Hochschule
Augsburg University of
Applied Sciences

Name:______________________________

Abschlussprüfung Digitale Signalverarbeitung SS2013

Studiengang: Elektrotechnik IK, E/ME Wahlfach

Prüfungstermin:	5.7.2013 (90 Minuten)
Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Großmann, Prof. Dr.-Ing. Stolle
Hilfsmittel:	Taschenrechner alle schriftlichen Unterlagen

Generelle Hinweise:

- Aufgaben, die mit einem * gekennzeichnet sind, lassen sich **unabhängig** von anderen Teilaufgaben lösen.
- Überprüfen Sie die **Vollständigkeit** der Prüfungsangabe anhand der Seitennummerierung. Beschriften Sie die Prüfungsangabe und alle losen Blätter, die Sie abgeben, mit Ihrem **Namen**.
- Mobiltelefone **ausschalten** und wegpacken!
- **Lösungen ohne erkennbaren Lösungsweg werden nicht gewertet.**

- **Bei Unklarheiten bitte Fragen stellen!**
  Si Vous avez des questions, posez-les!

Viel Erfolg!

1. Signale

5

a) (*) Berechnen Sie die <u>periodische</u> Autokorrelationsfunktion R_k^{xx} des Signals $x_k = \{1; 0; 0; -1\}$.

k	1	0	0	-1	R_k^{xx}
0	1	0	0	-1	$1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) = \underline{\underline{+2}}$
1	0	0	-1	1	$-1\cdot 1 = \underline{\underline{-1}}$
2	0	-1	1	0	$= \underline{\underline{0}}$
3	-1	1	0	0	$-1\cdot 1 = \underline{\underline{-1}}$
4	1	0	0	-1	$= +2$ (periodisch)

b) (*) Berechnen Sie die <u>DFT</u> des Signals $x_k = \{2; 1\}$.

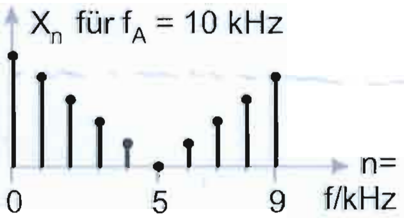
3

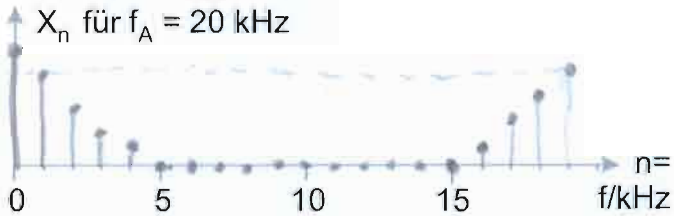
$$X_n = \sum_{k=0}^{1} x_k \cdot e^{-j\frac{2\pi}{2}\cdot k\cdot n} = x_0 \cdot e^{0} + x_1 \cdot e^{-j\pi\cdot n}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{X_0 = x_0 + x_1 = 3}}\ ;\ \underline{X_1} = x_0 + x_1 \cdot e^{-j\pi} = \underline{\underline{x_0 - x_1 = 1}}$$

c) (*) Eine kontinuierliche Funktion x(t) wurde mit f_A = 10 kHz abgetastet (10 Werte; kein Alias, kein Leakage; siehe Spektrum X_n). Zeichnen Sie das Spektrum, das entsteht, wenn von x(t) <u>20</u> Werte mit f_A = <u>20</u> kHz abgetastet werden ($0 \leq f \leq 19$ kHz).

3





(s. Skript „Interpolation im Spektrum")

$$\left(\Delta f = \frac{10\,kHz}{10} = \frac{20\,kHz}{20} = 1\,kHz \right)$$

Die Funktion $\cos(2\pi \cdot 100\,Hz \cdot t)$ wird mit f_A = 10 kHz abgetastet; die Auflösung im Spektrum soll $\Delta f = 20\,Hz$ sein.

d) (*) Aus wie vielen Werten muss das Spektrum X_n berechnet werden?

2

$$N = \frac{f_A}{\Delta f} = \underline{\underline{500}}$$

e) (*) An welchen Stellen n sind Anteile im Spektrum X_n zu sehen?

