Dieses Buch enthält die so genannte höhere Mathematik, also die über das einfache Rechnen hinausgehende Mathematik, deren Lehre gewöhnlich in den letzten Schuljahren begonnen und in den ersten Studiensemestern erweitert und vertieft wird. Nach einer Einführung in die mathematische Sprache werden Arithmetik, Algebra, Geometrie und Infinitesimalrechnung behandelt.

- Logik, Mengen, Abbildungen
- Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen
- einfache Sätze der Zahlentheorie
- Geometrie und Trigonometrie
- Vektoren, Matrizen, Determinanten
- Koordinatensysteme und Koordinatentransformationen
- Kegelschnitte: Ellipse, Parabel, Hyperbel
- Geometrie und Trigonometrie auf der Kugeloberfläche
- Lösungsmethoden für lineare Gleichungssysteme
- Lösungsmengen singulärer Gleichungssysteme
- geschlossene Lösungsverfahren für Gleichungen zweiten und dritten Grades
- Approximationsverfahren für Nullstellen von Polynomen
- Folgen, Reihen, Konvergenz, Grenzwert
- Funktionen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit
- Funktionenfolgen, punktweise und gleichmäßige Konvergenz
- Differentialrechnung
- trigonometrische, zyklometrische und hyperbolische Funktionen
- Approximation von Funktionen, Taylor-Reihe
- Funktionen von mehreren Variablen
- Integralrechnung
- Kurvenlänge und Kurvenkrümmung
- Mehrfachintegrale
- komplexe Funktionen
- Fourier- und Laplace-Transformationen
- Vektoranalysis, Integralsätze
- gewöhnliche Differentialgleichungen

Mit wenigen Ausnahmen wird das strenge Euklidische Schema von Definition, Satz und Beweis *nicht* eingehalten; der Stoff wird in berichtendem Stil vermittelt - mit vielen anschaulichen Beispielen und Übungsaufgaben und solchen Beweisen, die kurz und übersichtlich genug sind, um das Verständnis zu fördern. Für die meisten technischen Studienfächer ist der Umfang völlig ausreichend, und für Studierende der Mathematik, Informatik oder Physik bildet er ein solides Fundament.

Aus dem Vorwort

Im Zuge ihrer Axiomatisierung wurde die Mathematik auf Georg Cantors Lehre von den *transfiniten Zahlen* aufgebaut, die er nach eigener Aussage entwickelte, um die von ihm vermuteten *aktualen*, d. h. vollendeten Unendlichkeiten *in der Natur* und *jedem noch so kleinen, ausgedehnten Teil des Raumes* beschreiben zu können.[1]) Im Lichte moderner Naturerkenntnis ist aber klar geworden, dass die Wirklichkeit nichts enthält, worauf transfinite Zahlen angewandt werden könnten. *Im geistigen Gesamtbilde unseres Jahrhunderts wirkt das aktual Unendliche geradezu anachronistisch.*[2]) Die Endlichkeit des zugänglichen Universums führt aber auch zu der Erkenntnis, dass die Mathematik wie jede andere Wissenschaft gezwungen ist, mit endlichen Mitteln auszukommen. Doch ohne unendliche Mittel gibt es auch keine unendlichen Resultate. Eine Zahlenmenge besteht aus Zahlen, die in irgendeiner Weise voneinander unterscheidbar sein müssen, die also unterschiedliche Bezeichnungen erfordern. Eine Zahl kann durch einen Namen, durch eine Definition, durch eine Ziffernfolge oder durch andere Merkmale eindeutig bezeichnet und von allen übrigen Zahlen unterschieden werden. Ist die Anzahl aller Merkmale aber begrenzt, so gilt dies auch für die Menge der unterscheidbaren Elemente. Das Universum mit seinen 10^{80} Protonen und erst recht jeder zum Denken und Rechnen nutzbare Teilbereich besitzen eine endliche Informationsspeicherkapazität und beschränken so die Zahl der Unterscheidungsmerkmale aus rein materiellen Gründen. Können nur deutlich weniger als 10^{100} Informationseinheiten oder *Ziffern* gespeichert werden, so ist es ganz gewiss nicht möglich, 10^{100} *Zahlen* zu unterscheiden. Was aber nicht bezeichnet, nicht unterschieden und daher auch nicht gedacht werden kann, kann auch keine Zahl sein - Ungedachtes und niemals Denkbares gehört nicht zur Menge der Gedanken. Um hier einer müßigen Existenzdiskussion aus dem Wege zu gehen, kann wohl Konsens darüber vorausgesetzt werden, dass es unmöglich ist und für immer unmöglich bleiben wird, "Zahlen", die nicht bezeichnet werden können, in irgendeiner Weise als Individuen zu verwenden. Sie gehören nicht zur Mathematik, sofern die Mathematik zur Wirklichkeit gehört.

