Kalenderblätter 801 - 1000

Ich übergebe sie mit zweifelhaften Gefühlen der Öffentlichkeit. Daß es dieser Arbeit in ihrer Dürftigkeit und der Finsternis dieser Zeit beschieden sein sollte, Licht in ein oder das andere Gehirn zu werfen, ist nicht unmöglich; aber freilich nicht wahrscheinlich. [Ludwig Wittgenstein: Philosophische Untersuchungen]

801 110814 Shaxpeareologie (14)
802 110815 Shaxpeareologie (15)
803 110816 Shaxpeareologie (16)
804 110817 Shaxpeareologie (17)
805 110818 Shaxpeareologie (18)
806 110819 Shaxpeareologie (19)
807 110820 Shaxpeareologie (20)
808 110821 Shaxpeareologie (21)
809 110822 Shaxpeareologie (22)
810 110823 Shaxpeareologie (23)
811 110824 Shaxpeareologie (24)
812 110825 Shaxpeareologie (25)
813 110826 Shaxpeareologie (26)
814 110827 Shaxpeareologie (27)
815 110828 Shaxpeareologie (28)
816 110829 Shaxpeareologie (29)
817 110830 Shaxpeareologie (30)
818 110831 Shaxpeareologie (31)
819 110901 Shaxpeareologie (32)
820 110902 Shaxpeareologie (33)
821 110903 Shaxpeareologie (34)
822 110904 Shaxpeareologie (35)
823 110905 Shaxpeareologie (36)
824 110906 Shaxpeareologie (37)
825 110907 Shaxpeareologie (38)
826 110908 Shaxpeareologie (39)
827 110909 Shaxpeareologie (40)
828 110910 Shaxpeareologie (41)
829 110911 Shaxpeareologie (42)
830 110912 Shaxpeareologie (43)
831 110913 Kann denn ein Ding Menge sein?
832 110914 Über die Mengeneigenschaften von Tassen und anderen Tonstücken
833 110915 Was sich gehört in der Mengenlehre.
834 110916 Die Menge aller Mengen und der Teufel
835 110917 Doron Zeilberger: Opinion 69
836 110918 Zwei Welten
837 110919 Fortsetzung von Folgen
838 110920 Vieldeutigkeit der Peano-Axiome
839 110921 Definition der natürlichen Zahlen
840 110922 Vollständige Induktion
841 110923 Völlig einwandfreie Definitionen
842 110924 Alles ist Zahl
843 110925 Divergente Reihen bei Grosseteste und Cantor
844 110926 Jim Trek
845 110927 Hessenberg, Wohlordnungssatz und Kontinuumproblem
846 110928 Fraenkel, endliche Definierbarkeit
847 110929 Hessenberg, Wohlordnung und Auswahlaxiom
848 110930 Fraenkel, endliche Darstellbarkeit

849 111001 Nelson, Outline
850 111002 Nelson, Claim
851 111003 John Baez, Artenvielfalt
852 111004 Nelson, potential and actual infinity
853 111005 Nelson, superexponentiaton
854 111006 Catarina Dutilh Novaes
855 111007 Definition der natürlichen Zahlen
856 111008 Mathematik als Naturwissenschaft
857 111009 Nelson, R.M. Robinson
858 111010 Shelah: Logical Dreams
859 111011 Yessenin-Volpin: About infinity, finiteness and finitization
860 111012 Yessenin-Volpin: Beware of the Gödel-Wette paradox
861 111013 Cantors Weltbild (31): Pantheismus und Materialismus
862 111014 Shelah: Unzugängliche Kardinalzahlen, Höllenparadoxon
863 111015 Baez: Ultrafinitists
864 111016 Bederna, Martignon: Matheologie
865 111017 Perry Rhodan
866 111018 Mathematik und Theologie
867 111019 Novalis
868 111020 Cantors Weltbild (32): Seine Heiligkeit
869 111021 Weyl, Bote zwischen Mathematik und Physik
870 111022 Überabzählbarkeit und Auswahlaxiom
871 111023 Borel's inaccessible numbers
872 111024 Der maßtheoretische Beweis für die Überabzählbarkeit - und warum er versagt
873 111025 Die Ungleichung von Kraft
874 111026 Chaitin: Unberechenbare Zahlen
875 111027 Im Falle, dass der Fall nicht eintritt, lauert eine Falle
876 111028 Arnold-Prinzip, Matthew-Effekt, Kolmogoroff-Komplexität
877 111029 Chaitin: Haltewahrscheinlichkeit
878 111030 Der Binäre Baum (1)
879 111031 Der Binäre Baum (2)
880 111101 Der Binäre Baum (3)
881 111102 Der Binäre Baum (4)
882 111103 Der Binäre Baum (5)
883 111104 Der Binäre Baum (6)
884 111105 Der Binäre Baum (7)
885 111106 Der Binäre Baum (8)
886 111107 Der Binäre Baum (9)
887 111108 Der Binäre Baum (10)
888 111109 Der Binäre Baum (11)
889 111110 Der Binäre Baum (12)
890 111111 Der Binäre Baum (13)
891 111112 Der Binäre Baum (14)
892 111113 Der Binäre Baum (15)
893 111114 Der Binäre Baum (16)
894 111115 Der Binäre Baum (17)
895 111116 Der Binäre Baum (18)
896 111117 Der Binäre Baum (19)
897 111118 Der Binäre Baum (20)
898 111119 Der Binäre Baum (21)
899 111120 Der Binäre Baum (22)
900 111121 Der Binäre Baum (23)
901 111122 Der Binäre Baum (24)
902 111123 Der Binäre Baum (25)
903 111124 Der Binäre Baum (26)
904 111125 Der Binäre Baum (27)
905 111126 Der Binäre Baum (28)

906 111127 Der Binäre Baum (29)
907 111128 Der Binäre Baum (30)
908 111129 Der Binäre Baum (31)
909 111130 Der Binäre Baum (32)
910 111201 Der Binäre Baum (33)
911 111202 Der Binäre Baum (34)
912 111203 Der Binäre Baum (35)
913 111204 Der Binäre Baum (36)
914 111205 Der Binäre Baum (37)
915 111206 Der Binäre Baum (38)
916 111207 Der Binäre Baum (39)
917 111208 Der Binäre Baum (40)
918 111209 Der Binäre Baum (41)
919 111210 Der Binäre Baum (42)
920 111211 Der Binäre Baum (43)
921 111212 Der Binäre Baum (44)
922 111213 Der Binäre Baum (45)
923 111214 Der Binäre Baum (46)
924 111215 Der Binäre Baum (47)
925 111216 Der Binäre Baum (48)
926 111217 Der Binäre Baum (49)
927 111218 Der Binäre Baum (50)
928 111219 Der Binäre Baum (51)
929 111220 Der Binäre Baum (52)
930 111221 Der Binäre Baum (53)
931 111222 Der Binäre Baum (54)
932 111223 Der Binäre Baum (55)
933 111224 Der Binäre Baum (56)
934 111225 Der Binäre Baum (57)
935 111226 Der Binäre Baum (58)
936 111227 Der Binäre Baum (59)
937 111228 Der Binäre Baum (60)
938 111229 Der Binäre Baum (61)
939 111230 Der Binäre Baum (62)
940 111231 Der Binäre Baum (63)
941 120101 Der Binäre Baum (64)
942 120102 Der Binäre Baum (65)
943 120103 Der Binäre Baum (66)
944 120104 Der Binäre Baum (67)
945 120105 Der Binäre Baum (68)
946 120106 Der Binäre Baum (69)
947 120107 Der Binäre Baum (70)
948 120108 Der Binäre Baum (71)
949 120109 Der Binäre Baum (72)
950 120110 Der Binäre Baum (73)
951 120111 Der Binäre Baum (74)
952 120112 Der Binäre Baum (75)
953 120113 Der Binäre Baum (76)
954 120114 Der Binäre Baum (77)
955 120115 Der Binäre Baum (78)
956 120116 Der Binäre Baum (79)
957 120117 Der Binäre Baum (80)
958 120118 Der Binäre Baum (81)
959 120119 Der Binäre Baum (82)
960 120120 Der Binäre Baum (83)
961 120121 Der Binäre Baum (84)
962 120122 Der Binäre Baum (85)

963 120123 Der Binäre Baum (86)
964 120124 Der Binäre Baum (87)
965 120125 Der Binäre Baum (88)
966 120126 Der Binäre Baum (89)
967 120127 Der Binäre Baum (90)
968 120128 Der Binäre Baum (91)
969 120129 Der Binäre Baum (92)
970 120130 Der Binäre Baum (93)
971 120131 Der Binäre Baum (94)
972 120201 Der Binäre Baum (95)
973 120202 Der Binäre Baum (96)
974 120203 Der Binäre Baum (97)
975 120204 Der Binäre Baum (98)
976 120205 Der Binäre Baum (99)
977 120206 Der Binäre Baum (100)
978 120207 Der Binäre Baum (101)
979 120208 Der Binäre Baum (102)
980 120209 Der Binäre Baum (103)
981 120210 Der Binäre Baum (104)
982 120211 Der Binäre Baum (105)
983 120212 Der Binäre Baum (106)
984 120213 Der Binäre Baum (107)
985 120214 Der Binäre Baum (108)
986 120215 Der Binäre Baum (109)
987 120216 Der Binäre Baum (110)
988 120217 Der Binäre Baum (111)
989 120218 Der Binäre Baum (112)
990 120219 Der Binäre Baum (113)
991 120220 Der Binäre Baum (114)
992 120221 Der Binäre Baum (115)
993 120222 Der Binäre Baum (116)
994 120223 Der Binäre Baum (117)
995 120224 Der Binäre Baum (118)
996 120225 Der Binäre Baum (119)
997 120226 Der Binäre Baum (120)
998 120227 Der Binäre Baum (121)
999 120228 Der Binäre Baum (122)
1000 120229 Der Binäre Baum (123)

801 Das Kalenderblatt 110814 Shaxpeareologie (14)

Oft expectation fails, and most oft there
Where most it promises; and oft it hits
Where hope is coldest, and despair most fits.

Am 13. Februar 1900 schreibt Cantor ein weiteres Mal aus Halle an der Saale, Händelstraße 13, an Steiner:

Sehr geehrter Herr Doctor. Mein Manuscript «Shaxpearologie und Baconianismus» werden Sie erhalten haben. Es wäre mir lieb, von Ihnen zu hören, wann ungefähr der Druck dieses ersten Artikels erfolgen wird. Auch möchte ich (dies versteht sich wohl von selbst?) eine Correctur des Druckes seinerzeit besorgen. Ein Versehen habe ich schon bemerkt; bei der «Sammlerhypothese» muß George Chalmers (1742-1825) als Erfinder derselben genannt werden und nicht Boader; und noch einige Kleinigkeiten sind zu verbessern.
Ich habe von einem Offenbacher Verleger eine Offerte bekommen, für ihn ein etwas ausführlicheres Werk über die Shakespearefrage zu verfassen. Ich warte damit bis meine drei Artikel in Ihrem Magazin erschienen sein werden. Von Herrn Dr. H. Schmidkunz erhielt ich heute Drucksachen zur «Hochschulpädagogik»; besten Dank für die jedenfalls von Ihnen ausgegangene Anregung. Herrn Geheimrath Förster bitte ich gelegentlich von mir zu grüßen.
Ihr ergebenster Georg Cantor.

Die von Cantor angeführte Korrektur wurde berücksichtigt. Ob Steiner einen Korrektur-Bogen an Cantor schickte, ist nicht bekannt - jedenfalls nicht wahrscheinlich, da Cantors Artikel bereits am 24. Februar 1900 erschien. Dieser eine Artikel ist das letzte Werk Cantors zur Shakespeare-Bacon-Frage gewesen; sowohl eine Fortsetzung dieses Artikels wie eine ausführlichere Darstellung sind nicht zustandegekommen.

[Renatus Ziegler: "Georg Cantor und Rudolf Steiner", Beiträge zur Rudolf-Steiner-Gesamtausgabe, Veröffentlichungen aus dem Archiv der Rudolf-Steiner-Nachlassverwaltung, Dornach, Doppelheft Nr. 114/115 (1995) 53-61]
http://www.reinesdenken.ch/fileadmin/user_upload/Literatur%20Allgemein/Ziegler_Cantor%20und%20Steiner.pdf

802 Das Kalenderblatt 110815 Shaxpeareologie (15)

How much unlike my hopes and my deservings!
"Who chooseth me shall have as much as he deserves"!
Did I deserve no more than a fool's head?

Im 48. Jahrgang 1896 der Zeitschrift "Deutschland" (2. Blatt, Nr. 335) bespricht Steiner ein Gastspiel im Hoftheater in Weimar [...]. Die Besprechung beginnt mit den Worten: "Einen glücklichen, lichtbringenden Einfall hatte derjenige, der zuerst die Größe der Dramen Shakespeares aus dem Umstande erklärte, daß ihr Dichter Schauspieler war. Es kommt dabei weniger in Betracht, daß dieser Dichter die Schauspielkunst berufsmäßig ausgeübt hat, sondern daß er, seinem Grundcharakter nach, eine Schauspielernatur gewesen war. Es gehört zum Wesen einer solchen Natur, daß sie, mit völliger Verleugnung der eigenen Persönlichkeit, in fremde Charaktere untertauchen kann. Der Schauspieler verzichtet darauf, er selbst zu sein. Es ist ihm die Möglichkeit gegeben, aus fremden Wesenheiten heraus zu reden. Und er ist umso mehr Schauspieler, je schmiegsamer, je verwandlungsfähiger er ist. Es hat einen tiefsymbolischen Sinn, daß wir von Shakespeare als Person so gut wie gar nichts wissen. Was geht er uns auch als Person an? Er spricht nicht als Person zu uns, er spricht in Rollen zu uns. Er ist das wahre Chamäleon. Er spricht als Hamlet, als Lear, als Othello zu uns. Shakespeare spielt Theater, auch wenn er Stücke schreibt. Er empfindet nicht mehr, was in seiner Seele vorgeht, wenn er die Gestalten seiner Stücke schafft. Weil Shakespeare nur Schauspieler war, deshalb können seine Dramen auch nur von wahren Schauspielern gespielt werden."

Ein Austausch von Cantor und Steiner über philosophische oder mathematische Themen scheint nicht zustandegekommen zu sein. Mit einer Widmung "Halle a. d. Saale 4-ten Febr. 1900 / Herrn Rudolf Steiner in Berlin, mit freundlichem Gruss hochachtungsvoll d. Verf." hat Cantor Steiner sein mit handschriftlichen Korrekturen versehenes Werk Zur Lehre vom Transfiniten; Gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik. Erste Abtheilung [alles Erschienene] (Halle-Saale: Pfeffer 1890) zugesandt. Steiner scheint nicht direkt darauf reagiert zu haben. Darin befinden sich die beiden Aufsätze "Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuale Unendliche" und "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten"
[Renatus Ziegler: "Georg Cantor und Rudolf Steiner", Beiträge zur Rudolf-Steiner-Gesamtausgabe, Veröffentlichungen aus dem Archiv der Rudolf-Steiner-Nachlassverwaltung, Dornach, Doppelheft Nr. 114/115 (1995) 53-61]
http://www.reinesdenken.ch/fileadmin/user_upload/Literatur%20Allgemein/Ziegler_Cantor%20und%20Steiner.pdf

803 Das Kalenderblatt 110816 Shaxpeareologie (16)

When beggars die there are no comets seen;
The heavens themselves blaze forth the death of princes.

Meines Wissens hat Steiner in seinem schriftlichen Werk und in seinen überlieferten Vorträgen Cantor nie explizit erwähnt. Abgesehen von Cantors Lektüre von Steiners Nietzsche-Buch (Brief vom 7. Februar 1900) scheint es auf der anderen Seite auch keine konkreten Hinweise auf eine Beschäftigung Cantors mit Steiners Werk zu geben. Es gibt nur einen indirekten Hinweis auf Steiners Kenntnisnahme einiger Grundbegriffe der Cantorschen Mengenlehre und zwar in der Fragenbeantwortung vom 15. Oktober 1920. Dort heißt es:

"Hat man keinen Wirklichkeitssinn, so kann man, wenn man eben nur die mathematische Formel und die mathematische Methode handhabt, in der allergeistreichsten Weise in den Raum und auch in die Zeit hineinrechnen, und man kann da zu ganz furchtbaren {{kein Druckfehler!}} Abstraktionen aufsteigen.

Und diese Abstraktionen, die haben manchmal etwas so verführerisches. Ich erinnere nur an die moderne Mengenlehre, nicht wahr, die zur Grundlage gemacht wird für die Erklärung des Unendlichen. Da haben Sie eine Auflösung des mathematischen Prinzips in sich selbst, eine Auflösung der Zahl in sich selbst, indem nicht mehr die Zahl im Sinne der gewöhnlichen Zahl nur genommen wird {{und, schlimmer noch, inkonsequent mit dem Unendlichen gerechnet wird, indem die Kardinalzahl des Grenzwertes einer Mengenfolge mit streng monoton steigenden Kardinalzahlen nicht der Grenzwert der Folge der Kardinalzahlen sein muss, sondern Null sein kann, obwohl von der Kardinalzahl $\aleph_0$ der Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen bewiesen wird, sie sei größer als alle Kardinalzahlen der endlichen Anfangsabschnitte von $\mathbb{N}$, mit dem Argument, dass die Kardinalzahl des Grenzwertes dieser Mengenfolge mit streng monoton steigenden Kardinalzahlen nicht kleiner als irgendeine Kardinalzahl der Folge sein kann}}, sondern indem irgend eine Menge verglichen wird mit einer anderen, bei der man von der Qualität der einzelnen Einheiten und auch von der Ordnung der einzelnen Einheiten absieht und nur eine Zuordnung vornimmt. Und man kommt ja dann zu der Möglichkeit, gewisse Unendlichkeitstheorien aufzubauen. Aber man schwimmt fortwährend in Abstraktionen. Im konkreten Wirklichen lassen sich die Dinge durchaus nicht durchführen." {{Sie lassen sich nicht einmal im Abstrakten durchführen, denn würde man tatsächlich von den Qualitäten absehen, so müssten die Quantitäten der folgenden beiden Prozesse identisch sein:

Supertask 1:
Hinein 1 bis 10, hinaus 1, hinein 11 bis 20, hinaus 2, hinein 21 bis 30, hinaus 3, usw.
Schließlich sind alle Zahlen draußen.
Supertask 2:
Hinein 1 bis 10, hinaus 10, hinein 11 bis 20, hinaus 20, hinein 21 bis 30, hinaus 30, usw.
Schließlich sind nicht alle Zahlen draußen.

}}
[Renatus Ziegler: "Georg Cantor und Rudolf Steiner", Beiträge zur Rudolf-Steiner-Gesamtausgabe, Veröffentlichungen aus dem Archiv der Rudolf-Steiner-Nachlassverwaltung, Dornach, Doppelheft Nr. 114/115 (1995) 53-61]
http://www.reinesdenken.ch/fileadmin/user_upload/Literatur%20Allgemein/Ziegler_Cantor%20und%20Steiner.pdf

804 Das Kalenderblatt 110817 Shaxpeareologie (17)

Let me tell you, Cassius, you yourself
Are much condemn'd to have an itching palm

Trotz der gesundheitlichen Krise, in der Cantor sich im Winter 1899/1900 befindet, ist er in dieser Zeit durchaus aktiv. Das gilt sowohl für die Auseinandersetzung mit den Problemen der Mengenlehre wie für die Weiterverfolgung der Bacon-Shakespeare-Theorie. Bzgl. der Bemühungen Cantors, Publikationen über seine Forschungen zur Bacon-Shakespeare-Theorie dem "Gelehrtenpublicum" zugänglich zu machen, gibt der Brief vom 1. 2 .1900 an seinen Sohn Erich {{s. KB110812}} beredte Auskunft. Sie sind diesmal erfolgreich; im Magazin für Litteratur erscheint im selben Jahr sein Artikel „Shaxpeareologie und Baconianismus".

Ich war an jenem Tage zwecks einer öffentlichen Vorlesung über die Bacon-Shakespeare-Frage im Hôtel Palmbaum in Leipzig. [Cantor an Klein, 31. 12. 1899]

[H. Meschkowski, W. Nilson (Hrsg.): "Georg Cantor Briefe", Springer, Berlin (1991) p. 416ff]

805 Das Kalenderblatt 110818 Shaxpeareologie (18)

Why then tonight let us assay our plot

Im Begriffe, eine kleine Arbeit über die Shakespeare Autorschaftsfrage mit den folgenden Distichen einzuleiten {{die Distsichen wurden bereits in KB090916
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/KB/
veröffentlicht}}, hat meine heutige zufällige Begegnung mit Ihnen den Wunsch hervorgerufen, daß vor der Publication die Verse von einem so grossen und anerkannten Meister, wie Sie, einer kritischen Prüfung und Politur unterworfen werden möchten. Thuen Sie mir diesen Gefallen [...] [Cantor an Burdach, 22. 1. 1900]

Das Gedicht, das Cantor diesem Artikel voranstellen will, findet man noch an einer anderen Stelle in Cantors Nachlaß: Unter der Überschrift "Gedichte von Leonhard Gade" steht es neben anderen auf einem losen Blatt, das mit Datum 8. 5. 1917 versehen ist. Vermutlich ist "Leonhard

Gade" ein Pseudonym für Cantor selbst; denn einerseits ist ein Dichter dieses Namens in der einschlägigen Literatur nicht zu finden, andererseits wäre die Bitte um Prüfung durch den Literaturwissenschaftler Burdach wenig verständlich.

[H. Meschkowski, W. Nilson (Hrsg.): "Georg Cantor Briefe", Springer, Berlin (1991) p. 418f]

806 Das Kalenderblatt 110819 Shaxpeareologie (19)

What's in a name? That which we call a rose
By any other name would smell as sweet.

Ihr freundliches Schreiben v. 15. Jan. würde ich früher erwidert haben, wenn ich nicht Schwierigkeiten gehabt hätte, Ihren werthen Familiennamen richtig zu lesen; ich mußte mich deshalb zuerst bei Prof. Friedensburg erkundigen, wie Sie eigentlich hießen und erhielt von ihm die Bestätigung, daß der von mir vermuthete Namen "Pollen“ der richtige sei. Diese Vorfrage hat die Zeitversäumniß bewirkt, welche zu entschuldigen bitte.

Es würde mir werthvoll sein, wenn Sie auch die unter "Borghese II, 448" im Vatik. Archiv befindlichen Briefe des Sir Toby Matthews studieren u. mir über den Inhalt ders. genau berichten wollten. Die Frage, ob M dem Orden Jesu als Mitglied angehört habe oder nicht, hat für mich zunächst kein Intereße. Jedenfalls hat er von seiner, durch Father Parsons bewirkten Conversion an bis zu seinem Tode in intimen Beziehungen zu Ihrem heil. Orden gestanden. Er verbrachte seine letzten Lebensjahre im Hause der Jesuiten in Gent, wo er 1655 starb (er ist 1577 geboren, wurde also 78 Jahre alt {{und hat die Lebensdaten von C.F. Gauß um 200 Jahre antizipiert}}). Sein Testament befindet sich im Coll[egio] P[io] Inglese in Rom. Ist die Publication der Correspond[enz] v[on] Rosetti, Conn u[nd] Panzani, von der Sie mir schreiben, *bald* zu erwarten? Ist der Catalog der Lambeth Library (London) in Rom vorhanden und könnten Sie wohl darin nachsehen, ob sich dort Briefe von M. finden? Wo befindet sich jetzt die Originalhandschrift von M‘s "The true Hist[orical] Rel[ation] of the Convers[ion] of Sir T. M.“? Wo sind seine übrigen Schriften u. Manuscripte aufbewahrt?
[Cantor an Pollen, 16. 2. 1896, zitiert und kommentiert in C. Tapp: "Kardinalität und Kardinäle", Franz Steiner Verlag (2005) p. 480]

807 Das Kalenderblatt 110820 Shaxpeareologie (20)

He's mad that trusts in the tameness of a wolf

Was die von Ihnen angeführte Stelle bei M. {{Sir Toby Matthews}} über Fr[ancis] Bacon betrifft, so ist der angebliche Versuch Fr. Bacon‘s, M. zur protest[antischen] Religion zurückzuführen, *sicherlich nicht gemacht worden*. Allerdings hat Bacon *unter diesem Vorwande* die Erlaubniß sich verschafft, seinen Freund M. in der Haft (in welche er wegen seiner Conversion von Jacob I gebracht wurde) zu besuchen. (Matth. X,16) [Seht, ich sende euch wie Schafe mitten unter die Wölfe; seid daher klug wie die Schlangen und arglos wie die Tauben.] Die Äußerung M's über Bacon als "such a poor kind of creature" wird wahrscheinlich auf *Unkenntniß bei M.* (über die Gnadenwege, zu welchen sich Gott bei Fr. Bacon herabgelaßen) beruhen. Bacon‘s kathol. Glauben steht fest mindestens vom Sommer des Jahres 1603 bis zu seinem letzten Athemzuge. Dies beweist nicht nur seine "Confessio fidei“, sondern auch die Harmonie zwischen ihr und allem, was Fr. B. seit 1605 (wo seine *erste philos.* Schr. "Proficience a[nd] advancement of learning, divine and humane“ erschienen ist) bis 1626 (seinem Todesjahr) geschrieben hat; endlich kommt hinzu das ausdrückliche Zeugniß seines kathol. Caplan‘s D^{r} theol. Will[iam]

Rawley in der von letzterem geschriebenen "Vita Fr. Baconi“ (Opuscula var[ia] posth[uma] civil[ia] et theol[ogica] Lond[ini] 1658; Amstelodami 1663.

Die Untersuchung der andern Frage, *ob Fr. Bacon auch in aller Form in den Schooß der Mutterkirche zurückgekehrt sei*, wollen wir uns für später vorbehalten!

Im Zusammenhang mit der unzweifelhaft feststeh[enden] kath.Gläubigkeit Bacon‘s (von sein[em] 42sten Lebensj. *mindestens an*) ist von der *allergrößten* Wichtigkeit u[nd] *Bedeutung* die andere mehr *secundäre* Frage seiner Autorschaft der unter dem Namen "Shakespeare“ gehenden Werke, die er der *Hauptsache nach vor seiner Conversion* gedichtet haben wird. Ich bin fest überzeugt, daß er der geheime Dichter "Shakespeare“ ist (wie ich schon in meinem Briefe v. 5 Jan. [18]96 an M^gr Giles habe durchblicken laßen).

[Cantor an Pollen, 16. 2. 1896, zitiert und kommentiert in C. Tapp: "Kardinalität und Kardinäle", Franz Steiner Verlag (2005) p. 480f]

808 Das Kalenderblatt 110821 Shaxpeareologie (21)

Something is rotten in the state of Denmark

Das meiste über die Bacon-Shakespearefrage Geschriebene ist *nicht viel werth*, und die angeblichen Baconkryptogramme von Donnelly u[nd] Consorten sind, wie ich sofort erkannt habe, nichts als *eitel Humbug* {{hier benutzt Cantor einen von Kronecker übernommenen Fachausdruck}}.

Ganz unabhängig von diesem traurigen Schwindel sind die *historischen Beweise*, welche ich gefunden habe. Mir wäre es sehr lieb, wenn dieselben in Rom *geprüft* würden. Dazu schlage ich folgenden Modus vor.

N° 1. Ich theile Ihnen brieflich meine Gründe für das Bestehen jener Autorschaft nach und nach mit.

N° 2. Sie prüfen dieselben, berichten darüber an M^gr Fr. Ehrle S. J., dem Sie auch meine Briefe zu zeigen hätten; darauf antworten Sie dann mir.

N° 3. M^gr Ehrle nimmt diese ganze historische Untersuchung bei welcher Sie mir helfen würden, unter seine Controlle u[nd] hohe Protection.

Falls Ihnen dies Alles Recht sein sollte, so stelle ich Ihnen anheim, sich die Erlaubniß dazu von Ihren Oberen zu erbitten und M^gr Ehrle alsdann in meinem Namen um die Gewährung der Puncte N° 2 und N° 3 zu ersuchen.

Mit gleicher Post erhalten Sie 3 Exempl. der "Conf[essio] fidei Fr[ancisci] B[aconi]“.

Ihrer gef[älligen] Antwort entgegensehend
hochachtungsvoll
Ihr ergebenster
Georg Cantor.

P. S. Ist an höchster Stelle {{Cantor meinte hier
http://de.wikipedia.org/wiki/Leo_XIII.
}} das "Memorial of the Reformation of England“ bekannt, welches Father Parsons im Jahre 1596 verfasst hat? Ich habe davon ein Exemplar.

[Cantor an Pollen, 16. 2. 1896, zitiert und kommentiert in C. Tapp: "Kardinalität und Kardinäle", Franz Steiner Verlag (2005) pp. 481f]

809 Das Kalenderblatt 110822 Shaxpeareologie (22)

If this were play'd upon a stage now, I could condemn it as an improbable fiction.

Da ich sehe, mit wie wichtigen und bedeutenden Studien Sie selbst beschäftigt sind, so weiß ich die mir von Ihnen erwiesene Güte um so höher zu schätzen; und nur der Umstand, daß die von mir angeregte Frage in Zeit und Ort mit dem Gegenstande Ihrer eigenen Intereßen in enger Beziehung steht, lässt mich hoffen: Sie werden es nicht ablehnen, mir ein wenig weiter zu folgen, wenn ich den Versuch mache, dasjenige zu *begründen*, was ich Ihnen am 16ten Febr[uar] dieses Jahres geschrieben und als Resultat meiner wissenschaftlichen Arbeit bezeichnet habe.
Mit Recht rücken Sie die Frage nach der *ächten Katholicität* Francis Bacon's in den Vordergrund, wie ich auch am 16ten Febr[uar] diese Frage als das *Hauptproblem* hingestellt habe, dem sich alle übrigen Fragen in der *räthselhaften Geschichte* dieses unvergleichlichen Mannes *unterzuordnen* haben.

