

**Test III 60 Minuten****keine Hilfsmittel**

- 1) Finden Sie eine Ordnungsrelation, die ebenfalls Äquivalenzrelation ist.
- 2) Geben Sie zwei Beispiele für mathematische Körper an.
- 3) Um  $\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}$  zu berechnen, können Sie mit  $\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{A}$  oder mit  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}$  beginnen. Wie nennt man diese Eigenschaft des Matrixproduktes? Um  $\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}$  zu berechnen, dürfen Sie aber nicht mit  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$  beginnen. Welche Eigenschaft wäre dafür erforderlich?
- 4) Beweisen Sie (z. B. durch vollständige Induktion oder mit der Methode des kleinen Gauss oder wie Sie mögen): 
$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$
- 5) Prüfen Sie die Linearität der Abbildung  $f(x) = 3x + 2$ .

- 6) Berechnen Sie das Produkt  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und erklären Sie, was hier geschieht.

**Gegeben ist die zweidimensionale quadratische Form  $1 = 5x^2 + 3xy + 7y^2$**

- 7) Geben Sie eine nicht symmetrische Matrix für diese quadratische Form an.
- 8) Geben Sie die symmetrische Matrix  $\mathbf{A}$  für diese quadratische Form an.
- 9) Berechnen Sie  $\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{A}$ . [Hinweis: Die Drehmatrix ist  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ ]
- 10) Wird das Koordinatensystem um den Winkel  $\varphi \approx 61,85^\circ$  gedreht, so ergibt sich eine sogenannte Hauptachsenlage  $1 = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \begin{pmatrix} 7,803 & 0 \\ 0 & 4,197 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ . Wie lautet die ohne Verwendung von Matrizen ausgeschriebene Gleichung?
- 11) Welche geometrische Figur wird durch diese Gleichung beschrieben?
- 12) Berechnen Sie  $|\mathbf{A}|$ .
- 13) Berechnen Sie  $\text{Spur}(\mathbf{A})$ .

14) Was können Sie ohne Taschenrechner über  $\begin{vmatrix} 7,803 & 0 \\ 0 & 4,197 \end{vmatrix}$  aussagen?

Gegeben ist die symmetrische Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  einer quadratischen Form.

15) Bestimmen Sie die Diagonalmatrix dieser Form  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}$ .

[Hinweis: Spur und Determinante bleiben bei orthogonalen Transformationen unverändert.]

16) Welche geometrische Figur wird durch die Matrix  $C$  beschrieben, und welche geometrische Figur wird durch die Matrix  $A$  beschrieben? (Skizze)

17) Berechnen Sie  $D^T \cdot D \cdot D^T \cdot D$  oder bestimmen Sie das Ergebnis auf kürzerem Wege. [Hinweis:  $D$  ist die Drehmatrix, s. Aufgabe 9.]

18) Die Fläche einer Ellipse beträgt  $A = 50 \pi$ , ihre numerische Exzentrizität ist  $\varepsilon = (\sqrt{3})/2$ . Im Mittelpunkt der Ellipse ist eine Höhe  $h = 10$  errichtet. Von ihrem oberen Punkt führen Geraden zu den Scheiteln der Ellipse. Wie groß ist der Winkel zwischen zwei benachbarten Geraden?

19) Die Polargleichung einer Ellipse liefert  $r(0) = 18$ . Der Abstand ihrer Brennpunkte ist 10. Bestimmen Sie  $a$ ,  $b$  und die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$ .

20) Der Mittelpunkt einer Hyperbel mit großer Halbachse  $a = 5$  und kleiner Halbachse  $b = 4$  besitzt die Koordinaten  $(2|-3)$ . Wie lautet die implizite Mittelpunktsleichung?