonst? Formal beweisen lässt sich schließlich jede Dummheit - und sei sie noch so groß: Unzugängliche Kardinalzahlen oder unnennbare Namen. Notfalls macht man sie zum Axiom. Seit der transfiniten Mengenlehre hat "Beweis" einen anrüchigen Klang in der Mathematik. Seitdem muss man nämlich zwischen "streng bewiesen" und "möglich" oder gar "genau richtig" streng und genau unterscheiden.}} Thus in his *Das Kontinuum* of 1918 he says:

In the Preface to Dedekind (1888) we read that "In science, whatever is provable must not be believed without proof." This remark is certainly characteristic of the way most mathematicians think. Nevertheless, it is a preposterous principle. As if such an indirect concatenation of grounds, call it a proof though we may, can awaken any "belief" apart from assuring ourselves through immediate insight that each individual step is correct. In all cases, this process of confirmation—and not the proof—remains the ultimate source from which knowledge derives its authority; it is the "experience of truth" (Weyl 1987, 119) {{like Zermelos "proof" of the well-ordering assertion is the experience of untruth}}.

[John L. Bell: "Hermann Weyl", Stanford Encyclopedia of Philosophy (2009)]
http://plato.stanford.edu/entries/weyl/index.html

566 Das Kalenderblatt 101222 Krieg der Frösche und der Mäuse (19)

Weyl's idealism naturally inclined him to the view that the ultimate basis of his own subject, mathematics, must be found in the intuitively given as opposed to the transcendent.

{{Transzendente Zahlen: Ja. Transzendentes Denken: Nein. In Kants Philosophie wird der Begriff "transzendent" als Ausdruck für wissenschaftliche Aussagen verwendet die den Bereich möglicher Erfahrung überschreiten und daher keiner Verifikation fähig sind. Kant suchte die Erkenntnis auf den Boden sinnlicher Erfahrung zu stellen; er erklärte die Behauptungen der bisherigen Metaphysik (im Sinne der scholastischen Philosophie) über Gott Freiheit und Unsterblichkeit für transzendent, die Erfahrung überfliegend.
http://www.uni-protokolle.de/Lexikon/Transzendent_(Philosophie).html
In der Matheologie wird der Begriff meistens mit "transfinit" umschrieben, aber in der Kantschen Bedeutung gebraucht, nämlich den Bereich möglicher Erfahrung überschreitend (und die Jünger immer wieder zu dem mutigen Satz herausfordernd, sie könnten ganz bequem und ohne Probleme das Unendliche perzipieren (so wie die Hofschranzen ganz deutlich des nackten Kaisers Kleider sehen.)}}

Nevertheless, he recognized that it would be unreasonable to require all mathematical knowledge to possess intuitive immediacy. In *Das Kontinuum*, for example, he says:

The states of affairs with which mathematics deals are, apart from the very simplest ones, so complicated that it is practically impossible to bring them into full givenness in consciousness and in this way to grasp them completely.

Nevertheless, Weyl felt that this fact, inescapable as it might be, could not justify extending the bounds of mathematics to embrace notions, such as the actual infinite, which cannot be given fully in intuition even in principle {{mit Ausnahme von Geistersehern}}. He held, rather, that such extensions of mathematics into the transcendent are warranted only by the fact that mathematics plays an indispensable role in the physical sciences, in which intuitive evidence is necessarily transcended. As he says in *The Open World*:

… if mathematics is taken by itself, one should restrict oneself with Brouwer to the intuitively cognizable truths … nothing compels us to go farther. But in the natural sciences we are in contact with a sphere which is impervious to intuitive evidence; here cognition necessarily becomes symbolical construction. Hence we need no longer demand that when mathematics is taken into the process of theoretical construction in physics it should be possible to set apart the mathematical element as a special domain in which all judgments are intuitively certain; from this higher standpoint which makes the whole of science appear as one unit, I consider Hilbert to be right. (Weyl 1932, 82).

[John L. Bell: "Hermann Weyl", Stanford Encyclopedia of Philosophy (2009)]
http://plato.stanford.edu/entries/weyl/index.html

567 Das Kalenderblatt 101223 Krieg der Frösche und der Mäuse (20)

In *Consistency in Mathematics* (1929), Weyl characterized the mathematical method as

the a priori construction of the possible in opposition to the a posteriori description of what is actually given. {{Mathematik ist vor allem theoretische Physik, Chemie, Ökonomie etc. im Gegensatz zur experimentellen und observierenden Physik, Chemie, Ökonomie etc. Mathematik muss vor allem folgerichtig sein. Und da gibt es für "richtig" nur ein Kriterium: Das Modell in der Realität. Banach-Tarski ist nicht folgerichtig, sondern folgefalsch.}}

The problem of identifying the limits on constructing “the possible” in this sense occupied Weyl a great deal. He was particularly concerned with the concept of the mathematical infinite, which he believed to elude “construction” in the naive set-theoretical sense. Again to quote a passage from *Das Kontinuum*:

No one can describe an infinite set other than by indicating properties characteristic of the elements of the set…. The notion that a set is a “gathering” brought together by infinitely many individual arbitrary acts of selection, assembled and then surveyed as a whole by consciousness, is nonsensical; “inexhaustibility” is essential to the infinite. (Weyl 1987, 23) {{Das wäre zumindest die naive, nichtmatheologische Position. Die Frau auf der Straße rechnet sicher damit, dass das Unendliche nicht beendet werden kann.}}

[John L. Bell: "Hermann Weyl", Stanford Encyclopedia of Philosophy (2009)]
http://plato.stanford.edu/entries/weyl/index.html

568 Das Kalenderblatt 101224 Krieg der Frösche und der Mäuse (21)

Of existential statements Weyl says:

An existential statement—e.g., “there is an even number”—is not a judgement in the proper sense at all, which asserts a state of affairs; existential states of affairs are the empty invention of logicians. (Weyl, 1921)

Above and beyond the claims of logic, Weyl welcomed Brouwer's construction of the continuum by means of sequences generated by free acts of choice, thus identifying it as a “medium of free Becoming” which “does not dissolve into a set of real numbers as finished entities”. Weyl felt that Brouwer, through his doctrine of Intuitionism, had come closer than anyone else to bridging that “unbridgeable chasm” between the intuitive and mathematical continua. In particular, he found compelling the fact that the Brouwerian continuum is not the union of two disjoint nonempty parts—that it is, in a word, indecomposable. “A genuine continuum,” Weyl says, “cannot be divided into separate fragments.” In later publications he expresses this more colourfully by quoting Anaxagoras to the effect that a continuum “defies the chopping off of its parts with a hatchet.”

Weyl also agreed with Brouwer that all functions everywhere defined on a continuum are continuous, but here certain subtle differences of viewpoint emerge. Weyl contends that what mathematicians had taken to be discontinuous functions actually consist of several continuous functions defined on separated continua. In Weyl's view, for example, the “discontinuous” function defined by $f(x) = 0$ for $x < 0$ and $f(x) = 1$ for $x \geq 0$ in fact consists of the two functions with constant values 0 and 1 respectively defined on the separated continua $\{x: x < 0\}$ and $\{x: x \geq 0\}$. (The union of these two continua fails to be the whole of the real continuum because of the failure of the law of excluded middle: it is not the case that, for be any real number x, either $x < 0$ or $x \geq 0$.) Brouwer, on the other hand, had not dismissed the possibility that discontinuous functions could be defined on proper parts of a continuum, and still seems to have been searching for an appropriate way of formulating this idea. In particular, at that time Brouwer would probably have been inclined to regard the above function f as a genuinely discontinuous function defined on a proper part of the real continuum. For Weyl, it seems to have been a self-evident fact that all functions defined on a continuum are continuous, but this is because Weyl confines attention to functions which turn out to be continuous by definition. Brouwer's concept of function is less restrictive than Weyl's and it is by no means immediately evident that such functions must always be continuous.

[John L. Bell: "Hermann Weyl", Stanford Encyclopedia of Philosophy (2009)]
http://plato.stanford.edu/entries/weyl/index.html

569 Das Kalenderblatt 101225 Krieg der Frösche und der Mäuse (22)

Small wonder, then, that Hilbert was upset when Weyl joined the Brouwerian camp.

Hilbert's response was to develop an entirely new approach to the foundations of mathematics with the ultimate goal of establishing beyond doubt the consistency of the whole of classical mathematics, including arithmetic, analysis, and Cantorian set theory. With the attainment of that goal, classical mathematics would be placed securely beyond the destructive reach of the intuitionists. The core of Hilbert's program was the translation of the whole apparatus of classical mathematical demonstration into a simple, finitistic framework (which he called “metamathematics”) involving nothing more, in principle, than the straightforward manipulation of symbols, taken in a purely formal sense, and devoid of further meaning. {{Solch sinnlose Symbolik vertreten heute immer noch ein paar rückwärtsgewandte Zeitgenossen und behaupten, ohne sie könne kein Mensch und kein Beweis sinnvoll existieren.}} Within metamathematics itself, Hilbert imposed a standard of demonstrative evidence stricter even than that demanded by the intuitionists, a form of finitism rivalling (ironically) that of Kronecker. The demonstration of the consistency of classical mathematics was then to be achieved by showing, within the constraints of strict finitistic evidence insisted on by Hilbert, that the formal metamathematical counterpart of a classical proof in that system can never lead to an assertion evidently false, such as 0 = 1.

Hilbert's program rested on the insight that, au fond, the only part of mathematics whose reliability is entirely beyond question is the finitistic {{da hat er zweifellos Recht}}, or concrete part: in particular, finite manipulation of surveyable domains of distinct objects including mathematical symbols presented as marks on paper. Mathematical propositions referring only to concrete objects in this sense Hilbert called real, concrete, or contentual propositions, and all other mathematical propositions he distinguished as possessing an ideal, or abstract character. (Thus, for example, 2 + 2 = 4 would count as a real proposition, while there exists an odd perfect number would count as an ideal one.) Hilbert viewed ideal propositions as akin to the ideal lines and points "at infinity" of projective geometry. {{Verfehlter Analogischluss.}} Just as the use of these does not violate any truths of the "concrete" geometry of the usual Cartesian plane, so he hoped to show that the use of ideal propositions—even those of Cantorian set theory—would never lead to falsehoods among the real propositions, that, in other words, such use would never contradict any self-evident fact about concrete objects. Establishing this by strictly concrete, and so unimpeachable means was thus the central aim of Hilbert's program. [...]

