

Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.

DAVID HILBERT

Einleitung

Bevor wir beginnen, über "das Unendliche" und seine Geschichte nachzudenken, ist es notwendig, uns wenigstens ungefähr darüber zu verständigen, was wir mit den Bezeichnungen "unendlich" und "Unendlichkeit" meinen. Es gibt dazu nämlich sehr unterschiedliche Auffassungen.

Jeder weiß, daß die meisten Dinge einen Anfang und ein Ende besitzen, manche aber nicht. Eine dreidimensionale Kugel zum Beispiel besitzt zwar senkrecht zu ihrer Oberfläche, in radialer Richtung also, durchaus ein Grenze; bewegt man sich aber auf der zweidimensionalen Kugeloberfläche, in tangentialer Richtung also, so kann der Weg immer weiter fortgesetzt werden, ohne jemals durch eine Schranke beschränkt, durch eine Grenze begrenzt oder durch ein Ende beendet zu werden. Dasselbe gilt für den eindimensionalen Kreis in einer zweidimensionalen Fläche oder für einen dreidimensionalen gekrümmten Raum, den man als Oberfläche einer Kugel in einem vierdimensionalen Raum interpretieren kann. Ein Beispiel dafür bietet unser Universum: Innerhalb der uns bekannten Dimensionen könnten wir uns unbegrenzt geradeaus bewegen, ohne jemals an ein Ende zu stoßen.

Diese Art der Endlosigkeit soll uns im folgenden nur wenig beschäftigen, denn der Abstand der Kugeloberfläche vom Kugelmittelpunkt bleibt immer beschränkt und damit endlich, und das gilt analog für die anderen genannten Beispiele. Der interessantere Fall des Unendlichen ist aber in den genannten Beispielen auch schon enthalten: Der Weg auf der Kugel, gemessen als Zahl der zurückgelegten Kilometer, nimmt ständig zu; die Anzeige entfernt sich immer weiter vom Ausgangswert, vorausgesetzt, daß wir "unendlich" lange Zeit haben und die Anzeige "unendlich" große Zahlen wiedergeben kann. Diese über alle Grenzen wachsenden Größen bieten ein Beispiel für das *potentiell* Unendliche. Wir können darunter die Beschreibung einer Richtung verstehen. Etwa so, wie man auf der Erdoberfläche immer nach Westen fahren kann, ohne jemals von dieser Richtung abweichen zu müssen und ohne jemals an ein Ziel zu gelangen.

Daneben existiert der Begriff des *aktual* Unendlichen. Es soll eine wirkliche Größe, eine Quantität, eine Zahl beschreiben, auch wenn für diese Zahl andere Rechengesetze gelten als für gewöhnliche Zahlen. Dieser aktuell realisierten Unendlichkeit wollen wir im Mikrokosmos und im Makrokosmos, in der Zeit und in Gott nachspüren; ihre eigentliche Domäne ist aber die Mathematik, die Lehre von den unendlichen Mengen; dort werden wir sogar verschieden große Unendlichkeiten untersuchen und dabei viele interessante Gedanken und Ergebnisse kennenlernen.

Die Mathematik ist die Wissenschaft des Unendlichen, ihr Ziel ist das symbolische Erfassen des Unendlichen mit menschlichen, d.h. endlichen Mitteln.

HERMANN WEYL

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk.

LEOPOLD KRONECKER

I. Natürlich unendlich

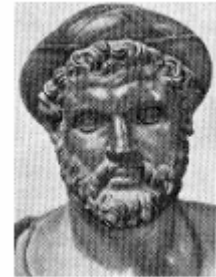
Stellt man die Frage nach dem Unendlichen, so wird als naheliegende Antwort das Universum, die Ewigkeit oder Gott genannt, seltener wohl die Mathematik. Und doch findet das Unendliche in keiner anderen Wissenschaft eine so umfassende und eingehende Würdigung. Kein Wissenschaftler - abgesehen vielleicht vom Theologen - verbündet sich damit so intim wie der Mathematiker, der es zuweilen als Fundament eines ganzen Denkgebäudes wählt. Wir werden das in diesem Buch immer wieder bestätigt finden. Der erste Berührungspunkt zwischen der Mathematik und dem Unendlichen ist aber jedem Leser bereits bekannt, es ist die unendliche Folge der natürlichen Zahlen.

