

Name: _____

Abschlussprüfung Digitale Signalverarbeitung SS2015

Studiengang: Elektrotechnik IK, E/ME Wahlfach

Prüfungstermin: 3.7.2015 (90 Minuten)
Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Großmann, Prof. Dr.-Ing. Stolle
Hilfsmittel: Taschenrechner
alle schriftlichen Unterlagen (Vorlesung, Übung, alte Prüfungen,
Bücher, ...)

Generelle Hinweise:

- Aufgaben, die mit einem * gekennzeichnet sind, lassen sich **unabhängig** von anderen Teilaufgaben lösen.
- Überprüfen Sie die **Vollständigkeit** der Prüfungsangabe anhand der Seitennummerierung. Beschriften Sie die Prüfungsangabe und alle losen Blätter, die Sie abgeben, mit Ihrem **Namen**.
- Mobiltelefone **ausschalten** und wegpacken!
- **Lösungen ohne erkennbaren Lösungsweg werden nicht gewertet.**

- **Bei Unklarheiten bitte Fragen stellen!**

Viel Erfolg!

Σ13

1. Signale und Systeme

a) (*) Berechnen Sie die nichtperiodische Korrelationsfunktion R_k^{xy} der Signale $x_k = \{1; 2; 3; 0; 0; \dots\}$ und $y_k = \{-1; 0; 1; 0; 0; \dots\}$.

4

| k | $x_k=1$ | 2 | 3 | R_k^{xy} |
|----|----------|----|----|---|
| -2 | 0 | 0 | -1 | $(-1) \cdot 3 = \underline{\underline{-3}}$ |
| -1 | 0 | -1 | 0 | $(-1) \cdot 2 = \underline{\underline{-2}}$ |
| 0 | $y_k=-1$ | 0 | 1 | $(-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 = \underline{\underline{+2}}$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | $1 \cdot 2 = \underline{\underline{2}}$ |
| 2 | 1 | 0 | 0 | $1 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$ |
| 3 | 0 | 0 | 0 | $\underline{\underline{0}}$ |

b) (*) Die z-Transformierte eines Signals lautet $X(z) = 2z - 1 - \frac{3}{z}$. Kann dieses Signal die Impulsantwort eines kausalen Systems sein? (Kurze Begründung)

2

x_k beginnt mit $k=-1$ (wegen $2 \cdot z = 2 \cdot (\frac{1}{z})^{-1}$)
 \Rightarrow nein

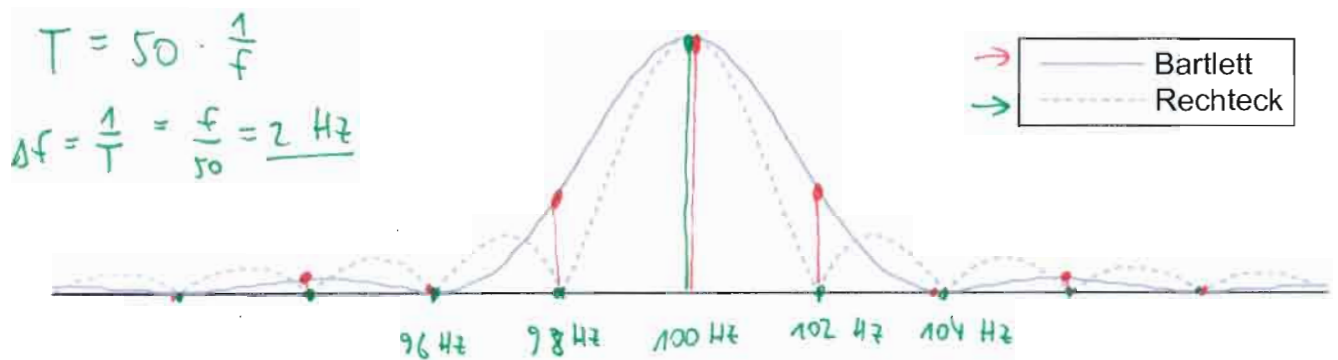
c) (*) Eine Sinusschwingung mit Frequenz 10 kHz wird abgetastet mit $f_A = 300$ Hz. Wo liegt die Aliasfrequenz?

