Hochschule
Augsburg University of
Applied Sciences

Name:______________________________________ Platz:________

Abschlussprüfung Digitale Signalverarbeitung SS2010

Studiengang: Elektrotechnik Bachelor

Prüfungstermin:	9.7.2009 (90 Minuten)
Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Großmann, Prof. Dr.-Ing. Stolle
Hilfsmittel:	Taschenrechner alle schriftlichen Unterlagen

Generelle Hinweise:

- Überprüfen Sie als Erstes die **Vollständigkeit** der Prüfungsangabe anhand der Seitennummerierung. Beschriften Sie die Prüfungsangabe und alle losen Blätter, die Sie abgeben, mit Ihrem **Namen**.
- Mobiltelefone **ausschalten** und wegpacken!
- Aufgaben, die mit einem * gekennzeichnet sind, lassen sich **unabhängig** von anderen Teilaufgaben lösen.
- **Lösungen ohne erkennbaren Lösungsweg werden nicht gewertet.**

Viel Erfolg!

Σ 17

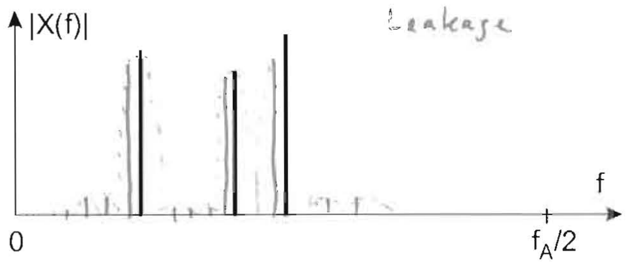
1. Signale

a) (*) Ein digitales Signal $x_k = \sin(0{,}754 \cdot k)$ besitzt die Abtastfrequenz 10 kHz. Welche Frequenz hatte das analoge Zeitsignal?

(3) $2\pi f \cdot k\,\Delta t = 0{,}754 \cdot k \Rightarrow f = \frac{0{,}754}{2\pi \cdot \Delta t} = \underline{1{,}2\ \text{kHz}}$ $\quad f_A = \frac{1}{\Delta t}$

b) (*) Das Betragsspektrum rechts zeigt ein Signal, das sehr lange mit f_A abgetastet wurde. Skizzieren Sie dazu grob das Betragsspektrum, das bei wenigen Abtastwerten zu erwarten ist.

(2)

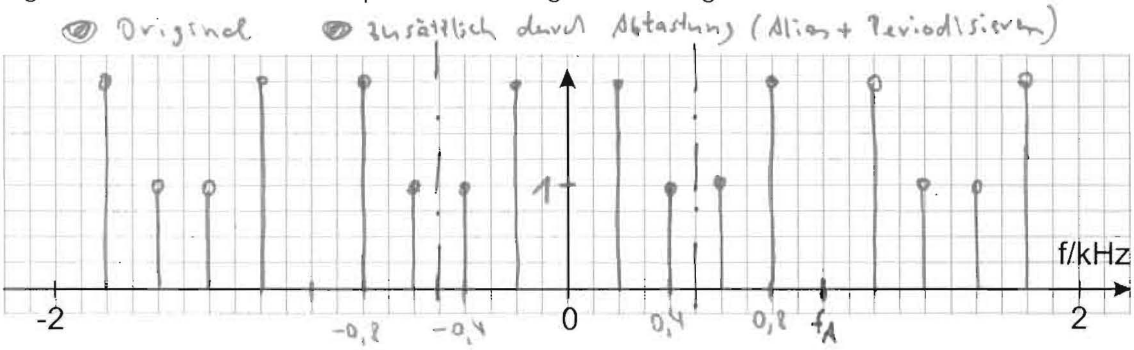


c) (*) Wie kann das verzerrte Betragsspektrum aus b) verbessert werden, ohne länger abzutasten? (Stichwort genügt!)

(1) Fensterung

d) (*) Ein analoges Signal $x(t) = \cos(2\pi \cdot 400\,Hz \cdot t) + \mathbf{2} \cdot \cos(2\pi \cdot 800\,Hz \cdot t)$ wird mit $\Delta t = 1$ ms abgetastet. Skizzieren Sie das Spektrum des abgetasteten Signals für -2 kHz $\leq f \leq +2$ kHz.

(4)



e) (*) Berechnen Sie aus x_k und y_k die nichtperiodische Korrelation R_k^{xy} für k ∈ [-2..+4] :

(5)

k	x_m	0	0	0	-4	+2	-1	0	0	0	R_k^{xy}
+4			1	-2	1	0	0				-4
+3				1	-2	1	0				10
+2					1	-2	1				-9
+1	y_{k+m}				0	1	-2	1			4
0		0	0	0	0	0	+1	-2	+1	0	-1
-1					0	0	0	1	-2	1	0
-2					0	0	0				0

k = +3: $(-4)\cdot(-2) + 2\cdot 1 = 10$

k = +2: $(-4)\cdot 1 + 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 = -9$

k = +1: $2\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) = 4$

k = 0: $-1\cdot 1 = -1$

f) (*) Warum ist das Spektrum **FFT**{R_k^{xy} } (aus e)) nicht gleich dem Leistungsdichtespektrum aus x_k und y_k? Nur Stichworte!