Das Zählen ist die älteste Art der Beschäftigung des Menschen mit Zahlen. Seit bei Mengenangaben der quantitative und vom Individuellen abstrahierende Aspekt Bedeutung gewann, wurden Zahlen benötigt. Das begann vermutlich vor etwa 5000 Jahren. Es ist bekannt, daß die Zahlwörter für die Zahlen von 1 bis 100 auch in unserem Kulturkreis schon vor der Trennung der indogermanischen Sprachen um etwa 2000 v. Chr. ausgeprägt waren. Folgendes Beispiel zeigt die enge Verwandtschaft der ähnlich lautenden Bezeichnungen für die Zahl 2 in einigen indogermanischen Sprachen: da, deux, два, δύο, due, duo, dvi (dve), to, tva, twa, two, zwei (zwo).

Die zum Zählen von unzerteilten, ganzen Objekten verwendeten ganzen Zahlen heißen heute natürliche Zahlen. Sie waren die Grundlage des Rechnens in den alten Kulturen Ägyptens, Vorderasiens und Chinas, und sie bildeten den Ausgangspunkt, als die Mathematik im Griechenland des sechsten vorchristlichen Jahrhunderts ins Dasein trat.

Obwohl THALES VON MILET (624 - 545) schon die Sonnenfinsternis vom 28. Mai 585 v. Chr. zutreffend voraussagen konnte, die Strahlensätze und natürlich den Thales-Satz kannte und als einer der sieben Weisen Griechenlands geehrt wurde, beginnt die Mathematik doch erst mit dem von der Nachbarinsel Samos stammenden PYTHAGORAS (570 - 500). "PYTHAGORAS war der erste Mathematiker" schrieb EUDEMOS, ein Schüler des ARISTOTELES im ersten Mathematikerverzeichnis. Der sagenumwobene, vom Sonnengott Apollon gezeugte und von einer Jungfrau geborene PYTHAGORAS gründete eine Schule und lehrte im damals zu Großgriechenland gehörenden, heute unteritalienischen Kroton. Er hatte die Anregung zu seinem berühmten Satz vermutlich auf einer seiner vielen Reisen bei den Seilspannern, den Harpedonapten, in Ägypten kennengelernt. Sie konnten mit Hilfe von Seilstücken im Längenverhältnis 3 : 4 : 5 einen rechten Winkel konstruieren und so das Land nach der jährlichen Nilschwemme neu vermessen. Aber die gelehrten Pythagoreer, die

Mathematiki, und ihre Schüler, die Akusmatiki, erkannten erstmals die Notwendigkeit des Beweises. PYTHAGORAS persönlich hat keine Aufzeichnungen hinterlassen, doch neben dem berühmten Satz hat auch sein philosophisches Prinzip die Jahrhunderte überdauert. Es lautet: "Alles ist Zahl." Unter einer Zahl verstanden die alten Griechen dabei nur die natürlichen Zahlen, und zwar ohne die Eins, die lediglich als Ursprung der daraus abzuleitenden Zahlen galt. Natürliche Zahlen also und daraus abgeleitete Proportionen bestimmen demnach das Grundgefüge der Welt und aller darin existierenden Dinge. Die Gegensatzpaare {Böses, Gerades, Linkes} - {Gutes, Ungerades, Rechtes} waren für die Pythagoreer ebenso real wie der Aufbau von Knochen aus 3 Teilen des Elementes Feuer und 2 Teilen des Elementes Erde; der Gerechtigkeit wurde die Zahl $2 \cdot 2 = 4$ zugeordnet, der günstigen Gelegenheit die Zahl 7. Besondere Bedeutung besaßen die vollkommenen Zahlen, wie z. B. 6, deren Teilersumme (ohne die Zahl selbst) die Zahl ergibt

