Prof. Dr. Stefan Glasauer, Fakultät Geistes- und Naturwissenschaften, Hochschule Augsburg

Übungen zur Vorlesung
„Analysis 1 für Data Science“ (WS 22/23)
Folge 1: Logik und Mengenlehre

Schwierigkeitsstufen: * leicht, ** mittel, *** schwer (aber trotzdem noch gut machbar ;-)

Logische Verknüpfungen

1/1.* Laut Vorlesung lässt sich die Implikation $A \Longrightarrow B$ gleichwertig auch so schreiben: $\neg A \vee B$

a) Die Aussage „wenn neblig, dann schlechte Sicht“ ist ja wahr. Schreiben Sie diese Aussage um, indem Sie die Nicht- und die Oder-Operation verwenden (wie oben angedeutet).

b) Negieren Sie nun die umgeschriebene Aussage aus a). Ist die neue (negierte) Aussage falsch?

c) Verfahren Sie wie in a) und b) mit der weiteren Aussage „wenn schlechte Sicht, dann neblig“, die sich ja für manche reale Situationen als falsch erweist.
Ist die negierte Aussage „$\neg$ (wenn schlechte Sicht, dann neblig)“ in allen realen Situationen wahr?

1/2.** Vereinfachen Sie folgende Aussagen mithilfe von Logik-Rechenregeln:

a) $\neg(\neg M \wedge \neg N) \wedge (\neg M \wedge \neg N)$ (Lösung: „falsch“)

b) $\Big((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)\Big) \vee (A \wedge \neg B)$ (Lösung: $B \vee A$)

c) $\Big(\big(A \wedge (\neg A \vee B)\big) \vee \big(B \wedge (B \vee C)\big)\Big) \vee (B \wedge C)$ (Lösung: B)

1/3.* Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Implikation „$\Longrightarrow$“ nicht assoziativ ist:
Es gibt Aussagen A, B, C mit

$$\neg\Big(\big((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow C\big) \iff \big(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)\big)\Big) .$$

Stellen Sie zu diesem Zweck die Wahrheitstafeln der beiden Aussagen $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow C$ und $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$ auf. (Wie viele Kombinationsmöglichkeiten gibt es für die Wahrheitswerte der drei Aussagen A, B, C?)

1/4.** Bei einem schwerwiegenden Verstoß gegen ein Logik-Gesetz kommen nur die 3 stadtbekannten Gauner:innen A, B und C als Täter:innen in Frage. Der Polizei liegen folgende Zeug:innenaussagen vor:
1. Wenn A unschuldig ist, dann ist B schuldig.
2. Wenn B unschuldig ist, dann sind sowohl A als auch C schuldig.
Die Polizei kennt ihre Informant:innen und weiß, dass Aussage 1 wahr, Aussage 2 jedoch falsch ist. Wer war's also?

1/5.** Wenn eine Implikation $A \Rightarrow B$ gilt, so nennt man die Aussage A auch *hinreichende Bedingung* für B und die Aussage B auch *notwendige Bedingung* für A.

In einer Stiftungssatzung heißt es: „Nur Studenten mit einem aktuellen Notenschnitt besser als 2.0 können ein Stipendium der Stiftung bekommen."

Aussage C sei „Karl hat einen aktuellen Notenschnitt besser als 2.0."
Aussage D sei „Karl bekommt ein Stipendium der Stiftung."

Welche der folgenden Aussagen treffen zu, welche nicht?
a) C ist notwendige Bedingung für D.
b) C ist hinreichende Bedingung für D.
c) D ist notwendige Bedingung für C.
d) D ist hinreichende Bedingung für C.

1/6. Zeigen Sie durch Widerspruchsbeweise:

a)* Es gibt keine größte reelle Zahl.

b)** Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist n^2 gerade, so ist auch n gerade. Tipp: $n \in \mathbb{N}$ ist ungerade genau dann, wenn $n = 2\ell + 1$ für eine Zahl $\ell \in \mathbb{N}$.

1/7.** Typischer Logik-Fehler beim Programmieren. Hier ein Python-Programm, das eine Zeitdauer der Form Stunden:Minuten:Sekunden umrechnen soll. Mit der while-Schleife sollte eine Eingabeprüfung realisiert werden, aber irgendwas ist bei der while-Bedingung schiefgelaufen! Was? Korrigieren Sie das Programm.

```
print("Geben Sie eine Zeitdauer in Stunden:Minuten:Sekunden an: ")
h = int(input("Stunden = "))
m = int(input("Minuten = "))
s = int(input("Sekunden = "))

while ( not h >= 0 and not m >= 0 and not m < 60 and not s >= 0 and not s < 60 ):
    print("Leider falsche Eingabe!")
    print("Geben Sie erneut eine Zeitdauer in Stunden:Minuten:Sekunden an: ")
    h = int(input("Stunden = "))
    m = int(input("Minuten = "))
    s = int(input("Sekunden = "))

std_ges = h + m/60 + s/3600
min_ges = h*60 + m + s/60
sek_ges = h*3600 + m*60 + s
print("Sekunden gesamt = ", sek_ges)
print("Minuten gesamt =  ", min_ges)
print("Stunden gesamt =  ", std_ges)
```

1/8.* Folgender „Beweis“ zeigt, dass zwei plus zwei gleich fünf ist ... (???)

$$\begin{aligned}2+2 &= 4-9/2+9/2 = \sqrt{(4-9/2)^2}+9/2 = \sqrt{16-2\cdot 4\cdot 9/2+(9/2)^2}+9/2 \\ &= \sqrt{-20+(9/2)^2}+9/2 = \sqrt{5^2-2\cdot 5\cdot 9/2+(9/2)^2}+9/2 \\ &= \sqrt{(5-9/2)^2}+9/2 = 5-9/2+9/2 = 5\end{aligned}$$

Existenz- und All-Quantoren

1/9.* Sei $A(x,y)$ die Aussageform „Student(in) x hat eine Eins in Prüfung y“.

a) Formulieren Sie folgende vier Aussagen in der Umgangssprache. Variable x soll dabei nur Student(inn)en, Variable y nur Prüfungen aufnehmen können.
1. $\forall x\ \big(\forall y\ A(x,y)\big)$
2. $\forall y\ \big(\forall x\ A(x,y)\big)$
3. $\forall x\ \big(\exists y\ A(x,y)\big)$
4. $\exists y\ \big(\forall x\ A(x,y)\big)$

b) Sind die ersten beiden Aussagen aus a) äquivalent? Sind die letzten beiden Aussagen aus a) äquivalent?

c) Negieren Sie in der Umgangssprache die vier Aussagen aus a) und ziehen Sie das „Nicht“ möglichst weit nach innen.

1/10.*** Die Aussage „Es gibt (mindestens) ein $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $A(x)$“ wird ja kurz so notiert: $\exists x \in \mathbb{R} : A(x)$. Die Aussage „Es gibt *genau* ein $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $A(x)$“ enthält eine weitere Information und ist daher nicht äquivalent zu $\exists x \in \mathbb{R} : A(x)$.

