Hochschule
Augsburg University of
Applied Sciences

Name:____________________________________

Abschlussprüfung Digitale Signalverarbeitung SS2014

Studiengang: Elektrotechnik IK, E/ME Wahlfach

Prüfungstermin:	4.7.2014 (90 Minuten)
Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Großmann, Prof. Dr.-Ing. Stolle
Hilfsmittel:	Taschenrechner alle schriftlichen Unterlagen (Vorlesung, Übung, alte Prüfungen, Bücher, ...)

Generelle Hinweise:

- Aufgaben, die mit einem * gekennzeichnet sind, lassen sich **unabhängig** von anderen Teilaufgaben lösen.
- Überprüfen Sie die **Vollständigkeit** der Prüfungsangabe anhand der Seitennummerierung. Beschriften Sie die Prüfungsangabe und alle losen Blätter, die Sie abgeben, mit Ihrem **Namen**.
- Mobiltelefone **ausschalten** und wegpacken!
- **Lösungen ohne erkennbaren Lösungsweg werden nicht gewertet.**

- **Bei Unklarheiten bitte Fragen stellen!**

Viel Erfolg!

1. Signale

Σ 20

3

a) (*) Berechnen Sie die nichtperiodische Autokorrelationsfunktion R_k^{xx} des Signals $x_k = \{1; 0; -2;\ 0\}$.

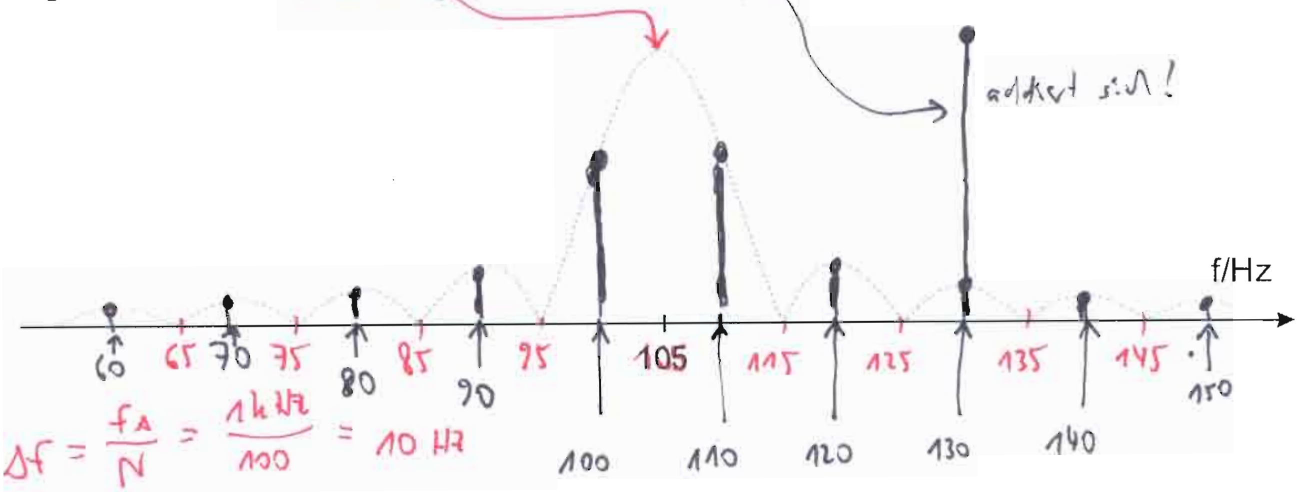
k	1	0	−2	0	R_k^{xx}
0	1	0	−2	0	$1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) = 5$
1	0	−2	0	0	$0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 = 0$
2	−2	0	0	0	$-2 \cdot 1 + 0 = -2$
3	0	0	0	0	$= 0$
4	0	0	0	0	$= 0$
					⋮

b) (*) Kann man R_k^{xx} aus a) über das Spektrum berechnen, d.h. gilt hier $S_n^{xx} = |X_n|^2$?
(mit $S_n^{xx} \overset{DFT}{\longleftrightarrow} R_k^{xx}$ und $x_k \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_n$) - Kurze Begründung!