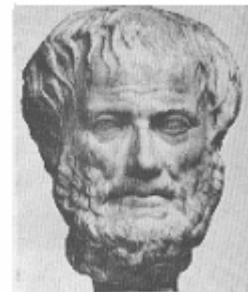


PYTHAGORAS

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

PLATON (427 - 348), ein Schüler des Pythagoreers TIMAIOS VON LOKRI, interpretiert den Satz so, daß die Zahl als Symbol gewisser Ordnungsmächte, als Ordnungszahl, Reihenfolge, Rang, als Raumbestimmung und schließlich in der mathematischen Formel Bedeutung besitzt. Sein Schüler ARISTOTELES (384 - 322), der Lehrer Alexanders, des Großen, erläutert: Alle Dinge verdanken ihre Existenz den Zahlen. Die Elemente der Zahlen und der Dinge sind gleich. Dinge sind nach Zahlen aus den Elementen zusammengesetzt.

Von ARISTOTELES, dem Universalgelehrten, hören wir erstmals etwas über verschiedene Auffassungen vom Unendlichen, denn er bezieht Position im XI. Buch seiner Metaphysik, Kapitel 10: *Das Unendliche existiert potentiell; es gibt kein vollendetes Unendliches.* Es gibt nur endliche Zahlen. Das Endliche würde vom Unendlichen, wenn dieses existierte, aufgehoben und zerstört werden. Im Mittelalter wird diese Auffassung von allen Scholastikern als unumstößlicher Lehrsatz vertreten: *Infinitum actu non datur.*



ARISTOTELES

EUKLID (325 - 275) wirkte am Museion von Alexandria, der antiken Universität. Mit der Bibliothek von 600000 handschriftlich verfaßten Büchern und einem der sieben Weltwunder, dem 130 m hohen Leuchtturm, war die von Alexander gegründete Stadt Mittelpunkt der Gelehrsamkeit des Altertums. EUKLIDS Hauptwerk, "die Elemente" (στοιχεια) bildet die vollendete Zusammenfassung des mathematischen Wissens seiner Zeit. Es enthält erstmals die euklidische Form mit Definition, Satz, und Beweis und der berühmten Schlußformel "was zu beweisen war", in der lateinischen Übersetzung "quod erat demonstrandum" heute zur Allgemeinbildung zählend. Das Werk hat etwa 1500 gedruckte Auflagen erlebt und ungezählte handschriftlichen Kopien vor Erfindung des Buchdruckes. Frühere Lehrbücher hatte es zwar gegeben, sie konnten sich aber nicht gegen die "Elemente" behaupten und sind allesamt verschollen.



EUKLID

Im neunten der insgesamt 13 Bücher seiner Elemente behandelt EUKLID die vollkommenen Zahlen und die ebenfalls sehr angesehenen Primzahlen. Das sind Zahlen wie 3 oder 5, die außer 1 und sich selbst keinen weiteren Teiler besitzen. Je größer eine Zahl ist, um so größer ist auch die Wahrscheinlichkeit, daß sie einen Teiler besitzt. Man könnte also vermuten, daß ab einer gewissen Größe keine Primzahl mehr existiert. In den höheren Regionen sind sie auch tatsächlich immer seltener. EUKLID beweist aber, daß die Menge der Primzahlen unendlich ist. Er formuliert allerdings vorsichtiger: "Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen umfaßt." Dieser Beweis erfolgt durch Widerspruch, d. h. EUKLID nimmt an, daß es nur eine endliche Menge $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ von Primzahlen gäbe, wobei n eine feste natürliche Zahl ist, und folgert daraus, daß es noch eine weitere Primzahl p_{n+1} gibt. Sei

$$II = p_1 * p_2 * p_3 * \dots * p_n$$

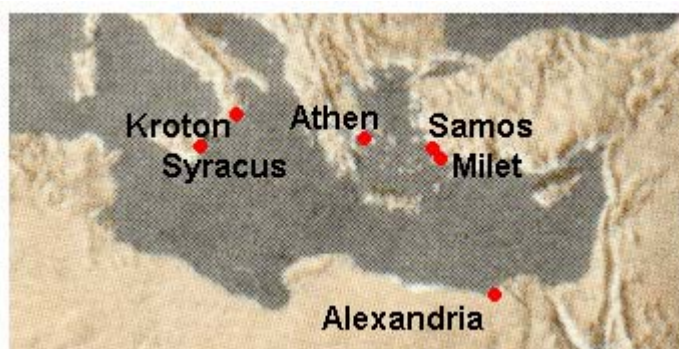
das Produkt aller Primzahlen. II ist also durch jede Primzahl ohne Rest teilbar. Die Zahl $II + 1$ wird durch keine dieser Primzahlen geteilt, denn es bleibt immer der Rest 1. Also ist $II + 1$ entweder unteilbar und damit selbst Primzahl oder es ist teilbar, aber nicht durch eine Primzahl der Menge P , sondern höchstens durch eine darin nicht enthaltene Primzahl p_{n+1} . Ein Beispiel ist