2

Modulo: $10 \text{ kHz} = 33 \cdot f_A + 100 \text{ Hz}$
 $\leq \frac{f_A}{2} \rightarrow 100 \text{ Hz ist Aliasfreq.}$

d) (*) Von einer Sinusschwingung ($f = 100$ Hz) werden genau 50 Perioden abgetastet mit $f_A = 1$ kHz. Skizzieren Sie mit 2 Farben das Spektrum für die beiden Fälle: Signal wird nicht gefenstert (= Rechteck) bzw. Signal wird mit Bartlett-Window gefenstert. Skalieren Sie die Frequenzachse (mind. 2 Werte!).

5



Rechteck: kein Leakage!
 Bartlett: Leakage wg. Verzerrung durch Fenster

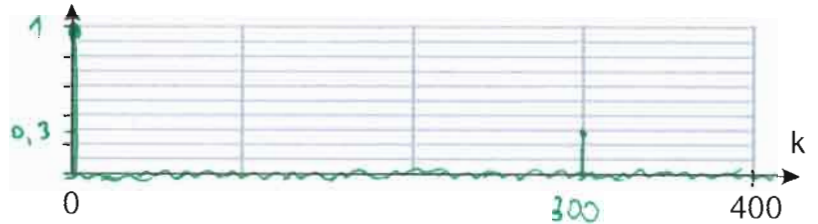
2. Echo

(Σ 9)

Das System mit der Übertragungsfunktion $H(z) = 1 + \frac{0,3}{z^{300}}$ und Abtastfrequenz 10 kHz modelliert ein Echo. Am Eingang des Systems liegt ein reines Rauschsignal an.

a) (*) Wie groß ist die Nachhall-Zeit (in Sekunden)?

2 $t_{hall} = \frac{300}{10 \text{ kHz}} = 30 \text{ ms}$



b) (*) Skizzieren Sie die Autokorrelationsfunktion R_k^{yy} des Ausgangssignals.

3

c) (*) Ist das System linearphasig? (Kurze Begründung/Stichworte)

2

Nein, kein Spiegelpolynom ($b_0 \neq b_{300}$)

d) (*) Geben Sie die Übertragungsfunktion des inversen Systems an.

2

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{1 + \frac{0,3}{z^{300}}}$$

3. Modell

(Σ 10)

Ein analoger RC-Tiefpass mit der Übertragungsfunktion $H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$ wird digital nachgebildet.

a) (*) Geben Sie mit Hilfe der bilinearen Transformation allgemein die digitale Übertragungsfunktion $H(z)$ an. (Beliebiges Format, NICHT erweitern/kürzen!)

2

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{z-1}{z+1} \cdot \tau}$$

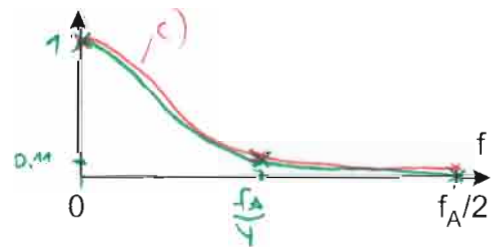
statt $p \rightarrow j\omega$

Für $\tau = 90 \text{ ms}$ und $f_A = 50 \text{ Hz}$ ergibt sich $H(z) = \frac{0,1z + 0,1}{z - 0,8}$

b) (*) Berechnen Sie $|H(z)|$ für $f = 0 \text{ Hz}$, $12,5 \text{ Hz}$ und 25 Hz . Skizzieren Sie damit den Verlauf des Spektrums.

4

| f | z | H(z) |
|---------|----|------|
| 0 | 1 | 1 |
| $f_A/4$ | j | 0,11 |
| $f_A/2$ | -1 | 0 |



c) (*) Berechnen Sie für die gleichen Frequenzen $H(\omega)$ des analogen Systems und skizzieren Sie den Betrag in das Diagramm aus b).