Notieren Sie die zweite Aussage „Es gibt *genau* ein $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $A(x)$“ möglichst prägnant mit Hilfe der Quantoren $\exists$, $\forall$ und z.B. den Verknüpfungen $\wedge$, $\Longrightarrow$.

1/11.** a) Wir betrachten die Aussageform

$$\forall x \in A\ \exists y \in A:\ 2\cdot y = x\ .$$

Setzen Sie für die Variable A *eine* der vier Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ein, so dass die Aussageform eine **wahre** Aussage wird.
Setzen Sie dann für die Variable A eine andere dieser vier Zahlenmengen ein, so dass die Aussageform eine **falsche** Aussage wird.

b) Versuchen Sie dasselbe wie in a) mit den beiden Aussageformen

$$\forall x \in A\ \exists y \in A:\ 2\cdot x = y \qquad \text{bzw.} \qquad \exists x \in A\ \forall y \in A:\ 2\cdot x = y.$$

c) Finden Sie eine (neue) Menge A, für die die Aussage $\exists x \in A\ \forall y \in A:\ 2\cdot x = y$ wahr wird.

Mengenlehre

1/12.** Geben Sie folgende vier Mengen in Elementschreibweise an.
(In den Mengen B und D sind evtl. überraschend viele Elemente drin ...)

$$\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\} \\
B &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A \ : \ x^2 = y\} \\
C &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A \ : \ y^2 = x\} \\
D &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A \ : \ xy = -x\}
\end{aligned}$$

1/13.* Geben Sie alle Elemente der Produktmenge $\{3, 0, 1, 0, 1, 3\} \times \{301, 103, 301\}$ an.

1/14.* Wahr oder falsch?

a) $\emptyset \subseteq \{2, 4, 6\}$ b) $\{3\} \in \Big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\Big\}$ c) $\{3\} \subseteq \Big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\Big\}$

1/15. a)* Bestimmen Sie jeweils *alle* Teilmengen der folgenden beiden Mengen: $\{a, b, c\}$ und $\{a, \{a\}\}$. (Es sollen a, b, c drei verschiedene Objekte sein.)

b)** Stellen Sie eine Vermutung auf: Wenn eine Menge A genau n Elemente hat, wie viele Teilmengen besitzt A dann? Gilt Ihre Vermutung auch für $n = 0$, d.h. $A = \emptyset$?

c)*** Beweisen Sie Ihre Vermutung aus b).

1/16.** Vereinfachen Sie die Darstellung der folgenden Mengen (Komplementbildung bezüglich einer festen Grundmenge G, in der alle anderen Mengen als Teilmenge enthalten sind). Vergleichen Sie mit einer früheren Aufgabe.

a) $\overline{(\overline{M} \cap \overline{N})} \cap (\overline{M} \cap \overline{N})$

b) $\Big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\Big) \cup (A \cap \overline{B})$

c) $\Big(\Big(A \cap (\overline{A} \cup B)\Big) \cup \Big(B \cap (B \cup C)\Big)\Big) \cup (B \cap C)$

Boolesche Algebra

1/17.** Weisen Sie die beiden Booleschen Terme

$$x\overline{y} + \overline{x}y, \qquad (x + y)(\overline{x} + \overline{y})$$

als „gleich" (äquivalent) nach, indem Sie Boolesche Axiome zur Umformung benutzen.

1/18.*** Die Absorptionsgesetze der Booleschen Algebra lauten $x + xy = x$ und $x(x + y) = x$. Die Absorptionsgesetze sind zwar keine Axiome der Booleschen Algebra, sie können aber aus diesen gefolgert werden. Versuchen Sie's!

Funktionen

1/19.* $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 2}}$
a) Welchen maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ hat die Funktion h? (Wo macht die Wurzel oder der Nenner Probleme? Gehen Sie diesen Problemen entweder durch quadratische Ergänzung $x^2 - 5x + 2 = (x - a)^2 - b$ oder mit der Mitternachtsformel auf den Grund.)
b) Finden Sie Funktionen f und g mit $h = g \circ f$.

1/20.** $f(x) = x^2 + x - 6$
a) Warum ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nicht* injektiv? Bitte zwingend und möglichst knapp begründen.
(Wie sieht das Schaubild der Funktion aus? Wo liegt der Scheitelpunkt? Am besten quadratisch ergänzen: $a, b \in \mathbb{R}$ finden mit $f(x) = (x + a)^2 - b$.)
b) Schränken Sie die Definitionsmenge der Funktion f geeignet ein, so dass dann Injektivität vorliegt. Bestimmen Sie anschließend die Umkehrfunktion (verwenden Sie beim Auflösen von $f(x) = y$ nach x die Mitternachtsformel oder (besser) quadratische Ergänzung). Wie lauten der Definitions- und der Wertebereich der Umkehrfunktion?

1/21. Gegeben seien die Funktionsvorschrift $f(x) = x^2 + x - 6$ der vorigen Aufgabe und die vier Intervalle $A_1 = [-2, 0], A_2 = [-1, 1], B_1 = [-27/4, -21/4], B_2 = [-25/4, -9/4]$.
a)* Bestimmen Sie die beiden Bildmengen $f(A_1)$, $f(A_2)$ und die beiden Urbildmengen $f^{-1}(B_1)$, $f^{-1}(B_2)$. Zeichnen Sie den Graphen, das hilft!
b)* Verifizieren Sie die drei Mengengleichheiten $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,
$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$, $\quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
c)* Gilt auch die Mengengleichheit $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$?
d)** Welche allgemeine Eigenschaft müsste f haben, so dass die Mengengleichheit $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ gelten würde?

1/22.* Bestimmen Sie den Funktionsterm $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion für $f(x) = \dfrac{2x - 2}{x - 2}$.
Denken Sie beim zentralen Arbeitsschritt „Gleichung auflösen“ an die beiden Zauberworte „ausmultiplizieren“ und „ausklammern“.

1/23.* Welche der folgenden Funktionen („eindeutigen Zuordnungen“) sind injektiv, welche nicht? (Wir nehmen immer eine „natürliche“ Definitionsmenge an.)
a) Filiale $\mapsto$ Umsatz im ersten Quartal 2022
b) ASCII-Code
c) Bewohner Deutschlands $\mapsto$ Gemeinde des Erstwohnsitzes
d) Mensch $\mapsto$ Fingerabdruck

1/24.** a) Wie viele *verschiedene* Funktionen $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ gibt es?
b) Wie viele verschiedene Funktionen $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$ gibt es?
c) Wie viele verschiedene **injektive** Funktionen $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ gibt es?
d) Wie viele verschiedene Funktionen $f : \{0, \ldots, 511\} \to \{0, 1\}$ gibt es mit der Eigenschaft $f(0) = 1$ und $f(511) = 1$?
e) Wie viele 512-stellige *ungerade* Dualzahlen gibt es, die *keine führenden Nullen* haben? (Überlegen Sie mit Hilfe von d).)