Weyl soon grasped the significance of Hilbert's program, and came to acknowledge its "immense significance and scope". Whether that program could be successfully carried out was, of course, still an open question. But independently of this issue Weyl was concerned about what he saw as the loss of content resulting from Hilbert's thoroughgoing formalization of mathematics. "Without doubt," Weyl warns, "if mathematics is to remain a serious cultural concern {{diese Prämisse kann ein echter Mathematiker nicht aufgeben}}, then some sense must be attached to Hilbert's game of formulae.“

[John L. Bell: "Hermann Weyl", Stanford Encyclopedia of Philosophy (2009)]
http://plato.stanford.edu/entries/weyl/index.html

570 Das Kalenderblatt 101226 Krieg der Frösche und der Mäuse (23)

Erst nach dem ersten Weltkrieg veröffentlichte Brouwer seine Grundlagenarbeit, in der seine neuen unendlichen Objekte das Licht der Welt erblickten. In einer trockenen mathematischen Darstellung präsentierte Brouwer seine Wahlfolgen und entwickelte die Basis späterer Veröffentlichungen (Brouwer 1918). Zu gleicher Zeit erschien Hermann Weyls "Das Kontinuum", eine "arithmetische" klassische Theorie der Analysis.

Zu dieser Zeit gab es noch keine Reibungen zwischen Hilbert und Brouwer und Weyl; im Gegenteil, Weyl war Hilberts Lieblingsschüler, und die Beziehungen zwischen Brouwer und Hilbert waren recht herzlich.

Wenn man einen Anfangspunkt des Grundlagenstreits sucht, so ist Weyls Rede "Über die neue Grundlagenkrise in der Mathematik" (1920) {{KB101208}} der geeignetste Kandidat. Wo Brouwer noch jahrelang dem Konflikt auswich, indem er möglichst trocken und akademisch seine Ansichten vertrat, war Weyls Arbeit eine regelrechte Kampfansage, mit Begeisterung geschrieben, voll literarischem Schwung. Manches Zitat aus dem Grundlagenstreit stammt aus dieser Arbeit: "die Auflösung des Staatswesens der Analysis", "Brouwer, das ist die Revolution", "Mathematik als Papierwirtschaft", ...

In seinen Reaktionen bezog Hilbert sich wiederholt auf diese Äußerungen; mehr als Brouwers Arbeiten hatte ihn wahrscheinlich Weyl gereizt, den Streit anzufangen.

Brouwers erste Aktion auf deutschem Boden war 1920, als er auf dem Naturforscher-Kongreß in Bad Nauheim vortrug über das Thema "Hat jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung?" {{KB101213}}; da trat er zuerst persönlich in die Öffentlichkeit, und es läßt sich vermuten, daß sein Vortrag mehr informelle Elemente enthielt als die spätere Arbeit.
Hilbert reagierte 1921 auf die Äußerungen von Weyl und Brouwer in seinem Vortrag „Neubegründung der Mathematik" {{KB090813, KB101212}}. Es ist bemerkenswert, daß Hilbert, der der Philosophie nicht sehr nahe stand, in diesem und späteren Vorträgen (und zugehörigen Veröffentlichungen) der Grundlagenpolemik viel Platz einräumte. Wo Brouwer und Weyl sich gegen bestimmte Aspekte der modernen Mathematik richteten; war es Hilbert, der das persönliche Element in die Polemik einführte. Er beschuldigte die beiden „einer Verbotsdiktatur à la Kronecker" und erklärte, daß Brouwer "nicht die Revolution war, sondern nur die Wiederholung eines Putschversuches". [...]
Auf der nächsten Jahrestagung, Marburg 1923, war Brouwer wieder am Zug. Er redete über "Die Rolle des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik". In diesem Vortrag äußerte er sich ziemlich ablehnend zur Hilbertschen Konsistenzbeweis-Idee.

[D. van Dalen: "Der Grundlagenstreit zwischen Brouwer und Hilbert", in E. Eichhorn, E.J. Thiele (Hrsg.): "Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff" Heldermann, Berlin (1994) 207-212.]

[...] eine durch keinen widerlegenden Widerspruch zu hemmende unrichtige Theorie ist darum nicht weniger unrichtig, so wie eine durch kein reprimierendes Gericht zu hemmende verbrecherische Politik darum nicht weniger verbrecherisch ist.

[L.E.W. Brouwer: "Die Rolle des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik", Jahrestagung DMV, Marburg (1923)]
http://www.heldermann.de/BSM/BSM05/bsm05-207.pdf

571 Das Kalenderblatt 101227 Krieg der Frösche und der Mäuse (24)

In dieser Schrift handelt es sich nicht darum, den "sicheren Fels", auf den das Haus der Analysis gegründet ist, im Sinne des Formalismus mit einem hölzernen Schaugerüst zu umkleiden und nun dem Leser und am Ende sich selber weiszumachen: dies sei das eigentliche Fundament. Hier wird vielmehr die Meinung vertreten, daß jenes Haus zu einem wesentlichen Teil auf Sand gebaut ist. Ich glaube, diesen schwankenden Grund durch Stützen von zuverlässiger Festigkeit ersetzen zu können; doch tragen sie nicht alles, was man heute allgemein für gesichert hält; den Rest gebe ich preis, weil ich keine andere Möglichkeit sehe.
[...] Immerhin möchte ich gerne nicht bloß auf den Kathedern, sondern auch von allen Studierenden verstanden sein, die mit den heute gelehrten "strengen" Grundlagen der Analysis bekannt geworden sind.
[...] Wenngleich diese Schrift vor allem mathematische Ziele verfolgt, so bin ich doch philosophischen Fragen nicht aus dem Wege gegangen und habe nicht versucht, sie durch jene rohe und oberflächliche Verquickung von Sensualismus und Formalismus aus der Welt zu schaffen, die [von Frege in seinen "Grundgesetzen der Arithmetik" (Jena 1893) mit erfreulicher Deutlichkeit bekämpft] unter Mathematikern immer noch großes Ansehen genießt.

[H. Weyl: "Das Kontinuum", Veit, Leipzig (1918) Vorwort]
http://www.archive.org/stream/daskontinuumkrit00weyluoft#page/n3/mode/2up

572 Das Kalenderblatt 101228 Krieg der Frösche und der Mäuse (25)

Nur einem sinnvollen Satz entspricht ein Urteil, nur einem wahren Urteil ein Sachverhalt; ein Sachverhalt aber besteht schlechthin {{und zwar nicht nur ein bedingter Sachverhalt der Form: "Wenn das Axiom A angenommen wird, dann ergibt sich die Konsequenz B", sondern, in der Mathematik jedenfalls, ein unbedingter Sachverhalt wie: "Für jede nicht selbstwidersprüchliche Unendlichkeit oo gilt "oo = oo+oo = oo*oo = oo^oo"}}. Vielleicht können sinnlose Sätze nur im sprachlichen, nie im sachlichen Denken auftreten; jedenfalls liegt darin eine große Gefahr der Sprache, daß sie sinnlose Kombinationen, der Wort-Symbole von Urteils-Bestandstücken ermöglicht, und zwar Kombinationen, die in formal-grammatischer Hinsicht genau so aussehen wie die Wort-Formulierungen echter Urteile. Ein Satz, in dessen "grammatischer" Struktur es noch nicht liegt, daß er sinnlos ist (wie ein Satz der Form "Der Gegenstand a hat die Eigenschaft E"), braucht darum nicht sinnvoll zu sein - so wenig ein Urteil, das nicht logisch widersinnig ist [...] darum schon wahr sein muß. [...] Auf eine letzte Klärung des Wesens von Sachverhalt, Urteil, Gegenstand, Eigenschaft können wir hier nicht ausgehen; diese Aufgabe führt in metaphysische Tiefen; über sie muß man sich bei Männern Rats erholen, deren Namen man unter Mathematikern nicht nennen darf, ohne ein mitleidiges Lächeln einzuheimsen - Fichte z. B.

[H. Weyl: "Das Kontinuum", Veit, Leipzig (1918) p. 1f]
http://www.archive.org/stream/daskontinuumkrit00weyluoft#page/n3/mode/2up

573 Das Kalenderblatt 101229 Krieg der Frösche und der Mäuse (26)

"Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden", beginnt die berühmte Dedekindsche Schrift "Was sind und was sollen die Zahlen?" (Vorwort zur I. Auflage). Diese Äußerung ist gewiß charakteristisch für die Denkweise der meisten Mathematiker, dennoch ist das ein verkehrtes Prinzip. Als ob ein solcher mittelbarer Begründungszusammenhang, wie wir ihn als "Beweis" bezeichnen, irgend "Glauben" zu wecken imstande ist, ohne daß wir uns der Richtigkeit jedes einzelnen Schrittes in unmittelbarer Einsicht versichern! Diese (und nicht der Beweis) bleibt überall letzte Rechtsquelle der Erkenntnis, sie ist das "Erlebnis der Wahrheit".

Es wird heute vielfach der Standpunkt vertreten, die Axiome seien Festsetzungen {{und dass das}} Urteil eine Folge der arithmetischen Axiome sei. Die Axiome definieren dann gewissermaßen den Sinn des "es gibt" (es existiert, wessen Existenz aus den Axiomen logisch gefolgert werden kann). Aber ganz abgesehen davon, daß ein solches "hypothetisch-deduktives Spiel" ohne jeden Wert ist (wenn es keinen für die Erkenntnis bedeutungsvollen, die Axiome erfüllenden Sinn gibt), ist dieser Standpunkt auch logisch unhaltbar.