Die Endlichkeit aller Zahlenmengen impliziert aber nicht die Existenz einer größten Zahl, wie zuweilen fälschlich angenommen wird. Die Zahl 10^{100} und auch viel größere Zahlen wie 10^{1000} können benannt und identifiziert werden, z. B. hier auf dem Papier oder im Bewusstsein der Leser.[1] Aber viele Zahlen, deren Darstellung 10^{100} verschiedene Ziffern erfordern würde, können nicht definiert und deshalb auch nicht verwendet werden. Es ist unmöglich, von 1 bis $10^{10^{100}}$ zu zählen - unabhängig von der verfügbaren Zeit. Die Folge der natürlichen Zahlen kommt nicht makellos daher wie ein nicht endender ICE. Sie weist Lücken auf.[3]) Und diese Lücken wachsen mit zunehmender Zahlengröße. Deswegen kann man nicht sinnvoll von einer aktual unendlichen Zahlenfolge sprechen, und im vorliegenden Buch wird auch nicht der Versuch gemacht, die Existenz von aktual unendlichen Mengen zu postulieren oder mit transfiniten Zahlen zu rechnen. Die wichtigen Sätze einer wirklichkeitsorientierten Mathematik können mit Hilfe von Experimenten - vor allem auf leistungsfähigen Rechenmaschinen - in guter Näherung nachgeprüft werden. Rechenmaschinen sind für den Mathematiker das, was Teleskope für den Astronomen sind. Sie bringen das Entfernte näher und erlauben eine Unterscheidung von Details, die ohne Hilfsmittel nicht gelingt. Zwar werden die Begriffe "unendliche Menge" oder "Menge aller Zahlen mit einer bestimmten Eigenschaft" in diesem Buch verwendet, doch sind darunter Mengen zu verstehen, die nicht aktual existieren, die nicht überschaubar und also in des Wortes *eigentlicher* Bedeutung unendlich sind. Im Gegensatz zu einer aktual unendlichen Menge kann die Anzahl der Elemente einer solchen *potentiell unendlichen* Menge weder bestimmt noch übertroffen werden, denn sie ist ja niemals vollendet. *Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes*.[4]) Deren Anzahl ist endlich und wird stets endlich sein. *Eine Konstruktion existiert nicht, ehe sie gemacht wurde. Wenn etwas neu gemacht wurde, so ist es etwas Neues und nicht eine Auswahl aus einer vorher schon existierenden Kollektion.*[5]) Daher sind Zahlenmengen nicht fixiert. *Die natürlichen Zahlen von heute sind nicht die natürlichen Zahlen von gestern*.[6]) *Das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch*

---

[1] Um diese ungewohnte Überlegung verständlich zu machen, stelle man sich einen einfachen Speicher vor, der nur sieben Zeichen fasst. Bei Verwendung des Dezimalsystems kann dort jede beliebige positive Zahl zwischen 0 und 9999999 gespeichert werden. Mit der Vereinbarung, dass E einen Exponenten einleitet, kann auch die Zahl 10^{1000} in der Form 10E1000 dort gespeichert werden, die viel kleinere Zahl 12345678 aber nicht.

als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig - eine bemerkenswerte Harmonie zwischen Sein und Denken.[7])

Mit der Endlichkeit einer jeden Menge ist auch die Menge aller Ziffern einer Zahl endlich. Die meistens stillschweigend angenommene Voraussetzung, dass jede reelle Zahl "beliebig genau" approximierbar sei, gilt nicht uneingeschränkt - die Zahlenachse weist Lücken auf; die Stetigkeitsannahme, der Konvergenzbegriff und andere Grundpfeiler der Infinitesimalrechnung werden problematisch; schon der Zwischenwertsatz oder der Fundamentalsatz der Algebra "leiden Ausnahmen".