1/25. Die Floor-Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ist folgendermaßen definiert:

$$\lfloor x \rfloor := \max \{ z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x \} \in \mathbb{Z}$$

Weitere gängige Namen dieser Funktion: Größte-ganze-Funktion, Gauß-Klammer. Diese Funktion ist *unstetig*, wie man sagt.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* an der Stelle x_0, wenn folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} : \; (|x - x_0| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

a)* Ziehen Sie bei der folgenden Negation das Nicht-Zeichen so weit wie möglich nach innen/hinten:

$$\neg \, (\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} : \; (|x - x_0| < \delta \; \Rightarrow \; |\lfloor x \rfloor - \lfloor x_0 \rfloor| < \varepsilon))$$

b)** Weisen Sie nach, dass die Floor-Funktion an der Stelle $x_0 = -5$ unstetig ist, indem Sie durch Angabe eines konkreten ϵ und eines konkreten (von δ abhängigen) x die Ausage aus a) verifizieren.

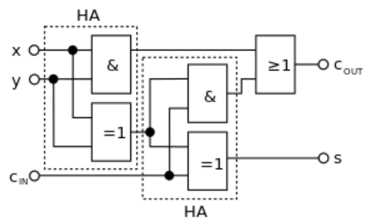
Boolesche Funktionen

1/26.** Bitte ohne irgendwo nachzuschauen noch einmal selbst ausknobeln:

a) Wie kann NOT allein mithilfe von NAND dargestellt werden?
b) Wie kann AND allein mithilfe von NAND dargestellt werden?
c) Wie kann OR allein mithilfe von NAND dargestellt werden?
d) Wie kann IFTHEN allein mithilfe von NAND dargestellt werden?
e) Wie kann AND allein mithilfe von NOR dargestellt werden?

1/27.* DNF und KNF des Volladdierers

x	y	c_i	c_o	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



Der Volladdierer besteht aus 2 verschiedenen 3-stelligen Booleschen Funktionen, nämlich aus den beiden Ausgängen s und c_o, „carry out".
a) Bestimmen Sie die disjunktive Normalform der 3-st. Booleschen Funktion s des Volladdierers:
Welche Werte der Eingabegrößen x, y, c_i ergeben den Ausgabewert $s = 1$? Formulieren Sie die Minterme. Verknüpfen Sie sie durch Disjunktionen.

b) Überzeugen Sie sich davon, dass die erhaltene DNF in genau denselben Eingabesituationen den Wert 1 liefert wie die Funktion s.

c) Bestimmen Sie analog die konjunktive Normalform der 3-stelligen Booleschen Funktion s des Volladdierers: Welche Werte der Eingabegrößen x, y, c_i ergeben den Ausgabewert $s = 0$? Formulieren Sie die Maxterme. Verknüpfen Sie sie durch Konjunktionen. Überzeugen Sie sich davon, dass die erhaltene KNF in genau denselben Eingabesituationen den Wert 0 liefert wie die Funktion s.

1/28.** Stellen Sie alle 16 zweistelligen Booleschen Funktionen $f_0, \dots, f_{15}$ mithilfe der Grundfunktionen NOT, AND und OR dar. Bringen Sie Ihre Darstellung jeweils in eine möglichst einfache Form. Verwenden Sie dieselbe Reihenfolge der 16 Booleschen Funktionen wie auf Folie 34. Fallen Ihnen Symmetrien Ihrer Darstellungen auf?

Prof. Dr. Stefan Glasauer, Fakultät Geistes- und Naturwissenschaften, Hochschule Augsburg

Übungen zur Vorlesung
„Analysis 1 für Data Science“ (WS 22/23)
Folge 4: Summen

Umgang mit dem Summenzeichen

4/1.* Berechnen Sie den Wert folgender Summe: $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\sum_{i=2}^{3}\frac{2+k}{5-2i}$

4/2.** Schreiben Sie die folgende Summe mit Hilfe des Summenzeichens:

$$1-3+\frac{5}{2}-\frac{7}{6}+\frac{9}{24}-\frac{11}{120}+\frac{13}{720}$$

Hilfsfrage: Wie könnte man die wechselnden Vorzeichen und die ungeraden Zahlen in den Zählern in Formeln kleiden? Sind Ihnen die Zahlen in den Nennern schonmal begegnet?

4/3.** a) Leiten Sie die kleine Gaußsche Formel $\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)/2$ auf eine neue Weise her, indem Sie folgende Überlegungen vervollständigen: Wir setzen $S_n := 0^2+1^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2$ (diese Summe wollen wir hier eigentlich *nicht* berechnen). Wir betrachten S_{n+1} und schreiben dies als

$$S_n+(n+1)^2=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2=\sum_{k=0}^{n}(k^2+2k+1)=\sum_{k=0}^{n}k^2+2\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1=S_n+\ldots$$

Was muss bei ... stehen? Wie kann jetzt $\sum_{k=0}^{n} k$ berechnet werden?

Antwort:

$$S_n+(n+1)^2=S_n+\ldots$$

b) Auf analoge Weise können auch Formeln für $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$, $\sum_{k=1}^{n} k^4$, usw. gefunden werden ... (Tun Sie's zumindest für die erste dieser Formeln.)

Geometrische Summe und Reihe

4/4.* a) Wie viele Tausendstel enthält die Zahl 0.789? Sehen Sie eventuell auch noch mehr als 9 Tausendstel? Maximalanzahl der Tausendstel?

b) Schreiben Sie die Zahl 0.789789789789 in der Form $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\frac{a}{b^k}$.

c) Schreiben Sie die Zahl 0.789789789789789789 (sechs Dreier-Gruppen von Ziffern) mithilfe der geometrischen Summenformel $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ um, indem Sie sie erst wie in b) in eine Summe verwandeln und dann den Faktor $\frac{789}{1000}$ ausklammern. Vereinfachen Sie den entstehenden Term so weit wie möglich.

4/5.** Für Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x < 1$ folgt aus der geometrischen Summenformel $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ im Grenzwert die Gleichung $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ („geometrische Reihe").

a) Benutzen Sie die geometrische Reihe, um die Zahl $0.\overline{789} = 0.789789789789\cdots$ als Bruch m/n mit konkreten natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ zu schreiben.

b) Stellen Sie analog die Dualzahl $(0.1\overline{10})_2$ als Bruch m/n dar (die Periode geht nur über die letzten beiden Ziffern).

4/6.** Benutzen Sie die geometrische Summenformel $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, um die folgenden Summen zu vereinfachen und zu berechnen:

$$\sum_{k=0}^{n} 5^k, \qquad \sum_{k=10}^{100} \frac{1}{2^k}, \qquad \sum_{k=10}^{100} \frac{2^{k-1}}{5^{k+1}}$$

4/7.** Die geometrische Summenformel $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ kann auch durch Induktion gezeigt werden. Tun Sie's!

Binomialkoeffizienten und binommische Formel

4/8.* Bestimmen Sie die Werte der folgenden Binomialkoeffizienten:

$$\binom{6}{0} = \qquad\qquad \binom{6}{3} = \qquad\qquad \binom{6}{4} =$$

4/9.** Ist n eine Primzahl, so sind die Zahlen $\binom{n}{k}$ für $k = 1, \ldots, n-1$ alle ohne Rest durch n teilbar.
Begründen Sie diese Aussage stichhaltig (mündlich reicht), indem Sie die Primfaktorzerlegungen von $n!$ und von $k!(n-k)!$, d.h. von Zähler und Nenner von $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, betrachten.