[Cantor an Pollen, 15. 3. 1896, zitiert und kommentiert in C. Tapp: "Kardinalität und Kardinäle", Franz Steiner Verlag (2005) p. 484]

810 Das Kalenderblatt 110823 Shaxpeareologie (23)

I will a round unvarnish'd tale deliver

Was nun seine *authentische* "Confessio fidei" betrifft, die ich kürzlich neu aufgelegt habe, so bin ich, auf Grund eingehender Studien, seit Jahren der Ueberzeugung, daß darin der *röm. kathol.* Glaube in den wesentlichsten Beziehungen *durchaus korrect* und *unzweideutig* ausgesprochen ist.
Erst vor wenigen Tagen freute es mich, eine *neue Bekräftigung* dieser Auffassung in dem Schreiben eines hochangesehenen älteren Theologen aus dem Orden des heil. Franciscus zu erhalten. Er schreibt mir *wörtlich*:
"Ich war ganz überrascht, weil ich von jenem bedeutenden Manne durchaus nicht eine so tiefe *theologische* Kenntniß und so viel *Glaubenslicht* erwartet hatte. Noch ein paar die Kirche u. die heil. Sakramente betreffende Zusätze, und das ganze katholische System wäre in nuce und geistreicher Consequenz dargestellt."
Erst im Jahre 1648 (NB. Bacon starb 1626) wagte man es in England, dieses Glaubensbekenntniß und zwar im englischen Originaltext zu publiciren. Das betreffende Sammelwerk habe ich leider noch nicht in der Hand gehabt. Das Manuscript, welchem Spedding den von mir nachgedruckten Text dieser "Confessio" entnommen hat, findet sich unter *Harleian MSS. 1893. fo*. *1*.
1658 bringt Bacon's Hauscaplan *W. Rawley* zum ersten Mal die von ihm besorgte latein[ische] Uebersetzung in dem Buche:
Opusc. varia posth., philos. civil. et theol. Fr. B. London 1658, in 8°.
Diese nämliche Sammlung erschien unter demselben Titel auch 1663 in Amsterd. bei Joh. Ravestein in 12°. Sie enthält am Anfang die bekannte Rawleysche „Vita nobilissimi auctoris", eins der wichtigsten und zuverläßigsten Zeugniße über F. B.
[Cantor an Pollen, 15. 3. 1896, zitiert und kommentiert in C. Tapp: "Kardinalität und Kardinäle", Franz Steiner Verlag (2005) p. 484f]

811 Das Kalenderblatt 110824 Shaxpeareologie (24)

Done to death by slanderous tongue

Bemerkenswerth ist zunächst dieses, daß Rawley die „Confessio" nicht ganz korrect wiedergegeben hat. Am Schluß von Art. 19 hat er einen Nebensatz aus freien Stücken zugefügt; nämlich nach

"una cum interpretatione earundem"

findet sich in der Rawleyschen Version:

"sed illa sola quae ex seipsis elici possit."

Dieser Zusatz steht im Originaltext nicht; ich habe ihn daher auch in meiner Ausgabe einfach ausgelassen!

Sieht man sich diesen Zusatz genauer an, so überzeugt man sich leicht, daß er den kathol. Gehalt des Hauptsatzes keineswegs aufhebt oder ihn wesentlich modificiert, *falls man nur gleichzeitig auch dasjenige beachtet, was im Art 20 über die Gültigkeit der in der Kirche wirkenden heil. Tradition festgesetzt ist*.

Das Wort "Tradition" wird zwar in Art. 20 (wahrscheinlich mit Absicht) *vermieden*; sie wird vielmehr von Bacon:

"the receiving of the holy doctrine"

von seinem Uebersetzer Rawley:

"doctrinae sanctae receptio"

genannt. Auf den Buchstaben kommt es aber nicht an, sondern nur auf die Sache!

Wohl aber war jener eigenmächtig von Rawley gemachte Zusatz *höchst geeignet*, bei oberflächlicher Betrachtung den *falschen Schein* des *Akatholischen* der *"Confessio" zu erwecken*.

Und dies wird wohl auch der Zweck gewesen sein, welchen Rawley mit so *tadelnswerthem Mittel* hat erreichen wollen!

Dies nur nebenbei. Denn die Hauptsache ist und bleibt doch, daß der, eine Art Fälschung repräsentirende Zusatz von Rawley *im englischen Original F's Bacon's nicht* vorhanden ist.

[Cantor an Pollen, 15. 3. 1896, zitiert und kommentiert in C. Tapp: "Kardinalität und Kardinäle", Franz Steiner Verlag (2005) p. 486]

812 Das Kalenderblatt 110825 Shaxpeareologie (25)

But this denoted a foregone conclusion.
'Tis a shrewd doubt, though it be but a dream,
And this may help to thicken other proofs,
That do demonstrate thinly.

Was mir aber von großem Gewicht zu sein scheint, ist vielmehr Folgendes.

In dem kurzen Vorwort zu oben genanntem Buche (Lectori S.) sagt Rawley:

1. „Supererat tandem scriptum illud *Confessionis Fidei*; quod Auctor ipse, plurimis ante obitum annis, idiomate Anglicano concepit: operae pretium mihi visium est Romana Civitate donare; quo non minus Exteris, quam Popularibus suis, *palam fiat, qua Fide imbutus, et quibus mediis fretus, Illustriss[imus] Heros, Animam Deo reddiderit*; et quod *Theologicis* studiis, *aeque ac* philosophicis et civilibus, cum commodum esset, *vacaverit.*" [Übrig blieb schließlich jene Schrift *Confessio Fidei* (*Glaubensbekenntnis*); die der Autor selbst, sehr viele Jahre vor seinem Tod in englischer Sprache abgefaßt hat: Es schien mir der Mühe wert, sie mit dem römischen Bürgerrecht zu beschenken; dadurch *möge* nicht nur ihren Landsleuten, sondern gleichermaßen den Auswärtigen *offenbar gemacht werden, mit welchem Glauben getränkt und auf welche Mittel vertrauend der hochberühmte Held seine Seele Gott zurückgegeben hat*; und daß *er sich theologischen Studien gleichwie philosophischen und bürgerlichen widmete*, soweit es angemessen war.]

Andrerseits wird in der darauf folgenden "Vita auctoris" von Rawley gesagt:

2. „Omni poscenti rationem reddere de ea, quae in illo erat, *spe*, et potens et paratus fuit. Hocque *opus illud Confessionis fidei*, in fine volmninis hujus editum, abunde testatum reliquit.

Intereße frequenter solebat (cum per valetudinem liceret) Divinis officiis, *sive privatim, sive publice, celebratis, concionibus audiendis; Sacrae Eucharistiae participandae*; et tandem, *in fide vera, in Ecclesia Anglicana stabilita, placide obdormivit*." [Er war sowohl fähig als auch bereit, jedem, der es forderte, eine Rechtfertigung abzugeben über das, was an *Hoffnung* in ihm, war. Und dies bezeugte jenes Werk *Confessio fidei*, das am Schluß dieses Bandes herausgegeben ist, im Übermaß. Er war gewöhnt, (solange es ihm seine Gesundheit erlaubte) häufig an Gottesdiensten teilzunehmen, *seien es privat, seien es öffentlich gefeierte, Ansprachen zu hören, an der heiligen Eucharistiefeier teilzunehmen*; und schließlich *ist er, im wahren, in der englischen Kirche befestigten Glauben, friedlich entschlafen.*]

Diese beiden Positionen 1 u. 2 geben das Material zu *mehreren* Syllogismen, welche Ihrem Scharfsinn nicht entgehen werden.
[Cantor an Pollen, 15. 3. 1896, zitiert und übersetzt in C. Tapp: "Kardinalität und Kardinäle", Franz Steiner Verlag (2005) pp. 486f]

813 Das Kalenderblatt 110826 Shaxpeareologie (26)

Thou art a votary to fond desire

Ich hebe daher nur Folgendes hervor.

Es wird die fides in der *„Confessio fidei Franc[isci] B[aconi]"* als die *„fides vera in Ecclesia Anglicana stabilita*" bezeichnet. Da aber die „Confessio fidei Fr[ancisci] B[aconi]" *wesentlich katholisch* ist, so folgt:

A) W. Rawley hat unter „Ecclesia Anglicana" nicht die, auf den 39 Aritikeln ruhende Anglikanische Staatskirche verstanden, sondern vielmehr die *alte* "Ecclesia Anglicana", d. h. die *röm. kath. Kirche*, wie sie vor der kirchl. Revolution Heinrich's VIII in England staatlich anerkannt gewesen ist und auch heute noch für die Katholiken *als allein legitime* "Ecclesia Anglicana" gilt. Es muß also W. Rawley *kathol. Theolog* gewesen sein.

B) Umsomehr muß auch *Francis Bacon* selbst *Kryptokatholik* gewesen sein.

Ich füge noch das hinzu, was Sie gleichfalls aus der "vita" ersehen können, daß Fr. B. im Hause des mit ihm befreundeten Grafen von Arundel (also in einem *katholischen Hause*) gestorben ist.

Die Differenzen zwischen F. B. u. Sir Toby Matthews waren sicherlich keine *de fide*, sondern nur *kirchenpolitische* oder, genauer gesprochen, *reformations-methodische*. Dieselben Differenzen hatte F. B. auch mit der *Soc. Jesu*. Im Uebrigen könnte ich Ihnen *mehrere* schöne Stellen aus F. B's Schriften anführen, aus denen seine *Hochschätzung* und Liebe für die *Jesuiten auf's Deutlichste* hervorgeht. Ebenso waren F. B. u. Matthews die *besten persönlichen* Freunde und *halfen einander gegenseitig*!

Indem ich Ihnen, verehrter Pater Pollen, an's Herz lege, das Gesagte sorgfältig zu prüfen und mir dann zu schreiben, ob und worin ich möglicherweise im Irrtuhm wäre, danke ich Ihnen nochmals für Ihre mir schon bisher so bewiesene Freundlichkeit und bleibe stets Ihr hochachtungsvoll u. freundschaftlichst ergebener Georg Cantor. Wo mögen die übrigen Manuscripte Sir Toby Matthews geblieben sein?
[Cantor an Pollen, 15. 3. 1896, zitiert und kommentiert in C. Tapp: "Kardinalität und Kardinäle", Franz Steiner Verlag (2005) p. 487f]

814 Das Kalenderblatt 110827 Shaxpeareologie (27)

The lady doth protest too much, methinks.

Erlauben Sie mir, Ihnen eine in meinem letzten Briefe erwähnte Angelegenheit genauer zu erklären, weil ich wünsche, daß dieselbe von Ihren, der schönwißenschaftlichen Literatur beflißenen Ordensbrüdern *sorgfältig geprüft* werde.

Seit etwa fünf Jahren habe ich die sogen. Bacon-Shakespearefrage studirt. Ich kenne die verschiedenen, meist sehr leidenschaftlich gehaltenen Kritiken gegen die Bacontheorie. Ich bin weit davon entfernt zu denken, daß ich in der Beurtheilung dieser schwierigen Sache nicht im Irrtume sein könnte. Trotzdem kann ich nicht umhin, zu erklären, daß es meine gewissenhafte, fest Überzeugung ist: nicht der Schauspieldirektor Shakespeare aus Stratford sondern *Francis Bacon* ist der *Dichter der sogen. Shakespearedramen*. Damit will ich keineswegs alles für richtig und gut erklären, was von den Bacontheoretikern geschrieben wird; aber in der *Hauptsache* haben sie, wie ich glaube, *Recht*! Im Besondern bin ich keineswegs von der Wahrheit des Donnellyschen Kryptogrammes überzeugt, wenn ich es auch *nicht für unmöglich* halte, daß in der Folioausgabe v. 1623 eine wichtige Geheimschrift verborgen ist.

Zum *Studium der Frage* und zu *Kenntnißnahme der betreffenden Literatur* empfiehlt sich aber durchaus das Ignatius Donnellysche Werk: "The great Cryptogramm“ London, Sampson Low, Marston, Searle + Revington 1888.

Besonders aber muß ich die beiden für *8 pence* käuflichen Heftchen der Mrs. Constance Henry Pott hervorheben: "Did Francis Bacon write Shakespeare“? *Pars I* 32 reasons for believing that he did. *Pars II* The lives of Bacon and Shakspere compared with the dates and subject matter of the Plays.“

In Freundschaft
Ihr hochachtungsvollergebener
Georg Cantor.

[Cantor an Pesch, 15. 4. 1889, entnommen aus C. Tapp: "Kardinalität und Kardinäle", Franz Steiner Verlag (2005) p. 470f]

815 Shaxpeareologie (28) Here's ado to lock up honesty

Den Artikel in "St[immen] a[us] Maria-Laach", Bd. XXVII p.565 habe ich soeben gelesen und darin *nur folgenden* in Frageform gekleideten *unbedingt richtigen* Satz gefunden: "Aber gesetzt sogar, Bacon wäre der Dichter, den man bisher Shakespeare genannt hat, würde der katholische Gehalt seiner Dichtungen nicht ebenso gut der katholischen Religion, ihre Genialität und Kunstvollendung aber, wie früher, dem Ruhme Englands und der Bildung der ganzen Menschheit zu gute kommen?“

Fast alles Uebrige in dem Artikel halte ich für verkehrt, weil auf ungenügender Sach- und Quellenkenntniß und *erstaunlicher Vertrauensseligkeit* in Bezug auf ketzerische, verläumdende Geschichtsschreibung (namentlich was das Urtheil über Francis Bacon‘s Character betrifft) beruhend. Ich weiß nicht, wer der Verfasser ist, halte es aber nicht für unmöglich, daß er in gewißem Sinne aus einem *Saulus* noch ein *Paulus* werden, d. h. dereinst zu den *überzeugtesten Baconianern* zählen wird, falls er meinen Rath befolgt, der auf gewissenhafte, sorgfältige *Prüfung* dringt.

Ihr Väter der S. J., die Ihr *in Bezug auf Euch selbst* das Gift boshafter Entstellung der Wahrheit zehntausendfach zu erfahren hattet und noch habet, seid doch in Zukunft vorsichtiger bei der Beurtheilung anderer *von der Verläumdung Vehm Verfolgter* und *Getroffener*!

Und sollte diese Mahnung nicht ganz besonders Euer Herz rühren? für den großen, gewaltigen, durch und durch wahren, stets rein gesinnten und hochherzigen Menschen, der *sowohl die "Shakespearedramen“, wie auch die "Sermones fideles“* (Man vergl. namentl. Serm. I, III, XXVII) geschrieben und in den schwierigsten Lagen stets *Euch* Wohlwollen und Anerkennung bewiesen hat, der unter Anderm in "De augmentis scientiarum“ Folgendes von *Euch* sagt:

Lib. I "quorum cum intueor industriam solertiamque, tam in doctrina excolenda, quam in moribus informandis, illud occurrit Agesilai de Pharnabazo, Talis cum sis, utinam noster eßes.“

[...]
Ihr ergebener
Georgius Vincentius de Montemore
{{Pseudonym Cantors}}
Conimbricensis
[Cantor fühlte sich einer Gruppe von Jesuiten aus Coimbra eng verbunden, die Ende des 16. Jahrhunderts einen ausführlichen Kommentar zu den acht Büchern der Aristotelischen Physik veröffentlichten und als Conimbricenses bekannt wurden.]
usque ad mortem fidelis.
[Cantor an Pesch, 4. 5. 1889, zitiert und kommentiert in C. Tapp: "Kardinalität und Kardinäle", Franz Steiner Verlag (2005) pp. 473f]

816 Das Kalenderblatt 110829 Shaxpeareologie (29)

Off with his head!

Ellah-Weintgerb [= Halle-Wittenberg], 9 Juli 1889.
[...] Wenn Sie nach Frankf[urt] kommen, besprechen Sie ja doch die von mir angeregte Frage mit dem Prälaten *Janßen*. Sie werden sehen, daß er in dem neg[ativen] Theile meines Dogmas (Unmögl[ichkeit] daß der Schlingel Shaxspur Autor der ihm zugeschr[iebenen] Werke sein kann) *seit vielen Jahren ganz auf meiner Seite* steht; von *Fr. Bacons* anerkannten Werken hatte er bis dahin nichts gelesen, ging aber auf meine Empfehlung, gewiße Schr[iften] von Bacon, sowie Dixon‘s personal history of Lord B[acon] zu studieren, mit d[erj *größt[en] Bereitw[illigkeit]* ein.

Ebenso befindet sich d[er] vortreff[liche] D^r *Joh. Mich. Raich* in Mainz m[eines] Er[achtens] jetzt auf dem besten Wege, sich von der Wahrh[eit] der Bac[on-]Shakespearetheorie zu überzeugen. Was Ihren Einwand betr[ifft], der aus d[er] Betheil[igung] d[es] 25jähr[igen] Fr[ancis] Bac[on] an der Motion für [die] Hinricht[ung] *Maria Stuarts* genommen ist, so brauchte ich nur auf [die] *dreimalige Verläugnung Chr[isti]* seitens d[es] heil[igen] Petrus hinzuw[eisen], um diesen Einwand zu entkräften; doch habe ich glücklicherweise Ursache in diesem Falle solche mit dem *Allgemeinwohle* d[er] kath[olischen] Kirche in Engl[and] zusammenhängende Motive bei Francis zu vermuthen, welche ihn auch in diesem Puncte glänzend rechtfertigen. Daß seine Nichtbetheil[igung] an der Motion das Schicks[al] der verehrungswürdigen Martyrin nicht geändert haben würde, darf i[ch] als zugestanden halten. Daß ihn aber seine schmerzhafte Betheil[igung] an der Demonstration in die Lage gebracht hat, der *allgemeinen* Kath[olischen] Sache zu nützen, weiß ich sicher. Er hat jedenfalls im Einverständniß mit seinen religiösen Gesinnungsgenoßen gehandelt. *Bacon-Shakespeare* war eine der originalsten, hervorragendsten und gewaltigsten Kräfte (jedenfalls die vielseitigste, umfaßendste, Jahrhunderte voraus umspannende) im Dienste der heiligen, noch lange nicht abgeschloßenen Bewegung, welche in d[er]Geschichte: *Gegenreformation* genannt zu werden pflegt. [...]
Da Sie so freundlich sind, mir Ihre Hülfe in meinen Forschungen gewähren zu wollen, theilen Sie mir gütigst mit, ob nicht Sir *Toby Matthew*, wie ich anzunehmen Grund habe, Priester der S. J. oder eines anderen religiösen Ordens (etwa Servite od. Barnabite od. Minime) gewesen ist. [...]
Mit herzlicher Begrüßung
Ihr treu ergebener
Martin Gänser [= Sänger = Cantor] Lic. theol. Dr phil.
[Cantor an Baumgartner, 9. 7. 1889, entnommen aus C. Tapp: "Kardinalität und Kardinäle", Franz Steiner Verlag (2005) pp. 242ff]

817 Das Kalenderblatt 110830 Shaxpeareologie (30)

Uneasy lies the head

Nun möchte ich aber auch von Ihnen einen Freundschaftsdienst. Ich habe Ihnen im Vertrauen gesagt welch tiefes Interesse ich an der sogenannten "Shakespearemaske" nehme, die ich vom ersten Augenblicke an, daß ich ihrer ansichtig wurde, für die Lebensmaske meines Francis Bacon hielt. Sie sind der erste und Einzige, der mir auf Grund des Ihnen vorgelegten Materials in allem diesem sofort zustimmte. Mein Wunsch ist, daß Sie mir in der Verfolgung dieser Frage, die für mich eine unaussprechliche Bedeutung hat, mit Ihren Gaben vertraulich helfen möchten. Dazu wäre mir wichtig, daß Sie die Frage wiederholt genau prüften, auch die Geschichte dieser Maske genau studierten und mir Ihre darauf bezüglichen Bemerkungen und Beobachtungen vertraulich mittheilten. [...] Ganz besonders wichtig ist mir, daß Sie ebenso wie ich, den Eindruck des Lebens von der Maske erhalten haben. Alle andern "Fachleute" die ich darüber sprach wollten hiervon nichts wissen; meinten, daß überhaupt keine entscheidenden Kennzeichen für Leben und Tod für eine Maske existirten; was mich sehr in Erstaunen setzte.
[Cantor an Langbehn, 31. 10. 1890]

Von den Autoren der bisher vorliegenden Cantor-Literatur gehen lediglich Purkert und Ilgauds ausführlicher auf die Beziehung Cantors, zu Langbehn ein. Diese Autoren sehen die Möglichkeit, daß der eigentliche Grund für Cantors Interesse an Langbehn seine Beschäftigung mit der Bacon-Shakespeare-Frage war, spielt doch Shakespeare in dem Buch Langbehns neben Rembrandt eine wichtige Rolle.

[H. Meschkowski, W. Nilson (Hrsg.): "Georg Cantor Briefe" , Springer, Berlin (1991) p. 333f]

818 Das Kalenderblatt 110831 Shaxpeareologie (31)

Give me my robe, put on my crown.

Hurwitz' Bruder schreibt, dass Cantor aus Halle nach München berufen sei. Die Nachricht klingt sehr seltsam. Etwa auf einen Lehrstuhl für Shakespearologie?
[Minkowski an Hilbert, 11. 3. 1897, entnommen aus W. Purkert, H.J. Ilgauds: "Georg Cantor 1845 - 1918", Birkhäuser, Basel (1987) p. 86]

819 Das Kalenderblatt 110901 Shaxpeareologie (32)

Mad call I it, for to define true madness,
What is't but to be nothing else but mad?

Vor einiger Zeit wandte ich mich an den Vors. Secretär des Königl. Preußischen Instituts in Rom, Herrn Professor Dr. Walter Friedensburg mit der Bitte, Erkundigungen über den handschriftlichen Nachlaß von Sir Toby Matthews anzustellen. Er schreibt mir nun, daß sich allerdings solche Dokumente in dem Archiv des Collegio Pio Inglese befinden, ich mich jedoch dieserhalb direct an Ew. Hochwürden zu wenden hätte.

Ich thue dies um so lieber und freudiger, als ich dadurch im Stande bin, Ew. Hochwürden vertrauensvoll den eigentlichen *Zweck* meiner Nachforschungen mittheilen und damit die ehrerbietigste Bitte verbinden zu können, es möge Ew. Hochwürden geruhen, meinen betreffenden Studien und Bemühungen Ihre einflußreiche und machtvolle Hülfe zu gewähren.

Seit über zehn Jahren widme ich mich Studien, die darauf ausgehen, die Lehren und das

Leben eines der größten Söhne Ihrer Nation, des Francis Bacon, Baron of Verulam, Viscount St. Albans genauer zu erforschen. Es hat sich mir herausgestellt, daß das 14-bändige Werk von James Spedding, Lord Bacon's Works, Letters and Life keineswegs ein vollständiges und ausreichendes Bild gewährt. Daher geht mein Streben dahin, weitere Dokumente, welche sich auf die Sache beziehen, zu sammeln.

Nun stand aber Sir Toby Matthews von seinen Jünglingsjahren an in intimer Beziehung zu Fr. Bacon. Diese große Freundschaft hat durch die Conversion Matthews, welche im Jahre 1605 oder 1606 durch Father Robert Parsons erfolgte, keineswegs einen Stoß erhalten, sondern hat sich vielmehr bis zum Jahre 1626, wo Francis Bacon starb, nur immer gesteigert; und man kann wohl sagen, daß F. B. *keinen besseren, treueren Freund gehabt hat, als Sir Toby Matthews*!
[Cantor an Giles, 17. 11. 1895]

820 Das Kalenderblatt 110902 Shaxpeareologie (33)

Lord, what fools these mortals be.

Ein tieferes Studium hat mich sogar zu der Ueberzeugung geführt, daß Fr. Bacon's eigene innere Stellung zu der heil. kathol. Kirche seit dem Jahre 1605 sich erheblich geändert hat und daß er schließlich ein so weitherzig denkender Ireniker geworden ist, wie ihn die anglikanische Kirche vielleicht nicht wieder gesehen hat.

Ich brauche Ew. Hochwürden nicht zu erklären, von wie weittragender Bedeutung es gerade jetzt wäre, wenn ich in die Lage gesetzt würde, diese Thatsache durch historische Dokumente zu erhärten!
[Cantor an Giles, 17. Nov. 1895]

{{Auf den Brief antwortete Giles nicht. Wegen der großen weltpolitischen Bedeutung seiner Forschungen schrieb Cantor nochmals.}}

Monsignore.

Auf meinen recommandirten Brief v. 17ten Nov. 1895, welchen ich die Ehre hatte, an Sie zu richten, habe ich vergeblich auf Antwort gewartet.

Die Angelegenheit, in welcher ich mich an Ew. Hochwürden wandte, erscheint umso wichtiger, als in dem 10-jährigen Studium, welches ich Ihrem großen Landsmanne Francis Bacon gewidmet habe, auch wichtige *innere und aeußere* Argumente dafür von mir gefunden und gesammelt worden sind, daß er (so erstaunlich dies auch klingen mag) wirklich und in Wahrheit der *eigentliche* und *einzige* Dichter der unsterblichen *Shakespearedramen* war, während der Comoediant William *Shakspere* nur als Maske ihm gedient hat.

Dies in Verbindung mit dem von mir erbrachten Beweis, daß Francis Bacons religiöser Glaube seinem Kerne nach der heil. römisch katholische Glaube war, läßt keinen Zweifel darüber zu, daß diese von mir angeregte Sache von hoher Bedeutung ist und die eingehendste Prüfung von Seiten der Kirche verdient.

Es würde sicherlich den allerhöchsten Intentionen Sr Heiligkeit Leo XIII, auf dessen henotische Encycliken v. 20 Juni 1894 und v. 14 April 1895 (an die englische Nation) ich in dieser Beziehung nur hinzuweisen brauche, entsprechen, wenn Ew. Hochwürden meine am I7ten Nov. 1895 ausgesprochenen Wünsche erfüllen wollten.
[Cantor an Giles, 8. 1. 1896]

{{Da antwortete der Monsignore doch noch.}}

821 Das Kalenderblatt 110903 Shaxpeareologie (34)

I have seen a medicine
That's able to breathe life into a stone,
Quicken a rock, and make you dance canary

Ich hätte mir nicht die Freiheit genommen, an Ew. Hochwürden die verschiedenen in meinen Briefen v. 17ten Nov. 95 und 5ten Jan. 96 enthaltenen inhaltsschweren Mittheilungen über die Ergebnisse meiner Baconstudien zu machen, wenn ich nicht im Einverständniß mit hohen und einsichtigen Geistlichen gehandelt hätte, welche es für *im Interesse der Kirche liegend* halten, daß meine Forschungen durch, in Rom sich aufhaltende *englische Theologen* unterstützt und geprüft werden.
Denn, wenn auch, wie Ew. Hochwürden mir schreiben, im Archiv Ihres Collegs keine erheblichen, auf die Sache bezüglichen Dokumente, bis jetzt gefunden worden sind, so steht doch fest, daß beispielsweise in einem Codex des Vatikanischen Archivs, signiert "Borghese II, 448" Originalbriefe Sir Toby Matthews an Papst Paul V vorhanden sind, die mir von dem Präfecten R. P. *Ehrle* bereitwilligst zur Verfügung gestellt worden sind; auch im Stonyhurst College in England finden sich Dokumente von und über Sir T. Matthews.
Da Ew. Hochwürden selbst keine Zeit haben, mir zu helfen, so richte ich an Sie die ergebenste Bitte, einen anderen englischen Theologen in Rom zu veranlaßen, mit mir in Correspondenz zu treten und mir alle in dieser wichtigen und bedeutenden Sache erforderliche Hülfe zu leisten.
[Cantor an Giles, 12. 1. 1896]

822 Das Kalenderblatt 110904 Shaxpeareologie (35)

Be not afraid of greatness: some are born great, some achieve
greatness, and some have greatness thrust upon 'em.

Was mich betrifft, so habe ich ein besonderes Intereße für den größten Geistesheros Englands, ja der Menschheit - Francis Bacon und begrüße jeden auf ihn bezüglichen Fund mit höchster Freude.
Daß, Francis Bacon eine eminent poetische Natur gewesen ist, geht aus allen seinen Werken hervor und wird ihm sogar von seinem persönlichen Gegner Macaulay in deßen Essay über Lord Bacon auf's Schönste bezeugt.
Es verdienen daher die wenigen Reliquien seiner Dichtkunst die größte Pietät und ich begrüße mit Freuden die Auffindung des kleinen Gedichtes:
"Farewell to Fortune"
An der *Aechtheit* desselben zu zweifeln, ist wohl kein Grund vorhanden?
[Cantor an Grosart, 4. 5. 1895]

823 Das Kalenderblatt 110905 Shaxpeareologie (36)

More matter with less art.

Ihr schönes Buch über die sel. Mutter Franc. Schervier ist seit ein paar Monaten in meinen Händen. Ihr früher geschrieb. Werk über S. Bonaventura habe ich leider bis jetzt nicht bekommen können. Die 6 an Sie abgesandten Exemplare der „Confessio fidei Francisci Baconi" werden hoffentlich in Ihren Besitz gelangt sein. Was sagen Sie zu dem Inhalt?
[Cantor an Jeiler, 22. 2. 1896]

824 Das Kalenderblatt 110906 Shaxpeareologie (37)

Love looks not with the eyes but with the mind.

Herzlich freute es mich, aus Ihrem lieben Schreiben v. 25ten Febr. zu ersehen, daß, Sie die "Confessio fidei Francisci Baconi“ gründlich studiert und sie als das erkannt haben, was sie in der That und in Wahrheit ist, nämlich als ein *wunderbares*, echt katholisches Glaubensbekenntniß, niedergeschrieben von dem *größten Kryptokatholiken*, welcher in der seit dem Anfange des 16ten Jahrh. über die Kirche verhängten Prüfungszeit erstanden ist.

Und wie steht dieser herrliche Mann bis jetzt *verkannt* da; *verläumdet* und *gefälscht* von protestantischer, aber leider auch von unkritischer katholischer Seite (bei letzterer überhaupt mit nur *sehr wenigen Ausnahmen*).

Sie müssen wissen, daß *alle sogenannten* naturphilos. u. moralischen Schriften F. B.'s (von 1604 an) geschrieben sind *auf Grund* des lebendigen kath.Glaubens, wie er sich in jener "conf. fidei“ ausgesprochen findet und daß sie *durchzogen* und *durchtränkt* sind von der echten, auf den heil. Schriften und der heil. Tradition beruhenden *katholischen Theologie*, wie sie dies auch in meiner "Praefatio“ zum Theil ausgesprochen, zum Theil *vorsichtig angedeutet* finden. Im Grunde sind *alle* diese Schriften F. B's *in erster Linie theologisch, irenisch, henotisch; nur wer diesen Charakter derselben kennt, versteht sie*!

Dazu kommt, dass er, *Francis Bacon*, der unvergleichliche Dichter der sogenannten "Shakespearedramen“ ist!

Ich habe in Rom eine Enquete zur Prüfung *auch dieser Resultate* meiner langjährigen Forschung bei P. Ehrle, dem Präfekten der vatikanischen Bibliothek *angeregt*. Bis jetzt habe ich noch keine bestimmte Antwort darauf erhalten. Es heisst ja wohl ein altes Sprichwort: "Roma mora“.

Allein *das schadet nichts, ich habe Geduld* und für mich bleibt immer *Roma Amor*!

Sollten Sie in dieser Zeit hinkommen, so würde es mir nur erwünscht, sein, wenn Sie Monsignore Ehrle erzählten, daß Sie auch *in diesem Puncte* mein sehr lieber Vertrauter sind. Vielleicht können Sie mir dann berichten, wie meine Mittheilungen über diese Sache dort aufgenommen worden sind.
[Cantor an Jeiler, 1. 3. 1896]

Meinen Brief v. 1ten März werden Sie erhalten haben. Sollten Sie seitdem in Rom nicht gewesen sein, *so bitte ich Sie, wenn Sie dorthin kommen, dem P. Ehrle S. J. nichts von unseren Beziehungen zu sagen* (also nehme ich für diesen Fall das Betreffende am 1ten März Ihnen Geschriebene hiermit zurück!)