$$2*3*5*7*11*13 + 1 = 30.031 = 59*509.$$

Mit der Zahl $II - 1$ und dem Rest $(p - 1)$ würde der Beweis ebenfalls funktionieren

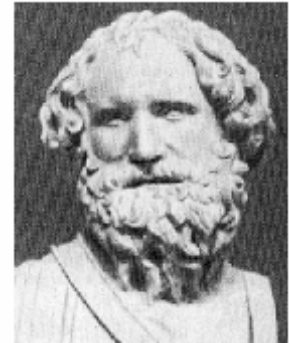
$$2*3*5*7*11*13 - 1 = 30.029,$$

aber man müßte die nur aus einer Primzahl bestehende Menge $\{2\}$ ausschließen, weil die Eins heute nicht mehr zu den Primzahlen gerechnet wird; zu EUKLIDS Zeit galt sie nicht als Zahl, also auch nicht als Primzahl.



Landkarte mit den wichtigsten Stätten altgriechischer Gelehrsamkeit

ARCHIMEDES (287 - 212) war zweifellos der größte Mathematiker, Physiker und Techniker des griechischen Altertums. Er entwickelte unter anderem so ausgeklügelte Kriegsmaschinen, daß man sagte, er habe Syracus im zweiten punischen Krieg zwei Jahre lang ganz allein gegen die römischen Belagerer verteidigt. Hier kann leider nur sein Beitrag zum Unendlichen vorgestellt werden. Dabei geht es zunächst zwar nur um endliche, aber bis zu seiner Zeit im Wortsinne unerhörte Zahlen. In seiner berühmten Sandrechnung heißt es



ARCHIMEDES

"Viele Leute glauben, o König Gelon, die Zahl der Sandkörner sei von unbegrenzter Größe. Andere meinen, daß ihre Zahl zwar nicht unbegrenzt sei, aber niemals eine so große Zahl genannt werden könne. Aber ich werde versuchen zu zeigen, daß unter den Zahlen, die ich schon angegeben habe, solche sind, welche die Zahl der Sandkörner übertreffen, in einem Sandhaufen nicht nur von der Größe der Erde, sondern auch wenn das ganze Universum mit Sand gefüllt wäre."

ARCHIMEDES führt nun eine Abschätzung durch, wobei er annimmt, daß eine Myriade (= 10000) Sandkörner auf die Größe eines Mohnkorns gehen. (Deswegen spricht man zuweilen auch von der "Staubrechnung".) Im damals bekannten Kosmos finden $64 \cdot 10^{57}$ Sandkörner Platz. Er schließt: "Es gibt Zahlen bis 10^{63} und man kann noch weiter gehen". ARCHIMEDES kam noch weiter, nämlich bis $10^{8 \cdot 10^{16}}$ (das ist eine Eins mit 80 Milliarden Nullen), aber ohne Exponenten und natürlich auf griechisch:

ai myriakismyriostas periodou myriakismyrioston arithmon myriai myriades.

Der hauptsächliche Grund, ARCHIMEDES hier besonders zu erwähnen, ist allerdings das sogenannte archimedische Axiom: *Zu jeder Zahl kann man eine größere natürliche Zahl finden.* Daraus folgt explizit die Unbeschränktheit der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen, die Existenz des potentiellen Unendlichen.