2 nein, weil x_k nicht periodisch (Voraussetzung für DFT)

c) (*) Vom Signal $x(t) = \cos(2\pi \cdot 105Hz \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 130Hz \cdot t)$ werden 100 Werte mit $f_A = 1\ kHz$ abgetastet. Skizzieren Sie das Betragsspektrum für $60\ Hz \le f \le 150\ Hz$ und skalieren Sie die f-Achse.

5



$\Delta f = \frac{f_A}{N} = \frac{1\,kHz}{100} = 10\ Hz$

(Spektrum existiert nur an "schwarzen" Markierungen)

Ein Signal wird mit f_A = 1 MHz abgetastet; die Auflösung im Spektrum soll $\Delta f = 1\ kHz$ sein.

d) (*) Aus wie vielen Werten muss das Spektrum X_n berechnet werden?

2

$N = \frac{f_A}{\Delta f} = 1000$

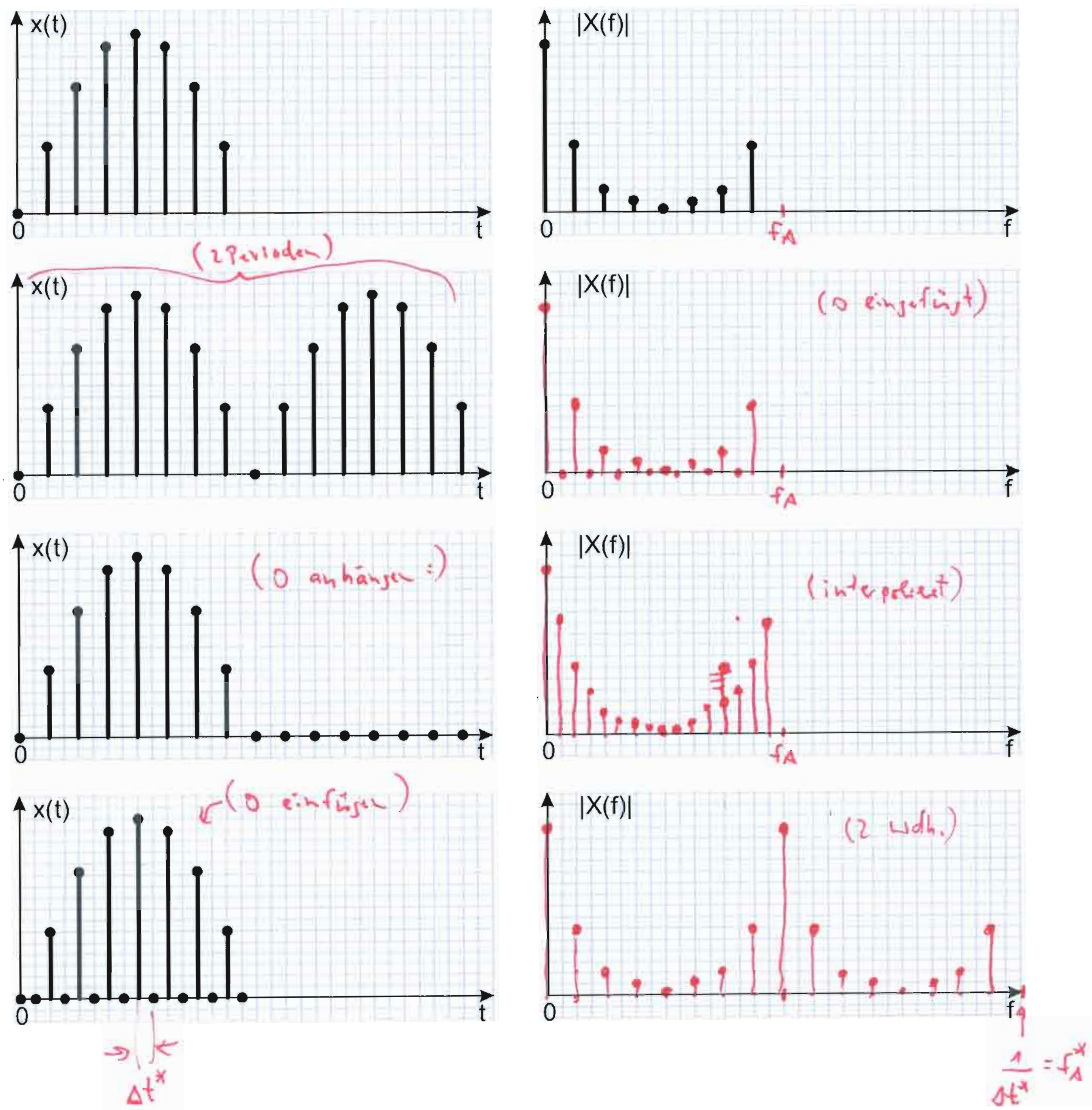
e) Wie viele Werte würde man für eine FFT verwenden? Welche Auflösung Δf ergäbe sich dann?