Falls Sie aber bereits dort waren und mit P. Ehrle von mir und der betreff. Angel. gesprochen haben sollten, so schadet dies nichts. Sie werden eben von ihm dasselbe erfahren haben, was ich Ihnen mittheilen will (weil ich nicht weiß, ob es Ihnen bereits bekannt ist), dass er nämlich durch den P. Pollen S. J. (einem jungen liebenswürdigen Engländer, mit dem ich correspondire, und der sich mir in Archivangelegenheiten sehr freundlich und nützlich erweist) mein Anerbieten, die betreffende Beweisführung in der Fr. Baconsache unter seine Controlle und Protection zu nehmen, bis auf Weiteres stillschweigend abgelehnt hat. *Es hat dies durchaus nichts zu sagen und ich werde mit Geduld erreichen was ich wünsche, wenn auch auf etwas anderem Wege.* Dagegen würde es mir sehr lieb sein, von Ihnen baldigst zu hören, ob Sie nicht abgeneigt wären, wenn Sie nach R. kommen, Aufträge von mir an Pater Esser O. Pr. oder an den General der Dominicaner P. Andreas Frühwirth zu bestellen.
[Cantor an Jeiler, 9. 3. 1896]

825 Das Kalenderblatt 110907 Shaxpeareologie (38)

What's past is prologue.
(Nach dem Spiel ist vor dem Spiel. [Sepp Herberger])

{{Das im KB110906 beschriebene Durcheinander geht auf die folgende Anfrage Cantors an Pater Franz Ehrle S. J., Präfekt der Bibliotheca Apostolica Vaticana, zurück:}} Neben meinen philosophisch-theologischen und mathematischen Studien beschäftige ich mich seit über zehn Jahren mit dem Leben und den Werken des großen Engländers Francis Bacon, Baron of Verulam, Viscount of St. Alban (1561-1626). {{Wie Cantor später herausfand, erreichte Bacon das erstaunliche Alter von 107 Jahren (s. KB110809).}} Die vierzehnbändige Ausgabe seiner Schriften und Briefe von Spedding (herausgegeben in den Jahren 1857-1874) gewährt keineswegs ein treues und vollständiges Bild des Mannes, hauptsächlich aus dem Grunde, weil die Herausgeber Spedding, Ellis und Heath auf dem häretischen Standpuncte der anglikanischen Kirche stehen und von hier aus alle Verhältnisse beurtheilen.

Mir hat sich aber als zweifellos sicher herausgestellt, daß Francis Bacon eine sehr merkwürdige religiöse Entwickelung in sich erfahren hat und zwar (um kurz zu sein und mich auf das Wesentliche zu beschränken) so, daß er etwa von 1597 an, vielleicht auch schon einige Jahre früher, sich dem heil[igen] römisch katholischen Glauben zu nähern begann und seit 1605, nach dem vorliegenden Zeugniß seiner "Confessio fidei“ (Spedding Ed. Vol. VII, pag.219; oder Fr. Bacon‘s Works, London 1765 [in 5 Bänden] Vol. III, pag.121; oder Opuscula varia posth[uma] philos[ophica] civil[ia] et theologica ed[idit] Guil[elmi] Rawley, Londini 1658, pag.207 in latein. Uebers.) im Wesentlichen ganz auf diesem festen Grunde stand. Eine Bestätigung dieser Entdeckung ergab sich mir durch das höchst lesenswerthe Werk des *Abbé Émery*, Supèrieur Général de Saint Sulpice: Le Christianisme de Bacon, 2 Vol. in 12°, Paris 1799. [Cantor an Ehrle, 13. 1. 1896]

826 Das Kalenderblatt 110908 Shaxpeareologie (39)

True is it that we have seen better days,
And have with holy bell been knoll'd to church,
And sat at good men's feasts, and wip'd our eyes
Of drops that sacred pity hath engend'red;

Ich beabsichtige eine, durch erhebliche Zusätze und Erläuterungen vervollständigte und erweiterte Ausgabe des Emeryschen Werkes über F. Bacon zu besorgen und habe durch meinen Freund, den Mathematiker Herrn Charles Hermite, membre de l‘Institut, der mit Monseigneur d‘Hulst bekannt ist, bei P. Lethielleux anfragen laßen, ob er den Verlag dieser Neuausgabe übernehmen würde.

Könnten Ew. Hochwürden, da Sie (wie ich aus der in meinem Besitze befindlichen Neuausgabe der Summa Philos[ophiae] des P. Cosm[as] Alamannus ersehe) mit diesem Verlage Beziehungen haben, letzterem das Unternehmen empfehlen, nachdem Sie vielleicht in das Werk von Emery Einsicht genommen haben werden, so würde mich dies zu Dank verbinden.

Mein Hauptanliegen im Zusammenhange mit Obigem beruht aber auf Folgendem.

Der intimste, treueste Freund Francis Bacon‘s war zweifellos Sir Toby Matthews, der 1605 durch Father Parsons in Rom zum röm. kath. Glauben zurückkehrte und über den Sie Einiges in folgendem Werke finden: Records of the English Province of the Society of Jesus by Henry Foley, London 1882, Vol. VII, pag.493.494.

Sir Toby Matthews erhielt anno 1614 aus den Händen des Cardinals Bellarmin {{Großinquisitor im Häresieprozess gegen Giordano Bruno

http://de.wikipedia.org/wiki/Bellarmin
Bellarmin verbot Galilei, im heliozentrischen System mehr als eine Hypothese zur Vereinfachung astronomischer Berechnungen zu sehen, was dieser für einen Irrtum hielt.}}
die Priesterweihe.

In einem Codex des Vatikanischen Archivs, signiert "Borghese II, 448“ finden sich Originalbriefe von Sir Toby Matthews an Papst Paul V.
[Cantor an Ehrle, 13. 1. 1896]

827 Das Kalenderblatt 110909 Shaxpeareologie (40)

> What's here? the portrait of a blinking idiot,
> Presenting me a schedule! I will read it.

Wie ich die Beziehungen Toby Matthews zu dem damaligen Großkanzler von Großbritannien Lord Fr. Bacon kenne (ein andrer Theil ihrer Correspondenz wird wohl noch irgendwo verborgen liegen), werden diese Unterhandlungen mit dem heiligen Stuhle (welche im Hinblick auf die henotischen Encycliken S. Heiligkeit Leo XIII v. 20 Juni 1894 und 14 April 1895 ein hohes actuelles Intereße darbieten) nicht ohne Fühlung mit Fr. Bacon, vielleicht und wahrscheinlich sogar unter dessen Inspiration und Controlle geführt worden sein.

Ich habe den erklärlichen Wunsch, diese Correspondenz genau kennen zu lernen und wandte mich deshalb gestern in einem recommandirten Briefe an Monsignore *William Giles*, Rector des Collegio Pio Inglese in Rom, mit der ausdrücklichen Bitte, er möchte einen englischen, in Rom lebenden Theologen veranlaßen, "mit mir in Correspondenz zu treten und mir alle in dieser wichtigen und bedeutenden Sache erforderliche Hülfe zu leisten."

Denn meine Verhältniße gestatten es mir nicht, schon jetzt selbst nach Rom zu kommen und diese Forschungen an Ort und Stelle zu vervollständigen. Hoffentlich gewährt mir Gott, der Allgütige {{in dessen Namen, vermutlich jedoch unautorisiert, Giordano Bruno verbrannt wurde}}, daß später bald einmal mein heißer Wunsch, Rom wiederzusehen, erfüllt werde!

Ich ersuche Sie nun, Monsignore, und dies ist der Hauptzweck dieses Schreibens, mein Gesuch bei Monsignore Giles sobald als möglich durch Ihre Autorität zu unterstützen und diese ganze Arbeit unter Ihre hohe Protection zu nehmen.
[Cantor an Ehrle, 13. 1. 1896]

828 Das Kalenderblatt 110910 Shaxpeareologie (41)

> When shall we three meet again
> In thunder, lightning, or in rain?

It would give me much pleasure if you could accompany us to Paris. There we could meet perhaps Monsieur Poincaré together, which would be a fine jolly "Trio".

As for myself you do know perhaps, that I am a great heretic upon many scientific, but also in many literary matters, as, to pronounce but two of them: I am Baconion in the Bacon-Shakespeare question and I am quite an adversary of Old Kant, who, in my eyes has done much harm and mischief to philosophy, even to mankind; as you easily see by the most perverted development of metaphysics in Germany in all that followed him, as in Fichte, Schelling, Hegel, Herbart, Schopenhauer, Hartmann, Nietzsche, etc. etc. on to this very day. I never could understand that and why such reasonable and enabled peoples as the Italiens, the English and the French are, could follow yonder sophistical philistine, who was so bad a mathematician. {{Wer konkrete Argumente scheut (weil sie sich als falsch herausstellen könnten), teilt

Pauschalurteile aus. Neben dem etwas plumpen "schlecht" bieten sich vor allem "unsauber" und "ungenau" als Munition für Heckenschützen an.}}
[Cantor an Russell, 19. 11. 1911]

829 Das Kalenderblatt 110911 Shaxpeareologie (42)

> There are more things in heaven and earth, Horatio,
> Than are dreamt of in your philosophy.

Ihre Briefe und mündlichen Aeusserungen (namentlich bei unserm letzten Zusammensein in München im Sept. 1899) verrathen die freundschaftliche Besorgnis, dass meine, seit circa 15 Jahren eifrigst betriebenen *historischen Studien*, namentlich in der *Shakespeare-Autorschaftsfrage* und in der damit zusammenhängenden Frage nach dem Wesen der *Rosenkreuzerei des 16ten und 17ten Jahrhunderts*, mich von der Mathematik abgelenkt haben. *Dies ist nicht der Fall*, wenn ich auch in den Publicationen mathematischer Arbeiten in längeren Intervallen habe pausiren müssen, weil jene Studien diesen an Wichtigkeit vorangingen. {{Newton hielt seine theologischen Studien für wichtiger als seine mathematischen. Der Unterschied zu Cantor ist: Newton irrte.}} Ich hoffe im Gegentheil, Sie bald überzeugen zu können, daß meine nothwendig gewordene Vertiefung in den Geist des 16ten und 17ten Jahrhunderts, mich dazu geführt hat, die *mathematischen* und *naturwissenschaftlichen* Klassiker jener Zeit genauer zu fassen und zu verstehen, als dies bisher von Anderen möglich war. - Sie werden über diese Behauptung staunen, ohne dieselbe in Zweifel zu ziehen. {{Oder sollte Hilbert sie in Zweifel gezogen haben, ohne darüber zu staunen?}} Es *ist* so und beruht auf *zweierlei*:
1) darauf, daß die großen Forscher damals fast alle universell waren und nicht *Specialisten*, wie *heute*.
2) darauf, daß zwischen ihnen ein *realer Zusammenhang* herrschte, von dem das heutige, durch das *Specialistenthum zersplitterte Gelehrtenwesen* keine Ahnung hat.

Nachdem ich nun den steilen und sehr hohen Berg, um den es sich mir dabei handelte, glücklich erstiegen habe, kann ich nunmehr mit Hamlet sagen:

"There are more things in heaven *and earth*, Horatio, then are dreamt of in your philosophy".

Z. B. werde ich Sie gelegentlich mit einem 1527 geborenen *Mathematiker* J[ohn] D[ee] bekannt machen, dessen Euclidausgabe mit Commentaren Sie besonders interessiren muss. Und schon jetzt kann ich Ihnen eine ebenso wichtige Euclidausgabe nennen, nämlich die von *Clavius* (geb. in Bamberg 1537, gest. in Rom 1612).

Und nun zu meiner zusammenfassenden und vollendenden Arbeit, die Sie die Güte haben wollen, zunächst in den "Göttinger Nachrichten" später in den "Mathem. Annalen zur Publication zu bringen. Sie erhält den Titel:

"Aphoristische Grundlegung einer Theorie der *endlichen* und *transfiniten Cardinal- und Ordnungszahlen*".
[Cantor an Hilbert, 27. 1. 1900]

Charakteristisch für Cantor ist die eingangs des Briefes dargelegte Auffassung über die Bedeutung seiner historischen Studien. Selbst wenn man in Rechnung stellt, daß Cantor sich zu jener Zeit in einer Phase seiner Krankheit befand und deshalb manche übersteigerte Formulierung gewählt hat, drückt sich darin eine Grundüberzeugung Cantors aus: daß jede Wissenschaft - also auch die Mathematik - in einen größeren Rahmen eingebettet ist, zu dem man wirklichen Zugang nur dann findet, wenn man den "Geist" der vergangenen Jahrhunderte erfaßt hat. {{Damit hat er zweifellos recht!}}

[H. Meschkowski, W. Nilson (Hrsg.): "Georg Cantor Briefe", Springer, Berlin (1991) p. 425, 428]

[H. Meschkowski, W. Nilson (Hrsg.): "Georg Cantor Briefe", Springer, Berlin (1991) p. 425, 428]

830 Das Kalenderblatt 110912 Shaxpeareologie (43)

> Nun gute Nacht! Das Spiel zu enden,
> Begrüßt uns mit gewognen Händen!

Mit Dank bestätige ich den Empfang Ihres werthen Schreibens v. 5ten, Dec. und des "The Month“ v. Dec. 1897. Das Emblem auf dem Titelblatt liess mich sofort zu meiner Freude erkennen, daß ich unter demselben Schutzheiligen St George stehe, wie Ihre Ordensprovinz!
[...] Wäre es denn nicht möglich, daß Sie Ihre Studien baldigst auf ein Paar Wochen nach *Halle* verlegten, wo Sie im Schwesternhause des S. Franciscus und der S. Elisabetha *neben* der kath. Kirche gute Unterkunft finden würden? [...] Das Studium dieses in der Kirchengeschichte berühmten Bodens würde vielleicht eine geeignete *aeußere Motivirung* Ihres Herkommens sein!
Der *eigentliche Zweck* würde aber sein, daß Sie mir Gelegenheit geben, Ihnen resp. Ihrer Provinz *sehr wichtige* auf die *kirchlichen Verhältnisse Englands* bezügliche *vertrauliche Mittheilungen* zu machen und *gemeinsame Pläne* zu fixiren, oder doch wenigstens zu ventiliren.
Aus der in Berlin erscheinenden Zeitung "Germania“ sah ich mit Intereße, daß Ihr Ordensbruder *P. Darlington* in London über die Katholicität "Shakespeare‘s" gesprochen hat. Könnte ich nicht einen gedruckten Bericht über diesen Vortrag erhalten?
Wann endlich wird Ihre, *besonders dazu berufene und prädestinierte Ordensprovinz*, für die Identität
"Shakespeare" = Francis Bacon
eintreten und dieselbe mit dem *Speer des St George vertheidigen*?
[Cantor an Pollen, 22. 12. 1897]

Damit sind die Shakespearallotria beendet.
Die Epigramme der letzen 43 Kalenderblätter stammen von William Shakespeare --- oder wer immer dessen Werk gewirkt hat.

831 Das Kalenderblatt 110913

Eine Tasse als Menge zu betrachten, scheint in gewissen matheologischen Kreisen ebenso anstößig zu sein wie die Betrachtung der Armut als einer christlichen Tugend in gewissen theologischen Kreisen. "Everything is a set" bedeutet demnach nicht, dass jedes Ding eine Menge sei.

So belehrte ein Herr Fritsche seinen Leser: "Diese Aussage bezieht sich auf das *Universum* der Mengenlehre, trifft also eine Aussage über dieses Universum, nicht über 'jedes Ding' in unserer (Lebens-)Welt. Du scheinst überhaupt nicht zu begreifen, wovon Mathematiker reden bzw. was sie sagen *wollen*, wenn sie etwas Bestimmtes sagen. Der Mond z. B. ist nach üblicher Auffassung *keine* Menge; und wenn ein Mathematiker, der sich mit ZFC beschäftigt, beiläufig erwähnt: Everything is a set (in ZFC), dann will er damit *ganz sicher* nicht sagen/behaupten, dass auch der Mond eine Menge (in ZFC) ist. [...] In WMs Welt mag eine Tasse eine Menge sein..., in der gewöhnlichen Welt ist sie das - meines Wissens - nicht."

Tja, seines Wissens. - In der Mengenlehre (in ZFC gibt es sowieso keine Menge aller Mengen, der eine Tasse oder eine anderes Ding angehören könnte) werden selbstverständlich Dinge zu Mengen vereinigt, denn die Mengenlehre sollte - ursprünglich wenigstens - einen gewissen Wirklichkeitsbezug aufweisen; sie wurde nicht von vornherein als absurdes Theater entworfen.

Wir entwickeln die Grundbegriffe zunächst an den endlichen Mengen. Denken wir uns als ganz konkretes Beispiel etwa einen Korb Äpfel und einen Korb Birnen. Um zu prüfen, ob beide gleichviel Stücke enthalten, können wir so verfahren: [Gerhard Hessenberg: "Grundbegriffe der Mengenlehre", Sonderdruck aus den "Abhandlungen der Fries'schen Schule", I. Band, 4. Heft, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1906) Vorwort und § 11f]

Die Frage, ob es prinzipiell zulässig ist, eine Menge von unendlich vielen Dingen als ein abgeschlossenes Ganzes zu betrachten, berührt die Zulässigkeit unsrer Definition der Äquivalenz nicht. [a.a.O. § 12]

Zwei Mengen heißen identisch, wenn jedes Ding der einen auch ein Ding der andern ist und umgekehrt. [a.a.O. § 12]

Die Zuordnung eines Dinges zu sich selbst ist umkehrbar eindeutig. [a.a.O. § 12]

Wir fassen nun die Menge aller denkbaren Bücher ins Auge. [A. Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre", Springer, Berlin (1928) p. 6]

Sowohl die Annahme einer nur endlichen (wenn auch unbegrenzten) Ausdehnung des Weltalls wie auch die Überzeugung von der nur begrenzten Teilbarkeit der Materie und Energie, also von ihrer Zusammensetzung aus nur endlichvielen kleinsten Teilen (Atomen bzw. Elektronen und Energiequanten) steht in bestem Einklang mit unseren Erfahrungen. Die Außenwelt scheint uns also nur endliche Mengen darzubieten. {{Immerhin scheint sie uns Mengen darzubieten.}} [a.a.O. p. 6f]

Man kann übrigens, wenn man Wert darauf legt, auch auf eine im engeren Sinn anschauliche Art zu einer unendlichen Menge gelangen [...]: etwa durch zweckmäßige Aufstellung einiger Spiegel derart, daß in einem unter ihnen ("Ausgangsspiegel“) neben anderen gespiegelten Gegenständen auch das eigene Bild des Ausgangsspiegels erscheint, in diesem Bild also wieder dessen Bild usw.; die Gesamtheit der im Ausgangsspiegel sichtbaren Spiegel bildet dann, streng genommen {{!}}, eine unendliche Menge. [a.a.O. p. 9]

Wenn es zu jeder Menge von Dingen noch ein weiteres, von ihnen allen verschiedenes Ding gibt, so ist die Gesamtheit aller Dinge offenbar selbst keine Menge. [F. Hausdorff: "Grundzüge der Mengenlehre", Chelsea Publishing Company, New York (1965) p. 2]

Bei jeder endlichen Menge von Dingen, wie groß dieselbe auch sein mag, bietet sich sofort die Möglichkeit des objektiven Zählens dar (wenn die Menge etwa tausendmalmillionen Gegenstände umfaßt [...]) [E. Zermelo: "Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer (1932) p. 392]

Zwei bestimmte Mengen M und M1 nennen wir äquivalent [...] Beispiele: a) Die Menge der Regenbogenfarben (Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett) und die Menge der Tonstufen (C, D, E, F, G, A, H) sind äquivalente Mengen und stehen beide unter dem Allgemeinbegriff Sieben. b) Die Menge der Finger meiner beiden Hände und die Menge der Punkte in dem sog. arithmetischen Dreieck sind äquivalent; ihnen kommt die Kardinalzahl Zehn zu. [a.a.O. p. 412]

Beispiele endlicher Mengen sind etwa die Menge der Erbsen in einer Tüte, die Menge der Einwohner einer Stadt oder die Menge der Wasserstoffatome in der Sonne {{im Mond aber nicht! dieser Umstand fällt also genau in den Themenkreis dieses Aufsatzes:}} [W. Dieck: "Die Paradoxien der Mengenlehre", Annalen der Philosophie und philosophischen Kritik 5.1 (Dez. 1925) p. 44f]

832 Das Kalenderblatt 110914

Das einfach verständliche und unschuldig wirkende Sätzchen "Die Tasse gehört zur Menge aller Mengen" zog gleich von zwei Seiten ein Ungewitter auf sich; zum einen wegen der Entweihung des hehren Begriffs "Menge" durch eine profane Tasse.

Ein Herr Bader meinte, dass einige von mir anonym dazu zitierte Autoren sich wünschen sollten, nicht erkannt zu werden (es handelte sich um Cantor, Fraenkel und Hessenberg, s. KB110913), und meldete Zweifel an der Mengenhaftigkeit der Tasse an: "...dann müßte man zum Nachweis der Mengeneigenschaft einer Tasse zeigen, daß sie eine solche Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens ist. Das dürfte aus Gründen, die hinsichtlich Zahlen von Benacerraf popularisiert wurden, schwierig sein."

Aus Gründen, die hinsichtlich Tassen von mir popularisiert wurden, ist es dagegen ganz leicht: Eine Tasse kann man als Menge von Atomen, als Menge von Form, Farbe und Funktion, als Menge von möglichen Scherben usf. auffassen.

Neben einem erheblichen Mangel an Ingeniosität muss aber gleichzeitig eine ausgeprägte Unkenntnis der relevanten Literatur vorliegen, um diese einfachen Zusammenhänge zu bezweifeln; schon Cantor gibt Beispiele:

Man nehme ein Tonstück, sei es eine einfache Melodie oder ein kompliziertes musikalisches Kunstwerk, etwa eine Symphonie oder ein Oratorium. Dasselbe setzt sich aus einer bestimmten Zahl *m* verschiedener Töne zusammen, die nach vier voneinander unabhängigen Richtungen geordnet sind. Als erste Richtung nehme man die Folge der Töne in der Zeit[...] Die zweite Richtung werde von der Dauer, welche jeder Ton für sich in der Zeit hat, bestimmt [...] Die dritte Richtung sei durch die Höhe der Töne gegeben [...] Endlich werde die vierte Ordnungsrichtung in analogem Sinne durch die Intensität der Töne bestimmt. So aufgefaßt stellt demnach jedes Tonstück eine vierfach geordnete Menge vor. [E. Zermelo: "Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer (1932) p. 421f]

Betrachten wir ein Gemälde und fassen darin *m* bestimmte Punkte ins Auge, etwa so viele und solche, daß sie in der Entfernung, von welcher aus das Bild gesehen wird, den Eindruck des kontinuierlichen Ganzen hervorbringen. Beziehen wir das Bild auf eine horizontale und vertikale Richtung als auf ein zweiachsiges Koordinatensystem, so läßt es sich nach folgenden Gesichtspunkten als eine vierfach geordnete Menge auffassen. Die *x*-Koordinaten mögen zur Bestimmung der ersten, die *y*-Koordinaten zur Bestimmung der zweiten Ordnungsrichtung dienen. Die dritte Richtung werde durch die Farbe der Punkte gegeben [...] Endlich bestimme die Farbintensität der *m* Punkte die vierte Ordnungsrichtung. [a.a.O. p. 422]

Das Gemälde, das Tonstück und die Tasse sind Mengen und gehören wie alle Dinge (und sogar die leere Menge) zur Menge aller Mengen. Die Tasse gehört zur Menge aller Tassen, etwa eines Schrankes, und diese Tassenmenge gehörte selbst dann zur Menge aller Mengen, wenn die Tasse nur als unzerschlagenes, urelementares Porzellan- oder Tonstück ohne Mengeneigenschaften aufzufassen wäre.

Wenn schließlich irgendein moderner Perverteur der Mengenlehre trotz allem behaupten wollte, es gäbe keine Mengen von Dingen, so gibt es doch für jedes Ding eine endliche Bezeichnung, und es gibt die Menge aller endlichen Bezeichnungen von Dingen, die isomorph zur Menge aller Dinge ist.

Die Menge aller endlichen Bezeichnungen ist selbstverständlich selbst eine solche, ebenso die Menge aller Mengen endlicher Bezeichnungen, die sich nicht selbst enthalten. Aber das zeigt nur ein überflüssiges weiteres Mal, dass der Platonismus platt und damit das Aktuale nicht mehr aktuell ist.

833 Das Kalender 110915

Das einfach verständliche und unschuldig wirkende Sätzchen "Die Tasse gehört zur Menge aller Mengen." zog gleich von zwei Seiten das Ungewitter auf sich, nämlich zum einen aus den in KB110913/14 dargestellten Gründen und zum andern weil es sich angeblich nicht gehört, zu einer Menge zu gehören - jedenfalls nach Meinung des Herrn Bader, der da monierte: "... daß zu einer Menge nichts 'gehört', sondern daß sie Elemente und Teilmengen hat, und daß dies beides etwas grundlegend Unterschiedliches ist."
http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/browse_frm/thread/ecfcb7f3d1d21b3c#

Hier hat sich seit den Anfängen Mengenlehre ein Perversionsprozess vollzogen, wie man ihn auch in anderen gesellschaftlichen Zusammenhängen beobachtet, denn die Väter der Mengenlehre wussten noch, was sich gehört.

Der Mathematiker im besonderen hat eine tiefe Abneigung gegen solche Argumentation mit Allgemeinbegriffen. Wenn für ihn irgend ein Gegenstand "ganz" ist, so genügt es dafür, daß genau feststeht, was zu ihm gehört, und was nicht. [Gerhard Hessenberg: "Grundbegriffe der Mengenlehre", Sonderdruck aus den "Abhandlungen der Fries'schen Schule", I. Band, 4. Heft, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1906) § 2]

Sei *S* die Menge aller derjenigen Elemente *x* in *M*, denen durch (φ) ein Element *y* in *N* zugeordnet wird, so haben wir zu zeigen, daß jedes Element von *M* zu *S* gehört. [a.a.O. § 37]

Daß, wie behauptet, Ω_μ eine Anfangszahl ist, ergibt sich nun sofort: Gäbe es eine Zahl λ unter Ω_μ, die mit Ω_μ gleichmächtig wäre, so gehörte sie noch zu M^*, ihre Mächtigkeit κ_μ oder eine höhere daher zu *M*, gegen das soeben bewiesene. [a.a.O. § 42]

In der Tat: kommt u' in U_0 vor, so gehört das dem Element u' von U_0 zugeordnete Element m' von *M* entweder zur ersten oder zur zweiten der im vorletzten Absatz gekennzeichneten Klassen. [A. Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre", Springer, Berlin (1928) p. 69]

Man bezeichnet die (nach der Größe der Ordnungszahlen geordnete) Menge aller zu einem Alef gehörigen Ordnungszahlen als die Zahlenklasse dieses Alefs. [a.a.O. p. 192]

[...] Menge von Elementepaaren {*m*, *n*}, deren einer Bestandteil *m* je ein Element von *M* darstellt, während der andere Bestandteil *n* stets der Menge *N* angehört; [a.a.O. p. 314]

Unter einem "Grenzpunkt einer Punktmenge *P*" verstehe ich einen Punkt der Geraden von solcher Lage, daß in jeder Umgebung desselben unendlich viele Punkte aus *P* sich befinden, wobei es vorkommen kann, daß er außerdem selbst zu der Menge gehört. [E. Zermelo: "Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer (1932) p. 98]

Sei *N* irgendein Bestandteil von *M* + *l*, so kann er zwei Fälle darbieten. 1) Es gehört das Element *l* mit zu *N*, [...]. 2) Es gehört *l* nicht mit zu *N*; [a.a.O. p. 415]

[...] so entspricht jedem Elemente *a* von *M* eine bestimmte Untermenge *R*(*a*) von *M*, welche außer *a* alle "auf *a* folgenden" Elemente enthält und als der zu *a* gehörende "Rest" bezeichnet werden möge. [E. Zermelo: "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung", Math. Ann. (1908) p. 110]

Herr Bader meint dagegen, "daß zu einer Menge nichts 'gehört' [...] Nach ca. 8 Jahren intensiven Studiums noch nicht einmal diese Banalität verinnerlicht zu haben, stellt alleine schon eine bemerkenswerte Dumm- und Blödheitsleistung dar" {{worin ich mich - zu meinem nicht geringen Trost - immerhin einig weiß mit den Kollegen Cantor, Fraenkel, Hessenberg und Zermelo, die sich sogar noch länger als nur acht Jahre mit der Mengenlehre beschäftigt haben.}}

Es ist auch nicht so, dass "gehört" nur in alter, überholter Literatur vorkäme. Allerdings ist die moderne Literatur meistens englisch geschrieben: "Objects from which a given set is composed are called elements or members of that set. We also say that they belong to that set." [K. Hrbacek, T. Jech: "Introduction to Set Theory" Marcel Dekker Inc., New York (1984) p. 2]

Wenn dies gehörig {{sic!}} berücksichtigt wird, so fallen alle von Herrn {{Bader}} gemachten Einwände [G. Cantor: "Bemerkungen mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstraß-Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen", Math. Annalen 33 (1889) p. 476]

834 Das Kalenderblatt 110916

Mit der Menge aller Mengen verhält es sich wie mit dem Teufel:
Beide schrecken nur den, der an sie glaubt.

835 Das Kalenderblatt 110917

What is Mathematics? Most mathematicians don't know and don't care. Mathematics is what mathematicians do. [...] In fifty years (at most) human mathematicians will be like lamp-lighters and ice-delivery men. All serious math will be done by computers. Let's hope that human philosophy will still survive, but we need to adjust naturalism to the practice of math in the future and to the way it will be done by machines. Of course, we don't know exactly how, so let's put this project of Naturalist mathematical philosophy on hold and wait to see how things turn out in fifty years.

Tim Gowers said that we are all formalists, but most of us don't know it (and if we knew, we wouldn't care). I kind of agree, but this is only a corollary of a more profound truth: *Everything is Combinatorics*. Classify Lie Algebras? It is just root systems and Dynkin Diagrams. Finite Groups? The Monster is a Combinatorial Design. Even when it is not obviously combinatorics, it could be made so. If it is too hard for us, then we need a computer! But computer science is all Discrete Math, alias combinatorics. In a way Logic is too. But Logic is so low-level, like machine language. It is much more fun and gratifying to work in Maple, and do higher-level combinatorics.

