Hochschule
Augsburg University of
Applied Sciences

Name:____

Abschlussprüfung Digitale Signalverarbeitung SS2012

Studiengang: Elektrotechnik IK Bachelor, E/ME Wahlfach

Prüfungstermin:	6.7.2012 (90 Minuten)
Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Großmann, Prof. Dr.-Ing. Stolle
Hilfsmittel:	Taschenrechner alle schriftlichen Unterlagen

Generelle Hinweise:

- Aufgaben, die mit einem * gekennzeichnet sind, lassen sich **unabhängig** von anderen Teilaufgaben lösen.
- Überprüfen Sie die **Vollständigkeit** der Prüfungsangabe anhand der Seitennummerierung. Beschriften Sie die Prüfungsangabe und alle losen Blätter, die Sie abgeben, mit Ihrem **Namen**.
- Mobiltelefone **ausschalten** und wegpacken!
- **Lösungen ohne erkennbaren Lösungsweg werden nicht gewertet.**

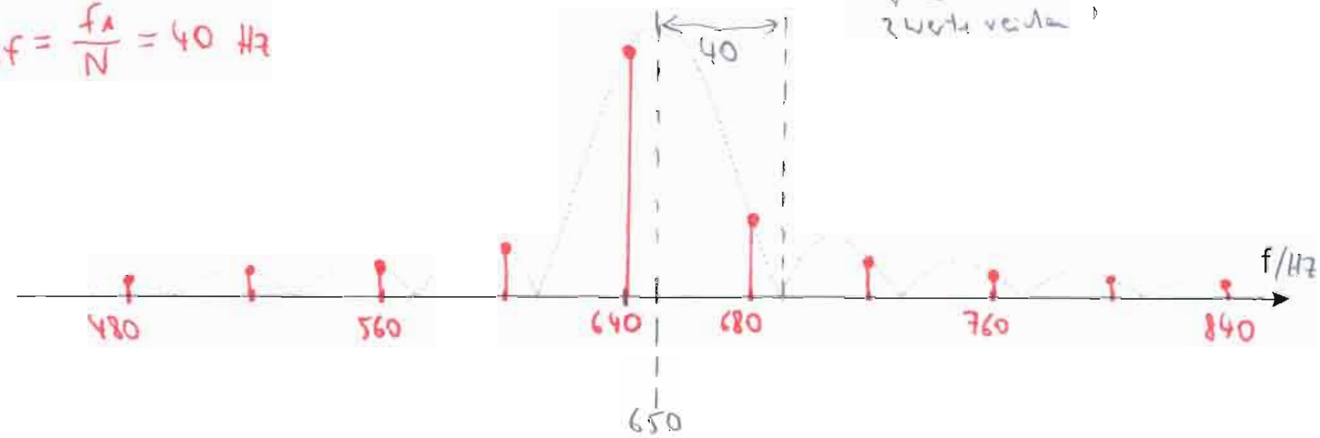
Viel Erfolg!

1. Signale

a) (*) Vom Signal $x(t) = \sin(2\pi \cdot 650\ Hz \cdot t)$ werden 100 Werte aufgenommen mit f_A = 4 kHz. Skizzieren Sie das Betragsspektrum für 450 Hz ≤ f ≤ 850 Hz in das Diagramm und skalieren Sie die Frequenzachse.

8

$\Delta f = \frac{f_A}{N} = 40\ Hz$



b) (*) Wie kann man die störenden Anteile aus a) reduzieren? (Stichwort(e))

2

Fensterung

c) (*) Ein Spektrum besteht aus 128 Werten mit Frequenzabstand Δf = 50 Hz. Wie groß ist die Abtastfrequenz f_A und wie groß ist die gesamte Abtastdauer T?

