Dunkle Zahlen

W. Mückenheim, Hochschule Augsburg

Grundlagen

Enthalten die Zahlen β keine größte, dann besitzen sie (nach dem zweiten Erzeugungsprinzip) eine "Grenze" β', welche auf alle β zunächst folgt [p. 208f]. Diese Erklärung Ernst Zermelos stützt sich auf Cantors Grundsatz für Wohlordnungen, dass "zu jeder beliebigen endlichen oder unendlichen Menge von Elementen ein bestimmtes Element gehört, welches das ihnen allen *nächstfolgende* Element in der Sukzession ist" [p. 168].

Georg Cantor definiert für die natürlichen Zahlen, "daß ω die *erste* ganze Zahl sein soll, welche auf alle Zahlen ν folgt, d. h. größer zu nennen ist als jede der Zahlen ν" [p. 195], dass allerdings der Abstand "$\omega - \nu$ immer gleich ω ist" [p. 395].

"Die Gesamtheit *aller endlichen Kardinalzahlen* ν bietet uns das nächstliegende Beispiel einer transfiniten Menge; wir nennen die ihr zukommende Kardinalzahl '*Alef-null*', in Zeichen $\aleph_0$" [p. 293].

Alle Zitate aus: Ernst Zermelo (Hrsg.): "Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor - Dedekind. Nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel." Springer, Berlin (1932).

Wenn ω auf alle natürlichen Zahlen n *zunächst* folgt, dann gibt es nichts dazwischen. Wenn hingegen zwischen jeder natürlichen Zahl ν und ω immer ω oder $\aleph_0$ natürliche Zahlen liegen, dann müssen sich offenbar die hier mit ν bezeichneten Zahlen von den hier mit n bezeichneten wesentlich unterscheiden.

Eine naheliegende Erklärung wäre: Die aktual unendliche Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen n umfasst die potentiell unendliche Folge $\mathbb{N}_{def}$ der definierbaren Zahlen ν. Dann wäre allerdings $\aleph_0$ die Kardinalzahl aller endlichen Kardinalzahlen n und nicht die der definierbaren Kardinalzahlen ν.

Wir werden zahlreiche Indizien und Beweise für diese Behauptung kennenlernen.

Endliche Anfangsabschnitte

Jeder endliche Anfangsabschnitt $A_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ der natürlichen Zahlen endet mit einer durch eben diesen Anfangsabschnitt individuell definierten, mit dem Ursprung 0 verbundenen und in Relation gesetzten Zahl n.

Jede Vereinigung von endlichen Anfangsabschnitten ist selbst wieder ein endlicher Anfangsabschnitt und endet mit einer definierten natürlichen Zahl:

$$\{1\} = \{1\}$$
$$\{1\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\}$$
$$\{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$
$$\{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4,\}$$
$$\{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\ldots .$$

Das gilt wegen Inklusionsmonotonie immer, unabhängig von der Menge der vereinigten Anfangsabschnitte. Diese Überlegung ist auch unabhängig von der Darstellung als Zahlenmengen

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \ldots$$

oder als (implizit indizierte) Symbole

o, oo, ooo, ...

Mehr als endlich viele kann man ohnehin nicht vereinigen, denn es gibt nicht mehr verschiedene endliche Anfangsabschnitte (indizierte Symbole) als man mit Hilfe ihrer Elemente (Indizes) unterscheiden kann. Das sind nicht mehr als endlich viele, wie sich aus der Definition "endlicher Anfangsabschnitt" ergibt.