I am also a trivialist. [...] We humans, and even our computers, can only prove trivial results. Since all knowable math is ipso facto trivial, why bother? So only do fun problems, that you really enjoy doing. It would be a shame to waste our short lives doing "important" math, since whatever you can do, would be done, very soon (if not already) faster and better (and more elegantly!) by computers. So we may just as well enjoy our humble trivial work.

[Doron Zeilberger: "Opinion 69: Roll Over Platonism, Logicisim, Formalism, Intuitionism, Constructivism, Naturalism and Humanism! Here Comes Combinatorialism and Trivialism." (2005)]

836 Das Kalenderblatt 110918

Genau wie im richtigen Leben gibt es auch in der Mathematik zwei Welten, nämlich eine, die man erkunden und benutzen kann, und eine, an die man allenfalls glauben kann.

Alle Ziffern, die jemals gedacht, genannt oder geschrieben werden, und erst recht alle reellen Zahlen einschließlich aller Infima, Suprema, Grenzwerte und Diagonalzahlen, die als Individuen benutzt werden, um Überabzählbarkeit zu "beweisen", gehören zu einer abzählbaren Menge - selbst in einem unendlichen und ewigen Universum. Der Beweis ist leicht geometrisch zu führen. (Geometrie und geometrische Überlegungen gehören schließlich zur Mathematik.) Man bilde jedes rationale Quadrupel von Raum-Zeit-Koordinaten auf die Definition oder Erwähnung des mathematischen Objektes ab, das in geometrischem Kontakt mit den Raum-Zeit-Koordinaten steht. Im Prinzip genügt die Abbildung eines Quadrupels, doch es dürfen auch alle der stets unendlich vielen sein. Die Abzählbarkeit aller rationalen Raum-Zeit-Koordinaten impliziert die Abzählbarkeit der Bildpunkte.

Undefinierbare "reelle Zahlen" können nicht für den Beweis von Überabzählbarkeiten herangezogen werden. Cantors "Beweise" (ungeschickte Ansätze zur Nummerierung von unendlichen Mengen unter Verschwendung von Zahlen und - da die "Listen" vor dem Zeitpunkt der Prüfung vorzulegen, die Diagonalzahlen aber erst nach Fertigstellung der Listen definiert sind - die Einführung der Zeit in die Mengenlehre) besitzen denselben Status wie die Gottesbeweise in der physikalischen Realität. Schon Kant erkannte (nach vergeblichen eigenen Bemühungen), dass die Existenz Gottes nicht beweisbar ist. Er meinte dass der ontologische Gottesbeweis ebensowenig nützt, wie wenn ein Kaufmann seine Bilanz durch Anhängen einiger Nullen aufbessern wollte. Trotzdem besteht das Dogma, wonach die Existenz Gottes mit wissenschaftlichen Methoden beweisbar sei. Gödel hat tatsächlich einen vermeintlichen Gottesbeweis geführt, siehe Kalenderblatt 101022
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/KB/
und Cantor meinte, dass mit Hilfe der transfiniten Mengenlehre ein Beweis für ein endliches Schöpfungsdatum erbracht werden könne.

Dasselbe gilt in der Mathematik. Die zweite Welt, die Matheologie ist der Glaube an die Realität undefinierbarer Definitionen und unentscheidbarer Entscheidungen, der Glaube, dass die Knoten im Binären Baum in die Lage versetzen, Pfade, die zu irrationalen Zahlen gehören, zu identifizieren, obwohl bereits alle Knoten benötigt werden, um alle rationalen Zahlen zu identifizieren. Beweisbar ist dergleichen nicht. Wer an nicht abzählbare Mengen glaubt, ist ebenso naiv wie (genau betrachtet sogar noch naiver als) Menschen, die an asankbyeya (= 10^{140}) Götter glauben oder an ein Mol Affen (= $6 \cdot 10^{23}$ - ein Mol Cola-Dosen auf dem Mond entsorgt, würden dessen Durchmesser verdoppeln. Und auch in unserer sublunaren Welt hätten die Krieger Hanumans Probleme, einen Fuß auf die Erde zu kriegen.)

Was immer in der Mathematik eine Rolle spielt, Symbole, Zahlen, Operatoren, Definitionen, Sätze, Beweise: alles gehört zu einer abzählbaren Menge. Der Rest ist Matheologie. Doch im Gegensatz zur Theologie ist diese nicht geeignet, Seelen die Hoffnung auf Beglückung nach dem Tode zu vermitteln - nicht einmal den Seelen von Matheologen.

837 Das Kalenderblatt 110919

Folgen, deren Anfangswerte gegeben und deren Fortsetzungen gesucht sind, werden häufig als Aufgaben in Intelligenztests benutzt. Eine sehr einfache Aufgabe dieser Art ist "1, 2, 3, ...". Jeder Mensch, insbesondere jeder Mathematiker sollte in der Lage sein, diesen einfachen "Intelligenztest" zu bestehen und die Folge beliebig weit fortzusetzen, denn die Menge der natürlichen Zahlen wird damit unübertroffen präzise festgelegt.
Die Behauptung, es gäbe eine bessere, übersichtlichere oder präzisere Festlegung, ist polemischer Humbug von der Qualität eines "Schwarzen Kanal", in dem der selige Karl-Eduard von Schnitzler einst behauptete, die wirtschaftliche Lage in der DDR sei wesentlich rosiger als in der BRD.
Merkwürdigerweise wird die Idee der Erkennung von Folgen mit einfachen Bildungsgesetzen vorwiegend von denjenigen abgelehnt, für die die Erkennung unendlicher, völlig gesetzloser Folgen die einzige Möglichkeit zur Identifizierung für die meisten reellen Zahlen ist.

838 Das Kalenderblatt 110920

Die Peano-Axiome dienen dazu, alle Eigenschaften der natürlichen Zahlen zu definieren. Jede Eigenschaft der natürlichen Zahlen lässt sich daraus herleiten, und eine Eigenschaft, die sich nicht daraus herleiten lässt, ist keine Eigenschaft der natürlichen Zahlen. Die Axiome lauten

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
3. 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
5. Enthält eine Menge die 1 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so enthält sie alle natürlichen Zahlen.

Diese Axiome spezifizieren *die* natürlichen Zahlen bekanntlich nicht. Um das zu zeigen, wählen wir als Modell die Folge $1/1^2$, $1/2^2$, $1/3^2$, ...

1. Die 1 gehört dazu, ist also eine natürliche Zahl.
2. Mit dem n-ten Folgenglied ist auch (n+1)-te eine natürliche Zahl.
3. 1 hat keinen Vorgänger, ist also kein Nachfolger.
4. Keine zwei verschiedenen Zahlen besitzen denselben Nachfolger.
5. Die reellen oder rationalen Zahlen enthalten die Modellmenge (die wirklichen natürlichen Zahlen aber nicht).

Die (konventionelle) Summe unserer "natürlichen Zahlen" ist $\pi^2/6$. Nach der Peanoschen Addition $n' = n + 1$ und $n + m' = (n + m)'$ erhält man dagegen:

$1 + 1 = 1' = 1/4$
$1 + 1/4 = 1/4' = 1/9$

1 + 1/4 + 1/9 = 1/4' + 1/9 = 1/4 + 1/9' = 1 + 1/9'' = 1/9''' = 1/36
1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 = 1/100
1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 = 1/225
...
und die Summe aller natürlichen Zahlen verschwindet.

Doch könnte man (in der Cantorschen oder jeder beliebigen anderen) Aufreihung auch die rationalen Zahlen als Modell wählen, ebenso wie die algebraischen Zahlen oder alle reellen Zahlen (die man bezeichnen und damit wählen kann) - und überhaupt jede beliebige Folge.

Um aber *die* natürlichen Zahlen eindeutig zu bezeichnen, benötigt man eine Einheit und den Prozess des Hinzufügens der Einheit. Diese Grundlage der Mathematik ist aus einem physikalischen Modell zu abstrahieren. Ob es sich dabei um Bäume oder Backsteine, Murmeln oder Menschen handelt, ist gleichgültig. Puristen werden Striche oder Punkte, Sätze oder Ideen bevorzugen, weil deren Verwurzelung in der Wirklichkeit nicht gar so offensichtlich hervortritt und die Mathematik immer noch als fast unbeflecktes Reich der Ideen angesehen werden kann.

839 Das Kalenderblatt 110921

Mit Hilfe der Peano-Axiome gelingt es nicht, die natürlichen Zahlen so zu definieren, dass jemand, der die natürlichen Zahlen oder die Zuordnung der Bezeichnung nicht kannte, sie nach der Lektüre kennt oder die Bezeichnung richtig zuordnen kann (s. KB110920).

Die folgenden Axiome charakterisieren die natürlichen Zahlen eindeutig:

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Wenn n eine natürliche Zahl ist, so ist auch $n + 1$ eine natürliche Zahl.
3. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist Untermenge einer jeden Menge, die (1) und (2) erfüllt. (Natürlich erfüllt $\mathbb{N}$ diese Axiome ebenfalls).

Allerdings benötigt man die nicht weiter definierte Grundoperation der Addition von 1. Um diese anhand der Realität zu erklären, benötigt man eine Menge gleichartiger Gegenstände. Damit kann man allerdings die natürlichen Zahlen noch einfacher verständlich erklären, als oben geschehen.

840 Das Kalenderblatt 110922

Es besteht die Auffassung, dass Mengen und Zahlen axiomatisch festgelegt werden müssten. Diese Auffassung führt dazu, das fünfte Peano-Axiom als Induktionsaxiom zu bezeichnen. Viele Mathematiker sind so abgerichtet worden, dass sie gar nicht mehr in anderen Bahnen denken können. Manch einer meint sogar, die Addition sei erst in den reellen Zahlen überhaupt erklärt und um sie anwenden zu können, müsse man sie als Funktion auffassen und zunächst einen Funktionsbereich definieren. Viele halten dies für die einzige richtige Auffassung, was natürlich falsch ist, zumal die aus der Wirklichkeit abstrahierte Addition weder durch den Peanoschen Versuch noch durch die allgemein üblichen Körperaxiome definiert wird (s. KB110920).

Eine andere Auffassung ist die Dedekindsche: "Der vorstehende Satz bildet, wie sich später zeigen wird, die wissenschaftliche Grundlage für die unter dem Namen der vollständigen Induktion (des Schlusses von n auf $n + 1$) bekannte Beweisart" [Richard Dedekind: "Was sind und was sollen die Zahlen?", Vieweg, Braunschweig (1887)].

Sie beruht darauf, dass die Addition von 1 als grundlegende Eigenschaft der vollständigen Induktion vorhanden ist und zum Beweis von Sätzen und zur Schöpfung von Zahlen vorausgesetzt werden kann. Sie muss nicht axiomatisch festgelegt werden, und wenn, dann besteht diese Festlegung in der Feststellung, die einzig und allein als Definition der vollständigen Induktion zu verstehen ist: "Auf jedes n folgt genau ein $n + 1$".

841 Das Kalenderblatt 110923

Den Begriff der Menge in völlig einwandfreier Weise zu definieren ist bisher nicht gelungen. Wahrscheinlich darf auch hier eine Definition nicht verlangt werden, sondern nur ein Axiomsystem. [Gerhard Hessenberg: "Grundbegriffe der Mengenlehre", Sonderdruck aus den "Abhandlungen der Fries'schen Schule", I. Band, 4. Heft, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1906) § 11]

> Wünschenswert wär's wohl gewesen,
> zu wissen, was das Wort verheißt.
> Doch kannst du nirgendwo es lesen
> und lernst nicht, was du nicht schon weißt.

Wie Cantor erkannt hatte, ist eine Definition des komplizierten mathematischen Grundbegriffs Menge zumindest wünschenswert - im Gegensatz zur Folge der natürlichen Zahlen, deren Eigenschaften durch die Peanosche Nachfolger-Idee weder besser noch genauer ausgedrückt werden, als sie ohnehin ein jeder kennt. (Im Gegenteil: Die Peano-Axiome definieren bekanntlich jede Folge, die mit 1 bzw. 0 beginnt und paarweise verschiedene Glieder besitzt. Sie verwirren also mehr als sie klären.)

Trotzdem kann jeder Mensch erkennen, ob ein vorgelegtes Gebilde eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen ist oder nicht. Eines aber sollte man von vornherein erkennen und berücksichtigen: Es gibt keine "völlig einwandfreien Definitionen". *Jede* Definition ist der Versuch, mit mehr oder weniger unbeholfenen und jedenfalls immer auf vorhergehendem, fehleranfälligen Informationsaustausch beruhenden Mitteln, gemeinsames Wissen zu erzeugen. Ein Beispiel liefert Hessenberg gleich selbst mit einer verfehlten Trichotomie:

Denken wir uns als ganz konkretes Beispiel etwa einen Korb Äpfel und einen Korb Birnen. Um zu prüfen, ob beide gleichviel Stücke enthalten, können wir so verfahren: Wir ergreifen mit der linken Hand einen Apfel, mit der rechten eine Birne und legen jedes Stück aus seinem Korb heraus. Dieses Verfahren wiederholen wir, solange es geht. Es wird nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen zu einem Ende führen, und zwar entweder dadurch, daß keine Äpfel mehr da sind, oder dadurch, daß keine Birnen mehr vorhanden sind, oder drittens dadurch, daß weder Birnen noch Äpfel mehr übrig bleiben {{oder viertens dadurch, dass wir nicht weitermachen können}}. Im ersten Fall ist die Anzahl der Birnen, im zweiten die der Äpfel die größere, im dritten Fall sind die Anzahlen einander gleich {{und im vierten Fall sind sie zu groß, um von uns verglichen werden zu können}}. [...] Es ist natürlich noch nicht gesagt, daß dieser Definition auch für unendliche Mengen ein vernünftiger Sinn zukommt. [Gerhard Hessenberg, a.a.O. §11, 12]

Da diesem Verfahren schon für große endliche Mengen kein vernünftiger Sinn zukommt, ist es sogar ausgesprochen unwahrscheinlich, dass ihm für den noch unwahrscheinlicheren Fall, dass unendliche Mengen (in einem konkreteren Sinne als eben durch ihre Nennung) existieren, ein Sinn zukommt.

842 Das Kalenderblatt 110924

Natürliche Zahlen: die Menge $\mathbb{N}$, die axiomatisch definiert werden kann als Menge mit ausgezeichnetem Element $1 \in \mathbb{N}$ und Nachfolgerfunktion, oder durch die Peano-Axiome [G. Walz et al.: "Lexikon der Mathematik": Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (2003)]

Neues von den natürlichen Zahlen: Die 1x1-Matrix (1) und die vier 2x2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bilden die ersten fünf natürlichen Zahlen. Setzt man dann mit 3x3-Matrizen fort, oder folgen gleich Tensoren? Vielleicht sollte man auch den Spin-Matrizen - ihrer grundlegenden Bedeutung wegen - noch ein Plätzchen einräumen? Oder beschränkt man sich besser auf Vektoren?

Auch wäre es mit der Definition verträglich, dass alle alephs die Folge füllen - natürlich nur alle, die es gibt. Ein aleph aller alephs könnte hier nicht zum Problem werden.

Schließlich mag Peano auch die Konfigurationen B_k des Binären Baums gemeint haben:

```
B0 =   0

B1 =   0
      /
     0

B2 =   0
      / \
     0   1

B3 =   0
      / \
     0   1
    /
   0

B4 =   0
      / \
     0   1
    / \
   0   1
...
```

Wer weiß?

Wie schon in KB110918 aufgezeigt, kann man alles abzählen. Also ist alles natürliche Zahl. Die Welt besteht aus Zahlen - für Rechenmeister wohl eine schöne Vorstellung. So schließt sich der Kreis vom ersten Mathematiker in Kroton bis zum Professor in Turin, etc. PP - Pythagoras bis Peano: Alles ist Zahl.

843 Das Kalenderblatt 110925

So ist die Reihe der geraden und die der ungeraden Zahlen unendlich, aber die der geraden ist größer um 1. {{Diese Aussage ist sicher genau so richtig wie die Aussage, dass alle geraden und ungeraden Zahlen existieren. Sie ist sicher genau so richtig wie die Aussage, dass, was in allen Anfangsabschnitten der natürlichen Zahlen fehlt, auch in der ganzen Menge der natürlichen Zahlen fehlt.}} - Oder die unendlichen Zahlenreihen, die durch geometrische Progression durch Verdoppelung oder Verdreifachung zustande kamen, sind größer, als die unendlichen Zahlenreihen, die durch fortgesetzte Halbierung oder Drittelung zustande kommen. [Ludwig Baur: "Die Philosophie des Robert Grosseteste, Bischofs Von Lincoln", Aschendorff, Münster (1917)]
http://www.archive.org/stream/diephilosophiede00baur/diephilosophiede00baur_djvu.txt

{{Man kann natürlich auch ganz anderer Ansicht sein:}}

Betrachten wir z. B. die Menge 1, 2, 3, ..., ν,... so ist:

$$1 + 2 + 3 + ... + \nu + ... = \omega$$

$$2 + 3 + ... + \nu + ... + 1 = \omega + 1$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2\nu + 1) + ... + 2 + 4 + 6 + ... + (2\nu) + ... = 2\omega$$

Die Definition der Summe einer Reihe aus positiven Zahlen, welche als wohlgeordnete Menge gegeben ist, wird nämlich geliefert durch die kleinste überendliche Zahl, welche grösser oder gleich ist der Summe von beliebig vielen in der gegebenen Succession genommenen und summierten Zahlen der Menge; dass ein solches Minimum immer vorhanden ist, sieht man leicht. [Cantor an Mittag-Leffler, 10. 2. 1883]

Sie wundern sich darüber, dass nach meiner Definition der Summe einer unendlichen, aus positiven Gliedern bestehenden, in bestimmter Succession gegebenen Reihe unter Anderm sowohl:

$$1 + 1/2 + 1/3 + ... = \omega$$

wie auch:

$$1 + 2 + 3 + ... = \omega$$

folgt. [Cantor an Mittag-Leffler, 3. 3. 1883]

{{Manch einer wundert sich heftig-deftig:}} Jemand, der unbekümmert von der "Summe aller natürlichen Zahlen" schwadroniert, muss wahrlich eine Meise haben! [Franz Fritsche (2011)]
http://meinews.niuz.biz/bemerkung-t687779p4.html

844 Das Kalenderblatt 110926

From 1969 until 1973 I worked to delineate mathematical methods devoid of any unprovable aspects.

I began by observing that some logicians disagree with most mathematicians on one important point: The logicians insist that false assumptions must lead to both the proof and disproof of every meaningful statement within the logical system in question. The math people believe that they can make up sets of axioms that make sense to them (true in the world or not) and that the resultant math will be free of logical flaws.

Here are some of the conclusions I came to during this time:

1. Calculus does not need any concept of infinity in order to provide limits, derivatives, integrals, and differentials.

2. No infinity is possible unless axioms assert it. That is, no infinity can be derived without being presupposed.

3. No even roots of -1 are needed except one (i = the square root).

4. All of the above facts are known to many mathematicians.

5. Real numbers that are not rational numbers can be expressed as limits of functions of rational numbers. This means that quantities like π and e need not be regarded as numbers and they may be formally handled just as computer programs handle them. It also means that the concept of a process replaces the real numbers that are not rational. The complex numbers (a + bi) become processes where a and b numbers or processes.

6. Mathematics needs to be synthetic (founded upon definitions which, in turn, are founded upon undefined but perceived meanings in the common language). Axioms are unnecessary and harmful. No axiomatic system works anyway if we don't agree on the meaning of such fundamental terms as single, pair, the, associated with, and the like. Good systems would rely on a minimum of such terms and would explicitly recognize them. Formal math comes from our perceptions of reality, not the other way around.

7. The phenomenon of the conditional branch (if incorporated into math proper), represents a giant advance in the power of math to solve problems.

That is the short story. We get every kind of functionality in the whole world without any logical flaws and without esoteric and spooky contradictions (many mathematicians are in awe of them, but they can all be easily fixed).

[Jim Trek (1999)]
http://members.chello.nl/~n.benschop/finite.htm

845 Das Kalender 110927

Der Wohlordnungssatz hat also das Kontinuumproblem seiner Lösung bis jetzt nicht näher gebracht. Da aber bereits die Vermutung aufgetaucht ist, daß eine Wohlordnung des Kontinuums unmöglich sei {{sie wurde inzwischen bestätigt, s. KB110628}}, ist doch der Wohlordnungssatz insofern von Bedeutung geworden, als er dieser Vermutung so ziemlich jeden Boden entzogen hat. Denn der Nachweis, daß es nicht möglich sein sollte, in jeder Teilmenge des Kontinuums ein Element auszuwählen, wird von vornherein auf schärfere Opposition stoßen, als der Nachweis der Unmöglichkeit seiner Wohlordnung. Eine Teilmenge, aus der sich ein Element nicht auswählen ließe, kann gewiß niemals angegeben werden, weder im Kontinuum noch in sonst einer Menge. {{Das liegt daran, dass die Teilmengen und Elemente des Kontinuums, die das Kontinuum ausmachen, gar nicht existieren. So können sie auch nicht angegeben werden.}}

Wenn das Auswahlpostulat zugegeben wird, d. h. wenn es möglich sein soll, in jeder Teilmenge einer Menge *M* ein Element auszuzeichnen, so läßt sich der Wohlordnungssatz dahin aussprechen, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. {{Dieser Ausspruch ist allerdings falsch. Es "kann" nicht erfolgen. Es kann nur "bewiesen" werden - aber seit Einführung von mengentheoretischen "Beweisen", sind Beweise nicht mehr viel wert. Die Mathematik ist in ihrer wesentlichen Bedeutung betrogen, also entwertet worden.}} Die Konsequenzen dieses Satzes sind dann außerordentlich weittragende: jede Mächtigkeit ist ein Alef, es sind daher alle Mächtigkeiten komparabel, und das Trichotomieproblem der Mächtigkeiten ist gelöst. Zugleich erhalten wir einen neuen Nachweis, daß jede nicht endliche Menge eine abzählbare Teilmenge enthält. {{Und dies alles ist zu einem völlig nutzlosen Formalismus verkommen, der nicht einmal für die Grundlagen kaufmännischen Rechnens taugt.}}

[Gerhard Hessenberg: "Grundbegriffe der Mengenlehre", Sonderdruck aus den "Abhandlungen der Fries'schen Schule", I. Band, 4. Heft, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1906) § 137]

846 Das Kalenderblatt 110928

Ferner wird man wohl unvermeidlich den Standpunkt einnehmen müssen, daß jeder überhaupt eindeutig festlegbare (und somit von allen anderen Begriffen unterscheidbare) Begriff "endlich festlegbar“ ist; zu anderen als endlichen Kennzeichnungen ist der Mensch ja wohl nicht fähig. Demnach hätte man, wenn man sich diese nicht sehr zwingende Argumentation zu eigen machen will, die Gesamtheit aller Begriffe überhaupt (um so mehr die Menge aller Dezimalbrüche oder aller reellen Funktionen) als nur abzählbar unendlich zu betrachten - in völligem Gegensatz zum Diagonalverfahren Cantors [...] Zu den epistemologischen Antinomien, denen wir später weniger Beachtung schenken als den logischen, sei vorweg bemerkt: Ein wesentlicher und bei ihrer Aufstellung nicht genügend beachteter Umstand liegt jedenfalls darin, daß der Begriff "endlich definierbar“ oder "mit höchstens *n* Zeichen definierbar“ nicht absolut, sondern wesentlich abhängig ist von den dabei erlaubten Bezeichnungsweisen und daß die Unterscheidung erlaubter und unerlaubter Bezeichnungsweisen (wie überhaupt jede Klassifikation) bei unendlichen Gesamtheiten viel wesentlicheren Schwierigkeiten begegnet als bei endlichen. [Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre" 3. Aufl., Springer, Berlin (1928) p. 215]

"Nicht genügend beachtet" ist kein Argument, das den Widerspruch zwischen dem scheinbaren Ergebnis von Cantors Diagonalverfahren und der abzählbaren Liste aller endlichen Bezeichnungen

0
1
00
01
10
11
000
...

aufhebt oder mildert.

Der Fehler des Cantorschen Diagonalverfahrens liegt vielmehr darin, dass unendliche Ziffernfolgen benötigt werden, um die Diagonalzahl einer unendlichen Liste zu bilden. Unendliche Ziffernfolgen besitzen aber keinen mathematischen Sinn, denn sie können nicht zum Informationsaustausch verwendet werden. Lediglich endliche Definitionen wie "0,111...", oder "π" oder "3,1415..." sind dafür geeignet, doch diese erlauben keine Bildung einer Diagonalzahl in einer unendlichen Liste. Bereits die endliche Liste

π
e

besitzt keine Diagonalzahl.

847 Das Kalenderblatt 110929

Da aber bereits die Vermutung aufgetaucht ist, daß eine Wohlordnung des Kontinuums unmöglich sei, ist doch der Wohlordnungssatz insofern von Bedeutung geworden, als er dieser Vermutung so ziemlich jeden Boden entzogen hat. Denn der Nachweis, daß es nicht möglich sein sollte, in jeder Teilmenge des Kontinuums ein Element auszuwählen, wird von vornherein auf schärfere Opposition stoßen, als der Nachweis der Unmöglichkeit seiner Wohlordnung. [Gerhard Hessenberg: "Grundbegriffe der Mengenlehre", Sonderdruck aus den "Abhandlungen der Fries'schen Schule", I. Band, 4. Heft, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1906) § 137]

Aus der fast alle "reellen Zahlen" enthaltenden Teilmenge aller nicht endlich definierbaren (nicht berechenbaren), also nicht identifizierbaren und damit auch nicht auswählbaren reellen Zahlen, kann kein Element ausgewählt werden.

848 Das Kalenderblatt 110930

Vielleicht ist die Bemerkung nicht ganz überflüssig, daß die Frage der endlichen Darstellbarkeit nur sinnvoll ist für eine Gesamtheit von Dingen, zu deren Bezeichnung ein und dasselbe Zeichensystem verwendet werden soll. Für ein einzelnes Ding ist die endliche Darstellbarkeit völlig trivial, man kann z. B. ein willkürliches Zeichen wählen. [Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre" 3. Aufl., Springer, Berlin (1928) p. 215]

Doch - diese Bemerkung ist ganz überflüssig, denn sie ist falsch. Sie setzt voraus, dass das Ding, dem das Zeichen verordnet werden soll, auswählbar, bekannt, also in endlicher Zeit definierbar ist. Dann wird dafür aber ein neues Zeichen wie "§$%" nicht mehr benötigt - allenfalls als Abkürzung. Das Problem der Überabzählbarkeit betrifft Zahlen, die keine endliche Definition besitzen, die also nicht innerhalb einer endlichen Ableitung in der Mathematik als Individuen vorkommen können (die für die Mathematik außerhalb des Transfiniten also völlig bedeutungslos sind), sondern nur nach Kenntnisnahme einer regellosen unendlichen (also unkennbaren) Zeichenfolge identifiziert werden könnten - wenn sie könnten.

Die häufig vernehmbare Befürchtung, dass die Mathematik ohne die transfinite Mengenlehre zusammenbrechen würde, ist völlig unbegründet. Jede Zahl, die in einer mathematischen Berechnung auftreten kann, ist durch diese Berechnung definiert - jedes Supremum, jedes Infinimum, jeder Dedekindsche Schnitt. Bei Abwesenheit von undefinierbaren Zahlen würde sich kein Jota an der richtigen Mathematik ändern, denn jede Zahl die irgendwann in einer Rechnung vorkommen kann, ist durch diese Rechnung endlich definiert. Nicht einmal Cantors Beweis würde versagen, denn alle Diagonalzahlen von Cantor-Listen sind durch diese Listen definiert und gehören damit zur abzählbaren Menge der definierbaren Zahlen.

849 Das Kalenderblatt 111001

Finitism is usually regarded as the most conservative standpoint for the foundations of mathematics. Induction is justified by appeal to the finitary credo: for every number *x* there exists a numeral *d* such that *x* is *d*. It is necessary to make this precise. We cannot express it as a formula of arithmetic because "there exists" in "there exists a numeral *d*" is a metamathematical existence assertion, not an arithmetical formula beginning with $\exists$.
The finitary credo can be formulated precisely using the concept of the standard model of arithmetic: for every element ξ of $\mathbb{N}$ there exists a numeral *d* such that it can be proved that *d* is equal to the name of ξ, but this brings us into set theory. The finitary credo has an infinitary foundation.
The use of induction goes far beyond the application to numerals. It is used to create new kinds of numbers (exponential, superexponential, and so forth) in the belief that they already exist in a completed infinity. If there were a completed infinity $\mathbb{N}$ consisting of all numbers, then the axioms of {{Peano-Arithmetik}} would be valid assertions about numbers and {{Peano-Arithmetik}} would be consistent.
[E. Nelson: "Outline, Against finitism"]
http://www.math.princeton.edu/~nelson/papers/outline.pdf

850 Das Kalenderblatt 111002

The aim of this work is to show that contemporary mathematics, including Peano arithmetic, is inconsistent, to construct firm foundations for mathematics, and to begin building on those foundations.
[Edward Nelson: "Thesis", Version 26. 9. 2011]
http://www.math.princeton.edu/~nelson/books/elem.pdf

851 Das Kalenderblatt 111003

As I get older I seem to be getting more and more relaxed about foundational issues. I'm happy to see people formalize and explore all imaginable attitudes toward the foundations of mathematics. I feel confident that the more interesting axiom systems will eventually attract more researchers, while the less interesting ones will remain marginal. I am not eager for one system to prevail over all others … nor do I feel any desire for systems I dislike to go completely extinct. It's a lot like my fondness for biodiversity. I enjoy the diversity of life, and am very happy there are tigers, and would be sad for them to go extinct, even though I wouldn't want a bunch running around in my back yard.
In particular, I'm glad there are ultrafinitists, because I suspect that only someone with views like that could be motivated to prove the inconsistency of (say) Peano arithmetic, and seek plausible strategies for doing it.
If everyone believes Peano arithmetic is consistent, and it's not, we're in big trouble because it'll take us a long time to discover it. So we need a few lonely people working on the other side of this issue. I don't think they'll succeed, but I'm glad they're trying. Even if they don't succeed, there could be some interesting concepts and theorems that only they are likely to find.

Finally, I don't expect these people to take the same 'relaxed, balanced' attitude that I have. I suspect that only someone with strong opinions could possibly be motivated to spend a lot of time developing ultrafinitism, or trying to prove the inconsistency of Peano arithmetic. Expecting them to share my relaxed attitude is a bit like expecting a tiger to be an environmentalist.
[John Baez: "The Inconsistency of Arithmetic", n-Category-Cafe, 30. 9. 2011]

852 Das Kalenderblatt 111004

Edward Nelson hat seinen Ansatz zwar aufgegeben,
[E. Nelson: FOM, inconsistency of P, 1. 10. 2011]
http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2011-October/015832.html
doch enthält er so viele interessante Aspekte und bemerkenswerte Passagen, dass die dafür vorgesehenen Kalenderblätter trotzdem erscheinen werden.

