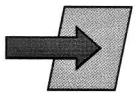
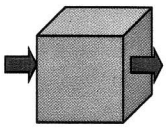
Wärmemenge: $Q \quad \left[J = Ws \right]$

Wärmestrom: $\dot{Q} = \frac{Q}{t} \quad \left[\frac{J}{s} = W \right]$

Wärmestromdichte: $\dot{q} = \frac{Q}{A \cdot t} = \frac{\dot{Q}}{A} \quad \left[\frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{W}{m^2} \right]$



Wärmeleitzahl: $\lambda = \left| \frac{\dot{Q}}{x \cdot \Delta T} \right| \quad \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$



spezifische Wärmekapazität: $c = \frac{Q}{m \cdot \Delta T} \quad \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$

$c_{Mineralien,Glas} = 1 \frac{kJ}{kg \cdot K}$, $c_{Holz} = 2 \frac{kJ}{kg \cdot K}$, $c_{Wasser} = 4{,}2 \frac{kJ}{kg \cdot K} \quad \left[= \frac{1kcal}{kg \cdot K} \right]$

Dichte $\rho = \frac{m}{V} \quad \left[\frac{kg}{m^3} \right]$

stationär: T(x) oder T(***R***)

instationär: T(x, t) oder T(x, y, z, t) = T(***R***, t)

Oft wird der Wärmestrom $\dot{Q}$ mit Φ bezeichnet.

Oft wird die Wärmestromdichte $\dot{q}$ nur mit q bezeichnet.

Kleine Differenzen oder Mengen werden mit Δ markiert, sehr kleine mit d, Zeitableitung mit einem Punkt oder d/dt.

T bezeichnet die absolute Temperatur oder wird als Celsiustemperatur kenntlich gemacht. Dann gilt:

$T = x\ °C \Rightarrow T = (x + 273{,}15)\ K$

Sir Isaac Newton
(1642 – 1727)

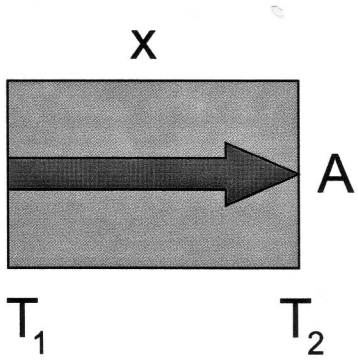
$\dot{Q} = dQ/dt$ ist proportional zu ΔT.

Gesetz von Newton (1701)

Lineare Wärmeleitung

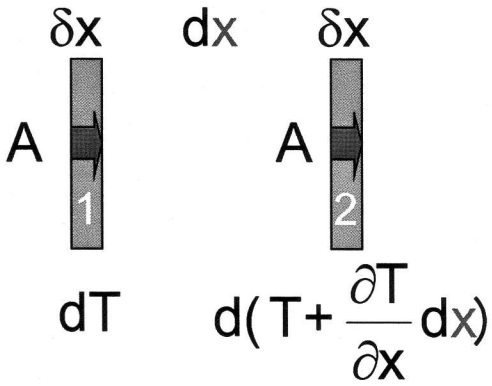
stationär

$$\Delta Q = -\lambda \cdot A \cdot \frac{T_2 - T_1}{x} \Delta t$$



$$dQ_1 = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x} dt$$

$$dQ_2 = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial (T + \frac{\partial T}{\partial x} dx)}{\partial x} dt$$



$$dQ = dQ_1 - dQ_2 = \lambda \cdot A \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} dx dt = \lambda \cdot A \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot dx dt$$

$$dQ = m \cdot c \cdot dT = \rho \cdot A \cdot dx \cdot c \cdot dT$$

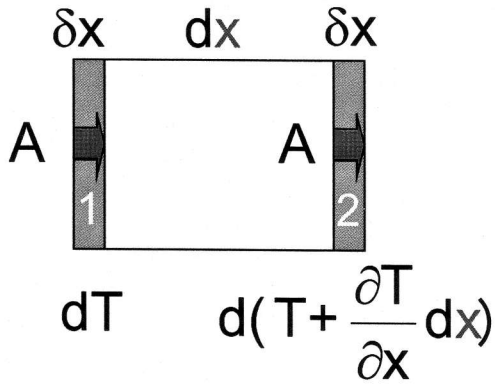
$$\rho \cdot A \cdot dx \cdot c \cdot dT = \lambda \cdot A \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot dx dt$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

$dQ_2 \neq dQ_1 \Rightarrow$ instationäre Wärmeleitung

$$dQ_1 = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x} dt$$

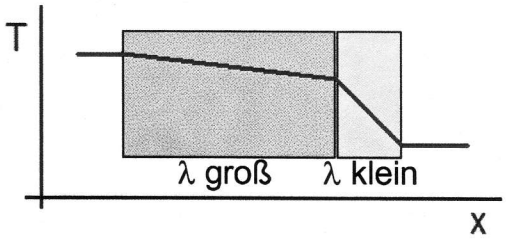
$$dQ_2 = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial (T + \frac{\partial T}{\partial x} dx)}{\partial x} dt$$