2

nächste 2-Potenz: $2^{10} = 1024 \Rightarrow \Delta f = \frac{f_A}{N} = 977\ Hz$

f) (*) Die obere Reihe der Diagramme zeigt ein diskretes Signal (8 Werte) und seine DFT. Skizzieren Sie die DFT zu den unteren drei Reihen (die Zeitsignale haben 16 Werte; überall gleicher Frequenz-Maßstab).

6



2. IIR-System (Σ 19)

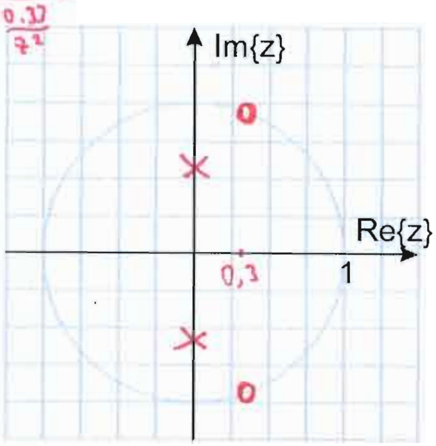
Ein System ist gegeben durch $H(z) = \dfrac{z^2 - 0{,}6z + 1}{z^2 + 0.33} = \dfrac{1 - \frac{0.6}{z} + \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{0.33}{z^2}}$

4

a) (*) Berechnen und zeichnen Sie die Pole und Nullstellen.

$NS: z_0 = +\frac{0.6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0.6}{2}\right)^2 - 1} = 0.3 \pm j \cdot \sqrt{0.91}$

$PS: z_\infty = \pm j\sqrt{0.33}$



6

b) Berechnen Sie $H(z = e^{j2\pi f\Delta t})$ für $\overset{z=1}{f = 0}$, $\overset{z=j}{f = \frac{f_A}{4}}$ und $\overset{z=-1}{f = \frac{f_A}{2}}$. Skizzieren Sie daraus und aus a) das Spektrum. Um welchen Filtertyp handelt es sich?

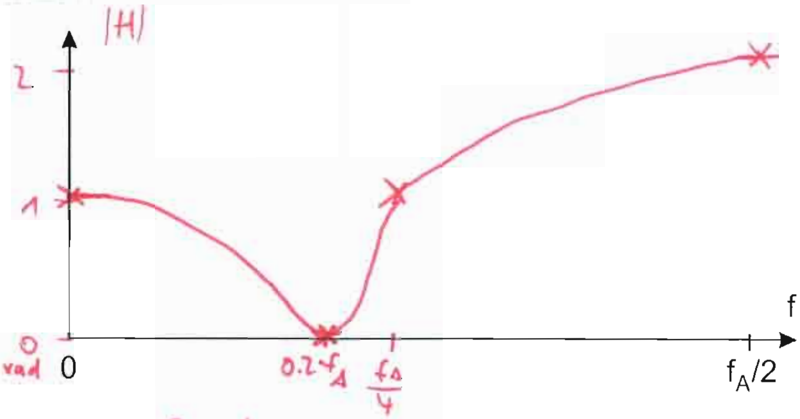
$H(1) = \dfrac{1 - 0.6 + 1}{1.33} = 1{,}05$