Let us distinguish between the *concrete* (i.e., the genetic in the sense of pertaining to origins, the given, what is present) on the one hand, and on the other the *formal* (i.e., the abstract, the hypothetical). All of mathematical activity is concrete, though the subject matter is formal.
A *numeral* is a variable-free term of the language whose nonlogical symbols are the constant 0 (*zero*) and the unary function symbol S (*successor*). Thus the numerals are 0, S0, SS0, SSS0, ... Numerals constitute a *potential infinity*. Given any numeral, we can construct a new numeral by prefixing it with S. Now imagine this potential infinity to be completed. Imagine the inexhaustible process of constructing numerals somehow to have been finished, and call the result *the set of all numbers*, denoted by ω or $\mathbb{N}$. Thus ω is thought to be an *actual infinity* or a *completed infinity*. This is curious terminology, since the etymology of "infinite" is "not finished".
[...]
Most uses of infinity in mainstream mathematics involve infinity as a limit of finite objects. The situation is qualitatively different when it comes to the notion of truth in arithmetic. Those who believe that Peano arithmetic *must* be consistent because it has a model with universe ω are placing their faith in a notion of truth in that model that is utterly beyond any finite computation. {{Man macht einen Fehler, um die Mathematik sauber, beweisbar und fehlerfrei aufbauen zu können. - Selbstmord aus Angst vor dem Tod.}}
Despite all the accumulated evidence to the contrary, mathematicians persist in believing in ω as a real object existing independently of any formal human construction. In a way this is not surprising. Mathematics as a deductive discipline was invented by Pythagoras, possibly with some influence from Thales. The Pythagorean religion held that all is number, that the numbers are pre-existing and independent of human thought. Plato was strongly influenced by Pythagoras and has been called the greatest of the Pythagoreans. Over two and a half millennia after Pythagoras, most mathematicians continue to hold a religious belief in ω as an object existing independently of formal human construction.
[Edward Nelson: "Elements", p. 7, 10, Version 26. 9. 2011]
http://www.math.princeton.edu/~nelson/books/elem.pdf

853 Das Kalenderblatt 111005

It is not a priori obvious that {{Peano-Arithmetik}} can express combinatorics, but this is well known thanks to Gödel's great paper on incompleteness. As a consequence, exponentiation $\uparrow$ and superexponentiation $\Uparrow$ can be defined in {{Peano-Arithmetik}} so that we have

(1) $x \uparrow 0 = S0$
(2) $x \uparrow Sy = x \cdot (x \uparrow y)$

(3) $x \Uparrow 0 = S0$
(4) $x \Uparrow Sy = x \uparrow (x \Uparrow y)$

and similarly for primitive-recursive functions in general. For the schema of primitive recursion to be coherent, it is necessary that the values of the functions always reduce to numerals, since they are defined only for 0 and iterated successors of numbers for which they have been previously defined.

Finitists believe that primitive recursions always terminate; for example, that applying (1)-(4) (together with the open axioms of {{Peano-Arithmetik}}) a sufficient number of times,

$$SS0 \Uparrow SS0 \Uparrow SS0 \Uparrow SS0 \Uparrow SS0 \Uparrow SS0 \Uparrow SS0 \Uparrow SS0 \Uparrow SS0 \Uparrow SS0 \Uparrow SS0 \Uparrow SS0 \Uparrow SS0$$

reduces to a numeral. But the putative number of times these rules must be applied can only be expressed by means of a superexponential expression - the argument is circular.

The problem is not simply that some primitive recursions are too long. The problem is structural: there is a sharp division between two classes of primitive recursions. [...] it is appropriate to call the result the BCL theorem.

While a number is being constructed by recursion, it is only potential, and when the recursion is complete, it is actual. What Bellantoni and Cook, and Leivant, do is restrict recursions so that they occur only on actual numbers. Then the theorem is that the class of functions computable in this way is precisely the class of polynomial-time functions. This is an astonishing result, since the characterization is qualitative and conceptually motivated, saying nothing whatever about polynomials. [...]

Not only is induction as a general axiom schema lacking any justification other than an appeal to $\mathbb{N}$ as a completed infinity, but its application to specific variable-free primitive-recursive terms lacks a cogent justification.

I shall exhibit a superexponential recursion and prove that it does not terminate, thus [...] demonstrating that finitism is untenable.

[E. Nelson: "Outline, Against finitism"]
http://www.math.princeton.edu/~nelson/papers/outline.pdf

854 Das Kalenderblatt 111006

{{Fields medalist Voevodsky}} stated the theorem as follows [...]: It is impossible to prove the consistency of any formal reasoning system which is at least as strong as the standard axiomatization of elementary number theory ("first order arithmetic").

So he failed to inform his audience that the impossibility that Goedel actually established was the impossibility of proof-in-S of a sentence expressing the consistency of S, for any consistent and sufficiently strong system S.

As we know, Gentzen's proofs of the consistency of PA are among the most important results in proof-theory, second only to Goedel's results themselves and perhaps Prawitz' normalization results. (For a great overview of Gentzen's proofs, see von Plato's SEP entry.) What I find most astonishing about Gentzen's proofs, based on transfinite induction, is that the theory obtained by adding quantifier free transfinite induction to primitive recursive arithmetic is not stronger than PA, and yet it can prove the consistency of PA (it is not weaker either, obviously; they just prove different things altogether). One may raise eyebrows concerning transfinite induction (and apparently this is what lies behind Voevodsky's dismissal of Gentzen's results), but apparently most mathematicians and logicians seem quite convinced of the cogency of the proof. {{Die meisten Astrologen sind überzeugt von der Konsistenz der Astrologie.}} [...]

So Voevodsky seems to seriously entertain the possibility of PA's inconsistency. Is it because he doesn't understand Goedel's results, or Gentzen's results, or both? Or is there something else going on? [...]
Now, within the bigger picture of things, the consistency of PA is actually a tangential, secondary issue. Voevodsky’s seemingly polemic statement concerning the potential inconsistency of PA in fact seems to amount to the following: all the currently available proofs of the consistency of PA in fact rely on the very claim they prove, namely the consistency of PA, on the meta-level. [...] So *if* PA was inconsistent, these proofs would still go through; in other words, there is a sense in which such proofs are circular in that they presuppose the very fact that they seek to prove. {{Und niemand hat's bisher bemerkt?}}
[Catarina Dutilh Novaes (2011)]
http://m-phi.blogspot.com/2011/05/voevodsky-consistency-of-pa-is-open.html
http://m-phi.blogspot.com/2011/06/latest-news-on-inconsistency-of-pa.html

{{Wenn also PA nicht konsistent ist, dann sind es die Konsistenzbeweise für PA auch nicht. Doch betrifft das alles glücklicherweise nicht die Mathematik:}}

Brandon Watson wrote: ”I have difficulty imagining that if PA were proven inconsistent that mathematicians would just throw out (when not specifically studying inconsistent systems) everything that depends on PA and say, 'Oh, well, it was all good while the dream lasted.'”
Not in the least.
Axioms were designed to put mathematics on a proper foundation, but if there appear contradictions, then they only show that these axioms or the rules of inference are erroneous. Mathematics does not depend on axioms. Mathematics has been adapted from reality - and reality is consistent. 1 + 1 = 2 can be proven with an abacus. For that purpose no axioms and no 40-page logic proof are required.
Whether logicians prove PA consistent or inconsistent, may be their personal enjoyment. It does not concern mathematics. The essential parts of mathematics are proven by comparison with reality and in particular by computers.
[WM, Re: The Inconsistency of Arithmetic, October 2, 2011]
http://golem.ph.utexas.edu/category/2011/09/the_inconsistency_of_arithmeti.html#c039531

855 Das Kalenderblatt 111007

As a concrete concept, the notion of numeral is clear. The attempt to formalize the concept usually proceeds as follows:
(1) zero is a number
(2) the successor of a number is a number
(3) zero is not the successor of any number
(4) different numbers have different successors
(5) something is a number only if it is so by virtue of (1) and (2)
We shall refer to this as the usual dfinition. Sometimes (3) and (4) are not stated explicitly, but it is the extremal clause (5) that is unclear. What is the meaning of "by virtue of"? It is obviously circular to define a number as something constructible by applying (1) and (2) any number of times. We cannot characterize numbers from below, so we attempt to characterize them from above.
[Edward Nelson: "Elements", p. 7, 10, Version 26. 9. 2011]
http://www.math.princeton.edu/~nelson/books/elem.pdf

The Peano Axioms are believed to define the natural numbers. They don’t. If you take them literally, you will find that every sequence starting with 1 (respectively 0) and without repeating terms will comply with the axioms. That does not only hold for 1, 1/2, 1/4, … (where the successor always is found in a very natural way, namely by halving the cake) or for 1, $1/2^2$, $1/3^2$, … where we even can compute the sum $\pi^2/6$ of all natural numbers. Also all rational numbers (in Cantor's sequence) or all algebraic numbers (in Dedekind's sequence) comply with the Peano axioms. Has anybody felt problems by that imprecision?

In my books and in my math-lessons I use the axioms (although I never met a student who really needed them to understand ℕ)

(1) 1 is in M

(2) If n is in M, then n+1 is in M

(3) Every set M that complies with (1) and (2), contains ℕ

(of course ℕ must also comply with (1) and (2))

Some mathematicians oppose that +1 is undefined as long as the real numbers have not been introduced. But is +1 "defined" by the usual axioms that fix commutativity and associativity of addition? Not in the least!

+1 must be known and in fact is known by every human. Without knowing it, you cannot "define" the natural sequence. And knowing it, you need no axioms at all, in particular you need not the notion of a successor.

[WM, Re: The Inconsistency of Arithmetic, October 2, 2011]

http://golem.ph.utexas.edu/category/2011/09/the_inconsistency_of_arithmeti.html#c039531

856 Das Kalenderblatt 111008

Applied Math is an indispensable part of various engineering disciplines because its application and usefulness in predictive models has been validated against real-world conditions again and again and again.

If, for argument's sake, PA was proven inconsistent, then math merely becomes a defacto natural science like biology or chemistry, in the sense that the "validity" of math no longer stems from axioms, but rather validation against real world conditions and observations.

[Paul AC Chang, Re: The Inconsistency of Arithmetic, October 2, 2011]

http://golem.ph.utexas.edu/category/2011/09/the_inconsistency_of_arithmeti.html#c039531

857 Das Kalenderblatt 111009

Robinson's theory {{hier ist nicht von Abraham, sondern von Raphael M. Robinson die Rede: Robinson worked in number theory, even employing very early computers to obtain results. For example, he coded the Lucas-Lehmer primality test to determine whether $2^n - 1$ was prime for all prime $n < 2304$ on a SWAC. In 1952, he showed that these Mersenne numbers were all composite except for 17 values of n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281. He discovered the last 5 of these Mersenne primes, the largest ones known at the time.

http://en.wikipedia.org/wiki/Raphael_M._Robinson

}}

["An essentially undecidable system", Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1, Cambridge, Massachusetts, (1950) 729-730.] is the theory whose nonlogical axioms are those of PA {{Peano-Arithmetik}} without the induction axiom schema but with Robinson's axiom

$$x \neq 0 \Rightarrow \exists y[x = Sy]$$

It may be reformulated as an open theory Q_0 (Robinson arithmetic) by introducing a unary function symbol P (predecessor) and replacing Robinson's axiom by

$P0 = 0$
$x \neq 0 \Rightarrow x = SPx$

The theory Q_0 is quite weak, but by relativization schemata of Solovay it can be greatly strengthened by relativization. We construct a theory schema Q^*_0 that is locally relativizable in Q_0 and is such that we can use induction on bounded formulas, where "bounded" means that there is a polynomial bound on the length. It is striking that exponentiation lies just the other side of the BCL division of recursive functions into two classes, and just the other side of the class of functions that can be proved total by relativization.
Remarkably, Q_0 proves the quasitautological consistency of its arithmetization.

[E. Nelson: "Outline, Relativization"]
http://www.math.princeton.edu/~nelson/papers/outline.pdf

858 Das Kalenderblatt 111010

PA {{Peano-Arithmetik}} already tells us that the universe is infinite, but PA “stops” after we have all the natural numbers. {{Nein, Peano Arithmetik stoppt niemals, denn sie gelangt niemals zum Ende. Wie das "after" zeigt, wird hier potentielle mit aktualer Unendlichkeit verwechselt.}} ZFC goes beyond the natural numbers; in ZFC we can distinguish different infinite cardinalities such as “countable” and “uncountable”, and we can show that there are infinitely many cardinalities, uncountably many, etc.
[Saharon Shelah: "Logical Dreams" (2002)]
http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0211/0211398v1.pdf

Den Unterschied zwischen potentiell und aktual unendlich kann man sogar fotografieren:

Infinity, to find use in set theory, must split off. The following pictures of a movie of an everexpanding square show this for the first time:

o

oo
oo

ooo
ooo
ooo

oooo
oooo
oooo
oooo
...

For each finite square we find height = width.
For the infinite square however there is: height > width

namely an infinite sequence of finite lines (scale changed):

.
.
.
.
.
.
.

There seem to be some gravity effects involved in transfinite set theory.

WM: "Gravity effects detected in transfinite set theory.", sci.logic, sci.math, 8 Oct 2011]
http://groups.google.com/group/sci.math/msg/d48b3d3e7581802d?dmode=source

Warum muss das so sein? Weil anders die (aktual) unendliche Menge der natürlichen (und natürlich endlichen) Zahlen nicht zusammenkommt.

859 Das Kalenderblatt 111011

1. In [3] I sketched and in [4] developed to a considerable extent the Anti-traditional program of Foundations of Mathematics aimed at the banishing of beliefs from Foundations. Among the "traditional" assumptions which have been criticized and rejected as such in the new program are the assumptions of the uniqueness of "the" (intuitive) natural number series (Nn), the soundness of "mathematical induction", the objective nature (or clarity) of the notions of identity and distinction, and, finally, the assumption of the sufficiency of a language free from a formalized use of modalities, tenses, and other grammatical categories. The basic logical notions of deductions and proofs have been detached from traditional “formalization” [*] and considerably revised; "deductions" and "proofs" in the traditional sense are referred to as "deductoids" and "demonstroids" (or as "formal" deductions and proofs). Various "prototheories" (dealing with modalities, tenses, voices, rules of identifications and discernings, semiotical principles of using signs, notions of "relevancy", as well as of mentionings and uses) have been developed for the purposes of this program, and a "reasoning theory" - corresponding to the traditional "proof theory" - has been set up. An "ontological theory" [3-5] has been developed, essentially as a branch of the modality theory, in order to recreate without circularities large natural numbers fitting the usual demands of a theory of algorithms.

The plurality of natural number series (Nn's) has been substantiated (independently of traditional "non-standard analysis" and in a more general way). A model for an "arbitrarily long" (in the new sense) fragment of a formal system ZF_k^i has been established and found sufficient for a consistency proof (in the revised sense) of that system. The system ZF_k^i is equiconsistent (in the usual sense) with the Zermelo-Fraenkel axiom system with k inaccessibles (ZF_k). (The number k was restricted in [4] to be "finite" in the sense of the ontological theory but now this restriction can be dropped or considerably relaxed). Again in the sense of the ontological theory, "finiteness" is imposed on the formal proofs in ZF_k - so that this consistency proof is not expected to conflict with the second Gödel Theorem because the "finiteness" in the new sense is not expressed by a traditional formula. The use of the well-known Tarski argument by means of which the consistency of ZF_k is provable in ZF_{k+1} suffices for a relaxation of that restriction on lengths of formal proofs; the formal proofs may have any lengths available in the traditional meta-theories provided that their "existence" has a formal proof of length "finite" in the sense of the ontological theory. From now on, I shall adopt this meta-theoretical notion of "finiteness" without any further mentioning of the qualifying clause "in the sense of the ontological theory".

2. The proofs (in this program) are essentially of a definitional nature. That is to say, a system of definitions for all relevant notions has been developed and the uses of identifications and discernings, of acceptances of sentences, rules and aimes, and the use of modalities including those connected with aims are all imbedded in that development. Thus "proofs" in this program must be tautological (in a sense much more straightforward than the conventional use of the word "tautology" for propositional axioms).

[*] I use this word without quotation marks only to denote a “codification” of an activity - say, of that of correct reasonings - by setting out a system of rules (permissions and obligations, including prohibitions).

[3] Yessenin-Volpin, A. S. The Ultra-intuitionistic Criticism and the Antitraditional Program for the Foundation of Mathematics, Intuitionism and Proof Theory, North Holland (1970) pp. 3-45.
[4] Yessenin-Volpin, A. S. On the Ultraintuitionistic Justification of the Zermelo-Fraenkel System, I (in Russian), deposited with VINITI in 1969 and available from them in Xerox form (450 pp.)
[5] Yessenin-Volpin, A. S. On the Main Problem in the Foundations of Mathematics, to appear in the Boston University Colloquium for the Philosophy of Science.

[A. S. Yessenin-Volpin: "About infinity, finiteness and finitization (in connection with the foundations of mathematics)", Lecture Notes in Mathematics, 873 (1981) pp. 274-313]
http://www.springerlink.com/content/76q2110gx555h660/

Vermutlich interessante, aber sicher nur mühsam verstehbare Literatur. Ob der Erfolg den Aufwand rechtfertigt, entzieht sich meiner Kenntnis. Ein wesentlich einfacherer Zugang zu den Grundlagen der Mathematik besteht in der folgenden Tatsache: Jede Form des Informationstransfers (und was sind Ziffernfolgen anderes?) bedarf eines end-of-file-Signals. Unendliche Ziffernfolgen sind demnach für mathematische und andere Zwecke ungeeignet. Aber bei den anderen weiß das sowieso jeder.

860 Das Kalenderblatt 111012

This paper gives a counterexample to the impossibility, by Gödel's second incompleteness theorem, of proving a formula expressing the consistency of arithmetic in a fragment of arithmetic on the assumption that the latter is consistent. This counterexample gives rise to a new type of metamathematical paradox, to be called the Gödel-Wette paradox, which E. Wette claims to have established since some time ago (see [Wette, 1971], [Wette, 1974]). Nevertheless, our work is independent of Wette's since we have failed to understand the details of his work {{das ist auch schon Bernays so ergangen, s. KB090804}} although we recognize the possibility of the correctness of the latter. Furthermore, the Gödel-Wette paradox is not the only foundational anomaly which the framework of our approach has uncovered but new questions concerning the decision problem, completeness problem, truth definitions and the status of Richard's paradox in arithmetic and set theory (including type theory) have arisen as well. This work will, eventually be unified into a single monograph.

[Wette, 1971]: Wette, Eduard W., On new paradoxes in formalized mathematics, Journal of Symbolic Logic, vol. 36, pp. 376-377.
[Wette, 1974]: Wette, Eduard W., Contradiction within Pure Number Theory because of a System Internal ’Consistency’-Deduction, International Logic Review, N. 9, 1974, pp. 51-62.

[A.S. Yessenin-Volpin, C. Hennix: "Beware of the Gödel-Wette paradox", arXiv (2001)] http://arxiv.org/abs/math/0110094

861 Das Kalenderblatt 111013   Das Weltbild Georg Cantors (31): Pantheismus und Materialismus

Die freundlichen Worte zur Anerkennung, welche Ew. Eminenz in Bezug auf meine Stellung zum Katholicismus gesprochen haben, verdanke ich nur wenig eigenem Verdienst, da die Verhältnisse, in denen ich geboren bin, meinen Standpunct mitbestimmt haben; mein hochverehrter seliger Vater war zwar lutherisch, meine Mutter jedoch, die ich unter den Lebenden zu verehren das Glück habe, gehört der römisch Kathol. Kirche an und von ihrer Familie, soweit ich dies zurück verfolgen kann, gilt das gleiche. Die Ansichten aber, welche ich mir selbst im Laufe der Jahre gebildet, haben mich niemals von den Grundwahrheiten des Christenthums entfernt, sondern eher darin noch befestigt; ich harmonire mit den modernen Philosophieschulen nur sehr wenig, stehe vielmehr im Kampf mit den meisten von ihnen; kein System ist weiter von meinen Hauptüberzeugungen entfernt, als der Pantheismus, wenn ich vom Materialismus absehe, mit dem ich durchaus keine Gemeinschaft habe.

Vom Pantheismus glaube ich jedoch, dass er, und vielleicht nur durch meine Auffassung der Dinge, mit der Zeit ganz überwunden werden könnte. Hierbei sei mir gestattet zur Bekräftigung dieser Ansicht an einen der geistvollsten Pantheisten, den deutschen Dichter Joh. Wolfgang Göthe zu erinnern, der kurz vor seinem Ende, an seinem letzten, zwei und achtzigsten Geburtstage, 28 Aug. 1831 folgende Worte schrieb:

> Lange hab' ich mich gesträubt,
> Endlich geb' ich nach:
> Wenn der alte Mensch zerstäubt,
> wird der neue wach.
> Und so lang' du das nicht hast,
> Dieses: stirb und werde!
> Bist du nur ein trüber Gast
> Auf der dunklen Erde.

Was aber den Materialismus und die damit zusammenhängenden Richtungen betrifft, so scheinen sie mir, gerade weil sie die wissenschaftlich unhaltbarsten und am leichtesten widerlegbaren sind {{sie sind mit der Matheologie nicht vereinbar}}, zu den Uebeln zu gehören, von welchen das menschliche Geschlecht in dem zeitlichen Dasein nie ganz zu befreien sein wird. {{Glashaus, Steine.}}

[Cantor an Kardinal Franzelin, 22. Jan. 1886. H. Meschkowski, W. Nilson: "Georg Cantor Briefe", Springer, Berlin (1991) p. 226]

Diese von Cantor zitierten Verse stammen aus einem Eintrag in ein Fremdenbuch der Massenmühle bei Elgersburg (unweit Ilmenau). Sie wurden (der letzten vier Verse wegen, die aus dem 1814 geschriebenen Gedicht "Selige Sehnsucht" stammen) in theologischen Werken von Usteri und Rütenick als von Goethe stammend zitiert.

Tatsächlich sind die ersten Zeilen eine Dichtung des Leipziger Psychiaters Heinroth; sie finden sich in den unter dem Pseudonym "Treumund Wellentreter" veröffentlichten Gesammelten Blättern, Bd. 1, Leipzig 1818, S. 143.

Cantor ist also hier das Opfer eines - verständlichen - Irrtums {{und weiter oben auch.}}
[H.Meschkowski: "Georg Cantor: Leben, Werk und Wirkung", 2. Aufl. BI, Mannheim (1981) p. 127]

862 Das Kalenderblatt 111014

The so called “largecardinal axioms” states that a “large cardinal κ” exists which means it resembles $\aleph_0$ in some senses in particular with properties implying that H(κ), the family of sets with hereditary closure of cardinality < κ, form a model of ZFC and more. Noticeable among them is “*k* is a measurable cardinal”, which says that there is a 0-1 measure on the family of subsets of κ, which gives singletons measure zero and is <κ-complete (that is, the union of < κ sets of measure zero is of measure zero). The first large cardinal property is “κ is a strongly inaccessible cardinal” which means that it is strong limit (i.e., $\mu < \kappa \Rightarrow 2^\mu < k$), regular (i.e., is not the sum of < κ cardinals each < κ) and uncountable (the other two properties are enjoyed by $\aleph_0$). I feel those are mathematical statements in set theory; some others will call them not mathematical, but logical or set-theoretical. {{Es ist verständlich, wenn man die Mathematik axiomatisert, um sie auf eine feste Grundlage zu stellen. Die axiomatische Beschwörung irrationaler (im Sinne von vernunftwidriger) Gespenster hat mit Mathematik ebensowenig zu tun wie mit Logik.}} They reserve “mathematical” for number theory or generally what they call “mainstream mathematics”.
[Saharon Shelah: "Logical Dreams" (2002)]
http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0211/0211398v1.pdf

Viele Religionen [...] glauben an das Konzept der Hölle als einen Ort ewiger Bestrafung für Sünden. Da jedoch ein Mensch zu Lebzeiten nur eine endliche Anzahl an Sünden begehen kann, widerspricht die unendlich lange Bestrafung ohne jede Perspektive der Vergebung dem normalen Gerechtigkeitsempfinden. [...] Ewige Folter in der Hölle ist mit der Allgüte und unendlichen Gerechtigkeit Gottes schwer in Einklang zu bringen. Einige Theologen argumentieren, dass aufgrund der unendlichen Größe Gottes ein Verstoß gegen seine Gebote auch eine unendliche Bestrafung rechtfertigt. Hier ließe sich jedoch der Einwand von Borges geltend machen, dass auch oder gerade bei einer angenommenen Unendlichkeit Gottes ein von Menschen begangener Verstoß immer nur endlich sein kann.

Höllenparadoxon und Theodizee sind beliebte Argumente in atheistischen Kreisen, um Gott als einen im Falle seiner Existenz höchst fragwürdigen Charakter darzustellen {{oder die wissenschaftliche Unzulänglichkeit der unendlichen Unzugänglichkeit zu verdeutlichen}}.
http://www.million-years-project.org/german/index.htm?islam.htm

863 Das Kalenderblatt 111015

Ultrafinitists don’t believe that really large natural numbers exist. The hard part is getting them to name the first one that doesn’t.
[John Baez: "The Inconsistency of Arithmetic", September 30, 2011]

The problem is not the size of the number but its information contents. On a pocket calculator, you can multiply 1030 by 1050, but you cannot add or multiply two numbers with more than 10 digits.

In real life, you can do the superexponentiation that Edward Nelson took as an example in his book under discussion {{s. KB111005}}, but you cannot use a sequence of more than 10100 digits that lack a finite expansion rule like 0.101010… or 1/n2.
[WM: Re: The Inconsistency of Arithmetic, September 30, 2011]

http://golem.ph.utexas.edu/category/2011/09/the_inconsistency_of_arithmeti.html#c039531

864 Das Kalenderblatt 111016

Die Bewegung des Transzendierens führt beide, Mathematik wie Theologie, zum Begriff des Unendlichen – wobei wiederum ein mathematisches und ein theologisches Unendliches unterschieden werden müssen. Didaktisch gehen wir aus von den intuitiven Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler. Mit dem Unendlichen verbinden sie vielleicht eine Gerade, ohne Anfang und Ende oder das "Immer weiter zählen können“. Dies sind Vorstellungen potentieller Unendlichkeit. Diese ist selbst noch nicht sonderlich problematisch (und sie ist für eine Tradition von Aristoteles bis Poincaré und Gauß die einzige Unendlichkeit). Oder sie denken an die natürlichen Zahlen als einen Sack, der aktuell vorliegt, oder an Unfassbarkeit, unausdenkliche Fülle, Ewigkeit, die etwas anderes ist als nicht endende Zeit. Dann sind sie bei der aktualen Unendlichkeit (und damit bei Augustinus und Duns Scotus oder Bolzano und Cantor) - aber auch bei den großen denkerischen Problemen. [...]

Wir wollen im Folgenden als Beispiel für die Bezüge zwischen theologischem und mathematischem Unendlichen kurz skizzieren, wie das mathematische Unendliche bei Cantor zum theologischen wird und wie wir aus dem oben skizzierten Anselmischen Gottesbegriff eine Definition des Unendlichen gewinnen können. [...] "Es gibt für die Mathematik immer mehr als es gibt.“ Nun müssen wir hinzufügen: Es gibt für die Mathematik unendlich mehr als unendlich. Die unendlichen Mengen führen zu Paradoxa. [...] Und so sind für Cantor die absolut unendlichen Mengen Symbole für Gott, im platonischen Sinn Abbilder göttlichen Seins. [...]

Gott ist ohne Anfang. [...] Doch das alles ist nicht identisch mit "unendlich“. Gott wird mit diesen Aussagen als Herr der Geschichte bezeichnet; hier ist die Rede von seiner Macht, Treue und Beständigkeit, von einer dichten, intensiven Zeitlichkeit, nicht von unendlichem Sein. Das mahnt uns: Vergiss, wenn du vom Unendlichen redest, wenn du mathematische Symbolik in der Gottrede verwendest, nicht, dass dein Gott ein lebendiges Gegenüber ist. Der Begriff des Unendlichen kommt also nicht aus Jerusalem zu den Christen, sondern aus Athen. Und er ist hier auch nicht von Anfang an mit dem Göttlichen verbunden. Für Aristoteles ist bspw. das Unendliche chaotisch, ungeformt und darum unerkennbar. Unendlich in dieser Weise ist die Materie. Erst durch Plotin entwickelt sich die Vorstellung des göttlichen Einen als Unendlichkeit. Das Unendliche wird hier nun nicht mehr mit Chaos und prinzipieller Unerkennbarkeit verbunden, sondern mit relativer (für uns Menschen) Unerkennbarkeit. Gregor von Nyssa wendet den Unendlichkeitsbegriff dann innerchristlich um zu einem positiven Ausdruck für die Vollkommenheit Gottes: Dieser sei unendlich, da undurchschreitbar, immer unendlich viel größer als das bereits Geschaute. Die Entwicklung des Unendlichkeitsbegriffs in der Theologie war spätestens seit der Scholastik verschränkt mit mathematischlogischen Überlegungen {{und diese Verschränkung ist leider im Lauf der Zeit immer enger geworden}}.

[K. Bederna, L. Martignon: "Es war einmal ein enges Paar … : Matheologie?", Zeitschrift für Religionspädagogik 7 (2008), 48-71]
http://www.theo-web.de/zeitschrift/ausgabe-2008-01/6.pdf

865 Das Kalenderblatt 111017

EX-3493. Ein Kugelraumer der Explorerflotte, 500m Durchmesser. 500 Mann Besatzung. Anfang November 2436 erhält das Schiff die Aufgabe, die Zentrumsregionen der Kleinen Magellanschen Wolke zu untersuchen. Das Misstrauen des Kommandanten verhindert, dass das Schiff Opfer einer Planetenfalle der Randzone wird.

Besatzung:
Oberst Synd Keshet, Kommandant, ein ausgezeichneter Matheologe

Captain Turlock McNab, 2. Ingenieur, rote Haare, groß, hager, vernarbtes Gesicht
Sergeant Waymire Mashyane, schwarze Haare, untersetzt, kantiges breites Gesicht

Durch einen Zufall stößt die Besatzung auf ein Schiff der Baramos. Man vereinbart einen Treffpunkt im Visalia-System. Dort wird die EX-3493 im November 2436 von 5 Konusraumschiffen erwartet und zerstört. Nur die beiden Terraner Captain Turlock McNab und Sergeant Waymire Mashyane können das Schiff mit einem Rettungsboot verlassen.