[H. Weyl: "Das Kontinuum", Veit, Leipzig (1918) p. 11]
http://www.archive.org/stream/daskontinuumkrit00weyluoft#page/n3/mode/2up

574 Das Kalenderblatt 101230 Krieg der Frösche und der Mäuse (27)

Elementare Geometrie, Arithmetik, rationale Algebra - diese Hauptteile des mathematischen Gebäudes sind in gutem Stand: nicht so aber die Analysis und die Mengenlehre [...]. Die vielgerühmte Kritik, welche das 19. Jahrhundert an den Grundlagen der klassischen Analysis geübt hat, war berechtigt, wie niemand bestreiten wird; und gewiß ist durch sie ein ungeheurer Fortschritt in der Strenge des Denkens bewirkt worden. Was man aber positiv an die Stelle des Alten gesetzt hat, ist, wenn man den Blick auf die letzten Prinzipien richtet, unklarer und anfechtbarer als dieses - so wenig daran zu zweifeln ist, daß der größte Teil des von der modernen kritischen Forschung Erarbeiteten sich bei einer endgültigen Fundierung der Analysis von neuem als Bauzeug verwerten läßt. So wie die Dinge jetzt stehen, muß aber konstatiert werden: Die große Aufgabe, welche seit der Pythagoreischen Entdeckung des Irrationalen gestellt ist, das uns (namentlich in der fließenden Zeit und der Bewegung) unmittelbar anschaulich gegebene Stetige nach seinem in "exakten" Erkenntnissen formulierbaren Gehalt als Gesamtheit diskreter "Stadien" mathematisch zu erfassen, dieses Problem ist trotz Dedekind, Cantor und Weierstrass heute so ungelöst wie je. Systeme mehr oder minder willkürlicher Festsetzungen können uns da nicht weiter helfen [...].

[H. Weyl: "Das Kontinuum", Veit, Leipzig (1918) p. 15f]
http://www.archive.org/stream/daskontinuumkrit00weyluoft#page/n3/mode/2up

575 Das Kalenderblatt 101231 Krieg der Frösche und der Mäuse (28)

Da wir von einem bestimmten Operationsbereich ausgehen müssen und die existierenden Mengen und Zuordnungen bestimmt sind durch die sachlichen, mittels der zugrunde liegenden Ur-Eigenschaften und -Relationen ausdrückbaren Zusammenhänge, welche zwischen den Gegenständen der gegebenen Kategorien bestehen, wird - unbeschadet der Möglichkeit einer allgemeinen Mengenlehre - keine universelle, gleichmäßig für alle Operationsbereiche gültige Skala unendlicher Kardinal- und Ordinalzahlen existieren können, wie sie Cantor aufgestellt hat {{denn die alles umfassende Skala käme ja der Menge aller Mengen gleich. Diese darf es aus sattsam bekannten Gründen nicht geben. Aber eine Grenze irgendwo zwischen der leeren Menge und der Menge aller Mengen kann auch nicht existieren, sie müsste denn eindeutig definiert sein; doch damit wären den Toren die Tore verschlossen, durch die sie in die Gefilde unzugänglicher, unerreichbarer und undefinierbarer Kardinalzahlen zu stolpern pflegen.}} Der durch die Mengenlehre scheinbar ausgefüllte Abgrund zwischen dem Endlichen und Unendlichen tritt wieder in seiner klaffenden Tiefe zutage.

[H. Weyl: "Das Kontinuum", Veit, Leipzig (1918) p. 16]
http://www.archive.org/stream/daskontinuumkrit00weyluoft#page/n3/mode/2up

Nik Weaver: "Philosophisch erfordert ZFC den vagen Glauben an ein mystisches Universum von Mengen, das unphysikalisch und zeitlos existieren müsste (und doch dürften irgendwie 'nicht alle Mengen auf einmal da sein', um die klassischen Paradoxien zu vermeiden)." Hier berührt Weaver den oben schon von Bernays angesprochenen wunden Punkt der Mengenlehre: Das aktual Unendliche kann nur existieren, wenn alle Elemente vorhanden sind. (Alle Elemente können nur dann vollständig vorhanden sein, wenn alle Elemente vollständig vorhanden sind.) Dann sollten aber auch alle Mengen und insbesondere die Menge aller Mengen vorhanden sein. Doch diese Menge aller Mengen besitzt eine Potenzmenge und damit eine Kardinalzahl, die nach dem Cantorschen Theorem, dem wichtigsten Satz der transfiniten Mengenlehre, größer als ihre Kardinalzahl ist. Wo zieht wer eine Grenze?"

[W. Mückenheim: "Die Geschichte des Unendlichen", HS-Augsburg, 5. Aufl. (2010) p. 109]

576 Das Kalenderblatt 110101 Krieg der Frösche und der Mäuse (29)

[...] reelle Zahlen - deren jede man sich als Individuum definiert denken muß durch eine ihr und nur ihr zukommende Eigenschaft {{Die Menge aller Eigenschaften ist abzählbar - und ebenso die Menge aller Namen:}} An der natürlichen Zahlenreihe hängt der Cantorsche Begriff der Abzählbarkeit [...] Die möglichen Kombinationen endlichvieler Buchstaben bilden eine abzählbare Menge, und da jede bestimmte reelle Zahl sich durch endlichviele Worte definieren lassen muß, kann es nur abzählbar viele reelle Zahlen geben - im Widerspruch mit Cantors klassischem Theorem und dessen Beweis. {{In jeder Wissenschaft wäre nun ein Widerspruch aufgedeckt und die erschütterten Grundlagen in Frage zu stellen. Nicht so in der Matheologie. Denn dort gibt es bekanntlich keinen Widerspruch. Selbst Weyl findet noch eine Entschuldigung, die aber, da sie nicht hilft, hier nicht zitiert wird.}}

[H. Weyl: "Das Kontinuum", Veit, Leipzig (1918) p. 11, 18]
http://www.archive.org/stream/daskontinuumkrit00weyluoft#page/n3/mode/2up

One philosophically important way in which numbers and sets, as they are naively understood, differ is that numbers are physically instantiated in a way that sets are not. Five apples are an instance of the number 5 and a pair of shoes is an instance of the number 2, but there is nothing obvious that we can analogously point to as an instance of, say, the set {{∅}}.

[Nik Weaver: "Is set theory indispensable?"]
http://www.math.wustl.edu/~nweaver/indisp.pdf

577 Das Kalenderblatt 110102 Krieg der Frösche und der Mäuse (30)

[...] und gewann die feste Überzeugung [...] daß die Vorstellung der Iteration, der natürlichen Zahlenreihe, ein letztes Fundament des mathematischen Denkens ist - trotz der Dedekindschen "Kettentheorie", die darauf hinzielte, die Definition und den Schluß durch vollständige Induktion syllogistisch ohne Benutzung dieser Anschauung zu begründen. Wenn es nämlich wahr ist, daß die Grundbegriffe der Mengenlehre nur durch Vollzug dieser "reinen" Anschauung aufgefaßt werden können, ist es überflüssig und irreführend, den Begriff der natürlichen Zahl seinerseits nun wieder mengentheoretisch zu fundieren; außerdem muß ich von meinem Standpunkt aus gegen die Kettentheorie den Vorwurf des circulus vitiosus erheben. Ebenso natürlich gegen die Theorie der endlichen Mengen, die Zermelo in Acta Mathematica, Bd. 32, S. 185 ff. aufstellt. {{Es ist und bleibt absolut unverständlich, wie man die einfach begreifbaren endlichen Mengen, die ein Urbild in der Realität besitzen, mit Hilfe einer Theorie "erklären" will, die keinerlei Basis in der Realität besitzt. Das einzige Motiv für diesen Irrweg kann nur im Versuch der Glaubhaftmachung des Unendlichen liegen. Es ist so, als wolle man ernsthaft elektrische Entladungen in der Atmosphäre oder die Temperaturerhöhung beim Wasserkochen mit göttlichem Walten erklären. - Matheologie eben.}}

[H. Weyl: "Das Kontinuum", Veit, Leipzig (1918) p. 37]
http://www.archive.org/stream/daskontinuumkrit00weyluoft#page/n3/mode/2up

578 Das Kalenderblatt 110103 Krieg der Frösche und der Mäuse (31)

{{Brouwer's Cambridge-Vorlesungen aus 1951 liegen zwar viel später als der Krieg, aber die Grundgedanken sind hier in größter Abgeklärtheit vorgelegt:}}

The gradual transformation of the mechanism of mathematical thought is a consequence of the modifications which, in the course of history, have come about in the prevailing philosophical ideas, firstly concerning the origin of mathematical certainty, secondly concerning the delimitation of the object of mathematical science. In this respect we can remark that in spite of the continual trend from object to subject of the place ascribed by philosophers to time and space in the subject-object medium, the belief in the existence of immutable properties of time and space, properties independent of experience and of language, remained well-nigh intact far into the nineteenth century. To obtain exact knowledge of these properties, called mathematics, the following means were usually tried: some very familiar regularities of outer or inner experience of time and space were postulated to be invariable, either exactly, or at any rate with any attainable degree of approximation. They were called axioms and put into language. Thereupon systems of more complicated properties were developed from the linguistic substratum of the axioms by means of reasoning guided by experience, but linguistically following and using the principles of classical logic. We will call the standpoint governing this mode of thinking and working the observational standpoint, and the long period characterised by this standpoint the observational period. It considered logic as autonomous, and mathematics as (if not existentially, yet functionally) dependent on logic.

For space the observational standpoint became untenable when, [...] besides observational space a great number of other spaces, sometimes exclusively originating from logical speculations, with properties distinct from the traditional, but no less beautiful, had found their arithmetical realisation. Consequently the science of classical (Euclidean, three-dimensional) space had to continue its existence as a chapter without priority [...].

In this process of extending the domain of geometry, an important part had been played by the logico-linguistic method, which operated on words by means of logical rules, sometimes without any guidance from experience and sometimes even starting from axioms framed independently of experience. Encouraged by this the Old Formalist School (Dedekind, Cantor, Peano, Hilbert, Russell, Zermelo, Couturat), for the purpose of a rigorous treatment of mathematics and logic (though not for the purpose of furnishing objects of investigation to these sciences), finally rejected any elements extraneous to language, thus divesting logic and mathematics of their essential difference in character, as well as of their autonomy. However, the hope originally fostered by this school that mathematical science erected according to these principles would be crowned one day with a proof of its non-contradictority was never fulfilled, and nowadays, after the logical investigations performed in the last few decades, we may assume that this hope has been relinquished universally.