2

$f_{sig} = 100\,Hz = 5 \cdot \Delta f \Rightarrow$ bei $\underline{\underline{n = 5}}$

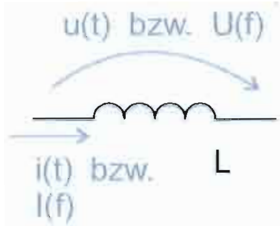
außerdem bei $N - n = \underline{\underline{495}}$

f) Wie viele Werte würde man für eine FFT verwenden? Wie groß ist dann Δf?

2

nächste 2er-Potenz: $N = 512 \Rightarrow \Delta f = \frac{f_A}{N} = 19{,}53\ Hz$

2. Diskretes Modell



Eine ideale Spule soll als diskretes System modelliert werden.
Eingangssignal ist der Strom $i(t)$, Ausgangssignal die Spannung
$u(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$.

Die komplexe Übertragungsfunktion ist $H(f) = \frac{U(f)}{I(f)} = j2\pi f \cdot L$

a) (*) Bestimmen Sie mit Hilfe der bilinearen Transformation die diskrete Übertragungsfunktion $H_1(z)$

3 $j2\pi f \rightarrow \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow H_1(z) = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{z-1}{z+1} \cdot L$

b) Geben Sie die Pol- und Nullstelle an. Welches Problem tritt hier auf?

$z_0 = +1$

3 $z_\infty = -1 \Rightarrow$ nicht stabil (bzw. schwingt)

c) (*) Geben Sie die Differenzengleichung für das diskrete Signal u_k an, wenn die Ableitung nach der Rückwärtsmethode genähert wird.

2 $u_k = L \cdot \frac{i_k - i_{k-1}}{\Delta t}$

d) Bestimmen Sie zu c) die diskrete Übertragungsfunktion $H_2(z)$.

3 $U(z) = \frac{L}{\Delta t} \cdot \left(I(z) - \frac{1}{z} \cdot I(z) \right) \Rightarrow \frac{U}{I} = H_2(z) = \frac{L}{\Delta t} \cdot \left(1 - \frac{1}{z}\right)$

e) Welche Werte haben Pol- und Nullstelle? Um welche Art von System handelt es sich?

$z_0 = +1$

3 $z_\infty = 0 \Rightarrow$ FIR-System

Σ 22

4. FIR-System

Ein FIR-System besitzt die Übertragungsfunktion $H(z) = 0{,}07 - \frac{0{,}249}{z} + \frac{0{,}364}{z^2} - \frac{0{,}249}{z^3} + \frac{0{,}07}{z^4}$;

eine Nullstelle lautet $z_{01} = 0{,}8 \cdot e^{j30°}$.

a) (*) Welche besondere Eigenschaft hat die Übertragungsfunktion? (1 Stichwort)

2 Spiegelpolynom (o.ä.)

b) (*) Geben Sie alle weiteren Nullstellen an (keine Rechnung nötig! Siehe a)).

3 Ordnung = 4 ⇒ 4 Nullstellen

$z_{01}^* = z_{02} = 0{,}8 \cdot e^{-j30°}$, $\frac{1}{z_{01}} = z_{03} = 1{,}25 \cdot e^{-j30°}$, $\frac{1}{z_{01}^*} = z_{04} = 1{,}25 \cdot e^{+j30°}$

c) (*) Berechnen Sie $H(e^{j2\pi f/f_A})$ für die Frequenzen f = 0, f = $f_A/4$ und f = $f_A/2$. Skizzieren Sie grob den Verlauf von $|H(e^{j2\pi f/f_A})|$. Welche Art von Filter stellt das System dar (Tiefpass, Bandsperre, ...)?

7

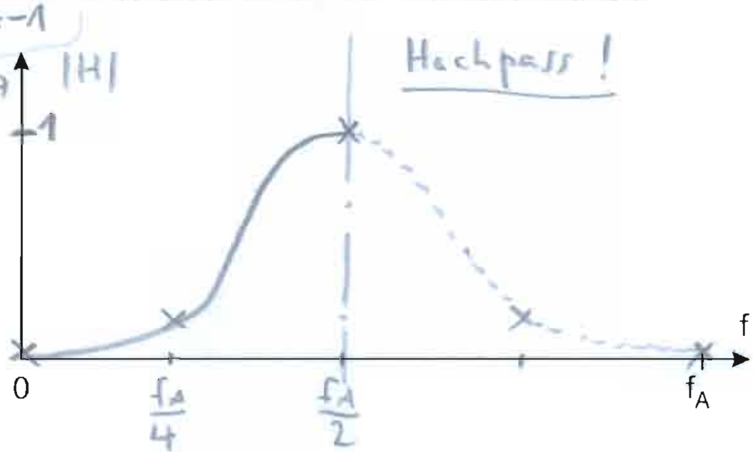
$z(f=0) = +1$; $z(\frac{f_A}{4}) = +j$; $z(\frac{f_A}{2}) = -1$

$H(1) = 0{,}07 - 0{,}249 + 0{,}364 - 0{,}249 + 0{,}07$
$= 0{,}006$

$H(j) = 0{,}07 - 0{,}364 + 0{,}07 = -0{,}224$

$H(-1) = 2 \cdot 0{,}07 + 0{,}364 + 2 \cdot 0{,}249$
$= 1{,}0$

Hochpass!