Stationäre Wärmeleitung: T = T(x)

$$\dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dx} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad T(x) = T_0 - \frac{\dot{q}}{\lambda} x$$

Der Temperaturverlauf ist linear:



λ: Wärmeleitzahl, Wärmeleitvermögen oder Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda_{\text{Metalle}} 100 \frac{W}{m \cdot K}, \ \lambda_{\text{Baustoffe, Wasser}} = 1 \frac{W}{m \cdot K}, \ \lambda_{\text{Luft}} = 0{,}02 \frac{W}{m \cdot K}, \ \lambda_{\text{Vakuum}} = 0$$

Gute elektrische Leiter sind auch gute Wärmeleiter.
(Wiedemann-Franzsches Gesetz)
Aber nicht umgekehrt!

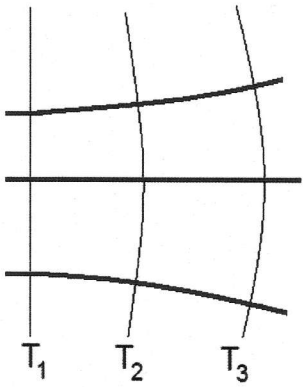
$$\lambda_{\text{Diamant, C-Nanoröhren}} > 1000 \frac{W}{m \cdot K}$$

$$\dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

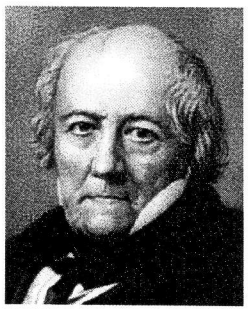
$$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ \dot{q}_z \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \\ \partial T/\partial z \end{pmatrix} = -\lambda \nabla T$$

Biot und Fourier (1822)

λ kann von der Temperatur abhängen.
Bei Anisotropie (geschichtete Stoffe, Kohlefaser-Verbundstoffe, Holz) ist λ eine symmetrische Matrix ($\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$).
$\dot{\boldsymbol{q}}$ zeigt immer in Richtung des stärksten Temperaturgefälles.

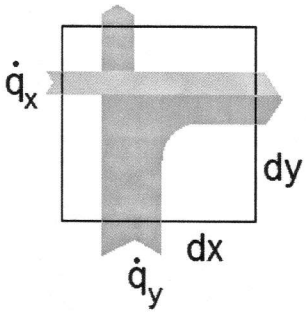


Joseph Fourier
(1768 - 1830)



Jean-Baptiste Biot
1774-1862

+	−
$\dot{q}_x dydz$	$(\dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx)\, dydz$
$\dot{q}_y dxdz$	$(\dot{q}_y + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} dy)\, dxdz$
$\dot{q}_z dxdy$	$(\dot{q}_z + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} dz)\, dxdy$



$$-\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dxdydz$$

$$-\frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} dydxdz$$

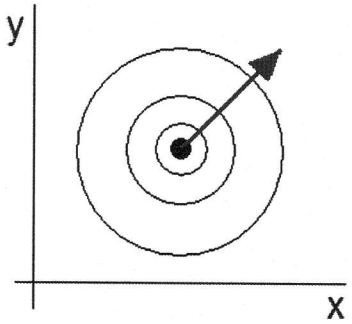
$$-\frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} dzdxdy$$

Das Feld ist quellenfrei / senkenfrei,
d. h. Wärme staut sich nicht, wenn

netto in dV strömende Leistung = 0

$$-\left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}\right) = 0 \qquad -\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = 0 \quad \text{(Divergenz)}$$

Wärmestromdichte
im Zylinderfeld



$$\dot{q}(R) = \frac{\dot{Q}_z}{2\pi |R||R|} \frac{R}{}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}(x,y) = \frac{\dot{Q}_z}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\dot{Q}_z}{2\pi(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

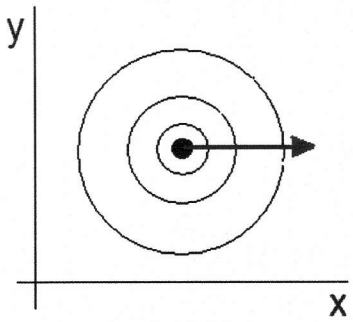
$$\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\dot{Q}_z x}{2\pi(x^2+y^2)} = \frac{\dot{Q}_z}{2\pi} \frac{(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\dot{Q}_z}{2\pi} \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\dot{Q}_z y}{2\pi(x^2+y^2)} = \frac{\dot{Q}_z}{2\pi} \frac{(x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\dot{Q}_z}{2\pi} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} = 0 \qquad \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} = 0$$