Die größte Zahl mit einem eigenen Namen war lange Zeit die im Buddhismus auftretende Zahl Asankbyeya 10^{140} . Die größte moderne Zahl ist das Googol 10^{100} ; daraus lassen sich leicht größere Zahlen ableiten wie das Googolplex $10^{10^{100}}$ mit einem Googol Nullen. Doch was können wir uns darunter vorstellen? Schon die kleinste Zahl, die sich im Dezimalsystem mit drei Ziffern schreiben läßt, 9^9 , ist jeder alltäglichen Erfahrung entrückt. Merke: $9^{9^9} = 9^{(9^9)} = 9^{387420489} \gg (9^9)^9 = 9^{9 \cdot 9} = 9^{81}$.

Wenn wir gar noch das Ausrufungszeichen zulassen, das aus der Zahl n ein Produkt $n!$ (lies n -Fakultät) mit n Faktoren macht

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \quad (1.1)$$

und schon 5 zu $5! = 120$ erhebt, so streikt der für alle alltäglichen Rechnungen ausreichende Taschenrechner bereits bei $70!$ Die Zahl $1000!$ entzieht sich gänzlich unserer Vorstellung und dem Potenzturm 9^{9^9} verlieh CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 - 1855) nicht ganz ohne Grund den Orden "meßbare Unendlichkeit".

Eine Vorstellung von der Größe eines Landes gewinnt man am ehesten auf dem Fußmarsch. Ähnlich ist es mit großen Zahlen. Für einen beschaulichen Spaziergang haben wir zwar zu wenig Zeit, aber durch ständiges Beschleunigen können wir die Dauer verkürzen, ohne ganz das Gefühl für den Weg zu verlieren. Wir beginnen bei der Eins, zählen aber nicht wie gewöhnlich 1, 2, 3, ... sondern 1, 10, 100, ... und versuchen die gerade betrachteten Zahlen, solange es eben geht, mit begreifbaren Objekten zu vergleichen. Nehmen wir also an, wir hätten eine Menge von Sandkörnern, die sich nach Ablauf einer Sekunde verzehnfacht. In der folgenden Tabelle ist links die abgelaufene Zeit in der Einheit Sekunde und rechts ein Vergleich mit der erreichten Anzahl angegeben. Wie lange müssen wir warten, trotz der rasanten Beschleunigung, die nach 4 Sekunden alle mit bloßem Auge sichtbaren Sterne und nach 11 Sekunden alle Sterne unserer Milchstraße egalisiert, um 1000! zu erreichen oder das Googolplex?

Zeit	Anzahl
4 s	10.000 - weißt du wieviel Sternlein stehen? deutlich weniger!
10 s	10 Mrd. - Roms Staatsschulden nach Nero (Sesterzen)
11 s	100 Mrd. - alle Sterne unserer Milchstraße
14 s	100 Bio. - mittlere Anzahl von Bakterien im menschlichen Darm
22 s	alle Sterne im ganzen Weltall
38 s	größte von <i>Menschenhand</i> ermittelte Primzahl $2^{127} - 1$
59 s	Sandkörnerzahl des Archimedes übertroffen
80 s	alle Protonen im Weltall
43 min	1000! übertroffen
11 a 261 d	9^{9^9}
2,5 Mrd. a	$10^{8 \cdot 10^{16}}$
$3 \cdot 10^{92}$ a	Googolplex $10^{10^{100}}$
	Million-illion-illion $1000.000^{1000.000^{1000.000}}$
	meßbare Unendlichkeit $9^{9^{9^9}}$
	$9^{9^9}!$

Bio. = Billion, Mrd. = Milliarde, a = Jahr, d = Tag, min = Minute, s = Sekunde

Die letzten Zeitangaben fehlen, denn sie wären nicht instruktiver als die rechts eingetragenen Zahlen. 9^{9^9} übertrifft übrigens noch die "meßbare Unendlichkeit", und zwar wesentlich drastischer, als aus dem scheinbar geringfügigen Unterschied zwischen $\lg \lg 9^{9^9} = 369.693.108,2$ und $\lg \lg 9^{9^{9^9}} = 369.693.099,6$ (s. Kasten) hervorzugehen scheint. Diese Potenttürme lassen sich beliebig vergrößern; auch kann man mehrere Ausrufungszeichen kombinieren und noch wirkungsvollere Abkürzungen verwenden. Trotzdem gibt es natürliche Zahlen, die niemals ein Mensch oder sonst jemand kennen und konstruieren wird, weil alle in unserem Universum verfügbaren Mittel nicht ausreichen, um sie - selbst in kürzester Schreibweise - eindeutig von anderen Zahlen unterscheidbar darzustellen. *Die kleinste derartige Zahl* wird zwar durch den Beginn dieses Satzes genannt, ist deswegen aber nicht bekannt und konstruiert. Wäre dies der Fall, so würde die nächstgrößere Zahl an ihre Stelle treten.