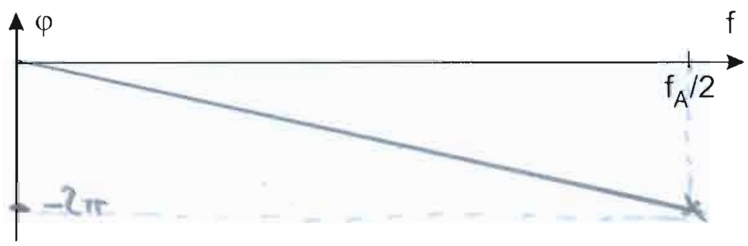
d) (*) Welche Phasenlaufzeit hat das System?

2 $t_0 = \frac{m}{2} \cdot \Delta t = \frac{2}{f_A}$

e) Zeichnen Sie den Verlauf der Phase von $H(e^{j2\pi f/f_A})$. Skalieren Sie auch die Achsen.

4 $\varphi = -t_0 \cdot 2\pi f$ (linear)

$\varphi(\frac{f_A}{2}) = -\frac{2}{f_A} \cdot 2\pi \cdot \frac{f_A}{2} = -2\pi$



f) (*) Die Koeffizienten werden in SFRAC(1.3) quantisiert. Geben Sie die neue Übertragungsfunktion an.

4 $\frac{1}{8}$

$0{,}07 \rightarrow 8 \cdot 0{,}07 = 0{,}56 \approx 1$
$0{,}249 \rightarrow 8 \cdot 0{,}249 = 1{,}992 \approx 2$
$0{,}364 \rightarrow 8 \cdot 0{,}364 = 2{,}91 \approx 3$

$H_Q(z) = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{z} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z^4}$

5. Algorithmen

a) (*) Dasselbe Gleichungssystem kann auf zwei verschiedene Arten gelöst werden:

9

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -0,1 \\ 0,9 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -0,1 \\ 0,1 & -0,1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Bei welcher Form ergibt sich ein kleinerer Rechenfehler? (Nachweis durch Konditionszahlen!)

$$A^{-1} = \frac{1}{+0,9 \cdot 0.1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -0,9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1,11 \\ -10 & 11,11 \end{bmatrix}$$

$$|A| \cdot |A^{-1}| = \sqrt{1 + 0,1^2 + 0,9^2} \cdot \sqrt{1,11^2 + 10^2 + 11,11^2} = 20,2$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-0.09} \cdot \begin{bmatrix} -0.1 & +0.1 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1,11 & -1,11 \\ -1,11 & -11,1 \end{bmatrix}$$

$$|B| \cdot |B^{-1}| = \sqrt{1 + 3 \cdot 0,1^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 1,11^2 + 11,1^2} = 11,4$$

$\text{cond}(B) < \text{cond}(A) \Rightarrow$ besser mit B !

b) (*) Aus der variablen Beschleunigung $a(t)$ soll die Wegstrecke $x(t) = \int_0^t v \cdot dt = \iint_0^t a \cdot dt^2$ numerisch berechnet werden. Wandeln Sie diese Gleichung in ein System mit zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung um. ($x(0) = 0$; $v(0) = 0$)

4

$$\ddot{x} = a(t)$$

$$\dot{x} = v(t)$$
$$\dot{v} = a(t)$$

(oder $x \to y_1$, $\dot{x} \to y_2$, $\ddot{x} = \dot{y}_2$; $\quad \dot{y}_1 = y_2$, $\dot{y}_2 = a(t)$)

$$\left(\begin{array}{l} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{array} \right)$$

c) (*) Eine Messung ergibt 5 Punkte. Kann man diese mit einem einzigen Polynom 3. Ordnung interpolieren? (Kurze Begründung! KEINE Lösung!)