Während das Wrack der EX-3493 in die Sonne stürzt {{wäre der Matheologe noch am Leben gewesen, so wäre das nicht passiert}}, landen die beiden auf Ukiah. Nach ein paar Kunststücken werden sie von den Tomacs zu Oberbefehlshabern über ihre Streitkräfte ernannt. {{Hätten sie ihren Matheologen noch dabei gehabt, so wären sie zu Königen proklamiert worden.}}

http://www.crest-datei.de/index.php?Thema=pr&Rubrik=technik&Datei=ex_3493

Ein Matheloge kann nämlich die Schwerkraft selbst im rein geistigen Bereich nutzbar machen. Um das zu verstehen, konstruieren wir ein unendliches gleichseitiges Dreieck, durch unendliches Hinzufügen von Seiten, wie unten durch die ersten Seiten *a*, *bb*, *ccc*, *dddd*, *eeeee* demonstriert:

a

a
bb

c
ac
bbc

d
dc
dac
dbbc

d
dc
dac
dbbc
eeeee

...

(Alle Dreicke der Folge besitzen $2\pi/3$-Symmetrie; sie sind nur aus typografischen Gründen hier rechtwinklig dargestellt.) Wenn ω als Limesordinalzahl existiert, so bedeutet das, dass die hier konstruierte Folge von Dreicken das unendliche Grenzdreieck mit den Seitenlängen $\aleph_0$ als Grenzwert besitzt, denn jeder Grenzwert

$\mathrm{LIM}_{n \to \infty} |\{1, 4, 7, ..., 3n+1\}|$
$\mathrm{LIM}_{n \to \infty} |\{2, 5, 8, ..., 3n+2\}|$
$\mathrm{LIM}_{n \to \infty} |\{3, 6, 9, ..., 3n+3\}|$

der mittels $n \equiv k$ (mod 3) konstruierten Beträge ist $\aleph_0$.

Doch weit gefehlt! Die linke und die rechte Seite des Grenzdreiecks enthalten zwar $\aleph_0$ Zeichen, die Basis jedoch nicht. Hier ist der Grenzwert nur als nicht erreichbares Supremum zu werten. Die Schwerkraft macht sich bemerkbar!

Denn wären alle Seiten gleich, also alle Maxima oder alle nur Suprema, so würde ein einfacher Gedankengang das Versagen des Cantorschen Diagonalargumentes in einem speziellen Fall (und damit natürlich überall) zeigen: Die bei Ersetzen von 0 durch 1 erwartete Antidiagonale

> 1/9 = 0,111... mit $\aleph_0$ Ziffern

der Cantorschen Liste

> 0.0
> 0.1
> 0.11
> 0.111
> ...

wäre in der Liste selbst enthalten oder würde eben gar nicht nicht entstehen. Der Versuch, eine nicht in der Liste enthaltene Zahl zu konstruieren, würde jedenfalls scheitern.

Die transfinite Mengenlehre basiert daher auf der Gültigkeit der Sätze:

Satz 1. Die Folge 1, 2, 3, ... besitzt das Maximum ω.
Satz 2. Die Folge 1, 2, 3, ... besitzt das Supremum ω, das aber kein Maximum ist.

Nur ein ausgezeichneter Matheologe kann die dafür erforderliche Glaubensstärke aufbringen und jede Widerspruchsvermutung erfolgreich verdrängen. Ob so jemand im Jahre 2436 noch existiert? War Synd Keshet der letzte seines Faches? Fragen, deren Antworten wir nie erfahren werden.

866 Das Kalenderblatt 111018

Der Spiegel: Vielleicht haben ja Mathematik und Theologie doch einiges gemein. Beide berufen sich auf absolute Wahrheiten. Ist das Zufall?
Beutelspacher: Man könnte sogar sagen, dass die Wahrheiten der Mathematik noch absoluter sind. Was in ihr einmal als richtig bewiesen wurde, ist unter den gleichen Voraussetzungen immer richtig. Die Religionen sehen ihre heiligen Bücher zwar auch als absolute Wahrheit an, trotzdem gibt es dort einen gewissen Wandel. In der Mathematik dagegen verändert sich, was wir einmal wissen, nie mehr.
[Albrecht Beutelspacher, Interview, Der Spiegel 50 (2004) p. 192]
http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-38201420.html

Tatsächlich? Beim Versagen dieser Wahrheit könnten wir entschuldigend sagen: Was sich doch noch ändert, das haben wir eben nicht richtig gewusst. Aber woher wissen wir, was wir heute richtig wissen? Brouwer behauptete: "De tweede getalklasse van Cantor bestaat niet", frei übersetzt etwa: "Cantors zweite Zahlenklasse gibt es nicht." Diese Aussage besteht seit über

100 Jahren unverändert und wird von vielen Mathematikern als richtig anerkannt, obwohl noch viel mehr Mathematiker sie als falsch klassifizieren.
http://www.archive.org/details/overdegrondslag00brougoog

Gegenwärtig ist unter den Mengentheoretikern die irrige Meinung verbreitet, der Cantorsche Äquivalenzsatz [...] sei 1898 ziemlich gleichzeitig von F. Bernstein [...] und E. Schröder [...] bewiesen worden. Der Schrödersche Beweis enthält jedoch einen Schlußfehler. {{Eine Darstellung desselben findet sich in KB100426}}. Eine etwas andere Form des oben gegebenen Beweises sandte ich am 30. Mai 1902 an die Redaktion dieser "Annalen". {{Er wurde offenbar nicht veröffentlicht und der Fehler Schröders nicht anerkannt.}}
[A. Korselt: "Über einen Beweis des Äquivalenzsatzes", Math. Ann. 70 (1911) 294]

E. Zermelo schrieb sogar noch 1932: "... wurde erst im Jahre 1896 von E. Schroeder und 1897 von F. Bernstein bewiesen und seitdem gilt dieser 'Aequivalenzsatz' als einer der wichtigsten Saetze der gesamten Mengenlehre."
[E. Zermelo: "Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts", Springer (1932) p. 209]

Seitdem? Ein falscher Satz oder Beweis kann also 15 Jahre lang unerkannt vom großen Publikum sein Dasein fristen. Auch 150 Jahre? Sicher ist so etwas selten. Doch selten war etwas so sicher.

867 Das Kalenderblatt 111019

Reine Mathematik ist Religion.
[Novalis, Fragmente]

Novalis, Friedrich Freiherr von Hardenberg
http://www.textlog.de/novalis.html
starb schon 1801. Ein Prophet?

868 Das Kalenderblatt 111020 Das Weltbild Georg Cantors (32): Seine Heiligkeit

Ich bin nicht Katholik, beurtheile aber die heillose Zerfahrenheit innerhalb des Protestantismus ganz ähnlich wie Adeodatus und stehe als positiver Christ innerlich und, wenn nöthig, auch nach Außen hin freundschaftlich zum Katholicismus, dessen geistiges Oberhaupt ich verehre und hochachte. [Cantor an Heman, 28. Jul. 1887]

Die Encycliken Leo‘s XIII laße ich mir seit Jahren durch Herder in Freiburg schicken. [Cantor an A. Baumgartner, 25. Mai 1891]

Sind die henotischen Encycliken des großen Leo vom 20 Juni 1894 und 14 April 1895 noch immer nicht in seine Hand gelangt? Glaubt er etwa das große Einigungswerk, welches S. Heiligkeit sich für seine letzten Lebensjahre vorgenommen hat, durch Beförderung des haßerfüllten widerchristlichen Racenantisemitismus unterstützen zu können? [Cantor an Heiner, 4. 2. 1896]

Eingedenk meines Versprechens, erlaube ich mir Ihnen beifolgend sechs Exemplare meines Opusculums "Zur Lehre vom Transfiniten“ zu übersenden, davon ist eins für seine Heiligkeit

Papst Leo XIII bestimmt; hoffentlich ist es Ihnen möglich, durch eine befreundete Hand in Rom diese Bestellung ausführen zu laßen. [Cantor an Keller, 21. Jan.1894]

Erlaube, Größter Brückenbauer, daß ich sieben Exemplare einer neuen Ausgabe jenes kleinen Werkes Dir widme, und daß ich drei Bände der Werke des Francis Bacon beifüge.
Ich bete und bitte Dich, Seeligster Vater, daß Du annehmen wollest jene 10 kleinen Gaben, die ich anzubieten wage, die Zeichen sein sollen meiner Verehrung und meiner Liebe zu Deiner Heiligkeit und der Heiligen Katholischen Römischen Kirche.
Deiner Heiligkeit demütigster und höchst zugetaner Diener
[Cantor an Papst Leo XIII, 13. Feb. 1896. Übesetzung des von Cantor lateinisch verfassten Textes: H. Meschkowski, W. Nilson: "Georg Cantor Briefe", Springer, Berlin (1991) p. 383]

Es bleibt aber bis zum Ende der Tage auf einem unerschütterlichen Fels, Christo selbst, ruhend, die unsichtbare Kirche, welche er gegründet hat, bestehen. Er ist ihr Oberhaupt, das keinen Statthalter auf Erden braucht. [G. Cantor: " Ex Oriente Lux", Selbstverlag (1905) p. 12]

869 Das Kalenderblatt 111021

Ich kann es nun einmal nicht lassen, in diesem Drama von Mathematik und Physik – die sich im Dunkeln befruchten, aber von Angesicht zu Angesicht so gerne einander verkennen und verleugnen – die Rolle des (wie ich genugsam erfuhr, oft unerwünschten) Boten zu spielen. [Hermann Weyl: "Gruppentheorie und Quantenmechanik", Hirzel, Leipzig (1928) p. V]

O wehe Weyl! Und dabei hat er ja nur über einen positiven Aspekt berichtet. Auf welche Widerstände muss erst jener stoßen, der die Liebhaber der Frau Mathematik darüber aufklärt, dass es unter deren glänzender und scheinbar makellos reinen Oberfläche ebenso natürlich zugeht wie bei allem Irdischen? Selbst wohlwollende Kollegen sprechen da von Blaphemie.

Die Folge der natürlichen Zahlen [...] weist Lücken auf. Und diese Lücken wachsen mit zunehmender Zahlengröße. Deswegen kann man nicht sinnvoll von einer aktual unendlichen Zahlenfolge sprechen. [...] Das kann niemand ändern! Die Mathematik steht nicht außerhalb der Wirklichkeit. Es hilft wenig, die Existenz aktual unendlicher Mengen axiomatisch zu fordern und so die Vollständigkeit der reellen Zahlen zu "beweisen“. Damit behebt man den Mangel ebensowenig, wie ein Kaufmann seine Bilanz durch Anhängen einiger Nullen aufbessern kann - wie Immanuel Kant in einem ähnlichen Zusammenhang feststellte. Das wirklich zugängliche "Kontinuum“ besitzt eine körnige Struktur. Die Korngröße hängt von der verfügbaren Rechenkapazität ab. Dem mit einem Abakus allein ausgerüsteten Mathematiker stellt sie sich als 1 dar, denn ihm sind nur ganze Zahlen zugänglich. Glücklicherweise ist die Körnung in der Regel fein genug, um ohne nachteilige Auswirkungen zu bleiben. Ebenso wie die Quantisierung der Erdbahn für astronomische Probleme ohne jede Relevanz ist und die molekulare Struktur von Butter deren Portionierbarkeit nicht merklich beschränkt, wird die prinzipielle Unsicherheit von Zahlen ihren im Eingangszitat genannten Zweck nicht beeinträchtigen. In der Regel genügt schon die zehnstellige Genauigkeit des Taschenrechners oder die 100-stellige Genauigkeit einfacher Rechenprogramme. Die Kenntnis von 10^{100} Stellen wird man äußerst selten anstreben und bei irrationalen Zahlen niemals erreichen.
[W. Mückenheim: "Über Mathematik und Wirklichkeit", Forschungsbericht 2011 der HS Augsburg, wmm wirtschaftsverlag, Augsburg (2011) p. 44 - 46.]

870 Das Kalenderblatt 111022

Let's suppose that ZFC is inconsistent. Should anyone here feel shame? I don't see why.
[Jesse F. Hughes, 28 Sep 2011]

Because there cannot be more infinite paths in the Binary Tree than points where paths get distinct, i.e, nodes where they split. It is a very simple calculation:

```
  |
  o
 / \
```

Every point increases the number of distinct paths by 1. A countable number of points makes a countable number of distinct paths. Therefore the elements of a set of uncountable paths cannot be distinct.

Further the subset of real numbers without a finite definition does not allow to choose a certain element from it. It could not be defined. That makes Zermelo's axiom of choice obsolete - and his "proof" of well-ordering every set too.

Quite a lot of simple mistakes to feel ashamed.

http://groups.google.com/group/sci.math/msg/5ccdfbcc58a07f66?dmode=source

Auf deutsch: Unter Benutzung des Auswahlaxioms kann man beweisen, dass es Mengen reeller Zahlen gibt, in denen man keine Auswahl treffen kann - jedenfalls nicht mit endlichen Mitteln. Und andere stehen in unserer Welt nicht zur Verfügung. Für jeden anderen Berufszweig, der minimale Standards an Logik und Folgerichtigkeit beachtet, wäre das ein zwingender Grund, das Auswahlaxiom zu streichen. Nicht so für die Matheologen, die sich auch gern Logiker nennen. Wie heißt das alte Sprichwort? Der Schuster trägt die schlechtesten Schuhe.

871 Das Kalenderblatt 111023

Cantor's theory of infinite sets, developed in the late 1800's, was a decisive advance for mathematics, but it provoked raging controversies and abounded in paradox. One of the first books by the distinguished French mathematician Emile Borel (1871-1956) was his *Lecons sur la Théorie des Fonctions* [Borel, 1950], originally published in 1898, and subtitled *Principes de la théorie des ensembles en vue des applications à la théorie des fonctions.*

This was one of the first books promoting Cantor's theory of sets (*ensembles*), but Borel had serious reservations about certain aspects of Cantor's theory, which Borel kept adding to later editions of his book as new appendices. The final version of Borel's book, which was published by Gauthier-Villars in 1950, has been kept in print by Gabay. That's the one that I have, and this book is a treasure trove of interesting mathematical, philosophical and historical material.

One of Cantor's crucial ideas is the distinction between the denumerable or countable infinite sets, such as the positive integers or the rational numbers, and the much larger nondenumerable or uncountable infinite sets, such as the real numbers or the points in the plane or in space. Borel had constructivist leanings, and as we shall see he felt comfortable with denumerable sets, but very uncomfortable with nondenumerable ones.

The idea of being able to list or enumerate all possible texts in a language is an extremely powerful one, and it was exploited by Borel in 1927 [Tasic, 2001, Borel, 1950] in order to define a real number that can answer every possible yes/no question!

You simply write this real in binary, and use the *n*th bit of its binary expansion to answer the *n*th question in French.

Borel speaks about this real number ironically. He insinuates that it's illegitimate, unnatural, artificial, and that it's an "unreal" real number, one that there is no reason to believe in.

Richard's paradox {{s. KB090826}} and Borel's number are discussed in [Borel, 1950] on the pages given in the list of references, but the next paradox was considered so important by Borel that he devoted an entire book to it. In fact, this was Borel's last book [Borel, 1952] and it was published, as I said, when Borel was 81 years old. I think that when Borel wrote this work he must have been thinking about his legacy, since this was to be his final book-length mathematical statement. The Chinese, I believe, place special value on an artist's final work, considering that in some sense it contains or captures that artist's soul. If so, [Borel, 1952] is Borel's "soul work." [...]

Here it is: Borel's "inaccessible numbers:" Most reals are unnameable, with probability one. Borel's often-expressed credo is that a real number is really real only if it can be expressed, only if it can be uniquely defined, using a finite number of words. It's only real if it can be named or specifed as an individual mathematical object. [...] So, in Borel's view, most reals, with probability one, are mathematical fantasies, because there is no way to specify them uniquely.
{{Dies wurde bereits in KB091209 ausführlicher dargelegt:
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/KB/KB%20001-200.pdf
}}

Borel, E. [1950] Lecons sur la Théorie des Fonctions (Gabay, Paris) pp. 161, 275.
Borel, E. [1952] Les Nombres Inaccessibles (Gauthier-Villars, Paris) p. 21.
Tasic, V. [2001] Mathematics and the Roots of Postmodern Thought (Oxford University Press, New York) pp. 52, 81-82.

[Gregory Chaitin: "How real are real numbers?" (2004)]
http://arxiv.org/abs/math.HO/0411418

872 Das Kalenderblatt 111024

Whatever the choice of language, there will only be a countable infinity of possible texts, since these can be listed in size order, and among texts of the same size, in alphabetical order. {{Ein einfaches Beispiel ist dies:
0
1
00
01
10
11
000
...
}}

This has the devastating consequence that there are only a denumerable infinitely of such "accessible" reals, and therefore {{Die Summe aller Intervalle, die nach dem Muster $\varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/8 + ...$ zur Überdeckung einer abzählbaren Menge benötigt werden, ist ε. Die meisten Zahlen des Einheitsintervalls bleiben unüberdeckt.}} the set of accessible reals has measure zero.

So, in Borel's view, most reals, with probability one, are mathematical fantasies, because there is no way to specify them uniquely. Most reals are inaccessible to us, and will never, ever, be picked out as individuals using *any* conceivable mathematical tool, because whatever these tools may be they could always be explained in French, and therefore can only "individualize" a countable infinity of reals, a set of reals of measure zero, an infinitesimal subset of the set of all possible {{diese "Möglichkeit" sollte genauer erklärt werden}} reals.

Pick a real at random, and the probability is zero that it's accessible - the probability is zero that it *will ever be* accessible to us as an individual mathematical object. {{Das wäre nur dann eine richtige Aussage, wenn man wie gedacht picken könnte. Doch damit wäre die gepickte Zahl bereits endlich definiert. Aber oben steht ja schon, dass sie nie mathematisch gepickt werden könnte. Und mit dem Finger oder dem Schnabel wird es schon gar nicht gelingen.}}
[Gregory Chaitin: "How real are real numbers?" (2004)]
http://arxiv.org/abs/math.HO/0411418

Welche Bedeutung besitzt eine unendliche Summe wie $\Sigma_{1\ldots\infty} 1/2^k = 1$? Man schreibt zwar ein Gleichheitszeichen, aber die Summe kommt niemals zustande. Alles, was man behaupten kann, ist, dass für jedes noch so kleine ε ein n existiert, so dass

$$1 - \varepsilon < \Sigma_{1\ldots n} 1/2^k < 1.$$

Und man weiß, dass nach dem n-ten Glied noch genau so viele Glieder folgen wie nach dem ersten, nämlich unendlich viele. Der Wert der Reihe kann nur deswegen angegeben werden, weil die unendlich vielen unberücksichtigten Summanden nicht mehr als ε beitragen können.

Die Abzählung der rationalen Zahlen summiert über Einheiten. Man erhält die nicht konvergente Folge der endlichen Kardinalzahlen und behauptet, dass es möglich sei, trotzdem einen Grenzwert zu bestimmen. Das ist ein Fehler. Aus der Tatsache, dass wir bis zu jeder rationalen Zahl zählen können, folgt nicht, dass wir alle rationalen Zahlen zählen könnten. Die Verwechslung dieser beiden Quantoren findet leider häufig statt. Dass sie nicht erlaubt ist, ersieht man sofort daraus, dass nach jeder endlichen Kardinalzahl noch unendlich viele folgen, nach allen endlichen Kardinalzahlen aber nicht.

873 Das Kalenderblatt 111025

Der Herbstwind bläst, die Blätter fallen
von den Bäumen gelb und braun.

Die Ungleichung von Kraft indessen betrifft den gesunden, grünenden Binären Baum.
http://xlinux.nist.gov/dads//HTML/kraftsinqlty.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Kraft%27s_inequality
http://www.ee.bgu.ac.il/~it09/lec3b_kraft_inequality/Ziv_Final.pdf
Für die mit der Pfadlänge $|p_k|$ von der Wurzel bis zum Blatt k gewichtete Pfadanzahl ergibt sich

$$\Sigma_k 2^{-|p_k|} \leq 1$$

Die Summe erstreckt sich über alle Pfade, die an Blättern enden. Dass sie 1 nicht übersteigen kann, ist klar. Würden zum Beispiel alle Pfade die Länge 2 besitzen, so hätte der Baum die Form

```
   0
  / \
 0   1
/ \ / \
0 1 0 1
```

und die Summe wäre $4 \cdot 2^{-2} = 2^2 \cdot 2^{-2} = 1$.

Kommen auch unendliche Pfade vor, so wird die Summe kleiner. Im vollständigen unendlichen Binären Baum ist sie verschwunden. Es sei denn, man berechnet den Grenzwert der Folge

$$a_n = 2^n \cdot 2^{-n} = 1$$

Anstelle von Pfaden kann man sich auch Computerprogramme vorstellen, die irgendwann eine Ausgabe erzeugen und danach nicht wieder anlaufen.

874 Das Kalenderblatt 111026

The set of all possible computer programs is countable {{wenn wir schon so konkret von Computern reden, dann können wir sogar noch weiter einschränkend sagen: Die Anzahl aller möglichen Computerprogramme ist endlich und ganz sicher kleiner als $2^{10^{100}}$. Aber Turing meinte selbstverständlich keine richtigen Computer, und von der Speicherkapazität einer ausnutzbaren Umgebung wusste er auch noch nichts. Deswegen wollen wir hier seinen Ansatz analysieren.}}, therefore the set of all computable reals is countable, and diagonalizing over the computable reals immediately yields an uncomputable real. *Q.E.D*. {{Nun, so einfach kann man nicht über endliche Folgen diagonalisieren. Die folgende Liste besitzt keine Diagonale:

0
1

Deswegen muss man etwas sorgfältiger vorgehen, was nun auch geschieht:}}
Let's do it again more carefully.
Make a list of all possible computer programs. Order the programs by their size, and within those of the same size, order them alphabetically. The easiest thing to do is to include all the possible character strings that can be formed from the finite alphabet of the programming language, even though most of these will be syntactically invalid programs.
Here's how we define the uncomputable diagonal number $0 < r < 1$. Consider the kth program in our list. If it is syntactically invalid, or if the kth program never outputs a kth digit, or if the kth digit output by the kth program isn't a 3, pick 3 as the kth digit of r. Otherwise, if the kth digit output by the kth program is a 3, pick 4 as the kth digit of r.
This r cannot be computable, because its kth digit is different from the kth digit of the real number that is computed by the kth program, if there is one. Therefore there are uncomputable reals, real numbers that cannot be calculated digit by digit by any computer program. [...]
In other words, the probability of a real's being computable is zero, and the probability that it's uncomputable is one. [Who should be credited for this measure-theoretic proof that there are uncomputable reals? I have no idea. It seems to have always been part of my mental baggage.]

[Gregory Chaitin: "How real are real numbers?" (2004)]
http://arxiv.org/abs/math.HO/0411418

Wie in allen anderen Überabzählbarkeitsbeweisen auch, findet sich der Fehler immer an derselben Stelle: Es wird die vollendet unendliche Anzahl aller endlichen Programme vorausgesetzt. Anderenfalls würde die gerade definierte Zahl einem endlichen Prozess samt endlichem Programm entspringen. Die Menge aller endlichen Dinge ist aber nicht vollendet unendlich, sondern nur potentiell unendlich. Schließlich kann man kein Programm verwenden, das länger ist, als das längste Programm, das man verwendet. Doch hat man bis zu *jeder* Programmlänge nur einen unmessbar kleinen Anteil aller verwendbaren Programme verwendet.

875 Das Kalenderblatt 111027

In Sec. 3.1 we constructed an uncomputable real *r*. It must be uncomputable, by construction. Nevertheless, as was the case in the Richard paradox, it would seem that we gave a procedure for calculating Turing's diagonal real *r* digit by digit. {{Das schien nur dem so, der meint, eine unendliche Folge könne Information enthalten oder sogar übertragen.}} How can this procedure fail? What could possibly go wrong?

The answer is this: The only noncomputable step has got to be determining if the *k*th computer program will *ever* output a *k*th digit. If we could do that, then we could certainly compute the uncomputable real *r*.

In other words, Sec. 3.1 actually *proves* that there can be no algorithm for deciding if the *k*th computer program will ever output a *k*th digit.

And this is a special case of what's called Turing's halting problem. In this particular case, the question is whether or not the wait for a *k*th digit will ever terminate. In the general case, the question is whether or not a computer program will ever halt.

{{Das wird es nicht, wenn z. B. eine Endlosschleife enthalten ist:

```
00 Begin
10 Goto 20
20 Goto 10
30 Print "3"
40 End
```

Eine solche wird in potentiell unendlich vielen Programmen vorliegen. Unendlich viele Programme können niemals vollständig auf diese Eigenschaft untersucht worden sein. Deswegen ist die Zahl *r* niemals definiert, d.h. sie ist und bleibt undefiniert. *r* ist keine Zahl. Mit einem "Überabzählbarkeitsbeweis" hat dieser Umstand nichts zu tun. Man erkennt die Alogik der Bedingung: "if the *k*th program never outputs a *k*th digit" leicht an der Übersetzung: Falls (das ist eine Abkürzung für "in dem Falle, dass" oder "sobald der Fall eingetreten ist, dass") der Fall nicht eintritt, dass eine Ziffer ausgegeben wird. Selbstverständlich ist das solange unentscheidbar, bis eine Ziffer ausgegeben wird.}} The algorithmic unsolvability of Turing's halting problem is an extremely fundamental meta-theorem. It's a much stronger result than Gödel's famous 1931 incompleteness theorem. Why? Because in Turing's original 1936 paper he immediately points out how to derive incompleteness from the halting problem. {{Unvollständigkeit gibt es wohl, schon bei jeder potentiellen Unendlichkeit, aber nicht Überabzählbarkeit.}}

A formal axiomatic math theory (FAMT) consists of a finite set of axioms and of a finite set of rules of inference for deducing the consequences of those axioms. Viewed from a great distance, all that counts is that there is an algorithm for enumerating (or generating) all the possible theorems, all the possible consequences of the axioms, one by one, by systematically applying the rules of inference in every possible way. This is in fact what's called a breadth-first (rather than a depth-first) tree walk, the tree being the tree of all possible deductions.

So, argued Turing in 1936, if there were a FAMT that always enabled you to decide whether or not a program eventually halts, there would in fact be an algorithm for doing so. You'd just run through all possible proofs until you find a proof that the program halts or you find a proof that it never halts.

So uncomputability is much more fundamental than incompleteness. Incompleteness is an immediate corollary of uncomputability. But uncomputability is *not* a corollary of incompleteness. The concept of incompleteness does not contain the concept of uncomputability.

[Gregory Chaitin: "How real are real numbers?" (2004)]
http://arxiv.org/abs/math.HO/0411418

Man lasse nur solche Programme zu, die innerhalb von drei Minuten auf einem speziellen Computer eine Ziffer ausgeben. Im Prinzip gibt es beliebig viele solche Programme. Will man daraus aber eine reelle Zahl *r* konstruieren, so muss man einen Schlussstrich ziehen und ein letztes Programm definieren. Dann ist lediglich eine rationale Zahl erzeugt, die selbstverständlich durch ein Programm berechnet werden kann. Die Einbeziehung von nicht anhaltenden Programmen birgt eine logische Falle. Denn im Falle eines nicht eintretenden Falles kann man keinen Fall erkennen. Wann geschähe das?

876 Das Kalenderblatt 111028

Similarly to the fact that America does not carry Columbus's name, mathematical results are almost never called by the names of their discoverers.

In order to avoid being misquoted, I have to note that my own achievements were for some unknown reason never expropriated in this way, although it always happened to both my teachers (Kolmogorov, Petrovskii, Pontryagin, Rokhlin) and my pupils. Prof. M. Berry once formulated the following two principles:

The Arnold Principle. If a notion bears a personal name, then this name is not the name of the discoverer.

The Berry Principle. The Arnold Principle is applicable to itself.
[V.I. Arnold: "On teaching mathematics" (1997)]
http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html

{{Das zeigt sich zumindest partiell am Matthew effect:}} In the sociology of science, "Matthew effect" was a term coined by Robert K. Merton to describe how, among other things, eminent scientists will often get more credit than a comparatively unknown researcher, even if their work is similar; it also means that credit will usually be given to researchers who are already famous. For example, a prize will almost always be awarded to the most senior researcher involved in a project, even if all the work was done by a graduate student.

[...] In algorithmic information theory, the notion of Kolmogorov complexity is named after the famous mathematician Andrey Kolmogorov even though it was independently discovered and published by Ray Solomonoff a year before Kolmogorov. Li and Vitanyi, in "An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications", write: Ray Solomonoff [...] introduced [what is now known as] 'Kolmogorov complexity' in a long journal paper in 1964. [...] This makes Solomonoff the first inventor and raises the question whether we should talk about Solomonoff complexity.
http://en.wikipedia.org/wiki/Matthew_effect_(sociology)

{{Die Kolmogoroff-Komplexität C sagt etwas über den Informationsinhalt von Bitfolgen oder "Strings" aus.}} The idea is that a string is random if it cannot be compressed. That is, if it has no short description. {{Eine Bitfolge x mit $|x| = n$ bits ist inkompressibel, wenn keine Bitfolge p mit weniger als n Bits existiert, die (z. B. über ein Computerprogramm g) die Bitfolge x definiert oder erzeugt.}} Using $C(x)$ we can formalize this idea via the following.

Theorem 1.2. For all n, there exists some x with $|x| = n$ such that $C(x) \geq n$. Such x are called (Kolmogorov) random.

Proof. Suppose not. Then for all x, $C(x) < n$. Thus for all x there exists some p_x such that $g(p_x) = x$ and $|p_x| < n$. Obviously, if $x \neq y$ then $p_x \neq p_y$.

But there are 2^n - 1 programs of length less than *n*, and 2^n strings of length *n*. {{Vergleiche die endlichen Pfade bis zur Ebene *n* - 1 im Binären Baum und die Pfade mit *n* Knoten, d. i. mit einem *n*-ten Knoten jenseits der Ebene *n* - 1}}. By the pigeonhole principle, if all strings of length *n* have a program shorter than *n*, then there must be some program that produces two different strings. Clearly this is absurd, so it must be the case that at least one string of length *n* has a program of length at least *n*.

Lance Fortnow: "Kolmogorov Complexity" (2000)
http://people.cs.uchicago.edu/~fortnow/papers/kaikoura.pdf

Also gibt es inkompressible Bitfolgen. Mindestens eine unendliche Bitfolge (die mit $\aleph_0$ Bits eine größere als jede natürliche Kolomogoroff-Komplexität besitzt) muss im Binären Baum durch eine Knotenfolge definiert oder erzeugt werden, die mindestens einen Knoten jenseits aller endlichen Ebenen besitzt.

Eine inkompressible Bitfolge vom Betrag 10^{100} Bits existiert in Wirklichkeit allerdings nicht, weil Bitfolgen in Wirklichkeit nur existieren können, wenn sie in einem wirklichen und nicht nur in einem gedachten Gedächtnis speicherbar sind.