Alle endlichen Anfangsabschnitte enthalten die Vereinigungen aller ihrer Vorgänger. Alle Nachfolger sind ebenfalls endliche Anfangsabschnitte, die die Vereinigungen aller ihrer Vorgänger enthalten. Dass alle diese endlichen Anfangsabschnitte bei nochmaliger Vereinigung mehr ergeben als schon vorher vorhanden war, ist ausgeschlossen, denn die verfügbaren Elemente sind durch die vorherigen Vereinigungen definiert und können nicht magisch wachsen. Insbesondere ist ihre *potentiell* unendliche Vereinigung

$$\mathbb{N}_{\text{def}} = \{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\text{def}}} A_n$$

nicht die Menge $\mathbb{N}$, sondern die Klasse $\mathbb{N}_{\text{def}}$ der definierten natürlichen Zahlen, denn zur aktual unendlichen Menge

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$$

(die nicht durch eine Vereinigung von Anfangsabschnitten erzeugt werden kann, da diese nur definierbare Zahlen enthalten) fehlen $\aleph_0$ dunkle Zahlen

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\text{def}}: |\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, \ldots, n\}| = \aleph_0 .$$

Alle individuell definierbaren natürlichen Zahlen gehören zu einem gemeinsamen endlichen Anfangsabschnitt. Sie bilden eine potentiell unendliche Klasse. Das ist durch Konstruktion mit individuell definierten Zahlen (oder Instantiation dieser) unwiderlegbar. Dabei spielt es keine Rolle, dass $n+1$ in $\{1, 2, 3, ..., n\}$ nicht enthalten ist, denn es ist in $\{1, 2, 3, ..., n , n+1\}$ enthalten. Außerdem ist n keine Zahl, sondern kann durch eine Zahl ersetzt werden.

Mit dem Anfangsabschnitt $\{1, 2, 3, ..., n\}$ ist auch jeder größere angebbare Anfangsabschnitt wie $\{1, 2, 3, ..., 10^{10^n}\}$ definiert und von allen dunklen Anfangsabschnitten können noch potentiell unendlich viele definiert werden. Aber immer bleiben aktual unendlich viele natürliche Zahlen undefiniert. Also werden $\aleph_0$ Zahlen niemals definiert, das bedeutet, sie sind undefinierbar.

Resümee: Wenn die Menge $\mathbb{N}$ die Mächtigkeit $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ besitzt, also mehr als jede endliche Menge von Elementen (und damit mehr Elemente als alle endlichen Anfangsabschnitte liefern können) dann müssen undefinierbare Elemente vorhanden sein, sogenannte dunkle natürliche Zahlen.

Endabschnitte

Ein definierbares Endsegment

$$E_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$$

ist eine aktual unendliche Menge natürlicher Zahlen mit definierbarer erster Zahl n. Jeder Schnitt über endlich viele Endsegmente, zum Beispiel die Menge $\{E_1, E_2, E_3 , ..., E_n\}$, ist nicht leer:

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\text{def}}: E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap ... \cap E_n = E_n \neq \{ \} . \qquad (1)$$

Jedes definierbare Endsegment enthält $\aleph_0$ Elemente gemeinsam mit jedem anderen definierbaren Endsegment $|E_n \cap E_m| = \aleph_0$. Für E_m mit $m < n$ ist der Beweis trivial, weil $E_n \subset E_m$. Für E_k mit $n < k$ ist $E_k \subset E_n$ und damit auch $E_k \subset E_m$.

Jeder Schnitt über eine aktual unendliche Menge von Endsegmenten, zum Beispiel über alle Glieder der Folge (E_n), ist jedoch leer, da für jede natürliche Zahl n ein erstes Endsegment E_{n+1} existiert, in dem sie nicht mehr vorkommt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \varnothing . \qquad (2)$$

Das Herunterzählen auf die leere Menge kann aber nur in Schritten von einer natürlichen Zahl pro Endsegment erfolgen, denn die Definition der Folge

$$E_n \setminus \{n\} = E_{n+1}$$

verbietet andere Prozesse als den Verlust eines Elementes pro Glied. Der plötzliche Verlust von mehr als einer oder sogar unendlich vielen natürlichen Zahlen ohne genau so viele beteiligte

Folgenglieder ist ausgeschlossen. Die Behauptung dass die Folge (E_n) der definierbaren Endsegmente E_n gegen die die leere Menge *konvergiert* ist jedenfalls mathematisch inakzeptabel.