4

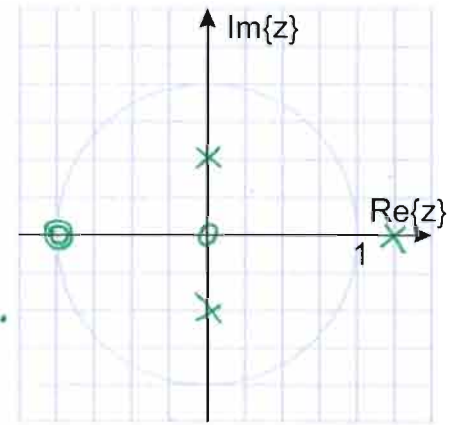
| f | H(j\omega) |
|---------|------------|
| 0 | 1 |
| 12,5 Hz | 0,14 |
| 25 Hz | 0,09 |

(Σ 15)

3. IIR-System

Ein System ist gegeben durch

$$H(z) = \frac{z \cdot (z + 1)^2}{(z^2 + 0,25) \cdot (z - 1,25)} = \frac{z^3 + 2z^2 + z}{z^3 - 1,25z^2 + 0,25z - 0,3125}$$



a) (*) Berechnen und zeichnen Sie die Pole und Nullstellen.

3

NS: 0 ; -1 (doppelt)
 PS: 1,25 ; ± j/2

b) (*) Bestimmen Sie die Differenzgleichung des Systems.

4

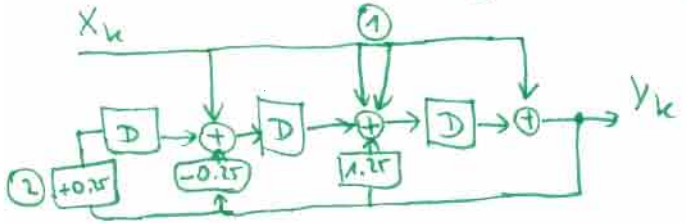
$$\frac{Y}{X} = \frac{1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}}{1 - \frac{1,25}{z} + \frac{0,25}{z^2} - \frac{0,3125}{z^3}} \Rightarrow Y \left(1 - \frac{1,25}{z} + \frac{0,25}{z^2} - \frac{0,3125}{z^3} \right) = X \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} \right)$$

$$\downarrow y_k - 1,25 \cdot y_{k-1} + 0,25 \cdot y_{k-2} - 0,3125 \cdot y_{k-3} = x_k + 2 \cdot x_{k-1} + x_{k-2}$$

c) (*) Das System soll in der Transponierten Direktstruktur II mit Koeffizienten im Format SFRACT(2.2) gezeichnet werden. Ändern Sie die Struktur so, dass die Koeffizienten darstellbar sind.

5

Berechnung: $-\frac{8}{4} \dots \frac{7}{4} \Rightarrow$ 1) Prädiktor: $z = \frac{8}{4}$ nicht darstellbar \rightarrow aufheben
 2) $0,3125 \approx \frac{1}{4}$



d) (*) Das System ist instabil. Geben Sie die Übertragungsfunktion eines vorgeschalteten Allpasses 1. Ordnung an, mit dem das Gesamtsystem stabil wird. (Original-H(z); nicht quantisiert!)

3

Kompensation von $z_{po} = 1,25$ durch

$$H_{AP}(z) = \frac{-0,8 \cdot z + 1}{z - 0,8} \quad \left(= \frac{-0,8 + \frac{1}{z}}{1 - \frac{0,8}{z}} \right)$$

(Σ 16)

4. Algorithmen

a) (*) Die beiden Gleichungssysteme liefern im Idealfall dieselbe Lösung. Welche Form lässt sich mit besserer Genauigkeit auflösen (Nachweis durch Konditionszahlen)?

$$\begin{aligned} 2x + y &= d_1 \\ x + 2y &= d_2 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} 2x + y &= d_1 \\ x - y &= d_1 - d_2 \end{aligned}$$

(7)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; |A| = \sqrt{4+1+1+1} = \sqrt{10} = 3,16$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; |A^{-1}| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{10} = 1,05$$

$$\text{cond}(A) = \frac{1}{3} \cdot 10 = 3,33$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; |B| = \sqrt{4+1+1+1} = \sqrt{7} = 2,65$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; |B^{-1}| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{7} = 0,88$$

$$\text{cond}(B) = \frac{1}{3} \cdot 7 = 2,33$$

↓
klein → besser

b) (*) Gegeben sind die Punkte in der Tabelle. Berechnen Sie eine Interpolation 2. Ordnung für x=1 mit Hilfe des Neville-Algorithmus.