4/10.** Wir definieren $T(n) = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} k$.

a) Machen Sie sich klar, dass die „Tetraederzahl" $T(n)$ gleich der Zahl der Kugeln der (gefüllten) Pyramide im Hof der Hochschul-Bibliothek bei Höhe n ist.

b) Benutzen Sie die „kleine" und eine „größere" Gaußsche Formel, um $T(n)$ in einen kompakten geschlossenen Term zu überführen.

c) Drücken Sie $T(n)$ mit Hilfe eines Binomialkoeffizienten aus.

d) Wie stark wächst $T(n)$? Verwenden Sie die O-Notation.

4/11.* Expandieren Sie mit der binomischen Formel (und verschönern Sie anschließend ein wenig): $(2x-3)^5 =$

4/12.** Vereinfachen Sie den folgenden Term mithilfe der binomischen Formel:

$$16 - 96b + 216b^2 - 216b^3 + 81b^4$$

4/13.* a) Für festes n stehen ja die Zahlen $\binom{n}{k}$ alle in einer Zeile im Pascalschen Dreieck. Ist n ungerade, so kommt jede Zahl in dieser Zeile doppelt vor, damit ist eigentlich klar, dass die Wechselsumme

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

gleich Null ist (wenn also n ungerade ist). Beispiel: Zeile 1 3 3 1, Wechselsumme $= 1 - 3 + 3 - 1 = 0$. Doch auch wenn n gerade ist, gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0\,, \qquad \text{Beispiel: Zeile 1 4 6 4 1, Wechselsumme } = 1-4+6-4+1 = 0.$$

Begründen Sie diese weniger offensichtliche Aussage, indem Sie $0 = 0^n = (-1+1)^n$ binomisch expandieren.

b) Prüfen Sie die Formel $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ anhand einiger Beispiele nach. Beweisen Sie sie anschließend mit der Methode aus a).

4/14.* a) Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ kann als eine gewisse *Anzahl* interpretiert werden. Wie nochmal?
Antwort: $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der ...

b) 30 Leute stoßen (paarweise, jeder mit jedem) ihre Gläser an. Wie oft wird angestoßen?

c) Wenn man $(x+y)^{100} = \prod_{k=1}^{100}(x+y)$ schön langsam ausmultipliziert, wie oft erhält man dabei den Term x^2y^{98}? Wie oft den Term $x^{98}y^2$? Wie oft den Term $x^{50}y^{50}$? Wie oft den Term $x^{51}y^{51}$?

4/15.*** Wie viele der $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ verschiedenen möglichen Tipps bei „6 aus 49“ führen zu 5 Richtigen? Sie können (ohne die Allgemeinheit einzuschränken) annehmen, dass die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 gezogen worden seien, das macht Ihre Überlegungen konkreter.

Prof. Dr. Stefan Glasauer, Fakultät Geistes- und Naturwissenschaften, Hochschule Augsburg

Übungen zur Vorlesung
„Analysis 1 für Data Science" (WS 22/23)
Folge 6: Folgen und Reihen

Folgen

6/1.* Folgende Vorschriften erklären zwei rekursiv definierte Folgen (a_n), (b_n):

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{2}{n+1}\, a_n \qquad \text{bzw.} \qquad b_1 = 2, \qquad b_{n+1} = \sqrt{b_n}$$

a) Beide Folgen können durch Algebra-Terme direkt angegeben werden. Finden Sie diese Folgen-Terme.
b) Beide Folgen sind konvergent. Wie lauten die beiden Grenzwerte?

6/2.** Sei $x_n = (1 + 1/n)^n$ die Folge „Beispiel 1" unserer Folien.

Beweisen Sie, dass die Folge (x_n) durch 3 nach oben beschränkt ist:

$$x_n \;\leq\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \;\leq 3 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Big[$Verwenden Sie dazu die binomische Formel $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, die Darstellung $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ der Binomialkoeffizienten und die geometrische Summe $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1-1/2^n}{1-1/2} \leq 2.\Big]$

6/3.*** Beweisen Sie mathematisch streng, dass jede konvergente Folge beschränkt ist.
Zeigen Sie also folgende Aussage:

$$(\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon) \implies (\exists c > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < c)$$

Vorgehen: Sie nehmen die Voraussetzung als wahr an und konstruieren eine konkrete Zahl c mit $|a_n| < c\ \forall n \in \mathbb{N}$.

6/4.** Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz und ermitteln Sie ggfs. den Grenzwert:

$$a_n = \frac{n^2+n}{\left(2\sqrt{n}-1\right)^4}, \qquad b_n = \frac{(3n)!}{n! + n^{27}}, \qquad c_n = \frac{2n-3}{(-1)^n(n-\sqrt{n})}$$

$$d_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{4n^2-1}}, \qquad e_n = 2 - \frac{2n}{n-\sqrt{n}}, \qquad f_n = \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^n+3}\right)$$

Limes inferior / limes superior

6/5.* Bestimmen Sie jeweils $\liminf_{n\to\infty} x_n$ und $\limsup_{n\to\infty} x_n$:

a) $x_n = (-1)^n \cdot 2 + \frac{n+1}{n}$

b) $x_n = \sin\left((n + \frac{1}{2})\pi + \frac{1}{n}\right)$

c) $x_n = \cos\left((n + \frac{1}{2})\pi + \frac{1}{n}\right)$

Reihen

6/6.* a) Zeigen Sie

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

b) Zeigen Sie, dass ausnahmsweise mal ein Minus-Zeichen auch durch einen Mal-Punkt ersetzt werden darf:

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k}$$

c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} 1/(k(k-1))$ konvergent ist. Welchen Grenzwert hat sie?
d) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergent ist, indem Sie die Reihe aus c) als Majorante verwenden.

6/7.* Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ wird als harmonische Reihe bezeichnet.
a) Wir schreiben die harmonische Reihe um als

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{k}$$

und haben dabei einen kleinen Fehler gemacht. Finden und korrigieren Sie den Fehler.

b) Zeigen Sie, dass die innere Summe $\sum_{k=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} 1/k$ stets $\geq 1/2$ ist. Folgern Sie daraus die Divergenz der harmonischen Reihe.

6/8.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Können Sie im Konvergenzfall auch den Grenzwert ermitteln (durch Berechnung oder durch Recherche)?

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{4^{k-1}}$ (Standardtrick: ersten Summanden ausklammern!) b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3^{2k}}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{5k+12}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot k!}{(2k)!}$ e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

6/9.** a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k$?

Finden Sie ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k = \frac{17}{5}$.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$? Recherchieren Sie, welchen Grenzwert die Reihe hat.

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$? Recherchieren Sie, welchen Grenzwert die Reihe hat.