[L.E.J. Brouwer: "Lectures on Intuitionism - Historical Introduction and Fundamental Notions" (1951), Cambridge University Press (1981)]
http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ne/brouwer.htm

579 Das Kalenderblatt 110104 Krieg der Frösche und der Mäuse (32)

Of a totally different orientation was the Pre-intuitionist School, mainly led by Poincaré, Borel and Lebesgue. These thinkers seem to have maintained a modified observational standpoint for the introduction of natural numbers, for the principle of complete induction, and for all mathematical entities springing from this source without the intervention of axioms of existence, hence for what might be called the 'separable' parts of arithmetic and of algebra. For these, even for such theorems as were deduced by means of classical logic, they postulated an existence and exactness independent of language and logic and regarded its non-contradictority as certain, even without logical proof. For the continuum, however, they seem not to have sought an origin strictly extraneous to language and logic. On some occasions they seem to have contented themselves with an ever-unfinished and ever-denumerable species of 'real numbers' generated by an ever-unfinished and ever-denumerable species of laws defining convergent infinite sequences of rational numbers. However, such an ever-unfinished and ever-denumerable species of 'real numbers' is incapable of fulfilling the mathematical function of the continuum for the simple reason that it cannot have a positive measure. On other occasions they seem to have introduced the continuum by having recourse to some logical axiom of existence, such as the 'axiom of ordinal connectedness', or the 'axiom of completeness', without either sensory or epistemological evidence. In both cases in their further development of mathematics they continued to apply classical logic, including the principium tertii exclusi, without reserve and independently of experience. This was done regardless of the fact that the noncontradictority of systems thus constructed had become doubtful by the discovery of the well-known logico-mathematical antonomies.

In point of fact, pre-intuitionism seems to have maintained on the one hand the essential difference in character between logic and mathematics, and on the other hand the autonomy of logic, and of a part of mathematics. The rest of mathematics became dependent on these two.

[L.E.J. Brouwer: "Lectures on Intuitionism - Historical Introduction and Fundamental Notions" (1951), Cambridge University Press (1981)]
http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ne/brouwer.htm

580 Das Kalenderblatt 110105 Krieg der Frösche und der Mäuse (33)

Meanwhile, under the pressure of well-founded criticism exerted upon old formalism, Hilbert founded the New Formalist School, which postulated existence and exactness independent of language not for proper mathematics but for meta-mathematics, which is the scientific consideration of the symbols occurring in perfected mathematical language, and of the rules of manipulation of these symbols. On this basis new formalism, in contrast to old formalism, in confesso made primordial practical use of the intuition of natural numbers and of complete induction. It is true that only for a small part of mathematics (much smaller than in pre-intuitionism) was autonomy postulated in this way. New formalism was not deterred from its procedure by the objection that between the perfection of mathematical language and the perfection of mathematics itself no clear connection could be seen.

So the situation left by formalism and pre-intuitionism can be summarised as follows: for the elementary theory of natural numbers, the principle of complete induction and more or less considerable parts of arithmetic and of algebra, exact existence, absolute reliability and non-contradictority were universally acknowledged, independently of language and without proof. As for the continuum, the question of its languageless existence was neglected, its establishment as a set of real numbers with positive measure was attempted by logical means and no proof of its non-contradictory existence appeared. For the whole of mathematics the four principles of classical logic were accepted as means of deducing exact truths.

In this situation intuitionism intervened with two acts, of which the first seems to lead to destructive and sterilising consequences, but then the second yields ample possibilities for new developments.

[L.E.J. Brouwer: "Lectures on Intuitionism - Historical Introduction and Fundamental Notions" (1951), Cambridge University Press (1981)]
http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ne/brouwer.htm

581 Das Kalenderblatt 110106 Krieg der Frösche und der Mäuse (34)

FIRST ACT OF INTUITIONISM

Completely separating mathematics from mathematical language and hence from the phenomena of language described by theoretical logic, recognising that intuitionistic mathematics is an essentially languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of time. This perception of a move of time may be described as the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the twoity thus born is divested of all quality, it passes into the empty form of the common substratum of all twoities. And it is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics.

Inner experience reveals how, by unlimited unfolding of the basic intuition, much of 'separable' mathematics can be rebuilt in a suitably modified form. In the edifice of mathematical thought thus erected, language plays no part other than that of an efficient, but never infallible or exact, technique for memorising mathematical constructions, and for communicating them to others, so that mathematical language by itself can never create new mathematical systems. But because of the highly logical character of this mathematical language the following question naturally presents itself. Suppose that, in mathematical language, trying to deal with an intuitionist mathematical operation, the figure of an application of one of the principles of classical logic is, for once, blindly formulated. Does this figure of language then accompany an actual languageless mathematical procedure in the actual mathematical system concerned?

A careful examination reveals that, briefly expressed, the answer is in the affirmative, as far as the principles of contradiction and syllogism are concerned, if one allows for the inevitable inadequacy of language as a mode of description and communication. But with regard to the principle of the excluded third, except in special cases, the answer is in the negative, so that this principle cannot in general serve as an instrument for discovering new mathematical truths.

[L.E.J. Brouwer: "Lectures on Intuitionism - Historical Introduction and Fundamental Notions" (1951), Cambridge University Press (1981)]
http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ne/brouwer.htm

582 Das Kalenderblatt 110107 Krieg der Frösche und der Mäuse (35)

Indeed, if each application of the principium tertii exclusi in mathematics accompanied some actual mathematical procedure, this would mean that each mathematical assertion (i.e. an assignment of a property to a mathematical entity) could be judged, that is to say could either be proved or be reduced to absurdity. {{Das ist aber nicht möglich. Ein einfaches Beispiel ist schon die Unmöglichkeit, die ersten $10^{10^{100}}$ Stellen von π zu berechnen. Auch die BBP-Metheode [D.H. Bailey, P.B. Borwein, S. Plouffe: On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants, Math. Comput. 66 (1997) 903-913]
www.cecm.sfu.ca/personal/pborwein/PISTUFF/Apistuff.html
kann da nicht helfen, weil nicht einmal jeder Index zwischen 1 und $10^{10^{100}}$ angegeben (kommuniziert, formuliert, identifiziert, gedacht) werden kann. Folglich ist die Frage unentscheidbar und wird immer unentscheidbar bleiben.}}

Now every construction of a bounded finite nature in a finite mathematical system can only be attempted in a finite number of ways, and each attempt proves to be successful or abortive in a finite number of steps. We conclude that every assertion of possibility of a construction of a bounded finite nature in a finite mathematical system can be judged, so that in these circumstances applications of the Principle of the Excluded Third are legitimate. {{Das ist so im Intuitionismus, aber nicht in Wirklichkeit. Siehe oben. Da richtige Mathematik in der Wirklichkeit kommunizierbar sein muss, übt diese Aussage Brouwers zuviel Nachsicht mit den Matheologen.}}

[L.E.J. Brouwer: "Lectures on Intuitionism - Historical Introduction and Fundamental Notions" (1951), Cambridge University Press (1981)]
http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ne/brouwer.htm

583 Das Kalenderblatt 110108 Krieg der Frösche und der Mäuse (36)

But now let us pass to infinite systems and ask for instance if there exists a natural number *n* such that in the decimal expansion of π the *n*th, (*n*+1)th, ..., (*n*+8)th and (*n*+9)th digits form a sequence 0123456789. {{Schon die *n*-te Stelle lässt sich nicht mehr bezeichnen, sobald die dafür erforderliche Bitmenge die dem Bezeichnenden verfügbare übersteigt. Gewöhnlich Gehirne können nicht alle natürlichen Zahlen bis $10^{10^{11}}$ bezeichnen, also nicht so bis $10^{10^{11}}$ zählen, dass bei jeder genannten Zahl unabhängig von der Anzahl der schon gezählten Zahlen feststeht, welche gerade gemeint ist. (Zur Verdeutlichung: Ein Mensch kann zwar 10^{10} Mal bla sagen, wenn er - bei hoher Lebensdauer - in früher Kindheit beginnt und bis zu seinem Tode nichts weiter tut, als ohne Unterlass fünf bis sechs Mal in der Sekunde bla zu sagen (kurze Schlafens- und Essenszeiten ausgenommen). Er kann sich nach ca. 100 Jahren in ein Buch der Rekorde eintragen lassen (falls es und er dann noch existieren). Bis 10^{10} kann aber kein Mensch zählen, denn die größeren Zahlen aufzusagen dauert fast so lange wie der Spruch "zu Risiken und Nebenwirkungen fragen Sie Ihren Arzt oder Apotheker", für den auch versierte Reklamesprecher über eine Sekunde benötigen.) Aber selbst ein Superhirn ohne Zeitbegrenzung kann nicht bis $10^{10^{100}}$ zählen. Das hat Brouwer offenbar noch nicht erkannt. Doch ohne die Möglichkeit, Zahlen zu bezeichnen, kann man sie auch nicht als Zahlindividuen denken, sondern allenfalls Matheologie treiben und glauben, es gäbe diese Bezeichnungen oder die Zahlen irgendwo in einem platonischen Paradies (aus dem nur deswegen niemand vertrieben wird, weil es nicht existiert).}} This question, relating as it does to a so far not judgeable assertion, can be answered neither affirmatively nor negatively. But then, from the intuitionist point of view, because outside human thought there are no mathematical truths, the assertion that in the decimal expansion of π a sequence 0123456789 either does or does not occur is devoid of sense.

The aforesaid property, suppositionally assigned to the number *n*, is an example of a fleeing property, by which we understand a property *f*, which satisfies the following three requirements:

(i) for each natural number *n* it can be decided whether or not *n* possesses the property *f*,
(ii) no way of calculating a natural number *n* possessing *f* is known;
(iii) the assumption that at least one natural number possesses *f* is not known to be an absurdity.

Obviously the fleeing nature of a property is not necessarily permanent, for a natural number possessing *f* might at some time be found, or the absurdity of the existence of such a natural number might at some time be proved.