$H(j) = \dfrac{\cancel{1} - 0.6j + \cancel{1}}{-1 + 0.33} = +0.9j$

$H(-1) = \dfrac{1 + 0.6 + 1}{1.33} = 1{,}95$

! Nullstelle bei/nahe $2\pi f \cdot \Delta t = \frac{2\pi f}{f_A} = 72° = 1{,}26$ rad

$\Rightarrow f = 0.2 \cdot f_A$



Bandsperre

3

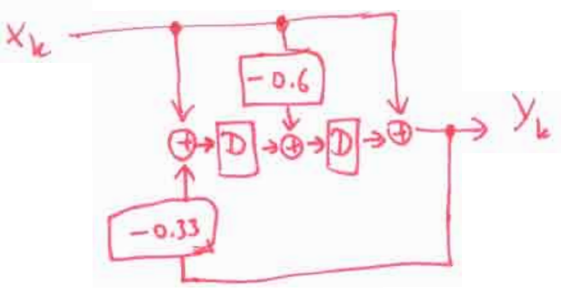
c) (*) Bestimmen Sie die Differenzengleichung des Systems.

$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$, $Y \cdot \left(1 + \frac{0.33}{z^2}\right) = X \cdot \left(1 - \frac{0.6}{z} + \frac{1}{z^2}\right)$

$\hookrightarrow y_k + 0.33 \cdot y_{k-2} = x_k - 0.6 \cdot x_{k-1} + x_{k-2}$

3

d) (*) Zeichnen Sie das System in der Transponierten Direktstruktur II.



3

e) (*) Wie lautet die Übertragungsfunktion, wenn die Koeffizienten in SFRAC1.3 quantisiert werden? (Hinweis: Multiplikationen mit 1 werden nicht ausgeführt, „1" werden also nicht quantisiert.)

$\left.\begin{array}{l} -0.6 = \frac{-4.8}{8} \approx \frac{-5}{8} \\ 0.33 = \frac{2.64}{8} \approx \frac{3}{8} \end{array}\right\}$ $H_q(z) = \dfrac{1 - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{z^2}}$ oder $\dfrac{z^2 - \frac{5}{8} \cdot z + 1}{z^2 + \frac{3}{8}}$

3. FIR-System

Ein linearphasiges FIR-System hat die Ordnung 111 (also 112 Koeffizienten) und arbeitet mit der Abtastfrequenz $f_A = 1\ MHz$.

a) (*) Wie groß sind die Phasenlaufzeiten für eine Sinusschwingung mit 10 kHz und eine mit 100 kHz?

3 $t_0 = \frac{m}{2} \cdot \Delta t = \frac{111}{2} \cdot \frac{1}{1\,MHz} = 55{,}5\ \mu s$ (gleich für beide!)

b) (*) Warum muss eine der Nullstellen bei $z = 1$ oder bei $z = -1$ liegen? (Kurze Begründung!)

2 ungerade Ordnung ⇒ zu einer NS gibt's kein Paar / Vier-Gruppe,
nur für $z_0 = \pm 1$ gilt $z_0 = \frac{1}{z_0} = z_0^*$

c) (*) Ein Signal soll mit dem System blockweise mit Hilfe der FFT gefiltert werden; die Blocklänge ist 100. Wie viele Nullen müssen an einen Block angehängt werden?

$N^* = 100, \quad M = 112$

3 min. neue Blocklänge $M + N^* - 1 = 211$
FFT ⇒ Zweier-Potenz $256 \quad (= 2^8)$
⇒ 156 Nullen anhängen

Ein Moving–Average –Filter mittelt über 10 Zeitwerte $\left(y_k = \frac{1}{10} \cdot \sum_{p=0}^{9} x_{k-p} \right)$.

d) (*) Geben Sie die Übertragungsfunktion als Bruch mit nur 4 Termen an.

3 $H = \frac{1}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \frac{1}{z^9}\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{10} \cdot \frac{z^{-10} - 1}{z^{-1} - 1} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1 - z^{-10}}{1 - \frac{1}{z}}$

geom. Reihe

e) (*) Am Eingang liegt das nichtperiodische Signal $x_k = \{1; -1; 0; 0; 0 \dots\}$ an. Bestimmen Sie das Ausgangssignal y_k.