Stetigkeit

6/10.* Auf dem Logik-Aufgabenblatt 1 betrachteten wir die Floor-Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$:

$$\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\} \in \mathbb{Z}$$

Sie ist unstetig. Beweisen Sie's, indem Sie ein x_0 und eine gegen x_0 konvergierende Folge (x_n) angeben, so dass folgendes *nicht* gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \lfloor x_n \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor$$

Können Sie auch eine gegen x_0 konvergente Folge angeben, so dass die Bildfolge $(\lfloor x_n \rfloor)$ *nicht* konvergiert? Auch dies würde die Unstetigkeit zeigen.

Topologie

6/11. „Cantor-Staub“: Wir definieren rekursiv folgende Teilmengen $C_n \subseteq [0, 1]$ und anschließend die „Cantor-Staub-Menge“ C als Schnittmenge:

$C_1 := [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ („offenes mittleres Drittel $]1/3, 2/3[$ entfernt“)

C_n ist eine disjunkte Vereinigung von 2^n vielen abgeschlossenen Intervallen. Wir definieren C_{n+1} als die Menge, die entsteht, wenn aus jedem dieser 2^n vielen abgeschlossenen Intervalle das „offene mittlere Drittel“ entfernt wird.

Wir definieren $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ als die Schnittmenge aller Mengen C_n. Überlegen Sie sich:

a)** Die Menge C ist kompakt, also abgeschlossen und beschränkt.
b)** Die Menge C besteht genau aus den Zahlen $\sum_{k=1}^{\infty} y_k/3^k$, in deren 3-adischen Entwicklung die Ziffer $y_k = 1$ nie vorkommt (sondern nur die Ziffern $y_k = 0$ oder $y_k = 2$).
c)** Die Menge C hat die „Länge“ 0 (genauer: Lebesgue-Maß 0).
d)*** Die Menge C hat dieselbe Mächtigkeit wie das Intervall $[0, 1]$, ist also überzählbar. Insbesondere enthält die Menge C „wesentlich“ mehr Elemente als nur die Randpunkte der Intervalle, die im Konstruktionsprozess auftreten (denn die Menge dieser Randpunkte ist als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen nur abzählbar).

Aufgabe 2.1: Lagemaße

(ST0102-deskrSta05)

Für 10 Unternehmen ist jeweils eine Kreditwürdigkeitsbewertung

$$x = (x_1, \ldots, x_{10}) = (A, A, B, B, A, A, C, A, C, D)$$

mit der ordinaler Skala: $A =$ sehr kreditwürdig über B, C zu $D =$ nicht kreditwürdig gegeben.

(i) Bestimmen Sie die möglichen Lagemaße von x. Lagemaße sind arithmetisches Mittel, Median und Gipfelwert.

(ii) Bestimmen Sie das untere und obere Quartil von x.

Aufgabe 2.2: Lagemaße 2

(ST0102-deskrSta06)

Um den Zeitaufwand für einen bestimmten Arbeitsvorgang einzuschätzen, wurde die Dauer $x_i, i = 1, \ldots, 100$, des Arbeitsvorgangs in einer Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_{100})$ bei $n = 100$ verschiedenen Mitarbeitern erfasst. Die Stichprobe ist in der folgenden Häufigkeitstabelle zusammengefasst:

Zeitdauer a_i(in [Minuten])	4	6	9	12
absolute Häufigkeit $h(a_i)$	30	20	40	10

(i) Bestimmen Sie die möglichen Lagemaße von x.

(ii) Bestimmen Sie das untere und obere Quartil von x.

Aufgabe 2.3: Histogramme

(ST0102-deskrSta07)

Die Jahresumsätze von 1000 Unternehmen sind in der folgenden Tabelle klassifiziert gegeben:

Umsatz [in Mio. Euro]	[1,5)	[5,10)	[10,20)	[20,40]
Anzahl Unternehmen	490	410	50	50

(i) Spezifizieren Sie für die gegebenen Daten die Begriffe Stichprobe, Merkmal, Merkmalsträger, Skalenniveau und Stichprobenumfang.

(ii) Skizzieren Sie mit der gegebenen Intervalleinteilung das zugehörige Histogramm der absoluten Klassenhäufigkeiten, wobei die Höhe H_1 des Histogrammrechtecks der ersten Klasse [1,5) [Mio. Euro] $H_1 =$ 20[cm] sein soll.

Aufgabe 2.4: Histogramme 2

(ST0102-deskrSta08)

(i) Lesen Sie die Datei `AbsolventenDat.csv`, die Sie in unserem Moodle-Kursraum finden, ein. Achten Sie dabei auf das korrekte Einlesen von fehlenden Werten.

(ii) Lassen Sie sich mit `summary` die wichtigsten Kenngrößen des Merkmals „Eingangsnote“ des data frames `dat.absolventen` ausgeben.

(iii) Erzeugen Sie ein einfaches Histogramm des Merkmals „Eingangsnote“ ohne weitere Formatierung. Dabei sollen alle Intervalle die Länge 0,5 haben und das erste bei 1 starten.

(iv) Verwenden Sie das `stat_bin`-Kommando, um ein Histogramm zu zeichnen, bei dem die Rechtecke mit den entsprechenden relativen Häufgkeiten (in Prozent) beschriftet sind. Über 5% soll die Häufigkeit im Rechteck angegeben werden. Darunter über dem Rechteck. Die y-Achse soll mit „Anzahl“ statt „count“ beschriftet werden.

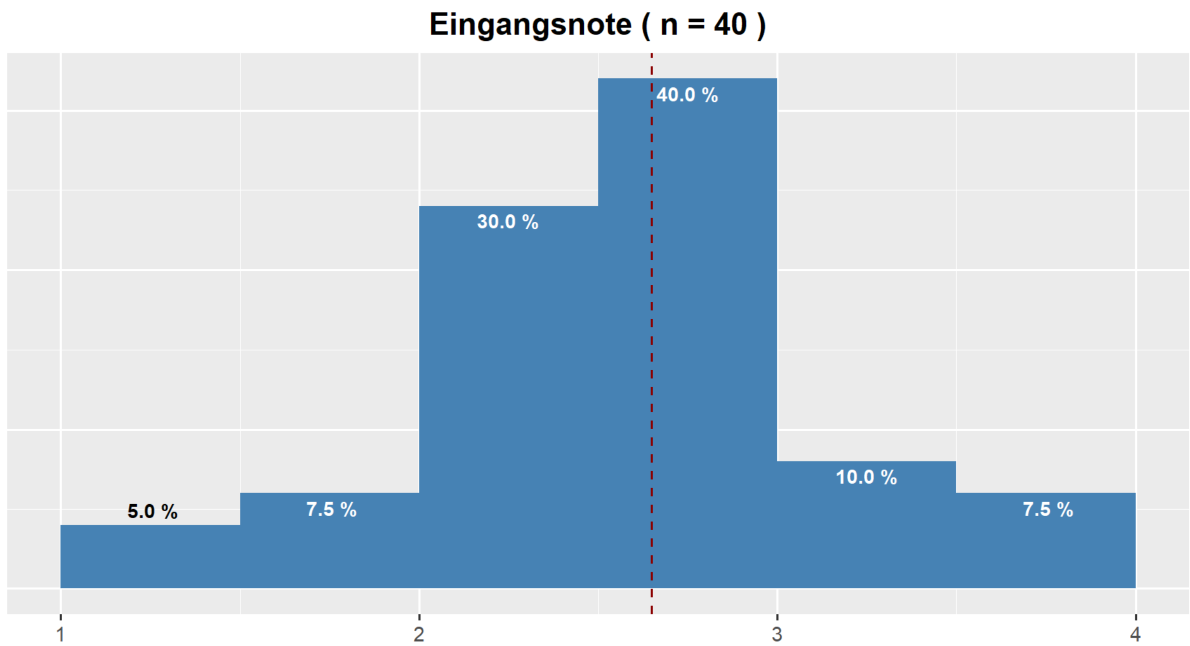
(v) Schreiben Sie eine Funktion `pretty.hist( dat.num )`, die für einen numerischen Vektor `dat.num` ein Histogramm zeichnet, das mit den relativen Häufigkeiten beschriftet ist.