(2) R_k^{xy} ist nicht periodisch

2. Systeme

$\boxed{\Sigma\, 27}$

Ein diskretes System ist gegeben durch $H(z) = \frac{z+1}{z^2-z+\frac{1}{2}}$.

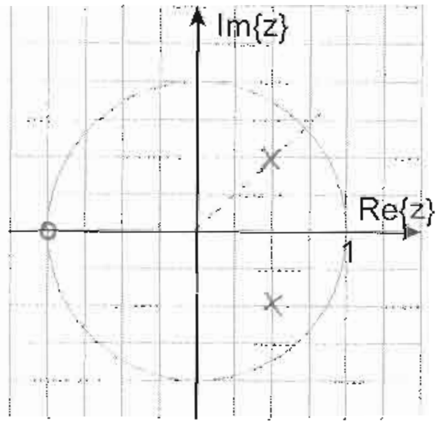
a) (*) Berechnen und zeichnen Sie die Pole und Nullstellen.

Hinweis: $x^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

4

$\text{Ns}: z_0 = -1$

$\text{Pole}: z_\infty = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}_{-1/4}} = \frac{1}{2} \pm j \cdot \frac{1}{2}$

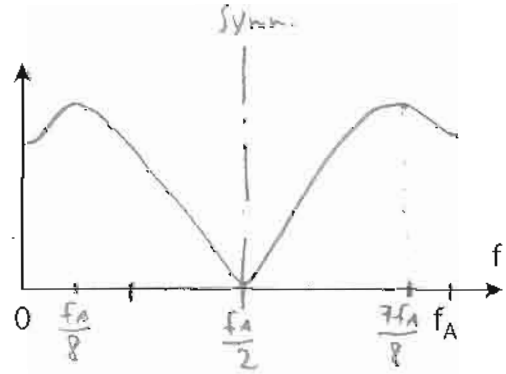


b) Ist das System stabil? (Kurze Begründung)

2 ja, alle $|z_\infty| < 1$

c) Skizzieren Sie grob das Betragsspektrum für $0 \le f \le f_A$.

4



d) (*) Handelt es sich um ein FIR- oder IIR-System? (Kurze Begründung)

2 IIR: - Nennerpolynom vorhanden ... o. ähnlich

- Pole ($\neq 0$) vorhanden

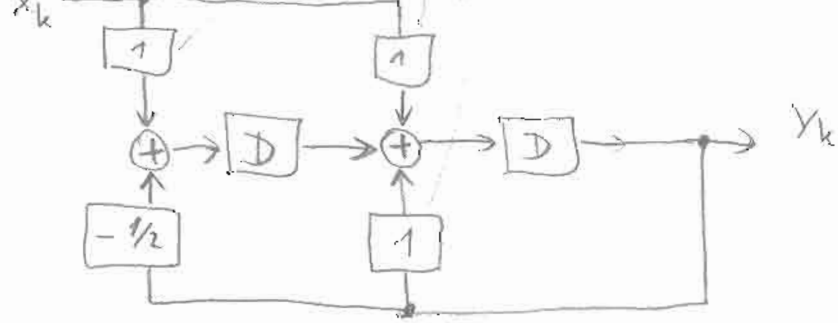
e) (*) Ist das System ein Hochpass, Tiefpass, Bandpass oder eine Bandsperre? (Kurze Begründung)

2 Tiefpass (relevantes Verhalten bis $f_A/2$)

f) (*) Zeichnen Sie das System in der Transponierten Direktstruktur II.

Können weggelassen werden!

4



5

g) (*) Berechnen Sie die Impulsantwort h_k des Systems für k = 0..3.

$$(z+1):(z^2-z+\tfrac{1}{2}) = (0\cdot 1 +) \quad \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1{,}5}{z^3} \ldots$$

$$\begin{array}{l} -(z-1+\frac{1}{2z}) \\ \hline 2-\frac{1}{2z} \\ -(2-\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}) \\ \hline +\frac{1{,}5}{z}-\frac{1}{z^2} \end{array}$$

$$\Rightarrow h_k = \{0;\ 1;\ 2;\ 1{,}5;\ \ldots\}$$

h) (*) Am Eingang des Systems wird das Signal $x_k = \{1;\ -1;\ 0.5;\ 0;\ 0;\ \ldots\}$ angelegt. Berechnen Sie das Ausgangssignal y_k für k = 0...5.

$$X(z) = 1 - \frac{1}{z} + \frac{0{,}5}{z^2} = \frac{z^2 - 1z + 0{,}5}{z^2}$$

4

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{z+1}{\cancel{z^2-z+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\cancel{z^2-z+0{,}5}}{z^2} = \frac{z+1}{z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

$$\Rightarrow y_k = \{0;\ 1;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ \ldots\}$$

3. Algorithmen

a) (*) Berechnen Sie $\frac{5}{8} \cdot \frac{6}{8}$ in Binärdarstellung im Format SFRAC(1,3) mit Runden.