"moving average" ⇒

$k=0$	1	2…9	10	11…∞
$y_k = \frac{1}{10}$	0	0	$-\frac{1}{10}$	0

3

oder: $Y(z) = H \cdot \left(1 - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{10} \cdot \left(1 - z^{-10}\right)$

$\Updownarrow$

$y_k = \frac{1}{10} \cdot \{1; \underbrace{0 \dots 0}_{9\ \text{Nullen}}; -1\}$

4. Algorithmen

$\Sigma 13$

a) (*) Die beiden Gleichungssysteme liefern im Idealfall dieselbe Lösung. Welche Form lässt sich mit besserer Genauigkeit auflösen (Nachweis durch Konditionszahlen)?

7

$$\underbrace{\begin{aligned} 2x + y &= d_1 \\ x + 2y &= d_2 \end{aligned}}_{A} \qquad \text{oder:} \qquad \underbrace{\begin{aligned} 2x + y &= d_1 \\ x - y &= d_1 - d_2 \end{aligned}}_{B}$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{2\cdot 2 - 1\cdot 1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$\operatorname{cond}(A) = |A| \cdot |A^{-1}| = \sqrt{4+4+1+1} \cdot \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}$
$= 3{,}33$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{-2-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & +\frac{1}{3} \\ +\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$\operatorname{cond}(B) = \sqrt{4+3} \cdot \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{3}{9}}$
$= 2{,}33$

$\downarrow$

kleiner $\Rightarrow$ besser

Die Punkte (−1;−1), (0;0), (1;2) und (2;4) sollen mit Splines interpoliert werden.

b) (*) Wie viele Splines benötigt man und wie viele Unbekannte ergeben sich?

2

4 Pkt. $\Rightarrow$ 3 Splines mit je 4 Var. $\Rightarrow$ 12 Unbekannte

4

c) (*) Geben Sie alle Gleichungen an, die man für den Punkt (1;2) aufstellen kann.

$\boxed{1.}$ $S_1(1) = a_1 \cdot 1^3 + b_1 \cdot 1^2 + c_1 \cdot 1 + d_1 = 2$

$\boxed{2.}$ $S_2(1) = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 2$

$\boxed{3.}$ $S_1'(1) = 3a_1 \cdot 1^2 + 2b_1 \cdot 1 + c_1 = S_2'(1) = 3a_2 + 2 \cdot b_2 + c_2$

$\boxed{4.}$ $S_1''(1) = 6a_1 + 2b_1 = S_2'' = 6a_2 + 2b_2$

5. ADC

(Σ23)

Auszug aus dem Datenblatt eines ADC:

Parameter	Spec	Units	Errors	Spec	Units
Full Scale Range	5	V	Integral Nonlinearity	±0.7	LSB
Resolution	13	bits	Differential Nonlinearity	±0.7	LSB
Throughput rate	1	MSPS	Gain Error	±7	LSB
SINAD ≈ SNR	74	dB	Offset Error	±4	LSB
SFDR ≈ |THD|	85	dB			

a) (*) Wie groß ist ein LSB (in V)?

(2)

$$LSB = \frac{FSR}{2^{13}} = 0.61\ mV$$

b) (*) Berechnen Sie den SINAD aus allen Fehlern. Warum ist der Wert kleiner als im Datenblatt?

(6)

$$\bar{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\underset{INL}{0.7^2} + \underset{DNL}{0.7^2} + \underset{Gain}{7^2} + \underset{Offset}{4^2} + \underset{Quant.}{0.5^2}}\ LSB = 4.7\ LSB$$

$$U_{eff}^{Sig} = \frac{2^{13}\ LSB}{2 \cdot \sqrt{2}} = 2896\ LSB \Rightarrow \bar{\delta} = \frac{\bar{e}}{U_{eff}^{Sig}} = 1.62 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow SINAD = -20 \cdot \lg \bar{\delta} = +55.8\ dB$$

Datenblatt: nur INL, DNL und Quantisierung

c) (*) Wie viele effektive Bit hat der ADC gemäß Datenblatt?