Berechnung großer Zahlen

Eine positive Zahl z können wir außer durch ihre Größe auch mit Hilfe ihres dekadischen Logarithmus eindeutig identifizieren; das ist der Exponent, mit dem die Basis 10 potenziert werden muß, um z zu ergeben.

$$z = 10^{\lg z} \quad \text{Beispiel: } 10.000 = 10^{\lg 10.000} = 10^4 \Rightarrow \lg 10.000 = 4$$

In der linken Spalte der Tabelle sind also lediglich die dekadischen Logarithmen der rechts erläuterten Zahlen eingetragen. (Wir könnten auch jede andere positive Zahl außer 1 als Basis wählen. Die Logarithmen zur Basis 2 hätten in unserer Tabelle nicht die Verzehnfachung sondern die Verdopplung beschrieben: $4 = \log_2 16$.)

Die Anweisungen *10 hoch* und *lg* heben sich gegenseitig auf (*lg* wäre eigentlich besser mit *10 tief* bezeichnet) und können daher nach Belieben eingeschaltet werden.

$$z = 10^{10^{\lg z}} \quad \text{Beispiel: } 10.000.000.000 = 10^{10^{\lg 10.000.000.000}} = 10^{10^{\lg 10}} = 10^{10^1}$$

Aus der Regel für das Potenzrechnen $10^a * 10^b = 10^{a+b}$ (Bsp.: $10^2 * 10^3 = 10^5$)

entnimmt man die Regeln des Logarithmierens, die vor der Einführung des Taschenrechners große Bedeutung für das praktische Rechnen besaßen.

$$\lg(10^a * 10^b) = \lg 10^{a+b} = a + b = \lg 10^a + \lg 10^b \Rightarrow \lg(x*y) = \lg x + \lg y \quad (1.2)$$

$$\lg(z*z*\dots*z) = \lg z + \lg z + \dots + \lg z \Rightarrow \lg z^n = n*\lg z \quad (1.3)$$

Bei der Berechnung von solchen Monstern wie $\lg \lg 9^{9^{9^9}}$ oder $\lg \lg 9^{9^9}!$ versagen sogar clevere Mathematik-Programme auf leistungsstarken Rechnern. Wenden wir aber zunächst (1.3) an, sodann (1.2) und schließlich nochmals (1.3), so wird die "meßbare Unendlichkeit" von jedem Taschenrechner bezwungen

$$\lg \lg 9^{9^{9^9}} = \lg(9^{9^9} * \lg 9) = \lg 9^{9^9} + \lg \lg 9 = 9^9 * \lg 9 + \lg \lg 9 = 369.693.099,6.$$

Es besteht keine Chance, $9^{9^9}!$ direkt auszurechnen. Die Definition der Fakultät (1.1) führt zwar auf Faktoren, die mit (1.2) zu Summanden umgeformt werden können

$$\lg \lg(9^{9^9}!) = \lg \lg(1 * 2 * \dots * (9^{9^9} - 1) * 9^{9^9}) = \lg(\lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg(9^{9^9} - 1) + \lg 9^{9^9}),$$

aber die Summation scheitert an den noch immer zu großen Zahlen. Daher müssen wir zu stärkeren Mittel greifen. Eine von dem schottischen Mathematiker JAMES STIRLING (1692 - 1770) gefundene Formel lautet in leicht verkürzter, aber für unsere Zwecke vollkommen ausreichender Form $\lg(n!) \approx n*\lg n$. Mit (1.2) und (1.3) ergibt das

$$\lg \lg(9^{9^9}!) \approx \lg(9^{9^9} * \lg 9^{9^9}) = \lg 9^{9^9} + \lg \lg 9^{9^9} = (9^9 * \lg 9 + \lg(9^9 * \lg 9)) \approx 369.693.108,2.$$