[L.E.J. Brouwer: "Lectures on Intuitionism - Historical Introduction and Fundamental Notions" (1951), Cambridge University Press (1981)]
http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ne/brouwer.htm

584 Das Kalenderblatt 110109 Krieg der Frösche und der Mäuse (37)

The belief in the universal validity of the principle of the excluded third in mathematics is considered by the intuitionists as a phenomenon of the history of civilization of the same kind as the former belief in the rationality of π, or in the rotation of the firmament about the earth {{oder die Annahme, dass eine Teilchen zu jeder Zeit einen bestimmten Ort und einen bestimmten Impuls besitzt.}} The intuitionist tries to explain the long duration of the reign of this dogma by two facts: firstly that within an arbitrarily given domain of mathematical entities the non-contradictority of the principle for a single assertion is easily recognized; secondly that in studying an extensive group of simple every-day phenomena of the exterior world, careful application of the whole of classical logic was never found to lead to error. [This means de facto that common objects and mechanisms subjected to familiar manipulations behave as if the system of states they can assume formed part of a finite discrete set {{und so ist es ja auch}}, whose elements are connected by a finite number of relations.] {{Leider wurde dieses Prinzip ohne irgendeine Rechtfertigung auf unendliche Mengen übertragen.}}

[L.E.J. Brouwer: "Lectures on Intuitionism - Historical Introduction and Fundamental Notions" (1951), Cambridge University Press (1981)]
http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ne/brouwer.htm

585 Das Kalenderblatt 100110 Krieg der Frösche und der Mäuse (38)

The mathematical activity made possible by the first act of intuitionism seems at first sight, because mathematical creation by means of logical axioms is rejected, to be confined to 'separable' mathematics, mentioned above; while, because also the principle of the excluded third is rejected, it would seem that even within 'separable' mathematics the field of activity would have to be considerably curtailed. In particular, since the continuum appears to remain outside its scope, one might fear at this stage that in intuitionism there would be no place for analysis. {{Analysis wird seit alters her auf den rationalen Zahlen betrieben. $\Delta x \to 0$ wird am einfachsten mit der Folge $1/n$ oder der Folge $1/2^n$ realisiert. Dazu kommen ein paar irrationale Grenzwerte; für eine reibungslose Analysis sind das (je nach Anspruchsvölligkeit) zwischen 150 und 10^7 Stück - selten mehr. Man sollte einmal eine Statistik der am häufigsten erwähnten irrationalen Zahlen machen. Ich wette, π, e, $\sqrt{2}$, lg 2, ϕ, $\sin \pi/3 = \cos 30°$, vermutlich sogar in dieser Reihenfolge, wären unter den ersten Zehn.}} But this fear would have assumed that infinite sequences generated by the intuitionistic unfolding of the basic intuition would have to be fundamental sequences, i.e. predeterminate infinite sequences proceeding, like classical ones, in such a way that from the beginning the *n*th term is fixed for each *n*. Such however is not the case; on the contrary, a much wider field of development, including analysis and often exceeding the frontiers of classical mathematics, is opened by the second act of intuitionism.

[L.E.J. Brouwer: "Lectures on Intuitionism - Historical Introduction and Fundamental Notions" (1951), Cambridge University Press (1981)]
http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ne/brouwer.htm

586 Das Kalenderblatt 110111 Krieg der Frösche und der Mäuse (39)

SECOND ACT OF INTUITIONISM

Admitting two ways of creating new mathematical entities: firstly in the shape of more or less freely proceeding infinite sequences of mathematical entities previously acquired (so that, for decimal fractions having neither exact values, not any guarantee of ever getting exact values admitted); secondly in the shape of mathematical species, i.e. properties supposable for mathematical entities previously acquired, satisfying the condition that if they hold for a certain mathematical entity, they also hold for all mathematical entities which have been defined to be 'equal' to it, definitions of equality having to satisfy the conditions of symmetry, reflexivity and transitivity. [...]

Theorems holding in intuitionistic, but not in classical, mathematics often originate from the circumstance that for mathematical entities belonging to a certain species the inculcation of a certain property imposes a special character on their way of development from the basic intuition; and that from this compulsory special character properties ensue which for classical mathematics are false. Striking examples are the modern theorems that the continuum does not split, and that a full function of the unit continuum is necessarily uniformly continuous. {{Reelle Funktionen, die nicht auf dem ganzen Kontinuum definiert sind, sind nicht überall stetig. [W. Mückenheim: "Mathematik für die ersten Semester", Oldenbourg, München, 2. Auflage (2010) ISBN: 978-3-486-58913-9, p. 199]
http://www.oldenbourg-wissenschaftsverlag.de/olb/de/1.c.1845646.de
}}

[L.E.J. Brouwer: "Lectures on Intuitionism - Historical Introduction and Fundamental Notions" (1951), Cambridge University Press (1981)]
http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ne/brouwer.htm

587 Das Kalenderblatt 110112 Krieg der Frösche und der Mäuse (40)

As long as mathematics was considered as the science of space and time, it was a beloved field of activity of this classical logic, not only in the days when space and time were believed to exist independently of human experience, but still after they had been taken for innate forms of conscious exterior human experience. There continued to reign some conviction that a mathematical assertion is either false or true, whether we know it or not, and that after the extinction of humanity mathematical truths, just as laws of nature, will survive. About half a century ago this was expressed by the great French mathematician Charles Hermite in the following words: 'Il existe, si je ne me trompe, tout un monde qui est l'ensemble des vérités mathématiques, dans lequel nous n'avons d'accés que par l'intelligence, comme existe le monde des réalités physiques [...]"

Only after mathematics had been recognized as an autonomous interior constructional activity which, although it can be applied to an exterior world, neither in its origin nor in its methods depends on an exterior world, firstly all axioms became illusory, and secondly the criterion of truth or falsehood of a mathematical assertion was confined to mathematical activity itself, without appeal to logic or to hypothetical omniscient beings. An immediate consequence was that for a mathematical assertion *a* the two cases of truth and falsehood, formerly exclusively admitted, were replaced by the following three:

(1) *a* has been proved to be true;
(2) *a* has been proved to be absurd;
(3) *a* has neither been proved to be true nor to be absurd, nor do we know a finite algorithm leading to the statement either that *a* is true or that *a* is absurd.

[The case that *a* has neither been proved to be true nor to be absurd, but that we know a finite algorithm leading to the statement either that *a* is true, or that a is absurd, obviously is reducible to the first and second cases. This applies in particular to assertions of possibility of a construction of bounded finite character in a finite mathematical system, because such a construction can be attempted only in a finite number of particular ways, and each attempt proves successful or abortive in a finite number of steps.]

In contrast to the perpetual character of cases (1) and (2), an assertion of type (3) may at some time pass into another case, not only because further thinking may generate an algorithm accomplishing this passage, but also because in modern or intuitionistic mathematics, as we shall see presently, a mathematical entity is not necessarily predeterminate, and may, in its state of free growth, at some time acquire a property which it did not possess before.

[L.E.J. Brouwer: "Changes in the relation between classical logic and mathematics" (1951), Cambridge University Press (1981)]
http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ne/brouwer.htm

588 Das Kalenderblatt 110113 Krieg der Frösche und der Mäuse (41)

{{Bevor wir in den eigentlichen Krieg eintreten, sei das Verhältnis zwischen Einstein und Hilbert beleuchtet. Einstein hatte 1915 in Göttingen auf Einladung Hilberts Vorträge zur Relativitätstheorie gehalten.}}

Einstein scheint seinen Göttinger Besuch als Erfolg gewertet zu haben, denn er schreibt am 15.7. 1915 an Sommerfeld: ,,In Göttingen hatte ich die grosse Freude, alles bis ins Einzelne verstanden zu sehen. Von Hilbert bin ich ganz begeistert. Ein bedeutender Mann!

Die spätere Diskussion zwischen Einstein und Hilbert läßt sich anhand ihrer Korrespondenz vom November 1915 aufzeigen. Am 7.11. teilte Einstein mit, daß er die Gravitationsgleichungen abgeleitet habe und sein bisher angewandtes Verfahren unzutreffend ist. Am 12.11. schreibt er bezüglich des Postulates. Hilbert beglückwünscht ihn am 14. 11. und bemerkt u.a. "so daß Gravitation und Elektrodynamik eigentlich gar nichts Verschiedenes sind." Aus der Einsteinschen Mitteilung vom 18.11. geht hervor, daß er eine Kopie der Hilbertschen Abhandlung erhalten hat und eine Übereinstimmung der von beiden unabhängig voneinander aufgefundenen Lösungen erkennt. Am 19.11. schließlich beglückwünscht Hilbert Einstein hinsichtlich der Lösung zum Perihelproblem des Merkurs. Damit endet die Korrespondenz.

Später bemerkte Klein in diesem Zusammenhang: "Wie dem nun sei: die Publikation von Einstein und Hilbert (die zudem miteinander korrespondiert, aber, wie es so geht, dabei aneinandervorbereigeredet haben) so genau gleichzeitig, wie überhaupt möglich ..." Einstein erklärt u.a. gegenüber Sommerfeld "Soviel ich von Hilberts Theorie weiss, bedient sie sich eines Ansatzes für das elektrodynamische Geschehen, der sich -- abgesehen von der Behandlung des Gravitationsfeldes -- eng an Mie anschliesst. Ein derartiger spezieller Ansatz lässt sich aus dem Gesichtspunkte der allgemeinen Relativität nicht begründen."

Festzuhalten gilt, daß die zwischen Einstein und Hilbert eingetretene Verstimmung nicht mehr ausgeräumt wurde; ob dies vielleicht hinsichtlich der Priorität beim Variationsprinzip ausgelöst wurde, mag offen bleiben.
[Wilfried Schröder: "Albert Einstein in seinen Beziehungen zu Mitgliedern der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen", Archive for History of Exact Sciences 39,2 (1988) pp. 157-171, vorgelegt von C. Truesdell]
http://www.springerlink.com/content/q17k2n014p340012/

589 Das Kalenderblatt 110114 Krieg der Frösche und der Mäuse (42)

According to the commonly accepted view, David Hilbert completed the general theory of relativity at least 5 days before Albert Einstein submitted his conclusive paper an this theory on 25 November 1915. Hilbert's article, bearing the date of submission 20 November 1915 but published only on 31 March 1916, presents a generally covariant theory of gravitation, including field equations essentially equivalent to those in Einstein's paper. A close analysis of archival

material reveals that Hilbert did not anticipate Einstein; The first set of proofs of Hilbert's paper shows that the theory he originally submitted is not generally covariant and does not include the explicit form of the field equations of general relativity.
[L. Corry, J. Renn, J. Stachel: "Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute", Science 278 (1997) 1270-1273]
http://www.garfield.library.upenn.edu/histcomp/einstein-a_all-w-citing-pre-56_e/node/12342.html

590 Das Kalenderblatt 110115

Krieg der Frösche und der Mäuse (43)

In 1997, Corry, Renn and Stachel published a 3-page article in Science entitled "Belated Decision in the Hilbert-Einstein Priority Dispute", concluding that Hilbert had not anticipated Einstein's equations.