(6)

| x | y | 1. Ord. | 2. Ord. |
|---|---|--|-----------------------|
| 0 | 0 | $\begin{matrix} 2^{\textcircled{1}} \\ 5^{\textcircled{2}} \end{matrix}$ | $3^{\textcircled{3}}$ |
| 2 | 4 | | |
| 3 | 3 | | |

Formeln:

$$P(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \cdot y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot y_{i+1}$$

① $\frac{2-1}{2-0} \cdot 0 + \frac{1-0}{2-0} \cdot 4 = 2$

② $\frac{3-1}{3-2} \cdot 4 + \frac{1-2}{3-2} \cdot 3 = 5$

③ $\frac{3-1}{3-0} \cdot 2 + \frac{1-0}{3-0} \cdot 5 = 3$

c) (*) Wandeln Sie die Differentialgleichung in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung um:

$$y''' = x \cdot y - (y'')^2$$

(3)

$$\begin{aligned} y &= z_0 \\ y' &= z_1 \Rightarrow z_0' = z_1 \\ y'' &= z_2 \Rightarrow z_1' = z_2 \\ (y''') &= z_2' = x \cdot z_0 - z_2^2 \end{aligned}$$

5. ADC

(Σ 29)

Auszug aus dem Datenblatt eines ADC:

| Parameter | Spec | Units | Parameter | Spec | Units |
|------------------|------|-------|-----------------|---------|-------|
| Full Scale Range | 3.3 | V | channels | 1 ... 8 | |
| Resolution | 12 | bits | Throughput rate | 1 | MSPS |
| SINAD | 70.5 | dB | THD | -80 | dB |

a) (*) Wie groß wäre der SINAD bei einem idealen ADC?

②

$$12 \cdot 6,02 + 1,76 = \underline{74} \text{ (dB)}$$

b) (*) Nennen Sie zwei nichtlineare Fehlerquellen, die hier den SINAD verschlechtern.

②

- INL
- DNL (nicht: Quantisierung)

c) (*) Wie viele effektive Bit hat der ADC?

②

$$ENOB = \frac{SINAD - 1,76}{6,02} = \underline{11,4}$$

d) (*) Berechnen Sie den SNR (also ohne Oberwellen).

④

$$\frac{P_n + P_{GW}}{P_{sig}} = \frac{10^{-SINAD/10}}{8,9 \cdot 10^{-8}}; \quad \frac{P_{GW}}{P_{sig}} = \frac{10^{-THD/10}}{1 \cdot 10^{-8}} \Rightarrow \frac{P_n}{P_s} = 7,9 \cdot 10^{-8} \stackrel{\wedge}{=} -71,0 \text{ dB} = -SNR$$

e) (*) Wie groß darf die höchste Signalfrequenz sein, wenn alle 8 Kanäle des ADC genutzt werden und kein Alias auftreten soll?

②

$$f_A = \frac{1 \text{ MHz}}{8} = 125 \text{ kHz} \Rightarrow f_{max} = 62,5 \text{ kHz}$$

f) (*) Wie groß ist die zeitliche Verschiebung beim Abtasten zwischen 1. und 8. Kanal?

②

$$\Delta t = 7 \cdot \frac{1}{f_s} = 7 \cdot \frac{1}{1 \text{ MHz}} = 7 \text{ } \mu\text{s}$$

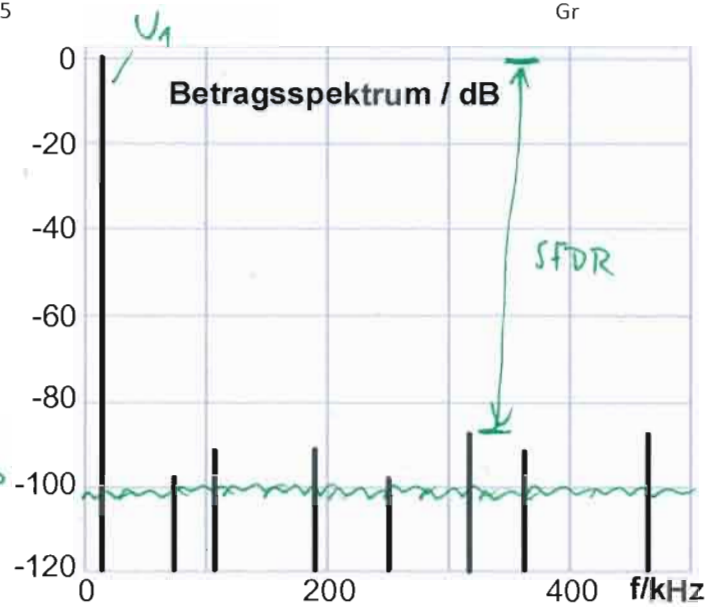
Nun wird nur ein Kanal genutzt. Von einem sinusförmigen 10 kHz-Signal werden 2000 Werte mit 1 MHz abgetastet und daraus ein Spektrum berechnet. (Amplitude maximal)

g) (*) Welche Frequenzauflösung Δf hat das Spektrum?