877 Das Kalenderblatt 111029

Where does the halting probability come from? [...]

Formally, the halting probability Ω is defined as follows:

$$0 < \Omega \equiv \Sigma_{\text{program } p \text{ halts}}\ 2^{-(\text{the size in bits of } p)} < 1$$

To avoid having this sum diverge to infinity instead of converging to a number between zero and one, it is important that the programs *p* should be self-delimiting (no extension of a valid program is a valid program; see [Chaitin [2005]).

What's interesting about Ω is that it behaves like a compressed version of Borel's know-it-all real {{s. KB111023}}. Knowing the first *n* bits of Borel's real enables us to answer the first *n* yes/no questions in French. Knowing the first *n* bits of Ω enables us to answer the halting problem for all programs *p* up to *n* bits in size. I.e., *n* bits of Ω tells us whether or not each *p* up to *n* bits in size ever halts. (Can you see how?) That's a lot of information! {{Hier übertreibt Chaitin ein wenig. Es geht, wie oben gesagt, um die *Wahrscheinlichkeit*, dass ein Programm hält. Außerdem besteht eine Codierungsabhängigkeit, so dass Ω keine eindeutig definierte Konstante ist.}}

In fact, Ω compactly encodes so much information that you essentially need an *n*-bit FAMT in order to be able to determine *n* bits of Ω! In other words, Ω is *irreducible mathematical information*, it's a place where reasoning is completely impotent. The bits of Ω are mathematical facts that can be proved, but essentially only by adding them one by one as new axioms! I'm talking about how difficult it is to prove theorems such as

"the 5th bit of Ω is a 0"

and

"the 9th bit of Ω is a 1"

or whatever the case may be.

To prove that Ω is computationally and therefore logically irreducible, requires a theory of program-size complexity that I call algorithmic information theory (AIT) [Chaitin, 2005]. The key

idea in AIT is to measure the complexity of something via the size in bits of the smallest program for calculating it. This is a more refined version of Borel's idea [Borel, 1960] of defining the complexity of a real number to be the number of words required to name it.
And the key fact that is proved in AIT about Omega is that

$$H(\Omega_n) > n - c.$$

I.e.,

(the string Ω_n consisting of the first n bits of Ω)

has program-size complexity or "algorithmic entropy H" greater than or equal to $n - c$. Here c is a constant, and I'm talking about the size in bits of self-delimiting programs.
In other words, any self-delimiting program for computing the first n bits of Ω will have to be at least $n - c$ bits long.
The irreducible sequence of bits of Ω is a place where mathematical truth has absolutely no pattern or structure that we will ever be able to detect. It's a place where mathematical truth has maximum possible entropy - a place where, in a sense, God plays dice.
Why should we believe in real numbers, if most of them are uncomputable? Why should we believe in real numbers, if most of them, it turns out, are maximally unknowable like Ω?

Note: In spite of the fact that most individual real numbers will forever escape us, the notion of an arbitrary real has beautiful mathematical properties and is a concept that helps us to organize and understand the real world. {{Nein. Dazu könnte keine einzige unzugängliche "reelle" Zahl beitragen.}} Individual concepts in a theory *do not* need to have concrete meaning on their own; it is enough if the theory *as a whole* can be compared with the results of experiments. {{Dann machen wir doch einmal das Experiment, aus der Menge der unzugänglichen "reellen" Zahlen eine erste auszuwählen.}}

Borel, E. [1960] Space and Time (Dover, Mineola) pp. 212-214.
Chaitin, G. [2005] Meta Math! (Pantheon, New York).

[Gregory Chaitin: "How real are real numbers?" (2004)]
http://arxiv.org/abs/math.HO/0411418

878 Das Kalenderblatt 111030 Der Binäre Baum (1)

Der Binäre Baum ist abzählbar vielen ein Dorn im Auge. Er zeigt, dass mit abzählbar vielen Konstruktionsschritten alle reellen Zahlen des Einheitsintervalls in Form von unendlichen Pfaden konstruierbar sind (zumindest alles, was von ihnen in der Realität der Ziffernfolgen verankert ist und nicht in den Himmel der Matheologie reicht), ohne dass in einem Schritt mehr als ein Pfad konstruiert würde.

```
         0,
        /   \
      0       1
     / \    /  \
    0   1  0    1
   /
  0 ...
```

Deshalb hat er schon zahlreiche Baumfäller angelockt. Zwar widerstand er bisher allen Fällversuchen in frischem Grün und beschränkt damit die Aussichten der Cantorianer, doch ist nichts endgültig. Jeder Versucher sei ausdrücklich zum erneuten Fällversuch ermutigt! Turandotierte Rückwirkungen sind nicht zu befürchten.

Die folgende Serie von Kalenderblättern soll die Entwicklung des Pflänzchens vom Keim bis zum stattlichen Baum nach allen ihren Ausprägungen, Ideen und Irrtümern, Fortschritten und Rückschlägen darstellen, dabei nicht durch reine Wiederholung häufig genannter Argumente ermüden (nach dem Motto: es ist zwar schon alles gesagt, aber noch nicht von jedem), doch auch die gern gestreute Behauptung, alles sei längst widerlegt, nicht unwiderlegt lassen. Mit diesem Vorsatz mögen alle über die Jahre und das Internet verstreuten ernsthaften Fällversuche, soweit sie mir bekannt geworden sind, analysiert und kommentiert werden.

> Und seine Zweige rauschten,
> Als riefen sie mir zu:
> Komm her zu mir, Geselle,
> Hier find'st Du Deine Ruh'!

Es begann vor sieben Jahren, am 30. Oktober 2004.
Auf denn, Holzer-Buam ... - ein passendes Hintergrundmotiv findet Ihr hier:
http://www.die-koenige-der-nutzholzgewinnung.de/about.html

879 Das Kalenderblatt 111031 Der Binäre Baum (2)

Alle abbrechenden Binärzahlen (ich wähle die Darstellung mit Nullen am Ende) können in einer abzählbaren Folge dargestellt werden, z.B. als 0,1; 0,01; 0,11; ... , wie ich das hier schon mehrfach beschrieben habe. Man schiebt einmal eine 0 und einmal eine 1 bei allen Zahlen mit n Stellen hinter dem Komma ein und erhält so alle Zahlen mit $n + 1$ Stellen. Wir dürften sicher darin übereinstimmen, daß man (abgesehen von physikalischen Einschränkungen) auf diese Weise tatsächlich alle abbrechenden rationalen Zahlen erhält.

Wie unterscheiden sich nun diese von den irrationalen Zahlen? Wenn die Stellenzahl (ohne Nullen am Ende) gleich n, also endlich ist, so ist die Zahl sicher rational. Dies gilt, wohlgemerkt, für *jede* natürliche Zahl n. Das ist das potentiell Unendliche. Im Umkehrschluß folgt: Wenn die Zahl nicht rational ist, so ist ihre Stellenzahl nicht endlich. (Das ist der Umkehrschluß, den man im ersten Semester lernt oder gelernt haben sollte: $A \Rightarrow B$ ist äquivalent mit $\neg B \Rightarrow \neg A$.) Da aber im Endlichen ordinal = kardinal gilt, so können bei den nicht endlichen Stellenanzahlen der Irrationalzahlen nicht nur endliche "Stellennummern" (= Ordinalzahlen) vorhanden sein. Irrationalzahlen liefern somit, wie schon Cantor erkannte, das Paradigma des aktual Unendlichen. Deshalb spreche ich von der "omegaten" Stelle. Eine n-te Stelle tut's nicht.
[WM, "Hat Cantor doch geirrt?", de.sci.mathematik, 30. 10. 2004]
http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/browse_frm/thread/3fae2f88ddf41dcb?scoring=d&q=%22Hat+Cantor+doch+geirrt%22&

Damit war ein Vorläufer des Binären Baums in die Diskussion eingeführt. Solche Listen gab es zwar schon vorher, am 8. 10. in derselben Diskussionsrunde und am 15. 3. in meinem Aufsatz "The Meaning of Infinity"
http://arxiv.org/ftp/math/papers/0403/0403238.pdf
und sicher auch in ungezählten Textstellen der letzten 200 Jahre, doch erst jetzt kam die Verknüpfung mit dem Binären Baum zustande. Der grünt ebenfalls seit Jahrhunderten und stand natürlich auch seit langem in meinem Garten. Aber es ist bekanntlich ein großer Unterschied, ob man etwas weiß, oder ob man weiß, dass man es weiß.

Beim Übergang zum Binären Baum wird lediglich die Schreibweise vereinfacht, indem identische Anfangsabschnitte nur einmal notiert werden. Dabei kommt nichts hinzu. Doch der so angeschriebene Binäre Baum enthält nun alle aktual unendlichen Pfade, auch die für 1/3 und $1/\pi$. Diese Antinomie löst sich elegant auf: Die aktual unendlichen Pfade sind hinzugekommen und sind nichts. Sie bilden eine leere Menge. - Kein Wunder, dass man sie nicht zählen kann.

Grenzwerte wie 1/3 und $1/\pi$ existieren zwar, aber sie sind nicht als Binärfolgen codierbar, auch nicht als unendliche. Sie können nur endlich definiert werden. Denn der Binäre Baum, der alle endlichen und unendlichen Pfade enthält, unterscheidet sich durch nichts von dem Binären Baum, der lediglich alle endlichen Pfade enthält ... Doch wir wollen nicht vorgreifen. Das alles erkannte ich erst später.

880 Das Kalenderblatt 111101 Der Binäre Baum (3)

Ein wesentlicher Punkt bei der Diskussion des Binären Baums ist die Beurteilung der Eigenschaften von aktual unendlich langen Pfaden (Binärdarstellungen reeller Zahlen aus dem Einheitsintervall) und der damit möglichen Darstellung periodischer rationaler und irrationaler Zahlen, mit der auch die Aussage eng verknüpft ist, dass zwischen zwei reellen Zahlen mindestens eine rationale Zahl liegt. [WM, "Hat Cantor doch geirrt?", de.sci.mathematik, 29. 10. 2004] Die Erwähnung dieser Tatsache rief unterschiedliche Reaktionen hervor:

Damit zwischen zwei solchen Zahlen aus $\mathbb{R}$ eine aus $\mathbb{Q}$ liegen kann, müssten sie sich (in Dezimaldarstellung) in der *n*ten Stelle unterscheiden, wobei *n* beliebig groß sein kann - aber endlich. Wann sind zwei reelle Zahlen verschieden? Sicher wenn sich in einer *n*ten Stelle unterscheiden, aber da hier die Unendlichkeit involviert ist, gibts da vielleicht noch andere Möglichkeiten. Mich erinnert das an das "Halteproblem" in der theoretischen Informatik. Um unendlich viele Stellen zu vergleichen, braucht man auch unendlich viel Zeit - die hat man aber nicht, folglich kann es Paare von Zahlen aus $\mathbb{R}$ geben für die man die angeblich dazwischen-liegende Zahl aus $\mathbb{Q}$ nicht finden kann, es sei denn man vergleicht tatsächlich unendlich viele Stellen, was normalerweise nicht geht.
[Carla Schneider, "Hat Cantor doch geirrt?", de.sci.mathematik, 30. 10. 2004]

{{Das Halteproblem (vgl. KB111027) spielt hier wohl hinein. Doch auch unendlich viele endlich indizierte Stellen reichen nicht aus, um einen Grenzwert darzustellen. Einfaches Beispiel: Auch unter den unendlich vielen Gliedern der Folge 0,1; 0,01; 0,001; ... mit einer 1 an endlich indizierter Stelle findet man kein Glied mit dem Grenzwert 0. Dieses Glied ist mit den unendlich vielen endlich indizierten Stellen nicht darstellbar. Will man die Darstellbarkeit als Dezimalbruch trotzdem fordern, so benötigt man eine auf alle endlichen Stellen folgende Stelle mit Index ω. Eine 1 an dieser Stelle würde wiederum nichts bewirken, da die Stelle nicht auffindbar ist. Gleiches gilt für alle periodischen und alle irrationalen Zahlen.}}

CS: Wenn zwischen zwei Irrationalzahlen immer eine rationale Zahl wäre, könnte man daraus schließen dass die Mengen der Irrationalzahlen und der Rationalzahlen gleich mächtig sind - was falsch ist. Es muss also das Kriterium für Ungleichheit bei Irrationalzahlen falsch sein. Zwei Irrationalzahlen sind zwar ungleich wenn sie sich ab der *n*ten Stelle unterscheiden, aber das umgekehrte kann nicht gelten. Die ominöse Zahlengerade besteht also fast nur aus unendlich kleinen Stücken in denen unendlich viele Irrationalzahlen nebeneinander liegen, die sich nur in der unendlichten Stelle unterscheiden {{bzw. nicht berechenbar sind.}} Dazwischen liegen die rationalen Zahlen - die sich an endlicher Stelle unterscheiden. Eine merkwürdige Vorstellung ...

WM: In der unendlichten Stelle (Hilbert sagt omegate) kann sich nichts unterscheiden, weil diese gar nicht erkennbar ist: $\omega = 1 + \omega$.
[Carla Schneider, "Hat Cantor doch geirrt?", de.sci.mathematik, 31. 10. 2004]

{{In der Tat eine merkwürdige Vorstellung! Doch schon in einem vorausgehenden Beitrag war klargestellt worden:}} Ich glaube, das Problem ist, dass zwei irrationale Zahlen, die sich nicht an einer *n*ten Stelle unterscheiden, wobei *n* endlich ist, als gleich bezeichnet werden. {{Das muss man unbedingt konzedieren.}} [Carla Schneider, "Hat Cantor doch geirrt?", de.sci.mathematik, 31. 10. 2004]

Weniger verständig äußerte sich ein Mathematik-Lehrer mit ungarischen Wurzeln:

J: Wenn ein Mathematiker sieht, daß Du behauptest, daß zwischen zwei Zahlen aus $\mathbb{Q}$ eine aus $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ stehe und umgekehrt zwischen zwei Zahlen aus $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ eine Zahl aus $\mathbb{Q}$, so wird er die Arbeit in diesem Augenblick in den Müll schmeißen. Ich selbst, obwohl ich nur Lehrer bin, täte das.

WM: Ich behaupte, daß zwischen zwei Zahlen aus $\mathbb{R}$ mindestens eine aus $\mathbb{Q}$ liegt. Nicht unbedingt die Umkehrung. Schließlich komme ich ja aus anderen Erwägungen zu der Einsicht und Lehre, daß $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ die leere Menge ist {{wobei ich aus heutiger Sicht hinzufügen muss, dass damit nur die Zifferndarstellungen gemeint sind, nicht die Zahlen selbst, was aber eine Frage des Standpunktes ist.}}

J: Genau. Aber normalerweise endet hier die Diskussion mit einem Mathematiker. Wenn Du glaubst, daß es keine irrationalen Zahlen gibt, so verweist Dich ein Mathematiker zurück in die neunte Klasse der Schule und das ist das Ende der Diskussion.
[jb alias Gastfreund aus Korinth, "Hat Cantor doch geirrt?", de.sci.mathematik, 30. 10. 2004]

http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/browse_frm/thread/3fae2f88ddf41dcb?scoring=d&q=%22Hat+Cantor+doch+geirrt%22&

881 Das Kalenderblatt 111102 Der Binäre Baum (4)

Also die Zahl 0,1111usw. existiert bei ihnen nicht.
[Reinhard Kronberger, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 21. 3. 2005]

Sie meinen 1/9 im Dezimalsysem bzw. 1 im Binärsystem. Diese Zahlen existieren sicher, aber nicht in der Form 0,111... als Diagonale in einer Liste (bw. Folge), deren jede Zeile mit einer endlichen Zahl numeriert ist. Denn für *jedes* Folgenglied (bzw. Zeilennummer), das mit einer endlichen Zahl numeriert ist, kann ich eine Differenz $\neq 0$ zum Grenzwert angeben. Können Sie das nicht? Es ist eigentlich nicht schwer. Und eine Zahl ω tritt nicht auf.
[WM, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 23. 3. 2005]

Ich behaupte nur, daß Cantors Verfahren versagen *kann*. Und das ist, wie man leicht sieht, in der Liste

0,000...
0,1000...
0,11000...
...

per Konstruktion der Fall. {{wenn man die Diagonalziffer 0 durch 1 ersetzt}}
[WM, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 17. 3. 2005]

FN: Wollen Sie also *behaupten*, dass die Zahl 0,1111... in einer Zeile dieser Liste vorkommt? - Das ist/wäre *nachweisbar* falsch.

WM: Es ist nachweisbar falsch.

FN: Schön, dass Sie es so klar schreiben.

WM: Ebenso ist nachweisbar falsch, daß sie auf der Diagonale vorkommt.

FN: Dann weisen Sie bitte mal nach.
WM: In keiner Zeile stehen unendlich viele Einsen. In der Diagonale stehen auch nicht unendlich viele Einsen, denn die Diagonaleinsen *sind* nach Konstruktion Zeileneinsen. {{Leider fiel mir der schlagkräftigste Nachweis zum damaligen Zeitpunkt noch nicht ein.}}
FN: Akzeptieren Sie, dass die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ausschließlich endliche Zahlen enthält und "dennoch" unendlich mächtig ist?
WM: Natürlich nicht. [...] Aber wenn ich das nur so behauptete, so würden Sie mir nicht glauben. Darum gehe ich ja den dornenreichen Weg: In der Folge 0,1; 0,11; 0,111; ... tritt die Zahl 1/9 niemals auf, weil ich zu jedem Folgenglied, das zu irgendeiner natürlichen Zahl gehört, eine Differenz zu 1/9 angeben kann. Akzepieren Sie, daß das für jedes Folgenglied geht? Es bleibt Ihnen wohl keine andere Wahl. Damit ist aber klar, daß unsere heißumstrittene Diagonalzahl niemals den Wert 1/9 annehmen kann, denn Cantors Liste enthält nur endliche Zeilennummern (dabei wird überhaupt nicht gefragt, wie viele es sind).
[Franziska Neugebauer, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 21. 3. 2005]

http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/browse_frm/thread/3588aeea5f57e3ea?scoring=d&q=%22Cantors+Diagonalbeweis+widerlegt%22&

882 Das Kalenderblatt 111103 Der Binäre Baum (5)

Die Widerleger des Baumargumentes gehen mit dem Unendlichen in einer nachlässigen und willkürlichen Weise um, die sich gut anhand der folgenden Überlegung verdeutlichen lässt:

Summiert man

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 1 \qquad \text{(A)}$$

nur bis zur natürlichen Zahl *n*

$$\sum_{k=1}^{n} 1/2^k = 1 - 1/2^n \qquad \text{(B)}$$

so fehlt ein Rest $1/2^n$ an der Summe 1. Addiert man über alle natürlichen Zahlen, von denen bekanntlich keine unendlich ist, so fehlt ein Rest, der größer als 0 ist (da jede natürliche Zahl kleiner als unendlich und also $1/2^n \neq 0$ ist), an der Summe 1

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} 1/2^k < 1 \qquad \text{(C)}$$

da der zu subtrahierende Term für *keine* natürliche Zahl verschwindet. Diese Überlegung stieß auf Unverständnis:

Die beiden Formulierungen {{der Summen in (A) und (C)}} sind für mich bedeutungsgleich und drücken dasselbe aus. Sie geheimnissen hier einen Unterschied hinein, der nicht vorhanden ist. Der zu subtrahierende Term ist ein Grenzwert. Er ist Null. [Franziska Neugebauer, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt",
de.sci.mathematik, 6. 4. 2005]

Der hier geleugnete Unterschied wird dagegen stark betont, wenn die Knotenmenge der aktual unendlichen Pfade des Binären Baums von der Knotenmenge aller endlichen Pfade

0,1
0,01; 0,11
0,001; 0,101; 0,011; 0,111

...
zu unterscheiden ist, zum Beispiel im ersten formalen Beweis gegen die Vollständigkeit meiner Liste aller reellen Zahlen aus dem Einheitsintervall:

Es kommen in der Liste in der Tat alle Zahlen, die eine endliche Stellenzahl besitzen, vor.
Satz: Jede Zahl dieser Folge hat eine abbrechende Binärdarstellung.
Beweis: Betrachten wir eine Zahl x aus der Folge.
Da x in der Folge steht, gibt es (mindestens) ein n e ℕ, so dass x an der n-ten Stelle der Folge steht. Aus dem Bildungsgesetz der Folge ist ersichtlich, dass die Zahl in der n-ten Zeile, also x, höchstens n Binärstellen hat. QED
[Christopher Creutzig, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 9. 5. 2005]

http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/browse_frm/thread/3588aeea5f57e3ea?scoring=d&q=%22Cantors+Diagonalbeweis+widerlegt%22&

Aus dieser Zwangslage wurde dann der Binäre Baum geboren.

883 Das Kalenderblatt 111104 Der Binäre Baum (6)

Seine erste Ausprägung fand der Binären Baum in Form der "Liste 2", einer gemeinsamen Darstellung aller endlichen Pfade:

Man könnte meine Liste nämlich auch vereinfacht folgendermaßen schreiben
Liste 2:

,
0 1
0 1 0 1
0 1 0 1 0 1 0 1
...

Die reellen Zahlen werden dann durch Folgen (a_n) beschrieben, wo n die Zeilennummer und a die Position einer Ziffer in der Zeile bezeichnet. Die gewünschte Zahl 1/3 wäre damit durch die Folge der *Positionen* (a_n) = 1, 2, 3, 6, 11, 22, ... ihrer Nachkommabits ,010101... vollständig beschrieben.

Rekursiv: $a_1 = 1$ (Position der ersten 0 nach dem Komma)
$a_n = 2a_{n-1}$, falls n gerade,
$a_n = -1 + 2a_{n-1}$, falls n ungerade.

1) Sie enthält (real mehr und mengentheoretisch jedenfalls nicht weniger) Ziffern, als es reelle Zahlen in (0,1) gibt (obwohl viele Ziffern mehrfach benutzt werden).
2) Die Menge aller Ziffernpositionen (a, n) ist abzählbar.
[WM, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 8. 5. 2005]

Und an welcher Position steht in Ihrer Liste die Zahl 1/3? Ich erwarte die Angabe einer einzigen natürlichen Zahl. [Alois Steindl, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 11. 5. 2005]

Es tut mir leid, daß ich mich nicht deutlich genug ausgedrückt habe. Ich versuche es noch einmal. [...] Bei mir heißt es eben, es gibt mindestens eine Ziffer z_n, in der sich eine reelle Zahl

$Z = z_1, z_2, z_3, ..., z_i,...$

von all den anderen reellen Zahlen unterscheidet, die für $i < n$ dieselbe Ziffernfolge besitzen.
[WM, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 11. 5. 2005]

Ihre Liste enthält weder irrationale Zahlen, noch nichtabbrechende Rationalzahlen. [Alois Steindl, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 11. 5. 2005]

Ihre Liste 2 erreicht nur die abzählbare Teilmenge aller endlichen Wege im unendlichen Baum. Das liegt einfach daran, dass Ihre Konstruktion immer nur einen Schritt weitergeht, also zu jedem "Zeitpunkt" nur endlich weit gelaufen ist. [Christopher Creutzig, de.sci.mathematik, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", 12. 5. 2005]

Beispielsweise kann ich 1/3 als diejenige Zahl, deren Dezimaldarstellung $a_n = 3$ für jedes n hat, angegeben. Entweder sind die Zahlen damit vollständig, auch die irrationalen, oder es gibt nur endlich lange Ziffernfolgen. Letzteres ist falsch, wie man an 1/3 leicht sieht. Ihre Liste enthält allerdings nur solche Zahlen. Ist es denn wirklich so schwer, das zu sehen, wo man doch direkt length($f(n)$) $\leq n$ zeigen kann? [Christopher Creutzig, de.sci.mathematik, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", 17. 5. 2005]

{{Es wird deutlich, dass meine "Liste 2" noch nicht als vollständiger Binärer Baum anerkannt wurde. Doch gibt es dazu gar keinen Unterschied, wenn man von den Leitlinien / und \ einmal absieht.}}

Also bitte geben Sie einen Beweis dafür, daß die Diagonale und alle Zeilen der Liste
0,111...
0,111...
0,111...
...
die Binärzahl 1 (bzw. die Dezimalzahl 1/9) enthalten, der folgende binäre Baum (Liste 2) aber nicht

```
                    .
        0                   1
    0       1       0       1
  0   1   0   1   0   1   0   1
    ...
```

Bitte die drei "..." nicht übersehen. [WM, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 18. 5. 2005]

http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/browse_frm/thread/3588aeea5f57e3ea?scoring=d&q=%22Cantors+Diagonalbeweis+widerlegt%22&

884 Das Kalenderblatt 111105 Der Binäre Baum (7)

Bernhard Frey war einer der ersten, die die Vollständigkeit meiner "Liste 2" anerkannten:

WM: *Alle* Zahlen in Liste 2 besitzen durchweg unendliche Binärdarstellungen, z.B 0 = 0,000.... Bis zur n-ten Zeile ergeben sich lediglich Partialsummen. Das Vollständigkeitsaxiom gilt bei mir ebenso wie bei Cantors Diagonalzahl. ⇒ Liste vollständig.

BF: Dann gebe ich Ihnen recht, es gibt eine Bijektion zwischen den Wegen des Baumes und den reellen Zahlen aus (0,1). [...] ABER: Wie transferriert alle Wege in eine Liste? Man muss ja dann jedem Weg eine natürliche Zahl zuordnen können (welche Positionsnummer hat jeder einzelne Weg). Wir wissen ja beide, welche Kardinalität die Menge aller hat. Oder haben Sie einen trotzdem einen Vorschlag, wie man zu einer Abzählung kommt. Welche Nummer hat der Weg, der zu 1/3 führt in Ihrer Liste?

[Bernhard Frey, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 13. 5. 2005]

Der Weg besitzt keine Nummer. Der Wege (nach und von Rom) sind gar viele, aber es sind sicher weniger als die Liste Elemente besitzt (s.u.). Und: Die Elemente sind abzählbar. ⇒ Nach *diesem* Beweis sind die Pfade abzählbar. Akzeptiert man auch den Cantorschen, so sind zwei widersprüchliche Aussagen hergestellt.

Bis zur Zeile *n*:

Anzahl der Punkte, Elemente, Knoten: $-1 + 2^{n+1}$

Anzahl der Pfade, reellen Zahlen: 2^n

Auch danach, auch "im Unendlichen" gilt: Jede Verzweigung erfordert zwei zusätzliche Punkte. Eine Verzweigung macht, wie der Name sagt, zwei Pfade aus einem. Wachstum um 1 bei Pfaden erfordert Wachstum um 2 bei Knoten.
[WM, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 13. 5. 2005]

http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/browse_frm/thread/3588aeea5f57e3ea?scoring=d&q=%22Cantors+Diagonalbeweis+widerlegt%22&

885 Das Kalenderblatt 111106 Der Binäre Baum (8)

Das einfachste und einleuchtendste Argument für die Abzählbarkeit aller Pfade des Binären Baums besteht in der Beobachtung, dass zwei Pfade erst dann als zwei Pfade nachweisbar und also unterscheidbar sind, wenn sie auf einer Ebene $E(n)$ durch verschiedene Knoten verlaufen. (vgl. KB111105) Dies kann nur dann geschehen, wenn es auf einer Ebene $E(m < n)$ einen Knoten gibt, an dem sie sich trennen.

Der Binäre Baum ist aus der Elementarzelle

```
 |
o
/ \
```

aufgebaut. Für jede Ebene außer der Ebene $E(0)$ des Wurzelknotens gilt: Die Anzahl der unterscheidbaren einlaufenden Pfade und die Anzahl der Knoten auf dieser Ebene ist gleich der Anzahl der unterscheidbaren auslaufenden Pfade. Diese Methode ist mindestens so elementar wie die Bijektion. Und die Menge der Knoten ist abzählbar.

Ein binärer unendlicher Baum ist natürlich gleichmächtig zur Binärdarstellung der reellen Zahlen in [0,1]. Jeder Weg (Ast) stellt eine Zahl dar. Diese Äste können sie nicht abzählen! Was sie auch anstellen sie erwischen immer nur eine Teilmenge aller Äste. Fröhliches abzählen und keinen Ast auslassen bitte! [Reinhard Kronberger, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 11. 5. 2005]

Wenn sie dennoch behaupten card(Knoten) = card(Äste) so müssen sie das Beweisen z.B. indem sie eine Bijektion zwischen Knoten und Ästen aufzeigen. [Reinhard Kronberger, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 19. 5. 2005]

BF: Was ich für nicht akzeptabel halte, sind Versuche ein Axiomensystem mit Argumenten widerlegen zu wollen die in diesem Axiomensystem gar nicht zutreffen (sondern nur in einem abweichend definierten). "Wenn man ein Axiomensystem schlagen will, dann mit seinen eigenen Mitteln".