Friedwardt Winterberg, a professor of physics at the University of Nevada, Reno, disputed these conclusions, observing that the galley proofs of Hilbert's articles had been tampered with - part of one page had been cut off. He goes on to argue that the removed part of the article contained the equations that Einstein later published, and he wrote that the cut off part of the proofs suggests a crude attempt by someone to falsify the historical record. "Science" declined to publish this; it was printed in revised form in "Zeitschrift für Naturforschung", with a dateline of June 5, 2003. Winterberg wrote that the correct field equations are still present on the existing pages of the proofs in various equivalent forms. In this paper Winterberg asserted that Einstein sought the help of Hilbert and Klein to help him find the correct field equation, without mentioning the research of Folsing (1997) and Sauer (1999) according to which Hilbert invited Einstein to Göttingen to give a week of lectures on general relativity in June 1915, which however does not necessarily contradict Winterberg. Hilbert at the time was looking for physics problems to solve.
http://en.wikipedia.org/wiki/Relativity_priority_dispute

Ganz unabhängig von der Frage, ob die Korrekturfahnen Hilberts zugunsten Einsteins von einem Fälscher manipuliert worden sind, kann an der Priorität Hilberts nicht gezweifelt werden, denn (wie in meiner Arbeit betont) dort steht die von Hilbert gefundene richtige sog. Lagrangedichte des Gravitationsfeldes, die zusammen mit dem Hilbertschen Variationsprinzip der differenziellen Form der Feldgleichung mathematisch äquivalent ist. Beides ist dem vermuteten Fälscher beim Abschneiden nicht zum Opfer gefallen. Da aber nur mit dieser Lagrangedichte und nur mit dem Hilbertschen Variationsprinzip sich die richtige Feldgleichung ergibt, ist mit Sicherheit anzunehmen, dass Einstein sie von Hilbert übernommen hat, denn er erklärt nicht, wie er auf die richtige Gleichung gekommen ist. Leider war Einstein nicht immer ehrlich im Zitieren anderer Gelehrter.
[Prof. Dr. F. Winterberg, Department of Physics, University of Nevada, Reno (USA), Leserbrief NZZ, 12. 6. 2005]
http://termessos.de/presseeinsteinhilbert.htm#Artikel01

591 Das Kalenderblatt 110116 Krieg der Frösche und der Mäuse (44)

Ein Kriminalfall in der Wissenschaftsgeschichte?
Prioritätsstreite haben immer wieder zu Fälschungen von Quellen geführt. In den letzten Jahren stritten Historiker mehrfach intensiv über die Priorität bei der Entdeckung der endgültigen Gravitationsgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie.
Wer fand sie zuerst? David Hilbert oder Albert Einstein? Im November 1915 hatte Einstein fast nur mit Hilbert korrespondiert. Sie lieferten sich ein Kopf-an-Kopf-Rennen bei der Entdeckung der endgültigen Gleichungen. Da entscheidende Briefe Hilberts an Einstein fehlen, war die Frage nicht eindeutig zu beantworten. Doch lange Zeit schien es, dass Hilbert die Gleichungen zuerst fand.
Seit 1997 kehrte sich das Blatt um. Nun war Hilbert der Dieb. Die Entdeckung einer bis dahin unbekannten Quelle spielte dabei eine entscheidende Rolle. Jüngst kehrte sich das Blatt wieder um. Genauere Untersuchung dieser Quelle ließ Merkwürdiges erkennen: Eine vielleicht entscheidende Passage war ausgeschnitten.

Zusammenfassung der Autorin:
Die einzige überlieferte Quelle von Hilberts erster Mitteilung "Die Grundlagen der Physik" vom 20. November 1915 ist eine Fahnenkorrektur, die die Druckerei Hilbert am 6. Dezember schickte. Diese Quelle ist erst vor wenigen Jahren entdeckt worden. Auf diesem Quellenfund basiert im wesentlichen die aufsehenerregende Arbeit von Corry, Renn und Stachel von 1997 in der Zeitschrift Science. Bis dahin war vielfach Hilbert als derjenige angesehen worden, der die endgültigen Gravitationsgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie als erster gefunden hatte, da Einstein seine betreffende Arbeit erst fünf Tage später, am 25. November, eingereicht hatte. Diese Fahnenkorrekturen der Hilbertschen Arbeit vom 20. November enthalten diese Gleichungen zwar in impliziter, aber gerade nicht in expliziter Form. So konnten Corry, Renn und Stachel die bisherige Sicht umkehren und behaupten, dass Einstein die endgültigen Gleichungen in expliziter Form als erster gefunden hatte und Hilbert sie von ihm übernommen haben muss, nachdem er die Arbeit von Einstein, die schon am 2. Dezember publiziert worden war, erhalten hatte.
[Daniela Wuensch: "zwei wirkliche Kerle, Neues zur Entdeckung der Gravitationsgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie durch David Hilbert und Albert Einstein" Termessos (2007), Verbesserte 2. Auflage]
http://termessos.de/EinsteinHilbert.htm

Die Stelle, in der die Gleichung explizit formuliert war, ist aus den Druckfahnen herausgeschnitten worden – und das, nachdem die Quelle in den 60er Jahren in die Handschriftenabteilung gelangt war. Den Täter vermutet sie {{Daniela Wuensch}} in einem Kollegen, der den Prioritätsstreit zugunsten Einsteins entscheiden wollte: "Wissenschaftshistoriker verfallen nicht selten in eine Art Anbetung für die untersuchte Person."
"Es ist eine mutige Behauptung", gibt Wuensch, die am Institut für Wissenschaftsgeschichte der Universität Göttingen lehrt, zu. Bereits Anfang 2004 hatte der amerikanische Physik-Professor Friedwardt Winterberg in einem Aufsatz ähnliches behauptet. Sie habe zunächst selbst an diesem Vorwurf gezweifelt, "aber ich habe daraufhin die Quelle etwa ein Jahr lang untersucht und keine andere Erklärung gefunden."
Für unwahrscheinlich hält jedoch Dr. Helmut Rohlfing, Leiter der Handschriftenabteilung, Wuenschs These. "So einfach ist es gottlob nicht, Dinge aus dem Lesesaal zu entfernen", stellt er klar. Schließlich sei ständig eine Aufsicht vor Ort. Die Möglichkeit, dass der Ausschnitt zu Hilberts Zeiten, möglicherweise von diesem selbst, gemacht wurde, hält Rohlfing für wahrscheinlicher. "Diese Vermutung hat Wuensch nicht hinreichend entkräftet." Die Historikerin

aber ist sich sicher: Erst in neuerer Zeit wurde die Quelle manipuliert. Für ihre Behauptung führt sie eine ganze Reihe von Argumenten auf. Manches davon bleibt allerdings Vermutung – wenn auch begründete.
[Kathrin Schneider: "Wurde Hilberts Idee abgeschnitten?", Göttinger Tageblatt, 15. April 2005]

Anmerkung des Verlages: Herr Dr. Rohlfing irrt, Daniela Wuensch hat schlüssig nachgewiesen, dass Hilbert selber oder ein anderer zu seiner Zeit den Ausschnitt nicht gemacht haben kann.
http://termessos.de/presseeinsteinhilbert.htm#Artikel01

Nun hat E[instein] von vornherein gefühlt, daß die $g_{\mu\nu}$ beschränkenden Feldgleichungen unterworfen werden müssen. Aber weil ihm die Mathematik noch fern lag, hat er diese zunächst nicht in kovarianter Form aufzustellen vermocht. Das war sein Standpunkt 1915, als er in Göttingen Vorträge hielt. Und nun kommt der Parallelismus seiner Bestrebungen mit denen von Hilbert [...]. Die entscheidende Gedankenwende erfolgte bei Hilbert im Herbst 1915 in Rügen; [...] Auch bei Hilbert ist (in seiner 1. Note) viel subjektive Konstruktion: der fanatische Glauben an die Variationsprizipien, die Meinung, daß man durch bloßes math[ematisches] Nachdenken das Wesen der Natur erklären könne. Dazu die mathematisch ganz ungeordnete Darstellung ...
... Statt aber so seinen eigentlichen Gedanken klarzulegen, wählt er eine axiomatische Darstellung, die Niemand versteht, der nicht das ganze Ding schon gemeistert hat.
[Felix Klein an Wolfgang Pauli, 8. 5. 1921, zitiert in A. Hermann et al.: "Wolfgang Pauli, Wissenschaftlicher Briefwechsel ...", Band 1, Springer, Berlin (1979) p. 30]

Als der Physiker Leopold Infeld Ende der dreissiger Jahre in Princeton Albert Einstein den Vorschlag machte, gemeinsam das populärwissenschaftliche Buch "Die Evolution der Physik" zu schreiben, willigte Einstein sofort ein. "Kein Wissenschaftler denkt in Formeln", sagte er, in der Physik gebe es erstaunlich wenige grundlegende Ideen, und die könnten alle mit Worten wiedergegeben werden.
[André Behr: "Der Streit um die Formel", Neue Zürcher Zeitung vom 12. Juni 2005]

592 Das Kalenderblatt 110117 Krieg der Frösche und der Mäuse (45)

Schon 1925 verhinderten die Mitherausgeber der Zeitschrift "Mathematische Annalen" Ludwig Bieberbach und der Holländer L.E.J. Brouwer die vom geschäftsführenden Herausgeber Otto Blumenthal beabsichtigte Aufnahme von einigen französischen Beiträgen in einen Riemann-Gedenkband. Als 1928 erstmals nach dem Krieg wieder deutsche Mathematiker zum Internationalen Mathematikerkongress in Bologna eingeladen wurden, 1920 in Straßburg und 1924 in Toronto war das nicht der Fall gewesen, kam es zu einer neuen Auseinandersetzung zwischen der nationalen Fraktion um Bieberbach und Brouwer und der liberalen, nicht streng deutschnationalen Seite um David Hilbert und seine Göttinger Kollegen.
Bieberbach war der Meinung, man sollte dem Kongress fernbleiben, zum Einen, weil er vermutete, dass das "Conseil International de Recherche", welches der deutschen Wissenschaft nicht gerade positiv gegenüberstand, an der Organisation des Kongresses beteiligt war. Außerdem stand ein Ausflug ins "befreite Südtirol" auf der Tagesordnung, für einen national denkenden Menschen wie Bieberbach eine Beleidigung höchsten Ausmaßes. Hilbert sah dies anders. Ihm schwebte von jeher eine Zusammenarbeit zwischen Mathematikern, auch international vor. So führte er mit seinen Göttinger Kollegen Landau und Courant die deutsche Delegation beim Mathematikerkongress an, während aus Berlin um Bieberbach keine Mathematiker teilnahmen.
So entstand in Deutschland ein Konflikt zwischen den mathematischen Instituten Berlins und Göttingens, der neben den politischen Gründen auch noch durch unterschiedliche

Lehrmeinungen, nämlich den in Berlin hoch angesehenen Intuitionismus und den in Göttingen praktizierten Formalismus, verschärft wurde.