Temperaturverlauf
im Zylinderfeld

$$T = T(|\boldsymbol{R}|) = T(x^2 + y^2)$$



$$\dot{\boldsymbol{q}} = -\lambda \cdot \nabla T \qquad \frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2 + y^2) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\dot{Q}_z}{2\pi(x^2 + y^2)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{R})| = \dot{q}_x(|\boldsymbol{R}|)$$

$$\dot{q}_x = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\dot{Q}_z\, x}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

$$T(|\boldsymbol{R}|) = -\frac{\dot{Q}_z}{2\pi\lambda}\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + C$$

$$= -\frac{\dot{Q}_z}{2\pi\lambda}\ln\sqrt{x^2 + y^2} + C$$

$$= -\frac{\dot{Q}_z}{2\pi\lambda}\ln|\boldsymbol{R}| + C$$

$$T(|\boldsymbol{R}_0|) = -\frac{\dot{Q}_z}{2\pi\lambda}\ln|\boldsymbol{R}_0| + C = T_0$$

$$T(|\boldsymbol{R}|) = T_0 - \frac{\dot{Q}_z}{2\pi\lambda}\ln\frac{|\boldsymbol{R}|}{|\boldsymbol{R}_0|} \text{ für } |\boldsymbol{R}| \geq |\boldsymbol{R}_0|$$

Eine Rohrleitung mit Wärmeisolation (λ = 0,04 $Wm^{-1}K^{-1}$) hat innen bei $|\boldsymbol{R}_i|$ = 1 cm die Temperatur 60°C, außen bei $|\boldsymbol{R}_a|$ = 5 cm 20°C.
Wie groß sind die Wärmeverluste dQ_z/dt?
Bei welchen Radien liegen die Isothermen zu 50°C, 40°C, 30°C ?
Zeichnen Sie eine Skizze mit Isothermen und Wärmestromlinien.

$$T_0 = T(1\text{ cm}) = 60°\text{C}$$

$$T(5\text{ cm}) = 20°\text{C} = 60°\text{C} - \frac{\dot{Q}_z}{2\pi \cdot 0{,}04\ \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}}\ln\frac{5\text{ cm}}{1\text{ cm}}$$

$$\boxed{\frac{\dot{Q}_z \cdot \text{K} \cdot \text{m}}{2\pi \cdot 0{,}04\ \text{W}}}\ln 5 = 60°\text{C} - 20°\text{C} = 40\,\text{K}$$

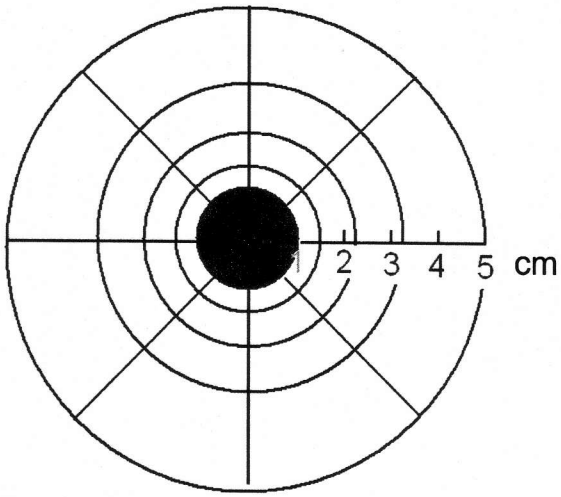
$$\dot{Q}_z = \frac{40 \cdot 2\pi \cdot 0{,}04}{\ln 5}\frac{\text{W}}{\text{m}} = 6{,}24\frac{\text{W}}{\text{m}}$$

$$T(x) = 60°\text{C} - \boxed{\frac{40°\text{C}}{\ln 5}}\ln\frac{x\text{ cm}}{1\text{ cm}}$$

$$T(|\boldsymbol{R}|) = T_0 - \frac{\dot{Q}_z}{2\pi\lambda}\ln\frac{|\boldsymbol{R}|}{|\boldsymbol{R}_0|} \text{ für } |\boldsymbol{R}| \geq |\boldsymbol{R}_0|$$

Eine Rohrleitung mit Wärmeisolation (λ = 0,04 $Wm^{-1}K^{-1}$) hat innen bei $|R_i|$ = 1 cm die Temperatur 60°C, außen bei $|R_a|$ = 5 cm 20°C. Wie groß sind die Wärmeverluste dQ_z/dt?
Bei welchen Radien liegen die Isothermen zu 50°C, 40°C, 30°C ?
Zeichnen Sie eine Skizze mit Isothermen und Wärmestromlinien.

T(x)/°C	x/cm
60	1,0
50	1,5
40	2,2
30	3,3
20	5,0



$$T(x) = 60°C - \frac{40°C}{\ln 5} \ln \frac{x\,cm}{1\,cm} = 60°C - 25°C \cdot \ln x \quad \Rightarrow x = e^{\frac{60°C - T(x)}{25°C}}$$