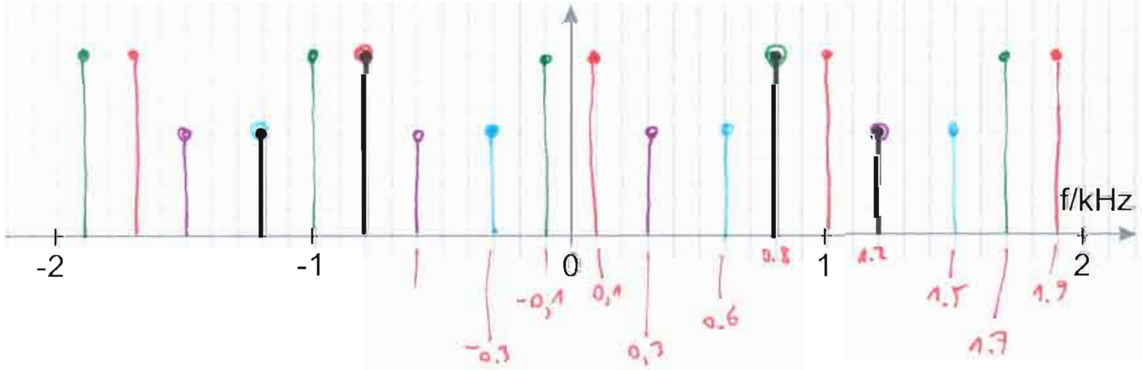
4

$f_A = N \cdot \Delta f = 6400\ Hz$

$T = \frac{1}{\Delta f} = 20\ ms$

d) (*) Ein analoges Signal besitzt das unten gezeichnete Spektrum. Zeichnen Sie dazu das Spektrum der mit 900 Hz abgetasteten Funktion ein (-2 kHz ≤ f ≤ 2 kHz).

8



e) Welche Alias-Frequenzen enthält d) ?

4

$f_1 = 800\ Hz \rightarrow f_{Alias\,1} = 900\ Hz - 800\ Hz = \underline{100\ Hz}$

$f_2 = 1200\ Hz \rightarrow f_{Alias\,2} = |900\ Hz - 1200\ Hz| = \underline{300\ Hz}$

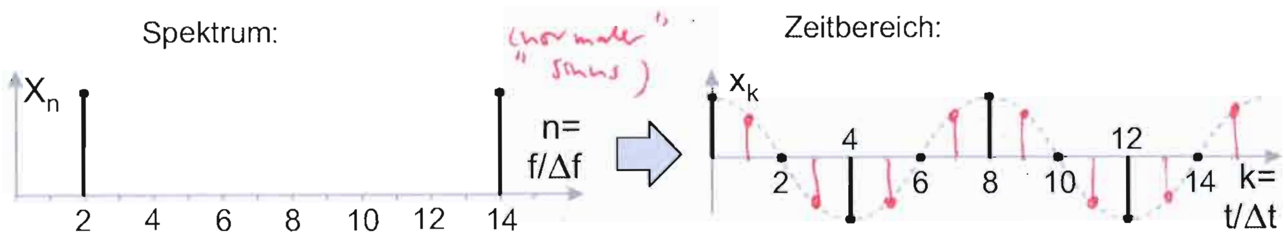
8 f) (*) Berechnen Sie die nichtperiodische Autokorrelation R_k^{xx} des Signals x_k = {0; 1; 2; 1; 0; 0; 0; ...}.

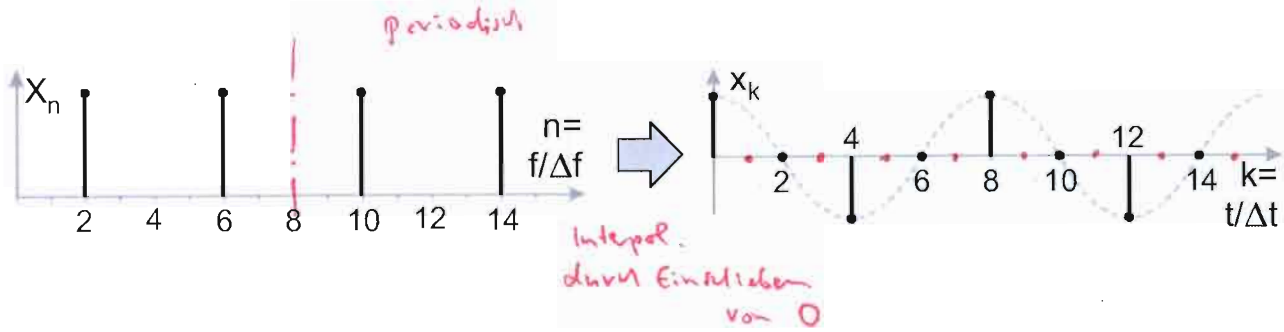
für $k \geq 0$:

$$\left.\begin{array}{c|cccc|l}
k=0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1^2+2^2+1^2 = 6 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2\cdot 1 + 1\cdot 2 = 4 \\
2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\cdot 1 = 1 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\cdot 1 = 0 \\
4..\infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdot 0 = 0
\end{array}\right\} R_k^{xx}$$

$k<0$: $R_{-k}^{xx} = R_k^{xx}$

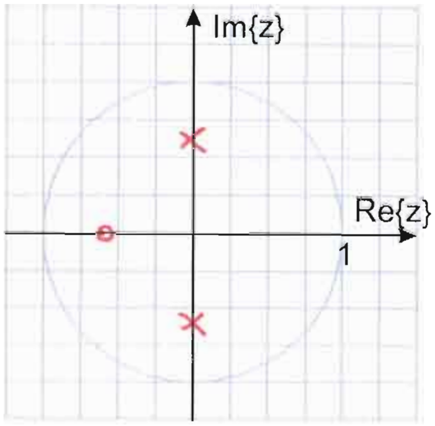
4 g) (*) Interpolation: Vervollständigen Sie die Zeitdiagramme für die ungeraden k-Werte ($f_A/\Delta f = 16$):





2. IIR-System

Ein diskretes System ist gegeben durch $H(z) = \frac{z+\frac{2}{3}}{z^2+\frac{4}{9}}$.



a) (*) Berechnen und zeichnen Sie die Pole und Nullstellen.

4

NS: $z_0 = -\frac{2}{3}$

PS: $z_\infty^2 = -\frac{4}{9} \to z_\infty = \pm\frac{2j}{3}$

b) Ist das System stabil? (Kurze Begründung)

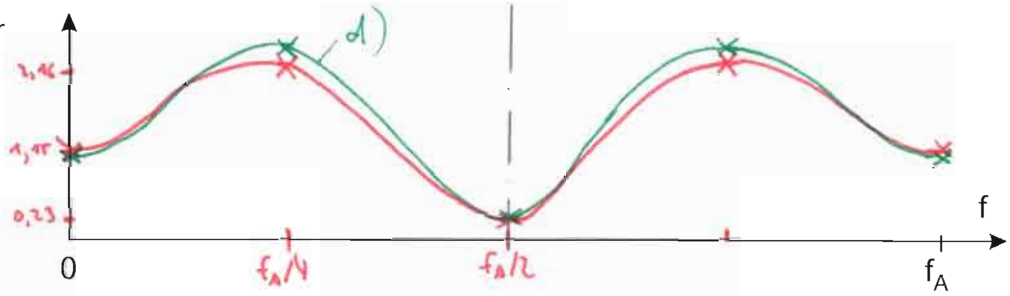
2

$|z_\infty| < 1 \to$ ja

c) (*) Berechnen Sie $|H|$ für $f = 0$, $f = f_A/4$ und $f = f_A/2$. Skizzieren Sie damit grob das Betragsspektrum für $0 \le f \le f_A$.

$z=1$ $z=j$ $z=-1$

8



$H(1) = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{13}{9}} = 1,15$

$|H(j)| = \frac{|j+\frac{2}{3}|}{|-1+\frac{4}{9}|} = \frac{1.2}{0.556} = 2,16$; $H(-1) = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{13}{9}} = -0,23$

d) (*) Die Koeffizienten des Systems werden im Format SFRAC(5.3) quantisiert. Geben Sie die neue Übertragungsfunktion $H_Q(z)$ an. Berechnen und skizzieren Sie das Betragsspektrum ins Diagramm in c).