[H. Heibel, T. Pfennig, S. Rosenegger: "Deutsche Mathematik", TU München, Hauptseminar Mathematiker während der NS-Zeit, Sommersemester 2003]
http://www5.in.tum.de/lehre/seminare/math_nszeit/SS03/vortraege/de-math/

593 Das Kalenderblatt 110118 Krieg der Frösche und der Mäuse (46)

Die Geschichte begann 1925 anläßlich eines geplanten Riemann-Gedenkbandes der Mathematischen Annalen, zu dem der geschäftsführende Herausgeber, Otto Blumenthal, auch französische Beiträge ohne politische Selektion der Autoren plante. Insbesondere der durch Einsteins Vermittlung ins Gespräch gekommene Painlevé wurde von den Mitherausgebern Bieberbach und dem germanophilen Holländer L.E.J. Brouwer wegen chauvinistischer Äußerungen im ersten Weltkrieg scharf abgelehnt. Dieser erste Konflikt wurde durch politische Selektion der französischen Autoren im Kompromiß beigelegt.
Der nächste Akt, die Auseinandersetzung um die Teilnahme deutscher Mathematiker am internationalen Mathematikerkongreß in Bologna im September 1928, wurde in der mathematischen Öffentlichkeit geführt und definierte die Fronten für das Weitere. Wieder standen Bieberbach und Brouwer auf der nationalen Seite, die in dieser Kontroverse die Teilnahme von Deutschen ablehnte, weil eine Beteiligung des durch seine Boykottpolitik gegen die deutsche Wissenschaft bekannten Conseil International de Recherche an der Organisation des Kongresses vermutet wurde, und weil das Rahmenprogramm des Kongresses insbesondere einen Ausflug in das "befreite Südtirol" vorsah, der als anti-deutscher Affront gewertet wurde.
Die Gegenseite wurde - wie dann auch die tatsächliche deutsche Delegation in Bologna - von David Hilbert angeführt, der die Bedenken Bieberbachs und Brouwers für grundlos hielt {{das ist sehr neutral ausgedrückt. Hilbert hat diese Haltung sogar scharf kritisierte (s. KB101206)}}, und ohnehin eine liberale, nicht deutsch-nationale Haltung hatte. [...] Berlin entsandte keine Delegation {{und Weyl nahm Teil.}}

[N. Schappacher, M. Kneser: "Fachverband - Institut - Staat" in: G. Fischer et al. (Hrsg.): "Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990", Vieweg+Teubner (1990) p. 55]
http://www.vieweg.de/Buch/978-3-528-06326-9/Ein-Jahrhundert-Mathematik-1890-1990.html

594 Das Kalenderblatt 110119 Krieg der Frösche und der Mäuse (47)

1927 hämmerten Brouwer und Hilbert wieder los. Brouwer verbuchte großen Beifall in Berlin, wo er ein paar Monate Vorlesungen hielt. Die Zukunft des Intuitionismus schien durchaus aussichtsvoll, die deutschen Mathematiker nahmen die intuitionistische Kritik ziemlich ernst.
In demselben Jahre steigerten sich Hilberts persönliche Angriffe zu einer neuen Höhe; in seinem Hamburger Vortrag "Die Grundlagen der Mathematik" {{KB101218f.}}
„Ich staune unter diesen Umständen darüber, daß ein Mathematiker an der strengen Gültigkeit der Schlußweise des Tertium non Datur zweifelt. Ich staune noch mehr darüber, daß, wie es scheint, eine ganze Gemeinde von Mathematikern sich heute zusammengefunden hat, die das gleiche tut. Ich staune am meisten über die Tatsache, daß überhaupt auch im Kreise der Mathematiker die Suggestivkraft eines einzelnen temperamentvollen und geistreichen Mannes die unwahrscheinlichsten und exzentrischsten Wirkungen auszuüben vermag". {{Merkwürdig, dass Hilbert nicht über Cantor staunte. War der noch nicht exzentrisch genug? Cantor gab

gegenüber Hilbert offen zu, dass die Menge aller Mengen nicht existieren kann. Da müsste sich einem scharfen Analytiker doch sofort die Frage aufdrängen, bis zu welchem Punkt die Existenz von Mengenmengen noch nicht selbstwidersprüchlich ist. Und dann müsste dieser scharfe Analytiker die Potenzmenge dieser noch nicht selbstwidersprüchlichen Mengenmenge so oft bilden, bis er bemerkt, dass da etwas faul ist - notfalls auch unendlich oft (falls er nur langsam merkt)}}

[D. van Dalen: "Der Grundlagenstreit zwischen Brouwer und Hilbert", in E. Eichhorn, E.J. Thiele (Hrsg.): "Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff", Heldermann, Berlin (1994) 207-212.]

595 Das Kalenderblatt 110120 Krieg der Frösche und der Mäuse (48)

Brouwer erwiderte in seinen "Intuitionistischen Betrachtungen über den Formalismus" (Brouwer 1928), daß der Formalismus "vom Intuitionismus nur Wohltaten empfangen und weitere Wohltaten zu erwarten" hätte. Und er konnte hinzufügen "daß im Rahmen des Formalismus von der eigentlichen Mathematik bisher noch immer nichts gesichert ist, wogegen der Intuitionismus auf der Grundlage seiner konstruktiven Mengendefinition und seiner Haupteigenschaft der finiten Mengen schon einige Lehrgebäude der eigentlichen Mathematik errichtet hat".

Das nächste Jahr brachte das Ende des Grundlagenstreites. Im März 1928 bezauberte Brouwer noch einmal in Wien seine Zuhörer, als er seine Gastvorträge "Die Struktur des Kontinuums" und "Mathematik, Wissenschaft und Sprache" hielt, Wittgensteins Rückkehr zur Philosophie wurde da entschieden.

Aber die Konfrontation mit Hilbert wurde immer greller. Als die Mathematiker in Bologna ihren internationalen Kongreß veranstalteten, riet Brouwer den Deutschen, nicht teilzunehmen, bevor sie völlig anerkannt wurden; Hilbert dagegen befürwortete die Teilnahme als ein Zeichen der Normalisierung der internationalen Beziehungen.

[D. van Dalen: "Der Grundlagenstreit zwischen Brouwer und Hilbert", in E. Eichhorn, E.J. Thiele (Hrsg.): "Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff", Heldermann, Berlin (1994) 207-212.]

596 Das Kalenderblatt 110121 Krieg der Frösche und der Mäuse (49)

His keen sense for justice made him a party in many conflicts, scientific and political. E.g. he worked to undo the boycott of German scientists.
[Buchankündigung: "Mystic, Geometer, and Intuitionist: The Life of L.E.J. Brouwer, Volume 1: The Dawning Revolution" by Dirk van Dalen, Oxford University Press, 1999]
http://www2.informatik.hu-berlin.de/lics/newsletters/58.html

{{In einem Beilagezettel zum Jahresbericht der DMV}} Brouwer reminded the readers of the motivation and formulations of the advocates of the boycott of German scientists. He quoted statements [...] These statements belonged to the emotional atmosphere of the war and its aftermath, and as such they were understandable, but they were not well-suited to promote peace and cooperation in the scientific world. Indeed, they were nothing less than a wholesale insult and condemnation of all German scholars.[...] Brouwer, in his leaflet, left it at a - none too subtle - suggestion: "...the readers of the Jahresbericht may contemplate, in how participation in the planned congress is possible, without mocking the memory of Gauß and Riemann, the humanitarian character of the science of mathmatics, and the independence of the human spirit.
[Dirk van Dalen: "Mystic, Geometer, and Intuitionist: The Life of L.E.J. Brouwer, Vol. 2", Clarendon Press, Oxford (2005) p. 588]

597 Das Kalenderblatt 110122 Krieg der Frösche und der Mäuse (50)

Brouwer's attitude was in the same thoroughly German nationalist tone. He presumes to act as a sort of German agent in dealing with the Italians and the international organization. Karl Menger, who had just been Brouwer's Assisiant in 1925-27, spoke of "Brouwer's precarious relations with the French officials of the Union Mathématique Internationale"; how "Brouwer's hatred in those years was concentrated on the French" was what kept his "endless and very unpleasant correspondence" going with the international organization. In 1928, of course, this crisis reached its culmination with the Bologna congress. Brouwer also circulated a letter urging a German counterboycott of the Bologna congress, about two weeks prior to its opening.