②

$$\Delta f = \frac{f_A}{N} = 500 \text{ Hz}$$

Das Spektrum (rechts) zeigt nur das Signal und Oberwellen.



h) (*) Zeichnen Sie dazu den Rauschteppich ein (Annahme SNR ≈ SINAD).

② $SFDR_{ideal} = SNR + 10 \cdot \lg \frac{2000}{2} \approx 100 \text{ dB}$

i) (*) Wie groß ist der SFDR ungefähr?

① 85 dB

j) (*) Welche Amplitude (in V) muss ein zusätzliches Signal mindestens haben, damit man es erkennen kann?

③ $20 \cdot \lg \left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} \right) > -85 \text{ (dB)}$

$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} > 5,62 \cdot 10^{-5} ; \hat{U}_1 = \frac{FSR}{2} = 1,65 \text{ V} \Rightarrow \hat{U}_2 > \underline{93 \mu\text{V}}$

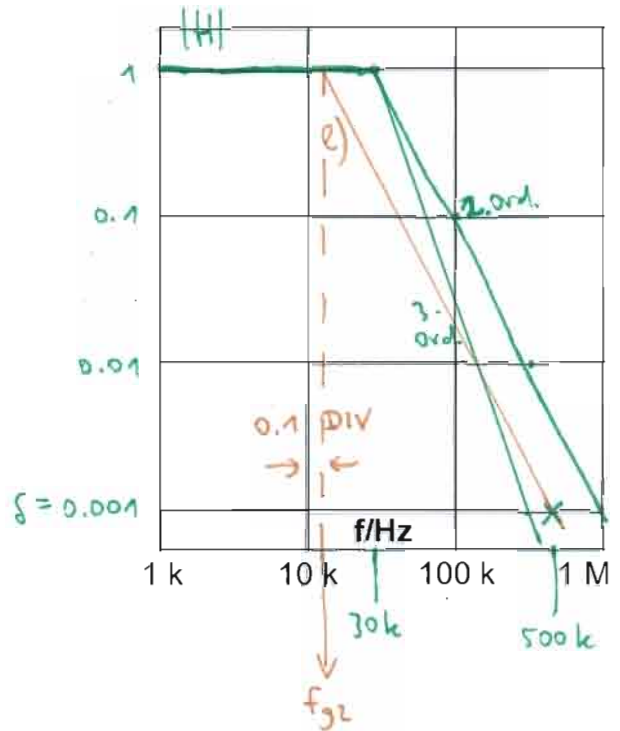
Das Anti-Alias-Filter (AAF) soll Störungen ab 500 kHz um mindestens den Faktor 1000 dämpfen.

k) (*) Schätzen Sie die nötige Filterordnung ab, wenn die Grenzfrequenz $f_g = 30 \text{ kHz}$ ist.

③ $f_g = 3 \cdot 10 \text{ kHz} ; \lg 3 \approx 0,5 \text{ (DIV)}$

$\frac{f_A}{2} = 5 \cdot 100 \text{ kHz} ; \lg 5 \approx 0,7 \text{ (DIV)}$

p = 3



l) (*) Welche Grenzfrequenz ergibt sich, wenn die Filterordnung = 2 sein soll?

② $0,1 \text{ DIV} \hat{=} \cdot 1,26$

$f_{g2} = 10 \text{ kHz} \cdot 1,26 = \underline{12,6 \text{ kHz}}$

m) (*) Welchen Filter-Typ würden Sie verwenden, wenn

- der Durchlassbereich wellig sein darf und
- die Dämpfung im Sperrbereich für höhere Frequenzen immer stärker werden soll?

②



→ Tiefpass I

(Butterworth ist auch ok, dämpft aber nicht so stark)