Testen Sie Ihre Funktion mit dem Vektor `dat.absolventen$Abschlussnote`.

(vi) Erweitern Sie nun die `pretty.hist`-Funktion um das Argument `titel`. Im Titel des Histogramms soll neben dem übergebenen String `titel` noch die Anzahl der gültigen Werte ausgegeben werden. Außerdem sollen die x-Achse keinen Titel haben und die y-Achse ganz ausgeblendet wird. Testen Sie Ihre Funktion wieder mit dem Merkmal `Eingangsnote` und dem Titel „Eingangsnote“.

(vii) Zeichnen Sie in das Histogramm beim arithmetische Mittel (vulgo: Durchschnitt) eine gestrichelte senkrechte Linie ein und beschriften Sie diese Linie mit dem Durchschnittswert.

Beispielsweise könnte die fertige Grafik so aussehen:



Aufgabe 2.5: Lagemaße 3 (ST0102-deskrSta09) ●●○○

Betrachten Sie den Datenvektor:

$$x = (1, 1, 5, 2, 5, 2, 0)$$

und den erweiterten Datenvektor

$$y = (1{,}1{,}5{,}2{,}5{,}2{,}0{,}x_0)$$

mit einer Variable $x_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie den Median $x_{\frac{1}{2}}$, das arithmetische Mittel (vulgo: Durchschnitt) $\overline{x}$, und den Modalwert x_{mod} des Datenvektors x.

(ii) Berechnen Sie den Median $y_{\frac{1}{2}}$, den Durchschnitt $\overline{y}$ und den Modalwert y_{mod} als Funktion von x_0.

(iii) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $y_{\frac{1}{2}}(x_0)$ und $\overline{y}(x_0)$.

(iv) Erklären Sie mit Hilfe der Zeichnung den wesentlichen Unterschied zwischen Durchschnitt und Median.

Aufgabe 2.6: Arith. Mittel & Median (ST0102-deskrSta10) ●●●○

Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)\,, n \in \mathbb{N}$, eine Stichprobe eines metrischen Merkmals mit arithmetischem Mittel $\bar{x}$ und empirischem Median $x_{\frac{1}{2}}$. Zeigen Sie die Minimierungseigenschaften:

(i) $\min_{z\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - z)^2 = \bar{x}$

(ii) $\min_{z\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} |x_i - z| = x_{\frac{1}{2}}$

Aufgabe 2.7: Verschiebungsformel für Stpr.-Varianz (ST0102-deskrSta11) ●●●○

Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Stichprobe reeller Zahlen mit arithmetischem Mittel $\bar{x}$ und Stichproben-Varianz s^2. Zeigen Sie, dass für alle $c \in \mathbb{R}$ die Verschiebungsformel

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - c)^2 - n(\bar{x} - c)^2$$

gilt.

Aufgabe 2.8: Streuungszerlegung

(ST0102-deskrSta12) ●●●○

Gegeben seien $m \in \mathbb{N}$ (Teil-)Stichproben (man sagt auch Schichten) $x_1, \ldots, x_m$ reeller Zahlen mit den Umfängen $n_1, \ldots, n_m, n := \sum_{i=1}^m n_i$, arithmetischen Mitteln $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ und Stichproben-Varianzen $s_1^2, \ldots, s_m^2$. Zeigen Sie, dass für das arithmetische Mittel $\bar{z}$ und die Stichproben-Varianz s_z^2 der gemeinsamen Stichprobe $z = (z_1, \ldots, z_n)$, die aus allen Stichprobenwerten der m Teilstichproben besteht, folgende Formeln gelten.

(i) $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{m} n_i \bar{x}_i$ (gewichtetes Mittel)

(ii) $s_z^2 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{m} (n_i - 1)\, s_i^2 + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m n_i \left(\bar{x}_i - \bar{z}\right)^2$ (Streuungszerlegung)

(iii) Die Streuungszerlegung, vgl. (ii)), wird oft in der Form:

$$\text{Gesamtstreuung} = \text{Streuung in den Schichten} + \text{Streuung zwischen den Schichten}$$

ausgedrückt. Interpretieren Sie diese Aussage, z.B. grafisch, anhand der Formel in (ii).

Hinweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man davon ausgehen, dass die ersten n_1 Stichprobenwerte $z_1, \ldots, z_{n_1}$ der gemeinsamen Stichprobe z die Werte der Stichprobe x_1 sind, die folgenden n_2 Werte $z_{n_1+1}, \ldots, z_{n_1+n_2}$ die Werte der Stichprobe x_2 sind usw. bis zu den n_m Werten $z_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1}, \ldots, z_n$, die die Stichprobenwerte von x_m sind.

Aufgabe 2.9: Deskriptive Statistik

(ST0102-deskrSta13) ●○○○

(i) Zeichnen Sie Histogramme für die Merkmale `mpg, cyl, hp, wt` der R-internen Datentabelle *mtcars*.

(ii) Finden Sie heraus, für welche der Merkmale `mpg, cyl, hp, wt` ein Säulendiagramm sinnvoll ist.

(iii) Zeichnen Sie für die in (ii) ermittelten Merkmale Säulendiagramme.

(iv) Zeichnen Sie jeweils ein Streudiagramm für die Merkmalspaare `mpg` $\sim$ `hp, mpg` $\sim$ `wt` und interpretieren Sie die Diagramme. Berechnen Sie die zugehörigen Pearson-Korrelationskoeffizienten.

Aufgabe 2.10: Korrelationen

(ST0102-deskrSta14) ●●●○

(i) Lesen Sie die Datei „AbsolventenDat.csv“ wie in Aufgabe 2.4 in den tibble `dat.Absolventen` ein.

(ii) Wandlen Sie die beiden Merkmale

Kontakt der Studierenden untereinander und *Umgang der Lehrenden mit den Studierenden*

in den Datentyp `factor` um und kodieren Sie die Stufen der beiden Merkmale mit dem Befehl `levels` in Schulnoten (1 bis 5) um.