Der Verlust von $\aleph_0$ Elementen zwischen jedem definierbaren Endsegment und der leeren Menge kann also nur über ebensoviele dunkle Glieder erfolgen. Die dunklen Zahlen lösen somit das Rätsel, warum

$$\aleph_0 = \lim_{n\to\infty} |E_n| \neq |\lim_{n\to\omega} E_n| = 0 \ .$$

$\lim_{n\to\omega} E_n$ wird aus (2) berechnet, $\lim_{n\to\infty} |E_n|$ kann nur aus (1) berechnet werden.

Absteigende Folgen natürlicher Zahlen

Jede von 0 nach ω aufsteigende Folge natürlicher Zahlen ist aktual unendlich, besitzt also $\aleph_0$ Glieder. Jede von ω nach 0 absteigende Folge natürlicher Zahlen ist endlich. Das folgt aus dem Fundierungsaxiom. Aber vor allem folgt es aus der praktischen Unmöglichkeit, aktual unendlich viele Vorgänger von ω zu definieren.

Offenbar sind $\aleph_0$ natürliche Zahlen vorhanden, stehen aber nicht als definierbare Ziele für den Absprung von ω zur Verfügung.

Überdeckung des Einheitsintervalls

Die Komplettüberdeckung des halboffenen Intervalls (0, 1] durch geschlossene Intervalle der Form [1/(n+1), 1/n]

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] = (0,1] \qquad (3)$$

wäre nicht möglich, wenn *jedes* Intervall unendlich viele Stammbrüche zwischen 0 und seinem linken Endpunkt frei ließe.

Alle *definierbaren* Intervalle lassen aber aktual unendlich viele Stammbrüche zwischen 0 und dem linken Randpunkt frei, denn es gilt bis zu jeder definierbaren natürlichen Zahl k

$$\forall k \in \mathbb{N}: \bigcup_{n=1}^{k} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \neq (0,1] \qquad \text{or} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{\text{def}}} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \neq (0,1] \qquad (4)$$

Das Intervall (0, 1/(k+1)) enthält $\aleph_0$ Stammbrüche und bleibt ohne Überdeckung. In (3) müssen demnach mehr Intervalle vorhanden sein als in (4).

Der Binäre Baum

Man entferne alle Knoten endlicher Pfade aus dem unendlichen Binären Baum

```
         0.
        /   \
      0       1
     / \     / \
    0   1   0   1
   / \ / \ / \ / \
  0 1 0 1 0 1 0 1
      ... .
```

Was bleibt übrig? Wenn nichts übrig bliebe, dann wären nur die abzählbar vielen endlichen Pfade im Binären Baum. Wenn Teile von überabzählbar vielen Pfaden übrig bleiben, dann müssen diese Teile dunkle Knoten (also Knoten mit dunklen Indizes) sein.

Dazu zwei Experten-Meinungen:

"Man könnte alle *endlichen* Pfade und nur diese aus dem Baum entfernen, und hätte *damit* alle Knoten entfernt. Doch *hätte man niemals irgendeinen unendlichen* Pfad entfernt. Sie alle würden in jedem Falle weiterhin *existieren*, unabhängig davon, was entfernt worden wäre!" [George Greene in "The power set of ℕ is not uncountable", sci.logic (22 Jul 2016)]

"George Greene hat recht, wenn man die endlichen Pfade aus der Kollektion aller endlichen und unendlichen Pfade des Baums entfernt, verbleiben immer noch die unendlichen Pfade, falls welche vorhanden sind. Aber die endlichen Pfade haben bereits alle Knoten überdeckt." [Jan Burse in "George Greene defends dark numbers!", sci.logic (12 Oct 2019)]

Die endlichen Pfade haben alle *definierbaren* Knoten überdeckt. Pfade ohne Knoten gibt es nicht, denn Pfade sind nichts weiter als Knotenfolgen. Also befinden sich im Binären Baum dunkle Knoten.