Achtel

10

$\frac{2}{3} \approx \frac{5}{8}$; $\frac{4}{9} \approx \frac{4}{8} \to H_Q(z) = \frac{z+\frac{5}{8}}{z^2+0.5}$

$H_Q(1) = \frac{1,625}{1,5} = 1.08$

$H_Q(-1) = \frac{0,375}{1.5} = 0,25$

$H_Q(j) = \frac{|j+0.625|}{|-0.5|} = \frac{1.18}{0.5} = 2,36$

e) (*) Am Eingang des Systems wird das Signal $x_k = \{0; 9; 0; 4; 0; 0\dots\}$ angelegt. Berechnen Sie das Ausgangssignal y_k für $k = 0\dots6$.

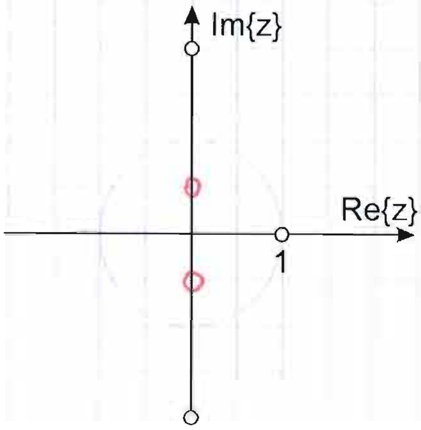
6

$X(z) = \frac{9}{z} + \frac{4}{z^3} = \frac{9z^2+4}{z^3}$

$Y = H \cdot X = \frac{(z+\frac{2}{3})\cdot\cancel{(9z^2+4)}}{\frac{1}{9}\cdot\cancel{(9z^2+4)}\cdot z^3} = 9\cdot\left(\frac{1}{z^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z^3}\right) = 0\cdot 1 + 0\cdot\frac{1}{z} + \frac{9}{z^2} + \frac{6}{z^3}$

$y_k = \{0; 0; 9; 6; 0; 0; \dots\}$

3. FIR-System



Ein FIR-System mit der Abtastrate $f_A = 1$ MHz besitzt die rechts gezeichneten drei Nullstellen. Es gilt $b_0 = 1$.

a) (*) Welche Ordnung hat das System?

2 3. (wg. 3 Nullstellen)

b) (*) Wie lautet die Impulsantwort des Systems?

$$H(z) = \frac{(z-1)\cdot(z-2j)(z+2j)}{z^3}$$

6

$$= \frac{(z-1)\cdot(z^2+4)}{z^3} = \frac{z^3+4z-z^2-4}{z^3} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{4}{z^3}$$

$$h_k = \{1; -1; 4; -4; 0 \cdots\}$$

c) Geben Sie die Differenzengleichung des Systems an.

$$H = \frac{Y}{X} \Rightarrow Y = X\cdot\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{4}{z^3}\right)$$

4

$$y_k = x_k - x_{k-1} + 4\cdot x_{k-2} - 4\,x_{k-3}$$

d) (*) Ergänzen Sie weitere Nullstellen im Diagramm, so dass ein <u>linearphasiges</u> System entsteht.

4

$$\frac{1}{2j} \rightarrow -0.5j$$

$$\frac{-1}{2j} \rightarrow +0.5j$$

e) (*) Welchen Vorteil hat ein linearphasiges System? (nur Stichworte!)