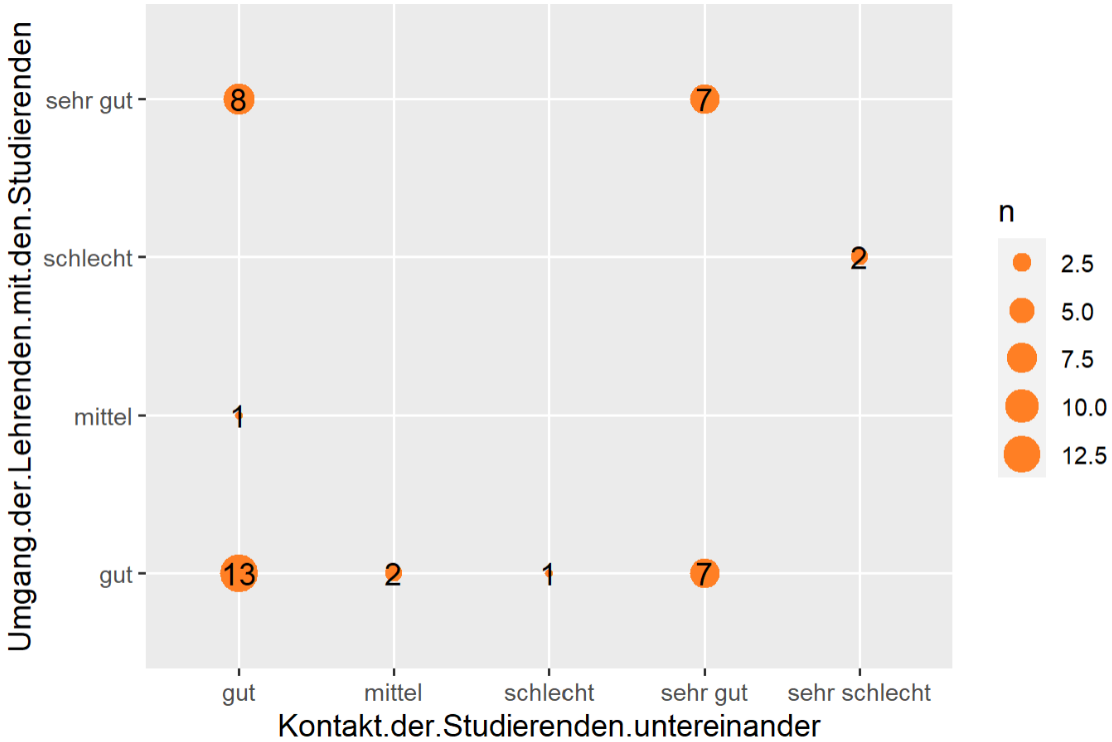
(iii) Berechnen Sie mit dem Befehl `table` eine Kontingenztabelle der beiden oben genannten Merkmale.

(iv) Zeichen Sie einen Häufigkeitsplot der beiden Merkmale.

Hinweis: Verwenden Sie den `geom_count()`-Befehl.

(v) Schreiben Sie zusätzlich die absolute Häufigkeit in die Kreise des Häufigkeitsplots.

Beispielsweise könnte die Grafik so aussehen:



Hinweis: Sehen Sie sich die Internetseite:

`www.r-graph-gallery.com/5-correlation-of-discrete-variables`

an. Auf der Seite `www.r-graph-gallery.com` *finden Sie eine Menge schöner Grafiken und den zugehörigen R-code. Außerdem ist* `stackoverflow.com` *immer eine Suche wert.*

Aufgabe 2.11: Korrelationen 2

(ST0102-deskrSta15) ●●●○

Sei (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, eine bivariate Stichprobe zweier metrischer Merkmale mit $s_x > 0, s_y > 0$ und Pearson-Korrelationskoeffizient $r_{x,y}$, wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten.

(i) $-1 \leq r_{x,y} \leq 1$

(ii) $\forall i = 1, \ldots, n : y_i = a + bx_i, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \Rightarrow r_{x,y} = \operatorname{sgn}(b)$, wobei $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ die Signum- oder Vorzeichenfunktion mit der Abbildungsvorschrift

$$\operatorname{sgn(x)} = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

bezeichnet.

(iii) $r_{x,y} = \pm 1 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, \operatorname{sgn}(b) = \operatorname{sgn}(r_{x,y}) : y_i = a + bx_i, \forall i = 1, \ldots, n.$

Hinweis: Verwenden Sie die Ungleichung von Cauchy-Schwarz (Schwarzsche Ungleichung): Für alle $u, v \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$*, gilt, dass*

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|.$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, falls u *und* v *linear abhängig sind. Der Malpunkt steht dabei für das Skalarprodukt.*

Aufgabe 3.1: Mengenlehre

(ST0103-Mengenlehre) ●●○○

Seien A, B und C Ereignisse in einem Grundraum Ω. Beschreiben Sie folgende Aussagen durch A, B und C sowie geeignete Mengenoperationen:

(i) Es tritt nur A ein.

(ii) Mindestens zwei der Ereignisse treten ein.

(iii) Genau eines der Ereignisse tritt ein.

(iv) A und B treten ein, aber nicht C.

(v) Höchstens zwei Ereignisse treten ein.

Versuchen Sie nun, folgende Ereignisse in Worten zu fassen:

$$(A \cup B) \cap \overline{A \cap B}\,, \quad A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,, \quad \overline{A \cap B}\,, \quad \overline{A \cup B}\,,$$
$$A \cap \overline{B \cup C}\,.$$

Aufgabe 3.2: Mäxle

(ST0103-LaplaceExperiment01) ●●○○

Beim „Mäxle“-Spielen[1] mit Ihren Freunden taucht folgendes Problem auf: Ihr Freund behauptet, er habe „65“ gewürfelt, und gibt den Becher an Sie weiter. Sie glauben ihm und würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie einen Pasch oder Mäxle werfen? Hierbei tritt Mäxle auf, falls ein Würfel „2“ zeigt und der andere „1“. Geben Sie einen geeigneten Grundraum mit Wahrscheinlichkeitsverteilung an, und berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit!
Welche Annahmen sind vernünftigerweise zu treffen?

Aufgabe 3.3: Glücksspirale

(ST0103-LaplaceExperiment02) ●●●○

Bei der ersten Ziehung der *Glücksspirale* 1971 wurden für die Ermittlung einer 7-stelligen Gewinnzahl aus einer Trommel, die Kugeln mit den Ziffern 0,1, . . . ,9 je 7mal enthält, nacheinander rein zufällig 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

(i) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an.

(ii) Geben Sie die Ziehungswahrscheinlichkeit für jede 7-stellige Gewinnzahl $(a_1, \dots, a_7) \in \{0, \dots, 9\}^7$ an. Welche 7-stelligen Gewinnzahlen hatten hierbei die größte und welche die kleinste Ziehungswahrscheinlichkeit?

(iii) Bestimmen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit für die Zahl 3 143 643!

(iv) Wie würden Sie den Ziehungsmodus abändern, um allen Gewinnzahlen die gleiche Ziehungswahrscheinlichkeit zu sichern?