(2)

$$ENOB = \frac{SINAD - 1.76}{6.02} = 12$$

Das Spektrum rechts zeigt ein sinusförmiges Signal (Amplitude = FSR/2 = 2,5 V).
Es wurde aus 8192 Werten berechnet.

d) (*) Bei $f_A/4$ findet sich die größte Oberwelle. Zeichnen Sie sie ins Diagramm ein.

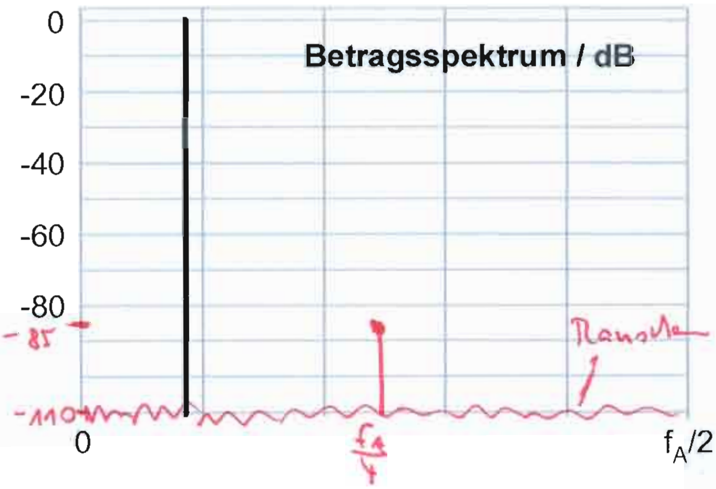
(1)

aus SFDR bzw. THD: bei −85 dB

e) Zeichnen Sie den Rauschteppich entsprechend dem Datenblatt-SNR ein.

(2)

$$SFDR_{ideal} = SNR + \underbrace{10 \cdot \lg \frac{N}{2}}_{36\ dB} = 110\ dB$$



f) Kann man ein zusätzliches sinusförmiges Signal mit Amplitude 75 µV als Signal erkennen? (Rechnung + kurze Begründung!)

(3)

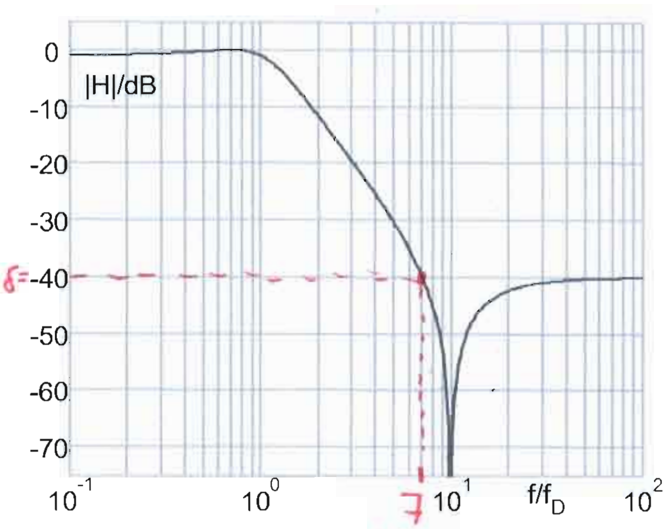
$$\text{Pegel: } \frac{75\ \mu V}{2.5\ V} \hat{=} -90\ dB < \text{Oberwelle} \Rightarrow \text{nein}$$

Das Anti-Alias-Filter (AAF) soll Störungen ab $f_A/2$ = 500 kHz um mindestens den Faktor 100 dämpfen.

g) (*) Bestimmen Sie grafisch die Durchlassfrequenz f_D.

(3) $\delta = \frac{1}{100} \hat{=} -40\ \text{dB}$

$\frac{f_A}{2} = 7 \cdot f_D \Rightarrow f_D = 71.4\ \text{kHz}$



$= \frac{f_A/2}{f_D}$

h) (*) Das Filter ist elliptisch. Nennen Sie einen Vorteil und einen Nachteil dieses Typs.

(2)

⊕ kurzer Übergang

⊖ Wellig im Durchlass- und Sperrbereich

i) (*) Der ADC wird mit einem Mikrocontroller über SPI verbunden. Zeichnen Sie die nötigen Verbindungen und (falls benötigt) Widerstände ein.

(2)