(4)

$5 \cdot 6 = 30 \ (= 2 \cdot 15)$

$0101 \cdot 0110 = 0011110$

$+ \quad 1$

$\underbrace{0100}_{\frac{4}{8}}010$

b) (*) Geben Sie die Binärdarstellungen der Zahl -1,75 im Format SFRAC(2,2) und SFRAC(4,4) an.

(3)

$-1{,}75 = \frac{-7}{4}$, 4bit-Komplement zu -7: $+9$

Vielfache von $\frac{1}{4}$ — Vielf. von $\frac{1}{16}$ (vorn mit Vorzeichen, hinten mit 0 erweitern)

$10{,}01 \longrightarrow 1110{,}0100$

c) (*) Berechnen Sie die Konditionszahlen zu den beiden folgenden Gleichungssystemen. Welches lässt sich mit kleinerem Fehler lösen? Lösung selber ist nicht gefragt!

System 1:	System2:
x = 2	x +y = 2
2y = 3	x +2y = 3

Hinweis: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

(7)

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_1| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}, \ |A_2| = \sqrt{1+1+1+2^2} = \sqrt{7}$

$A_1^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_2^{-1} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_1^{-1}| = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1{,}25}, \ |A_2^{-1}| = \sqrt{7}$

$\mathrm{cond}(A_1) = |A_1| \cdot |A_1^{-1}| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{1{,}25} = 2{,}5$ → kleiner Fehler

$\mathrm{cond}(A_2) = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7$

d) (*) Die Punkte (-1;2), (0;0) und (2;4) sollen mit einem Spline interpoliert werden. Geben Sie die Gleichung an, die sich aus der Krümmungsbedingung bei (0,0) ergibt.

(3)

Spline: $ax^3 + bx^2 + cx + d = S(x)$; $S''(x) = 6ax + 2b$ (Krümmung)

gleiche Krümmung: $6a_1 \cdot x + 2b_1 = 6a_2 \cdot x + 2b_2 \Big|_{x=0}$

$\Rightarrow 2b_1 = 2b_2$

e) (*) Wandeln Sie die Differentialgleichung $y'' + y' = y$ in zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung um.

(3)

$z = y'$ (1. Dgl.)

$z' = y'' \Rightarrow z' + z = y$ (2. Dgl.)

4. ADC und Anti-Alias-Filter

(Σ 18)

a) (*) Wie viele effektive Bit besitzt ein analoges Signal mit SNR = 55 dB?

(2) $ENOB = \frac{SNR - 1{,}76}{6{,}02} = \underline{8{,}8 \text{ bit}}$

b) Würden Sie das Signal aus a) mit einem idealen 8-Bit-ADC oder 10-Bit-ADC wandeln? (Kurze Begründung)

(2) 10 Bit, um keine Genauigkeit durch die AD-Wandlung zu verlieren

Von einem ADC sind folgende Daten bekannt:

resolution	10 bit
FSR	5 V
offset error	±3 LSB
DNL	±0.5 LSB
INL	±0.5 LSB

c) (*) Wie groß ist das LSB von diesem ADC?

(2) $LSB = \frac{FSR}{2^{10}-1} = \frac{5\,V}{1023} = \underline{4{,}89 \text{ mV}}$

d) (*) Wie groß ist der Gesamtfehler inklusive Quantisierungsfehler (in Vielfachen von LSB)?

(3) $\frac{\bar{e}}{LSB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\underbrace{3^2}_{\hat{e}_{Offset}} + \underbrace{0{,}5^2}_{\hat{e}_{DNL}} + \underbrace{0{,}5^2}_{\hat{e}_{INL}} + \underbrace{0{,}5^2}_{\hat{e}_{Q}}} = \sqrt{\frac{9{,}75}{3}} = \underline{1{,}8}$

e) Wie viele effektive Bit besitzt der ADC?

(3) $\delta = \frac{\bar{e}}{LSB \cdot 2^{10}/2\sqrt{2}} = 0{,}005$, $SINAD = 20 \cdot \lg \frac{1}{\delta} = 46 \text{ (dB)} \Rightarrow ENOB = \underline{7{,}4 \text{ bit}}$

f) Der ADC arbeitet mit der Abtastfrequenz f_A = 100 kHz. Ein Anti-Alias-Filter (Butterworth 2. Ordnung) soll Störungen über 50 kHz auf 2 % dämpfen. Bestimmen Sie grafisch die Grenzfrequenz des Filters. Skalieren Sie auch die Achsen!

(6)

$f_A/2$: $\lg 5 = 0{,}7$

δ_s: $0{,}02 = 2 \cdot 0{,}01$; $\lg 2 = 0{,}3$

f_g: $10^{0{,}9} \approx 8 \Rightarrow f_g = 1\,kHz \cdot 8 = \underline{8\,kHz}$