2 keine Phasenverzerrung <u>oder</u> konstante Phasenlaufzeit ...

f) Welche Phasenlaufzeit hat das <u>ergänzte</u> System (in s)?

neue Ordnung : 5

3

$$\Rightarrow t_0 = \frac{5}{2}\cdot \Delta t = 2{,}5\ \mu s$$

$$\Delta t = 1/f_A = 1\mu s$$

4. Algorithmen

a) (*) Berechnen Sie die Konditionszahl des Gleichungssystems $x - y = -1 \wedge x + y = 3$.
Wie stark wirken sich Fehler auf die Lösung von x und y aus? (Stichwort(e))

(8)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 1 - (-1)\cdot 1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \sqrt{4} = 2 ; \quad |A^{-1}| = \sqrt{4 \cdot 0.5^2} = 1$$

$$\mathrm{cond}(A) = |A| \cdot |A^{-1}| = 2$$, eher klein

⇒ geringe Fehlerfortpflanzung

b) (*) Geben Sie ein Lagrange-Polynom an, das die Punkte (−1;0), (0;0), (+1;-2) und (+2;0) interpoliert.

(5)

$$?(x) = \frac{(x-(-1))\cdot(x-0)\cdot(x-2)}{(1-(-1))\cdot(1-0)\cdot(1-2)} \cdot (-2)$$

$$= \frac{(x+1)\cdot x \cdot (x-2)}{2 \cdot 1 \cdot (-1)} \cdot (-2) \quad \left[= (x+1)\cdot x \cdot (x-2) \right]$$

c) (*) Wandeln Sie die Differentialgleichung $y'' + x = y$ in zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung um.

(4)

$(y_1 := y)$

$\underline{y_1' = y_2},$

$y_1'' = \underline{y_2' = y_1 - x},$

5. ADC

Ein Signal soll abgetastet werden. Es liegt im Bereich 0 ... 20 kHz und ist 0,5% genau (= $\bar{\delta}$).

a) (*) Wie groß ist der SNR des Signals <u>und</u> wie vielen effektiven Bit (ENOB) entspricht das?

(4)

$$SNR = -20 \cdot \lg \bar{\delta} = +46\ dB$$

$$ENOB = \frac{46 - 1{,}76}{6{,}02} = 7{,}35\ bit$$

Das Anti-Alias-Filter (siehe |H| rechts) soll Signale (bis 20 kHz) um höchstens 1 dB dämpfen, Störungen ab $f_A/2$ um mindestens 20 dB.

b) (*) Welche Ordnung hat dieses Filter?

$-40\ dB \mathrel{\hat=} \frac{1}{100}$ Ampl. je 10-facher Frq.

$\Rightarrow$ 2. Ordnung $(100 = 10^2)$

c) (*) Wie groß ist die Durchlassfrequenz f_D des Filters (in Hz)?

(2)

$H(f_D) = -1\ dB = H(20\ kHz)$

$f_D = 20\ kHz$

d) (*) Wie groß ist die minimale Abtastfrequenz f_A (in Vielfachen von f_D)?

(3)

$$\frac{f_A/2}{f_D} = 3 \Rightarrow f_A = 6 \cdot f_D \quad (= 120\ kHz)$$

Vom ADC sind folgende Angaben bekannt:

Auflösung	8 bit
DNL	0,5 LSB
INL	1 LSB

e) (*) Wie viele effektive Bit hat der ADC?

(8)

$$\bar{e} = LSB \cdot \sqrt{\frac{\hat{e}_Q^2}{\sqrt{3}^2} + \frac{\hat{e}_{DNL}^2}{\sqrt{3}^2} + \frac{\hat{e}_{INL}^2}{\sqrt{3}^2}} = 0{,}71\ LSB$$

$$\bar{\delta} = \frac{\bar{e}}{2^8 \cdot \frac{1}{2} LSB \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{0{,}71\ LSB}{90{,}5\ LSB} \approx 0{,}00785 \rightarrow SINAD = 42{,}1\ dB$$

$\rightarrow ENOB = 6{,}7$ bit

f) Macht es Sinn, das Signal mit mehr als 8 Bit aufzulösen? (<u>Kurze</u> Begründung)

(3)

– Dieser ADC verschlechtert das Signal → besser z.B. 10 bit

<u>oder</u>:

– man nehme einen besseren 8bit-Wandler, dann passt es (ENOB > 7,35 bit)