Thus, not only was the Bieberbach of 1914, who was then a modified formalist, by 1926 enthusiastically and aggressively in the opposing mathematical-philosophical camp led by L.E.J. Brouwer, and viewing intuitionism as the coming future of mathematics, but in 1928 he was making common mathematical-political cause with Brouwer in advocacy of an extreme German nationalist position. Furthermore, he was supported in this by two of the other three Berlin Ordinaren: Erhard Schmidt and Richard von Mises. {{76 Deutsche schlossen sich der Berliner National-Intuition nicht an, sondern fuhren nach Bologna, wo sich nur 56 Franzosen einfanden.}}

[S.L. Segal: "Mathematicians under the Nazis", Princeton Univ. Press (2003) p. 352]
http://press.princeton.edu/titles/7558.html

598 Das Kalenderblatt 110123 Krieg der Frösche und der Mäuse (51)

Nè maggior turbamento recò la divulgazione di una lettera circolare, pubblicata pochi giorni prima dell'apertura del Congresso da un distinto scienziato, ma pervicace oppositore (di nazionalità non tedesca {{wohl ein Holländer?}}) per alienare dal Congresso i fautori di parte tedesca; lettera che richiamava le frasi con le quali, in un tempo ormai trapassato, era stato bandito l'ostracismo dai Congressi Internazionali della scienza tedesca:

"Angesichts dieser Worte (concludeva quello scritto) möge jeder Mathematiker für sich erwägen, inwiefern Teilnahme am geplanten Kongress ohne Verhöhnung des Andenkens von Gauss und Riemann, des kulturellen Charakters der mathematischen Wissenschaft und der Unabhängigkeit des menschlichen Geistes möglich ist [...] so wird Ihnen doch das Gefühl des Ruhmes bleiben, in der Gesundung der Verhältnisse den ersten und einen sehr großen Schritt voran getan zu haben. Dank Ihrem entsagungsvollen Werk wird dann der nächste Kongress keinerlei Bedenken mehr begegnen. Sollte auch so der volle Erfolg Ihres Mühens erst in vier Jahren reifen, so bleibt Ihnen der Ruhm des tapferen Wegebereiters, der drei Jahre lang trotz aller Schwierigkeiten es verstanden hat, den einmal vorgenommenen Weg klug und energisch, tapfer und unbeugsam einzuhalten."
[...]

E alla chiusura del Congresso, un congressista, esimio matematico e Rettore d'una importante Università tedesca, scriveva al Presidente: "... dass es Ihrem taktvollen Verhalten gelungen ist, alle Politik völlig aus dem Spiel zu lassen und die Mathematiker aller Länder zu rein wissenschaftlichen Bestrebungen zu vereinigen, wird Ihnen von allen Seiten wärmsten Dank eintragen". {{Einige Druckfehler im deutschen Text habe ich korrigiert, weil sie vermutlich in den Originalen auch nicht vorhanden waren.}}
[Nicola Zanichelli (ed.): "Atti del Congress Internazionale dei Matematici, Bologna (1928) Tomo 1, p. 9f]
http://books.google.de/books?id=lw_rcAAACAAJ&dq=atti+del+congresso+internazionale+dei+matematici&hl=de&ei=E4w6Tb3YL47wsgaB4LXzBg&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=3&sqi=2&ved=0CDUQ6AEwAg

{{Brouwers Initiative ist darauf zurückzuführen, dass die deutschen Wissenschaftler vom internationalen Wissenschaftsbetrieb ausgeschlossen waren und nach dem Willen zahlreicher, vor allem französischer Mathematiker auch ausgeschlossen bleiben sollten. Dazu hatte sich ein Conseil International des Recherches gebildet, dem jede Nation (außer den Mittelmächten) beitreten konnte, sofern sie den Boykott Deutschlands unterstützte. Die Geschichte ist allerdings etwas undurchsichtig. Brouwer hatte den Kongressleiter in Italien besucht und die Zusage erhalten, dass der Kongress nicht vom Conseil ausgerichtet würde. Dessen Vorsitzender, Emil Picard, ein Mann mit stark antideutschen Ressentiments, weil er einen Sohn im Krieg verloren hatte, sagte daraufhin seine Konferenzteilnahme ab. Andererseits ergingen Einladungen im Namen des Conseil und auch die Zählung als 8. Internationaler Kongress der Mathematiker behagte den Deutschen nicht, weil somit die beiden vorhergehenden, an denen sie nicht hatten teilnehmen dürfen, offiziell zählten. Kurzum, die Lage war verworren.

Hilbert jedenfalls konterte das Zirkular mit einem Aufruf}} an die Herren Rektoren der deutschen Hochschulen und die Leiter der mathematischen Seminare.
Betrifft den Internationalen Mathematiker-Kongress in Bologna.
{{Hilbert wies darauf hin, dass der Conseil in Bologna keine Rolle spielen würde und man nicht die freundlich gesinnten italienischen Kollegen vor den Kopf stoßen sollte. Auf das Zirkular eingehend wählte er denunziativ schroffe Worte:}} Dieses Schreiben nimmt in schroffster Weise Stellung gegen den diesen Herbst in Bologna stattfindenden Internationalen Mathematiker-Kongress, denunziert den Kongress als eine Veranstaltung des conseil internationale de recherches und rät an zu einer Ablehnung der an Universitäten usw. ergangenen Einladung.
[Dirk van Dalen: "Mystic, Geometer, and Intuitionist: The Life of L.E.J. Brouwer, Vol. 2", Clarendon Press, Oxford (2005) p. 591]

599 Das Kalenderblatt 110124 Krieg der Frösche und der Mäuse (52)

{{Um sich der Zustimmung seiner Kollegen zum Rauswurf Brouwers zu versichern, schrieb Hilbert am 15. 10. 1928 gleichlautende Briefe an die Mitherausgeber der Mathematischen Annalen Blumenthal, Caratheodory und Einstein:}}

Lieber Herr Kollege!
Hiermit wende ich mich an Sie, als einen der Herausgeber der Mathematischen Annalen mit der Bitte, mir zu gestatten, dass ich an Prof. Brouwer einen Brief etwa folgenden Inhalts richte: {{Da in dem Brief an Einstein des Wort "Herausgeber" handschriftlich für das gestrichene Wort "Mitarbeiter" eingesetzt wurde, ist es wahrscheinlich, dass Hilbert an alle Mitarbeiter der Annalen (s. KB101207) geschrieben hat oder schreiben wollte - außer an Brouwer natürlich.}}

Sehr geehrter Herr Kollege!
Namens der Herausgeber der Mathematischen Annalen teile ich Ihnen hierdurch mit, dass wir fernerhin bei der Herausgabe der Mathematischen Annalen auf Ihre Mitwirkung bei den Redaktionsgeschäften der Annalen verzichten und demnach Ihren Namen auf dem Titelblatt weglassen werden.
Zugleich spreche ich Ihnen im Namen der Herausgeber der Annalen unseren Dank für Ihre bisherigen Dienste im Interesse der Mathematischen Annalen aus.
Hochachtungsvoll
D. Hilbert

Professor Einstein wanted this correspondence kept in separate file under the title DER FROSCH-MAEUSEKRIEG. H.D. {{Helen Dukas, Einsteins Sekretärin seit 1928 und Nachlassverwalterin bis 1981.}}

[Ich danke dem Albert-Einstein-Archiv der Hebräischen Universität Jerusalem, namentlich Barbara Wolff für die Fotokopie des Briefes Archiv-Nummer 13-139 sowie zusätzliche Informationen. Ich danke Dirk van Dalen für eine Abschrift des Briefes.]

600 Das Kalenderblatt 110125 Krieg der Frösche und der Mäuse (53)

{{Um den Leser für seine Pläne zu gewinnen, fügte Hilbert seinem offiziellen Schreiben an die Mitherausgeber der Mathematischen Annalen (s. KB110124) noch die folgenden Zeilen hinzu:}}

Nur um Missverständnissen und Weiterungen, die bei der gegenwärtigen Sachlage ganz überflüssig sind, vorzubeugen, möchte ich bemerken, dass mein Entschluss, fernerhin unter keinen Umständen mit Brouwer zugleich die Redaktionsmitgliedschaft innezuhaben, fest und unabänderlich ist. {{Nach dieser Versicherung begründet Hilbert seine Bitte mit Brouwers feindlicher Stellung gegen die Deutschland wohlgesonnenen ausländischen Mathematiker, wodurch er für die Redaktion der Annalen ungeeignet wird, in erster Linie jedoch mit Brouwers Zirkular (s. KB110123), durch das Hilbert sich und die überwiegende Mehrzahl der deutschen Mathematiker "beleidigt" sieht. Schließlich weist Hilbert auf die schon länger andauernde Schädlichkeit Brouwers hin - ein Putsch- und Problembrouwer ist nun zum Schadbrouwer geworden:}}

3. möchte ich im Sinne der Gründer der Mathematischen Annalen - auch Klein würde mir beistimmen {{der vorherige Chefredakteur der Mathematischen Annalen wird nichts Gegenteiliges erinnern, denn er ist seit drei Jahren tot}}, der die durchaus schädliche Tätigkeit Brouwers früher als wir alle durchschaute - Göttingen als Hauptbasis der Mathematischen Annalen beibehalten. {{Hilbert taxiert die Dauer von Brouwers Schadarbeit demnach auf mindestens drei Jahre. Dazu ist zu sagen, dass Klein einen Aufsatz für die Annalen annehmen wollte, den Brouwer nach gründlicher Prüfung zurückweisen musste. Klein war in einer etwas prekären Lage, denn er hatte dem Autor schon seine Zustimmung signalisiert, doch Brouwer war im Recht und der Aufsatz erschien nicht. Weiteres hat sich Brouwer Klein gegenüber nicht "zuschulden" kommen lassen.

{{Schließlich informiert Hilbert Einstein, dass er gleichlautende Schreiben an die anderen beiden Herren Mitherausgeber gerichtet hat, also an Blumenthal and Carathéodory, und verbleibt mit herzlichem Gruss.

Doch die verdeckte Anklageschrift, die, da dem Angeklagten unbekannt, keine Verteidigung zulässt, scheint dem Kläger noch nicht ausreichend, um den für das Gelingen des Planes wichtigen Einstein zu überzeugen. Denn nun folgt in einem nur an Einstein gerichteten Zusatz das Thema Gesundheit, das Hilbert geschickt mit einer formellen Erkundigung nach Einsteins Gesundheitszustand einleitet, um dann mit dem Hinweis auf eigene Gebrechen fortzufahren. Der Aufbau zeugt von Überlegung und Raffinesse.}}

[Ich danke dem Albert-Einstein-Archiv der Hebräischen Universität Jerusalem, namentlich Barbara Wolff für die Fotokopie des Briefes Archiv-Nummer 13-139 sowie zusätzliche Informationen. Ich danke Dirk van Dalen für eine Abschrift des Briefes.]