Aufgabe 3.4: Ereignissystem

(ST0103-Ereignissystem01) ●○○○

Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{F} = \{M \subseteq \mathbb{R} : M \text{ offen}\}$. Begründen Sie, dass $\mathcal{F}$ kein Ereignissystem über $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 3.5: Ereignissystem 2

(ST0103-Ereignissystem02) ●●○○

(i) Man betrachte das Zufallsexperiment eines 3-fachen Münzwurfs einer Münze mit den Seiten 0 und 1. Bestimmen Sie einen Grundraum Ω und ein Ereignsissystem $\mathcal{F}$ dieses Zufallsexperiments, geben Sie exemplarisch zwei Ereignisse an und bestimmen Sie die Mächtigkeiten $|\Omega|$ und $\mathcal{F}$:

[1] Bei „Mäxle“ wird gleichzeitig mit zwei Laplace-Würfeln geworfen. Ziel ist es, eine „höhere“ Kombination als der vorherige Spieler zu erreichen. Die genauen Spielregeln von „Mäxle“ können Sie bei mir erfragen. Die Aufgabe ist aber auch ohne Kenntnis der Regeln lösbar.

(ii) Sei $\Omega = \{0;1\}^4$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$f(\omega) = \frac{1}{7},\ \omega \in \Omega$$

eine Zähldichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf $\{\Omega,\mathcal{F}\}$ darstellt.

Aufgabe 3.6: Rechenregeln für W-Maße (ST0103-RechenregelnWskMasse) ●●●○

Beweisen Sie Satz II.3.2:

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ein W-Raum und $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ beliebige Ereignisse. Dann gilt:

(i) $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.

(ii) Monotonie: $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.

(iii) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

(iv) $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}\left(A^C\right) = 1$.

(v) σ-Subadditivität: $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i\right) \leq \sum\limits_{i\geq 1} \mathrm{P}\left(A_i\right)$.

(vi) $\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

Hinweis: Beweisen Sie (vi) vor (iii).

Aufgabe 3.7: Siebformel (ST0103-RechenregelnWskMasse02) ●●●●

Beweisen Sie den Ein- und Ausschlusssatz von Sylvester-Poincare (Siebformel):

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{F}$:

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{T \in \left\{ {n \atop i} \right\}} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in T} A_j\right)$$

wobei $\left\{ {n \atop i} \right\} := \{T \subseteq \{1,\ldots,n\} : \#T = i\ \}$ „alle i-elementigen Teilmengen aus $\{1,\ldots,n\}$“ sind.
(Beachte $\#\ \left\{ {n \atop i} \right\} = \binom{n}{i}$)

Hinweis: Folgern Sie die Aussage aus Satz II.3.2 mithilfe der vollständigen Induktion.

Aufgabe 3.8: Ereignissystem 3 (ST0103-Ereignissystem03) ●●○○

Beweisen Sie Lemma II.1, also:

Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra und $A, B \in \mathcal{F}$, dann gilt:

(i) $\varnothing \in \mathcal{F}$.

(ii) $A \cup B \in \mathcal{F}$ und $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(iii) $A \backslash B = A \cap B^C \in \mathcal{F}$.

(iv) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap\limits_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{F}$ (Durchschnittsstabilität abzählbar vieler Mengen).

Aufgabe 3.9: Hypergeometrische Verteilung (ST0103-HypergeomVtlg) ●○○○

In Ihrem Dorfweiher leben 200 Forellen und 100 Karpfen. Sie gehen fischen und haben 10 Fische gleichzeitig in Ihrem Netz gefangen, ausschließlich Forellen und Karpfen.

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie genau 3 Forellen im Netz haben?

(ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie mehr als 7 Karpfen im Netz haben?

(iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie mindestens 9 Fische der gleichen Art im Netz haben?

Hinweis: Machen Sie sich mit den R-Befehlen `dhyper` und `phyper` vertraut.

Aufgabe 4.1: Mengenfolgen (7 Punkte)

(ST0104-Ereignissystem04)

Seien Ω eine nichtleere Menge und $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$. Dann definiert man den *Limes inferior* und den *Limes superior* der Mengenfolge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ als

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\,.$$

Zeigen Sie:

(i) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{\,\omega\in\Omega\,|\,\omega\in A_n \text{ für schließlich alle } n\in\mathbb{N}\,\}$

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{\,\omega\in\Omega\,|\,\omega\in A_n \text{ für unendlich viele } n\in\mathbb{N}\,\}$

Berechnen Sie nun für die Beispiele

(iii) $A_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$,

(iv) $A_n := \{(-1)^n\}$,

(v)
$$\begin{aligned} A_n &:= \{i\in\mathbb{N} : i \text{ ist durch drei teilbar}\} \quad \text{für } n \text{ ungerade},\\ A_n &:= \{i\in\mathbb{N} : i \text{ ist durch zwei teilbar}\} \quad \text{für } n \text{ gerade} \end{aligned}$$

den *Limes inferior* und den *Limes superior* der Mengenfolge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Für jede Menge $C\in\mathcal{P}(\Omega)$ definiert man die *Indikatorfunktion von C* als

$$\mathbb{1}_C :\ \Omega\to\{0,1\},\quad \omega\mapsto\begin{cases} 1 & \text{für } \omega\in C\\ 0 & \text{für } \omega\notin C\end{cases}\,.$$

Beweisen Sie:

(vi) $\mathbb{1}_{\liminf\limits_{n\to\infty} A_n} = \liminf\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$,

Bemerkung: Auch die Aussage $\mathbb{1}_{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$ gilt und kann analog zu (vi) bewiesen werden.

Aufgabe 4.2: Eigenschaften von Ereignissystemen (4 Punkte)

(ST0104-Ereignissystem05)

Sei $\mathcal{F}$ eine $\sigma-$Algebra über einer Menge Ω und $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Mengenfolge in $\mathcal{F}$. Zeigen Sie:

(i) $A_1 \triangle A_2 := A_1\setminus A_2 \,\cup\, A_2\setminus A_1 \in\mathcal{F}$
($A_1 \triangle A_2$ heißt „symmetrische Differenz“.),

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \in\mathcal{F}$,

(iii) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \in\mathcal{F}$.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie, dass gilt:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in\mathcal{F}.$$

Aufgabe 4.3: Erzeugte Ereignissysteme (1 Punkt)

(ST0104-Ereignissystem06) ●●○○

Seien $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ Mengensysteme über einer Menge Ω.
Beweisen Sie:

$$\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2).$$

Aufgabe 4.4: Klassisches Maßproblem (3 Punkte)

(ST0104-Masse01) ●●○○

In der Vorlesung wurde erwähnt, dass es auf $\mathcal{P}([0,1])$ keine nichtnegative, normierte, sigma-additive und kongruenztreue Abbildung gibt.

(i) Existiert eine nichtnegative, normierte und sigma-additive Abbildung auf $\mathcal{P}([0,1])$?

(ii) Existiert eine nichtnegative, sigma-additive und kongruenztreue Abbildung auf $\mathcal{P}([0,1])$?

Begründen Sie Ihre Antworten!