Das kann niemand ändern! Die Mathematik steht nicht außerhalb der Wirklichkeit. Es hilft wenig, die Existenz aktual unendlicher Mengen axiomatisch zu fordern und so die Vollständigkeit der reellen Zahlen zu "beweisen". Damit behebt man den Mangel eben so wenig, wie ein Kaufmann seine Bilanz durch Anhängen einiger Nullen aufbessern kann - wie Immanuel Kant in einem ähnlichen Zusammenhang feststellte.[8]) Das wirklich zugängliche "Kontinuum" besitzt eine körnige Struktur. Die Korngröße hängt von der verfügbaren Rechenkapazität ab. Dem mit einem Abakus allein ausgerüsteten Mathematiker stellt sie sich als 1 dar, denn ihm sind nur ganze Zahlen zugänglich. Glücklicherweise ist die Körnung in der Regel fein genug, um ohne nachteilige Auswirkungen zu bleiben. Ebenso wie die Quantisierung der Erdbahn für astronomische Probleme ohne jede Relevanz ist und die molekulare Struktur von Butter deren Portionierbarkeit nicht merklich beschränkt, wird die prinzipielle Unsicherheit von Zahlen ihren im Eingangszitat genannten Zweck nicht beeinträchtigen. In der Regel genügt schon die zehnstellige Genauigkeit des Taschenrechners oder die 100-stellige Genauigkeit einfacher Rechenprogramme. Die Kenntnis von 10^{100} Stellen wird man äußerst selten anstreben und bei irrationalen Zahlen niemals erreichen.[9])

Doch dieser Mangel ist allenfalls für die mathematische Grundlagenforschung von Bedeutung und selbst dafür hat der Erfinder der Non-Standard-Analysis festgestellt: *Unendliche Gesamtheiten existieren in keinem Sinne des Wortes, weder real noch ideell. Genauer gesagt, jede Erwähnung oder Behauptung unendlicher Gesamtheiten ist buchstäblich sinnlos. Trotzdem sollten wir weiterhin wie gewohnt Mathematik machen, d. h. wir sollten so tun als wenn unendliche Gesamtheiten wirklich existierten.*[10]) Ohne also den Mangel aus unserem Bewusstsein zu verdrängen, können und dürfen wir zur *Erkenntnis der Verschiedenheit der Dinge in der Wirklichkeit* weiterhin so vorgehen, als gäbe es unendliche Mengen. Deswegen wird das Problem im folgenden Text gar nicht mehr erwähnt.

1) E. Zermelo (Hrsg.): *Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer, Berlin 1932, S. 399.
2) P. Lorenzen: *Das Aktual-Unendliche in der Mathematik*, Philosophia naturalis **4**, 1957, S. 3.
http://www.sgipt.org/wisms/geswis/mathe/ulorenze.htm#Das Aktual-Unendliche in der Mathematik
3) W. Mückenheim: *Physical Constraints of Numbers*, Proceedings of the First International Symposium of Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences, A. Beckmann, C. Michelsen, B. Sriraman (Hrsg.), Franzbecker, Berlin 2005, S. 141.
http://arxiv.org/pdf/math.GM/0505649
4) R. Dedekind: *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, Braunschweig 1888, S. III.
http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?did=D46393
5) E. Nelson: *Predicative Arithmetic*, Princeton University Press, Princeton 1986, S. 2.
http://www.math.princeton.edu/~nelson/books/pa.pdf
6) D. Isles: *What evidence is there that 2^65536 is a natural number?*, Notre Dame Journal of Formal Logic **33**, No. 4, 1992, S. 478.
http://projecteuclid.org/Dienst/UI/1.0/Summarize/euclid.ndjfl/1093634481?abstract
7) D. Hilbert: *Über das Unendliche*, Math. Ann. **95**, 1925, S. 190.
http://gdzdoc.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?did=D26816
8) I. Kant: *Kritik der reinen Vernunft*, Hartknoch, Riga 1781, Kap. 103.
http://gutenberg.spiegel.de/index.php?id=5&xid=1368&kapitel=103&cHash=3a05522a122#gb_found
9) W. Mückenheim, *Die Mathematik des Unendlichen*, Shaker, Aachen 2006, S. 137.
10) W.A.J. LUXEMBURG, S. KOERNER (Hrsg.): *A. Robinson: Selected Papers*, Band 2, North Holland, Amsterdam, 1979, S. 507.