Die Diagonalzahl

In Cantor-Listen werden nur die Ziffernfolgen (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ..., a_{nn}) zwischen dem linken Rand und der Diagonale verwendet.

$\boldsymbol{a}_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, \ldots$
$\boldsymbol{a}_{21}, \boldsymbol{a}_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, \ldots$
$\boldsymbol{a}_{31}, a_{32}, \boldsymbol{a}_{33}, a_{34}, a_{35}, \ldots$
$\boldsymbol{a}_{41}, a_{42}, a_{43}, \boldsymbol{a}_{44}, a_{45}, \ldots$
$\boldsymbol{a}_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}, \boldsymbol{a}_{55}, \ldots$
...

Alle sind endlich. Daraus konstruiert man die Antidiagonale, die eben so viele Ziffern enthält, also weniger als $\aleph_0$. Eine Ziffernfolge mit $\aleph_0$ Ziffern benötigt zusätzlich $\aleph_0$ dunkle Ziffern.

Jede streng monotone unendliche Folge mit reellem Grenzwert nimmt diesen nicht vor ω an. Auf jedes definierbare Folgenglied folgen noch $\aleph_0$ dunkle Glieder vor ω. Diese sind weder zum Abzählen noch für Überabzählbarkeitsbeweise geeignet.

Zwei verschiedene reelle Grenzwerte sind wie alle definierbaren Punkte auf der reellen Achse durch $\aleph_0$ dunkle reelle Zahlen getrennt.

Wie entstand die Akzeptanz?

Wie ist der Glaube entstanden, nach jeder natürlichen Zahl folgten noch aktual unendlich viele, doch alle wären definierbar und zwischen allen diesen natürlichen Zahlen und ω befände sich nichts?

Einmal ist diese Aussage ja im Modell der potentiellen Unendlichkeit vollkommen richtig. Unendlich viele Zahlen folgen auf jede definierte. Da gibt es zwar kein ω, aber die Mengenlehrer sind eifrig bestrebt, den Unterschied zwischen potentieller und aktualer Unendlichkeit zu verwischen. Viele behaupten sogar, dass gar kein Unterschied existiere.

Andererseits werden viele Mathematik-Studenten von kontra-intuitiven Aussagen angelockt und sind wohl auch ein wenig stolz darauf, so etwas "verstanden" zu haben; auch war die Einstiegsdroge noch nicht so stark, denn da hieß es zunächst nur recht harmlos: "Auf jede natürliche Zahl folgt eine größere natürliche Zahl, aber es gibt keine natürliche Zahl, die größer als alle anderen ist." Und mit der plausiblen Erklärung, dass jeder eine Mutter hat, aber keine Mutter für alle existiert, erscheint das Argument unproblematisch.

Wenn nun in der geschlossenen Folge der Ordinalzahlen, auf dem Ordinalzahlenstrahl, eine vor ω fehlt, dann ist das kaum auffällig, denn es spielt sich im Unendlichen ab und ist ohnehin nicht nachprüfbar.

Hat man das erst einmal verinnerlicht, dann kann die Dosis erhöht werden. Dann machen bald auch $\aleph_0$ fehlende Zahlen nichts mehr aus, und die Erkenntnis, dass in jedem Falle nach n mehr Zahlen fehlen als vor n vorhanden sind, trifft auf ein immunisiertes Gehirn, das jeden Zweifler lediglich für unfähig hält, die höheren Weihen des Unendlichen zu empfangen.

Dabei ist das Verständnis der potentiell unendlichen Klasse der definierbaren Zahlen doch kontra-intuitiv genug. Diese kann beliebig vermehrt werden, und die Klasse der dunklen Zahlen kann beliebig vermindert werden, ohne jedoch ihren aktual unendlichen Umfang zu verlieren.