3

Interpolation trifft alle Punkte $\Rightarrow$ Polynom 4. Ordnung nötig

$\Rightarrow$ nein

6. ADC

Von einem 12 bit-ADC sind die Daten rechts gegeben.

Parameter	Spec	Units
SINAD ≈ SNR	68	dB
Full Scale Range	3.3	V
Integral Nonlinearity	±0.7	LSB
Differential Nonlinearity	±0.5	LSB
Gain Error	±1	LSB
Offset Error	±2	LSB

a) (*) Wie groß ist ein LSB (in V)?

2 $LSB = \frac{FSR}{2^{12}} = 8 \cdot 10^{-4}\ V$

b) (*) Wie viele effektive Bit hat der ADC entsprechend seinem SINAD?

2 $ENOB = \frac{68 - 1{,}76}{6{,}02} = \underline{\underline{11{,}0}}$

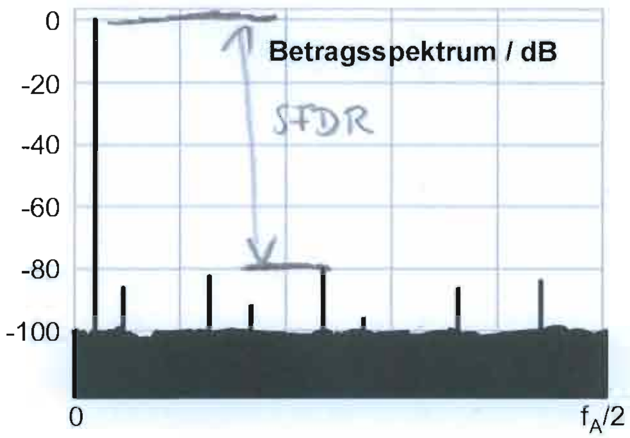
c) (*) Wie viele effektive Bit hat der ADC, wenn auch Offset- und Gain-Fehler berücksichtigt werden?

6 $\bar{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}7^2 + 0{,}5^2 + 1^2 + 2^2}\ LSB = 1{,}41\ LSB$

$U_{eff}^{Sig} = (2^{12} \cdot LSB)/2/\sqrt{2} = 1448\ LSB$; $\delta = \frac{\bar{e}}{U_{eff}} = 9{,}7 \cdot 10^{-4}$; $SINAD = 60{,}2\ dB$

$ENOB = \underline{\underline{9{,}7}}$

Das Spektrum rechts zeigt ein sinusförmiges Signal mit Oberwellen und Rauschen.



d) (*) Lesen Sie den SFDR aus dem Spektrum ab.

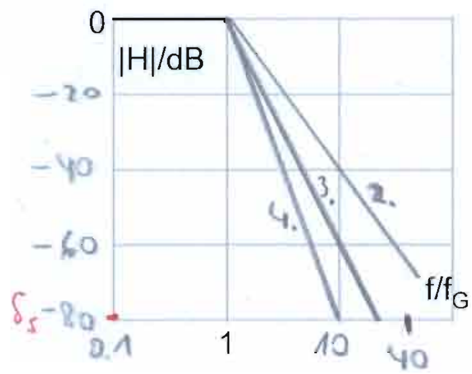
2 $+80\ dB$

e) (*) Aus wie vielen Werten wurde das Spektrum ungefähr berechnet? (Hinweis: Durchschnitt des Rauschteppichs bei -101 dB)

3 $101\ dB = SNR + 10 \cdot \lg \frac{N}{2}$

$\Rightarrow 10 \cdot \lg\left(\frac{N}{2}\right) = 101 - 68 = 33\ dB \Rightarrow N \approx 4000$ (wahrscheinl. 4096!)

Das Anti-Alias-Filter (AAF) soll Störungen ab $f_A/2$ = 400 kHz um mindestens 80 dB dämpfen.



f) (*) Bestimmen Sie grafisch die Filterordnung, wenn die Grenzfrequenz f_G = 10 kHz ist. Zeichnen Sie $f_A/2$ möglichst genau ein!

4 $\frac{f_A/2}{f_G} = 40 = 4 \cdot 10$; $\lg 4 = 0.6$

$\Rightarrow$ 3. Ordnung

g) (*) Wo liegt die Grenzfrequenz f_G bei einem Filter 4. Ordnung? (Grafische Lösung)

3 $\frac{f_A/2}{f_G} = 10 \Rightarrow f_G = \frac{f_A/2}{10} = \underline{\underline{40\ kHz}}$