WM: Logik gehört aber nicht dazu?
BF: Logik schon, aber das (n+1)-te Wiederholen bereits entkräfteter "Gegenargumentations-versuche" nicht. {{Schon zu diesem frühen Zeitpunkt also, nur wenige Tage nach Einführung des Binären Baums in die Diskussion, stellte B. Frey die (n +1)-te Wiederholung und damit wohl auch die n-fache Entkräftung fest, obwohl damals die Diskussion noch sehr schleppend verlief und kaum weniger als ein Tag verging, bevor eine Antwort erfolgen konnte.}}
WM: Daß jeder Verzweigungspunkt im binären Baum ein Knoten ist und folglich nicht mehr Äste als Knoten + 1 vorhanden sein können, und folglich auch nicht mehr Pfade, das braucht man nicht zu berücksichtigen?
BF: Für einen Baum der Höhe 4 haben Sie ja so recht. {{Das gilt bis zu jeder natürlichen Höhe. - Und andere Höhen enthält der Binäre Baum nicht.}}
WM: Wir wissen, daß ein Verzweigungspunkt ein Knoten ist und daß ohne Zuwachs an Knoten auch kein Zuwachs an Pfaden erfolgen kann. Dazu benötigt man keine Bijektion.
BF: Können Sie mir den Knoten verraten, in dem der Pfad zu 1/3 endet? Nein? Dann fürchte ich, sie haben beim Abzählen der Pfade mindestens einen vergessen.
[Bernhard Frey, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 23. 5. 2005]

Welcher der (überabzählbar) vielen aus einem Knoten herauslaufenden Pfade wird auf was bijektiv abgebildet? [Hermann Jurksch, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 28. 5. 2005]

Eine Widerlegung der Gültigkeit meiner Abschätzung vermag ich aus allen Erwiderungen, für die diese Beiträge exemplarisch stehen und in denen geradezu stereotyp immer wieder eine Bijektion gefordert und die Existenz von überabzählbar vielen Pfaden vorausgesetzt wird, nicht zu erkennen. Es ist ausgeschlossen, dass eine Verzweigung ohne Knoten existiert, denn eine Verzweigung *ist* ein Knoten. Mehr Pfade als Knoten zu vermuten, würde auf Pfade führen, die nicht mit dem Wurzelknoten verbunden sind. Kein Pfad führt auf solche Pfade.

http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/browse_frm/thread/3588aeea5f57e3ea?scoring=d&q=%22Cantors+Diagonalbeweis+widerlegt%22&

886 Das Kalenderblatt 111107 Der Binäre Baum (9)

Am Ende des Wonnemonats Mai war der Binäre Baum, obwohl ohne Blätter, zu seiner vollen Schönheit ergrünt und hatte seine endgültige Ausprägung erreicht. Die Interpretation des Sachverhalts erwies sich allerdings noch als verbesserungsbedürftig.

```
0           0,
1         0    1
2       0  1  0  1
...     .................
```

Ein Pfad is isomorph zu einer reellen Zahl aus (0,1].
Jeder Pfad beginnt am Ursprungsknoten "0," und endet nirgends. Der Pfad 0,1000..., der aus dem Ursprungsknoten nach rechts und dann immer nach links läuft, wird auf den Ursprungs-knoten abgebildet. Der Pfad 0,01000... wird auf den Knoten (die "0" in Zeile n = 1) abgebildet, aus dem er nach rechts herausläuft. Jeder Pfad wird auf den Knoten abgebildet, aus dem er nach rechts herausläuft. Allein der Pfad 0,000..., der immer nach links läuft, besitzt kein Bild. Aber dieser Schönheitsfehler kann beseitigt werden, indem wir ihn ausschließen und das Intervall (0,1] wählen.
[WM, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 29. 5. 2005]

Ihre Zuordnung bildet die Knoten nur bijektiv auf die Binärzahlen ab, die ab einer endlichen Stelle nur Nullen enthalten. Anders formuliert: Auf diejenigen Pfade, die irgendwann (nämlich ab dem Knoten, auf den sie abgebildet werden) nur nach links gehen. [Christopher Creutzig, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 30. 5. 2005]

Und nun möchten Sie behaupten, daß die andere Hälfte, die nach rechts gehenden Pfade also, mächtiger ist? Das sollte man aus Symmetriegründen zurückweisen. Außerdem wird jeder von ihnen ebenfalls von einem Knoten erfaßt. Irgendwann erwischt es jeden. Es gibt nur einen Pfad ohne zugeordneten Knoten. Das ist die Null.

Aber wir können dem Argument auch noch anders begegnen. Wir machen eine Bijektion wie angegeben und eine zweite mit genau dem anderen Richtungssinn. (Jeweils wird nur ein halber Knoten verwendet.) Beide Bijektionen machen wir gleichzeitig, so daß die Pfade keine Möglichkeit haben, zwischenein von einer Seite des Baumes auf die andere zu springen.

Am Ende fassen wir die Bijektionen zusammen. Ein Faktor 2 spielt ja keine Rolle.
[WM, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 30. 5. 2005]

Selbstverständlich erfasst auch dieser zweite Vorschlag nur solche Pfade, die rationalen Zahlen entsprechen, denn eine Abzählung der Pfade von unendlichen Binärbrüchen und irrationalen Zahlen kann mangels Existenz derselben nicht angegeben werden, was die vorgelegte Abzählung in den Augen vieler Betrachter als ungenügend erscheinen ließ.

http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/browse_frm/thread/3588aeea5f57e3ea?scoring=d&q=%22Cantors+Diagonalbeweis+widerlegt%22&

887 Das Kalenderblatt 111108 Der Binäre Baum (10)

Jeder sieht ein, daß Folgen ihren Grenzwert i.a. nicht enthalten, nicht aber daß das bei Reihen ebenfalls so ist, so sein muß, weil sie eben auch Folgen sind. [WM, "Die Ursache des Transfiniten", de.sci.mathematik, 13. 4. 2005] {{dies ist ein zentrales Argument gegen das Cantorschen Diagonalargument, das Herr Kraemer offensichtlich missverstanden hatte. Meine Behauptung, die Folge 111... befinde sich nicht in der Diagonale der folgenden Liste, interpretierte er so:}}

Herrn Ms {{damit meinte er mich}} aberwitzige Behauptung, dass die "Antidiagonale" dieser
0.......
10......
110.....
1110.....
11110.....
111110.....
....
oder einer aehnlich konstruierten Folge von Binärfolgen aus irgendwelchen nur ihm bekannten Gründen in der Liste enthalten sein "müsse" - weil die Folge ja gegen die Antidiagonalfolge 1111.... "strebe", ist hinlänglich bekannt. [Horst Kraemer, "Endlich: Ermittlungsergebnisse eines Laien", de. sci. mathematik, 21. 2. 2005]

Ich behaupte *nicht*, daß die unendliche Folge von Einsen in irgendeiner Zeile steht. Sie steht nur *dann* in einer Zeile, *wenn* sie auf der Diagonalen zu finden ist. (Mit Null-Komma davor handelt es sich um die Zahl 1/9.) Denn die Diagonale enthält nicht eine einzige Ziffer mehr als die Zeilen. Aberwitzig ist allein die Annahme, die Diagonale sei in irgendeiner Form länger als die Zeilen. Das ist schlichtweg absurd, aber zum Funktionieren des Cantorschen Diagonalverfahrens und zur Generierung transzendenter Zahlen notwendig. [WM, "Endlich: Ermittlungsergebnisse eines Laien", de. sci. mathematik, 7. 3. 2005]

Die Verwechslung ist allerdings systemrelevant und daher alternativlos:

WM: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen. Gäbe es nur endlich viele, so gäbe es eine letzte. Widerspruch.
NM: Richtig. Das Supremum ist hier das Maximum.
WM: Es gibt unendlich große natürliche Zahlen. Gäbe es nur endlich große, so gäbe es eine größte. Kein Widerspruch?
NM: Natürlich Widerspruch. Denn hier ist das Supremum *nicht* das Maximum.
[Norbert Marrek, "Die Ursache des Transfiniten", de. sci.mathematik, 20. 4. 2005]

Die Folge 1, 2, 3, ... besitzt kein Maximum, sondern nur ein Supremum, ∞.
Die Vereinigung der endlichen Anfangsabschnitte $\cup_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2, 3, ..., n\}$ besitzt ein Maximum, $\mathbb{N}$.
Zahlen und Anzahlen sind strikt zu unterscheiden? Ist dies auch Willkür, hat es doch Methode:
Die Folge 0,1; 0,11; 0,111; ... besitzt kein Maximum, sondern nur ein Supremum, nämlich 1/9.
Die Reihe $\Sigma_{n \in \mathbb{N}} 10^{-n}$ besitzt den Wert 1/9, doch bei der Summation über alle $n \in \mathbb{N}$ in der richtigen Folge erhält man folgerichtig und genaugenommen nur sämtliche Glieder der Partialsummenfolge 0,1; 0,11; 0,111; ... (vgl. auch KB111103).

888 Das Kalenderblatt 111109 Der Binäre Baum (11)

In dem neu angelegten Thread B-Baum fasste ich meine bis dato gesammelten Erkenntnisse zusammen.

Der binäre Baum besteht aus Knoten (= Bits 0 oder 1) und Kanten. Jeder durch Kanten vorgezeichnete Weg heißt Pfad.

```
Ebene     |
  0       0,
         /  \
  1     0    1
       / \   / \
  2   0  1  0  1
      /\ /\ /\ /\
  ... ...............
```

Jeder Pfad beginnt auf der Ebene 0 und besitzt kein Ende. Es gibt keinen abbrechenden Pfad. Jede binäre Darstellung einer reellen Zahl aus dem Intervall [0, 1] entspricht einem Pfad im Baum. Jeder Pfad im Baum entspricht der binären Darstellung einer reellen Zahl aus dem Intervall [0, 1]. Das Grundmuster des Baumes besteht aus einer Verzweigung eines Pfades in zwei Pfade.

```
  |
  K
 / \
```

Eine Verzweigung von Pfaden ohne Knoten ist ausgeschlossen. Diese Aussage gilt für jeden Knoten und auf jeder Ebene des Baumes. Die Anzahlen $P(n)$ und $K(n)$ der im Teilbaum bis zur Ebene n existierenden Pfade und Knoten erfüllt die Gleichung

$P(n) / (K(n) +1) = 1$

für jedes *n* und daher auch für den Grenzfall $n \to \infty$.
Ist die Menge aller Knoten abzählbar unendlich, so ist es auch die Menge aller Pfade. Ist die Menge aller Pfade abzählbar unendlich, so ist es auch die Menge aller binären Darstellungen der reellen Zahlen aus dem Intervall [0,1] und damit erst recht die Menge aller reellen Zahlen aus dem Intervall [0,1].
Die Idee der Verzweigung ist mindestens ebenso elementar und berechtigt wie die Bijektionsidee. Die Durchführung verwendet keine Elemente, die von der axiomatischen Mengenlehre ausgeschlossen würden. Das Ergebnis steht aber im Widerspruch zu anderen Beweisen der Mengenlehre. Daraus folgt, daß eine konsistente Mathematik der Abzählung im Unendlichen nicht möglich ist.
[WM, "B-Baum", de.sci.mathematik, 6. 6. 2005]

Die ersten ablehnenden Reaktionen basierten in Verkennung ihrer Zielverfehlung auf Wiederholungen der bekannten Sätze: Es gibt überabzählbar viele Pfade. Nur eine Bijektion kann Abzählbarkeit zeigen.

Noch einfacher: es gibt eine Bijektion zwischen der Menge aller solcher (nichtabbrechenden) Pfade und der Menge $2^{\mathbb{N}}$ aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach 2 (= {0,1}). Insbesondere ist die Menge der Pfade nicht abzählbar. [Marc Olschok, "B-Baum", de.sci.mathematik, 6.6. 2005]

FF: Durch jeden Knoten (außer dem Anfangskoten) laufen *unendlich* viele Pfade. (Genauer *überabzählbar* viele.) [...]
WM: eine Separation ohne Knoten ist ausgeschlossen. Diese Aussage gilt für jeden Knoten auf jeder Ebene des Baumes.
FF: Das stimmt schon. Aber "separiert" werden jeweils *überabzählbar* viel Pfade.
WM: Die Anzahl der separierten Pfade ist gleich der Anzahl der Separationsstellen = Knoten.
FF: Nein.
[Franz Fritsche alias Amicus, "B-Baum", de.sci.mathematik, 6.6. 2005]

Dann sollten Sie ja für jeden Pfad auch eine Positionsnummer haben. Welche Nummer hat der Pfad, der 1/3 repräsentiert? [Bernhard Frey, "B-Baum", de.sci.mathematik, 6.6. 2005]

FF: Man kann leicht zeigen, dass die Anzahl der Pfade nicht abzählbar ist, und dass die Anzahl der Knoten abzählbar ist.
WM: Dann zeigen Sie bitte einmal, woher die vielen Pfade ohne entsprechend viele Verzweigungen kommen sollen.
FF: Huh?! Seit wann wird denn in der Mathematik *so* "argumentiert"?!
[Franz Fritsche alias Amicus, "B-Baum", de.sci.mathematik, 7.6. 2005]

http://groups.google.com/group/de.sci.mathematik/browse_frm/thread/9cc165ebf5f7f7b0?scoring=d&q=%22Der+bin%C3%A4re+Baum%22+2005&

889 Das Kalenderblatt 111110 Der Binäre Baum (12)

Insbesondere meine Betrachtung zum Verhältnis von Pfaden und Knoten, $P(n) / (K(n) +1) = 1$ für jedes *n* und daher auch für den Grenzfall $n \to \infty$ stieß auf Kritik. Sie wurde eher als eine Abzählung der endlichen Pfade verstanden, nicht als die "Quellstärke" des Binären Baums. Ein

Knoten wurde als Ende eines endlichen Pfades und nicht als Beginn des Eigenlebens eines unendlichen Pfades verstanden, der von da an in seinen weiteren Knoten weitere Pfade zeugt. Vielleicht hätte ich statt "existierend" besser "unterscheidbar" gebrauchen und darauf hinweisen sollen, dass ich keine Bijektion sondern eine Abschätzung der unterscheidbaren Pfade bezwecke.

Hier wird es falsch, denn oben steht: "Es gibt keinen abbrechenden Pfad". Daher gibt es auch keine "bis zur Ebene n existierenden Pfade". [Michael Klemm, "B-Baum", de.sci.mathematik, 6.6. 2005]

Bei diesem Grenzprozess werden nur *endliche* Pfade berücksichtigt. [Sebastian Biallas, "B-Baum", de.sci.mathematik, 6.6. 2005]

Sie zählen hier die Anzahl der Bätter eines endlichen Baumes. Bei endlichen Bäumen ist die Anzahl der Blätter gleich der Anzahl der Pfade (von der Wurzel zu einem Blatt). Diese Bijektion funktioniert nur, wenn ein Pfad einen Anfang und ein Ende hat. Und unendliche Pfade haben, wie Sie oben selbst bemerkt haben, kein Ende. [Bernhard Frey, "B-Baum", de.sci.mathematik, 6.6. 2005]

Es gibt eben "keinen abbrechenden Pfad" und keine "bis zur Ebene n existierenden Pfade". [Rainer Willis, "B-Baum", de.sci.mathematik, 8. 6. 2005]

WM: Warum sollten wir nicht einen Querschnitt auf der Ebene *n* anstellen und feststellen können, wieviel Pfade wir unterscheiden können?
MK: Das dürfen Sie machen. Es folgt daraus aber nur, dass es mindestens 2^n Pfade gibt. [Michael Klemm, "B-Baum", de.sci.mathematik, 7.6. 2005]

Es folgt daraus auch, dass es auf jeder Ebene *n* höchstens 2^n Pfade gibt, also insbesondere auf keiner Ebene unendlich viele, wobei keineswegs endende Pfade gemeint, sondern alle unterscheidbaren Pfade erfasst sind.

Die orthodoxe Ablehnung meiner neuen Abschätzungsmethode wird an der folgenden Diskussion exemplarisch deutlich, die aus mehreren Beiträgen zusammengefasst ist:

WM: Es geht nicht darum, der Zahl 1/3 einen numerierten Knoten zuzuordnen.
AS: Ganz im Gegenteil: Da Sie sich auf Cantor beziehen, geht es *ganz genau darum*: Eine Menge *M* ist abzählbar, wenn *M* endlich ist oder *wenn es eine Bijektion zwischen N und M gibt.* Und genau das funktioniert bei Ihrer Konstruktion nicht.
WM: Man kann Gleichzahligkeit und Anzahlen nicht nur auf diese, sondern auch auf andere Weise bestimmen.
AS: Nein.
WM: Wir führen hier keine Gerichtsverhandlung, in der wir uns an eine Strafprozeßordnung halten müssen.
AS: Wir befinden uns aber in einer *wissenschaftlichen mathematischen Newsgruppe* (sci.mathematik). Und hier sollten wir uns an die mathematischen Regeln halten: Abzählbarkeit ist mithilfe der Bijektion definiert.
WM: Es ist möglich, das zu tun, aber muß man darum neue Ideen gänzlich aus der Mathematik verbannen? Wir können unter Einsatz aller Mittel herauszufinden suchen, wie das Zahlenverhältnis von Pfaden und Knoten im binären Baum ist.
AS: Wenn Sie der Zahl 1/3 keine Nummer *n* zuweisen können, sind Sie mit Ihrer Abzählbarkeit auf den Bauch gefallen.

WM: Das funktioniert für die Menge der Knoten. Da beziehe ich mich auf Cantor. Die Knoten sind aber nichts anderes als Separationsstellen von Pfaden oder Pfadbündeln. Sie dürfen gern glauben, daß $\aleph_{10}$ Pfade durch ein Bündel laufen, an jeder Stelle des Baumes. Worauf es allein ankommt, ist die Gesamtzahl der separierten Pfadbündel. Und diese kann nicht größer als die der Separationsstellen sein.
AS: Nein, nein: Wenn Sie Cantor widerlegen wollen: Wir zählen die Pfade, und das geht ganz einfach nicht. Sie können mit Ihrem Gebilde natürlich anstellen, was Sie wollen, abes es hat herzlich wenig mit Cantor zu tun.
[Alois Steindl, "B-Baum", de.sci.mathematik, 7.6. 2005]

890 Das Kalenderblatt 111111 Der Binäre Baum (13)

Eine Bijektion im herkömmlichen Sinne zwischen den Knoten und den unendlichen Pfaden des Binären Baums existiert in der Tat nicht - schon weil unendliche Pfade gar nicht vorhanden sind. Die Ziffernfolge einer reellen Zahl enthält Ziffern nur an natürlichen Indizes. Sie erstreckt sich aber weiter als alle natürlichen Indizes. Und da ω keinen Vorgänger besitzt, existieren nicht einmal alle natürlichen Indizes selbst. In diesem Punkte hatte ich zuweilen fahrlässig formuliert, was zu berechtigter Kritik Anlass gab:

Wann entfernen Sie den peinlichen "Beweis", dass es eine Bijektion zwischen den Knoten und den Pfaden eines vollständigen binären Baums gäbe? Welche Nummer hat der Pfad 11111111111111111111111111111.... in Ihrer Bijektion?
[Horst Kraemer, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci.mathematik, 5. 6. 2005]

Um aber die Abschätzung zu verdeutlichen, griff ich auf eine schon früher (s. KB111107) erwogene Idee zurück: Ich machte einen Schnitt (Schulden, nicht Dedekind) und verdoppelte die Knotenanzahl:

Bleiben wir bei der ursprünglich gewählten Bezeichnung Pfad statt Pfadbündel. Es gibt keine ununterscheidbaren Pfade, d.h. zwei (verschiedene) Pfade unterscheiden sich in mindestens einem Knoten einer Ebene.
Nun erzeugen wir eine Surjektion der Knoten (Separationsstellen) auf die Pfade. Dazu wird die Anzahl der Knoten verdoppelt. Ein Grundelement des Baumes sieht folgendermaßen aus:

|
B_a B_b
/ \

Jedem Pfad, der nach links verzweigt, wird der Knoten B_a zugeordnet, jedem Pfad, der nach rechts verzweigt, wird der Knoten B_b zugeordnet. Verzweigt einer der Pfade abermals, so wird seinen Kindern wieder jeweils ein Knoten der Verzweigungsstelle zugeordnet. Zusammen mit dem gemeinsamen Knoten von oben trägt nun jeder Kindpfad 3/2 Knoten. Verzweigt ein Kindpfad abermals, so wird jedem Enkelpfad wieder jeweils ein Knoten der Verzweigungsstelle zugeordnet. Zusammen mit dem Erbe von oben trägt nun jeder Enkelpfad 7/4 Knoten.
Ich behaupte nicht, daß jeder Pfad immer wieder verzweigt. Ist dieser Fall jedoch gegeben, dann trägt jeder der Pfade in der Ebene n mehr als einen und weniger als 2 Knoten. Das kann leicht berechnet werden, solange die Knoten durch natürliche Zahlen numeriert werden. Unter 1 kann die Knotenzahl nie sinken. Daher liegt eine Surjektion der Knoten in die Pfade vor.
[WM, "B-Baum", de.sci.mathematik, 8. 6. 2005]

Für unendliche Pfade erhält man genau 2 Knoten pro Pfad. Werden die Doppelknoten wieder halbiert, so zeigt auch dieses Argument: Es gibt genau so viele Pfade wie Knoten.

Wie ich erst viel später erfuhr, ist diese Methode bereits seit 1949 bekannt, s. KB111025, Ungleichung von Kraft, hier im Original:
http://dspace.mit.edu/handle/1721.1/12390

CC: Der Knoten darf und kann nur auf einen Pfad abgebildet werden, es unterscheiden sich aber mehrere in diesem Knoten von P. Damit ist diese Konstruktion nicht eindeutig. Die Wahl eines beliebigen Pfades wäre möglich, aber es fehlt die Begründung, warum dadurch alle Pfade erreicht werden sollen.
WM: Meine Konstruktionsvorschrift ereicht alle Pfade, da keiner von einem Pfad, auf den schon ein Knoten abgebildet wurde, abzweigen kann, ohne daß ein Knoten auf ihn selbst abgebildet wird.
CC: Ich bestätige gerne, dass Ihre Beschreibung sich als Konstruktion einer Surjektion auf diese Menge interpretieren lässt. Nur ist das nicht die Menge der Pfade im Baum - es gibt in dieser Menge kein einziges einelementiges Pfadbündel.
WM: Macht nichts. Dann brauchen wir darauf auch keinen Knoten abzubilden.
CC: Wenn in Ihrem Axiomensystem keine Binärdarstellung von 1/3 existiert, ist das kein Widerspruch innerhalb irgendeines anderen Axiomensystems.
CC: Es gibt keine Kante in P, die in keinem anderen Pfad auftaucht. {{Ganz genau so ergeht es der Cantorschen Diagonalzahl. Es gibt keine Ziffer, die eine abschließende Beurteilung ihrer Abwesenheit in der Liste ermöglicht. Auch diese Ziffernfolge individualisiert sich niemals, sondern beschreibt stets ein Intervall.}} Falls Sie das bestreiten, geben Sie bitte die Kante in dem zur 0 gehörigen Pfad mit dieser Eigenschaft an. {{Nein, ich bestreite das nicht. Ich bestreite lediglich, dass man einen Pfad ohne Zielkante definieren, identifizieren, individualisieren kann, wenn er keine endliche Definition besitzt.}}
[Christopher Creutzig, "B-Baum", de.sci.mathematik, 11.-14. 6. 2005]

RK: Kannst du bitte eine Regel angeben, *welchem* dieser Pfade der Knoten *A* nun zugeordnet wird?
WM: Ich sehe nicht, warum es eine solche Regel geben muß. Denn es ist bekannt, daß kein Pfad von einem anderen abweichen kann, ohne daß dies in einem Knoten passiert.
RK: Ich hab die Existenz von 0.001001001... behauptet, das ist 1/7, wenn ich mich nicht täusche. 1/7 wird doch wohl noch existieren, oder nicht? [...] weil aus diesen Bündeln eben niemals (an keiner Stelle *n*) ein einzelner Pfad wird, folgt daraus eben keine Surjektion.
[Rade Kutil, "B-Baum", de.sci.mathematik, 13. 6. 2005]

Die Überabzählbarkeit nicht existierender Pfade anhand einer Nummerierung dieser Pfade zu widerlegen, ist ausgeschlossen. So gesehen war Cantors Trick wirklich eine Meisterleistung.

891 Das Kalenderblatt 111112 Der Binäre Baum (14)

In einer alternativen Abschätzung der Pfadanzahl ohne zersplitterte Knoten (vgl. KB. 111111) kann ein Pfad seine Beknotung nur vermeiden, wenn er gemeinsam mit anderen den Binären Baum ganz verlässt oder wenn er gar nicht darin vorkommt:

Hier eine Surjektion von der Menge der Knoten auf die Menge der Pfade.

|*a*
B
/*b* *c*

Ein *Pfad P* aus dem durch Kante *a* einlaufenden *Pfadbündel* trägt einen Knoten aus der darüberliegenden Ebene. Dieser Pfad *P* repräsentiert eine reelle Zahl, z.B. 1/3. Er verlaufe (oBdA) durch Kante *b*, und mit ihm viele andere. Sobald einer derselben vom Pfad *P* abweicht,

wird der Knoten, in dem dies geschieht, auf ihn abgebildet. Ein anderer Pfad *P'*, z.B. 0,0111... (und mit ihm viele weitere) trennt sich vom Pfad 1/3 und verläuft (oBdA) in *c*. Auf diesen Pfad wird der Knoten *B* abgebildet. Auf jeden der weiteren durch Kante *c* verlaufenden Pfade wird ein Knoten abgebildet, sobald dieser Pfad von *P'* abweicht, nämlich derjenige Knoten, in dem dies geschieht. *b* und *c* sind nur beispielhaft gewählt und können selbstverständlich vertauscht werden.
[WM, "B-Baum", de.sci.mathematik, 11. 6. 2005]

Man beginnt mit einem beliebigen Pfad - dieser bekommt noch keinen Knoten. Einer der Pfade, die am ersten Knoten vom ersten Pfad abweichen wird diesem Knoten zugeordnet. An jedem Knoten wird nun ein Pfad, der von dem bereits zugeordneten, der durch diesen Knoten läuft abweicht zugeordnet. Man könnte meinen, dass man damit jeden denkbaren Pfad erwischt, da ja jeder Pfad irgendwo von einem anderen abweicht. (So verstehe ich WMs Argumentation) Dass dem nicht so ist, möchte ich zeigen, indem ich mich zu jedem Knoten auf einenbestimmten Pfad festlege, der diesem zugeordnet wird.

Der Anfangspfad soll der sein, der immer nach links verläuft. Derjenige, der dem ersten Knoten zugeordnet wird, weicht also dort vom ursprünglichen Pfad ab und geht nach rechts. Jetzt wähle ich wieder den, der ab hier immer weiter nach links läuft. Und entsprechend wird jedem Knoten der Pfad zugeordnet, der bis zu diesem Knoten kommt und ab dort weiter nach links verläuft. Man erkennt sofort, dass hierbei eben nicht allen denkbaren Pfaden ein Knoten zugeordnet werden, sondern nur denen, die ab einem bestimmten Knoten nur nach links laufen. Diese entsprechen abbrechenden Dualzahlen.

Analog zum Cantorschen Diagonalbweis lässt sich auch hier zeigen, dass es keine Zuordnung zwischen Knoten und Pfaden geben kann. (Vorausgesetzt natürlich, man akzeptiert Widerspruchsbeweise und unendlich fortzusetzende Konstruktionsvorschriften.) {{Das tut man merkwürdigerweise immer im Falle des Diagonalargumentes, also speziell auch im vorliegenden Beispiel.}}

Angenommen, man habe eine bijektive Zuordnung zwischen Knoten und Pfaden gefunden. Nun nehme man den Pfad, der dem ersten Knoten zugeordnet wird, und gehe in der ersten Ebene in die andere Richtung wie dieser Pfad. Dann nehme man den nächsten Knoten und gehe in der zweiten Ebene in die andere Richtung wie der diesem Knoten zugeordnete Pfad.
[Manuel Hölß, "B-Baum", de.sci.mathematik, 18. 6. 2005]

Dies funktioniert nur, wenn man eine bestimmte natürliche Zahl auf einen bestimmten Pfad abbilden will. Das will ich aber gar nicht. Ich zeige durch eine obere Abschätzung, daß die Menge aller Pfadbündel, also Zahlenmengen, die sich an einer endlichen Stelle von anderen unterscheiden, abzählbar ist. Dazu ordne ich jedem Pfadbündel die Kante zu, durch die es läuft. Teilt es sich abermals, so ordne ich den neuen Pfadbündeln wieder die jeweilige Kante zu, durch die das jeweilige läuft. Die vorherige Zuordnung kann man vergessen. Das führt zwar dazu, daß mehr Kanten als notwendig verbraucht werden. Macht aber nichts; es gibt genug. Nun sehen wir, daß jede Unterscheidung an einer endlich numerierten Stelle (auf der *n*-ten Ebene des Baumes) zu einer Menge von Pfadbündeln führt, die nicht größer als die Menge der Kanten, also abzählbar ist. [...] Der Trick mit "immer in die andere Richtung gehen" läßt sich für diese obere Abschätzung natürlich nicht anwenden, denn die Zuordnung bzw. Abbildung erfolgt in jeder Richtung, nach rechts und links.
[WM, "B-Baum", de.sci.mathematik, 18. 6. 2005]

Der oben konstruierte Pfad unterscheidet sich von jedem der vorher angenommen an einer endlichen Stelle (wo auch sonst?! Es gibt keine unendliche Stelle.)
[Manuel Hölß, "B-Baum", de.sci.mathematik, 18. 6. 2005]

Um "vorher" etwas anzunehmen, bedarf es einer endlichen Definition des Angenommenen. Durch Pfade *im Baum* kann diese Definition offenbar nicht erfüllt werden, denn an jeder *endlichen** Stelle geht es nur "nach links" oder "nach rechts". Beide Richtungen sind mautpflichtig: Jeder zahlt (-1) Knoten. Fazit: Es gibt nicht genügend allein durch endliche Stellen definierte Pfade im Baum. Das einfachste Beispiel ist der schon erwähnte Pfad 0,000... *in dem Falle*, dass alle Pfade der Form 0,1; 0,01; 0,001; ... vorhanden sind.

892 Das Kalenderblatt 111113 Der Binäre Baum (15)

Wenn eine Zahl sich von allen anderen unterscheidet, so muss dies nicht an einer einzelnen Stelle geschehen. Die Zahl x = 0,11 unterscheidet sich von den Zahlen 0,00 und 0,01 und 0,10. Das ist anders im Binären Baum. Der endliche Pfad der Zahl 0,11 unterscheidet sich in seinem letzten Knoten von allen endlichen Pfaden der übrigen drei Zahlen. Die unverwechselbare Individualität eines von überabzählbar vielen unendlichen Pfaden erfordert ebenfalls einen Zielknoten. Denn woher sonst wäre bekannt, an welcher Stelle der Pfad $p(x)$ der Zahl x von dem Pfad $p(y)$ der Zahl y abweicht? Da gibt es nur zwei Antworten: Entweder besitzt $p(x)$ einen Knoten, den kein anderer Pfad $p(y \neq x)$ besitzt, oder der auf $p(x)$ fortschreitende Wanderer wird durch eine endliche Beschreibung geleitet.

Obwohl jede reelle Zahl x ein eindeutige Binärdarstellung hat, kann man keine Stelle n finden, ab der sie sich von allen anderen unterscheidet. Ja, das ist eigenartig aber noch lange kein Widerspruch. Es reicht nämlich, dass man zu allen anderen reellen Zahlen y eine Stelle n finden kann, an der sich x und y unterscheiden.
[Rade Kutil, "B-Baum", de.sci.mathematik, 13. 6. 2005]

Analysieren wir diese Sätze einmal genau:

"Obwohl jede reelle Zahl x ein eindeutige Binärdarstellung hat, kann man keine Stelle n finden, ab der sie sich von allen anderen unterscheidet."

Also kann man die Zahl x niemals aus der im Pfad $p(x)$ codierten Information extrahieren. Besitzt man die Information trotzdem, so stammt sie aus einer endlichen Definition.

"Ja, das ist eigenartig aber noch lange kein Widerspruch."

Das ist nur deshalb kein Widerspruch, weil man aus einer endlichen Definition zwar jeden Knoten eines unendlichen Pfades erschließen kann, nicht aber aus den Knoten eines unendlichen Pfades die endliche Definition, also die reelle Zahl. Dazu bräuchte man mehr als alle Knoten auf endlichen Ebenen, genügend eben, dass der Pfad sich selbst individualisieren würde, wobei ihm dann ein eigener Knoten zugeordnet werden könnte - auf der Ebene ω.

"Es reicht nämlich, dass man zu allen anderen reellen Zahlen y eine Stelle n finden kann, an der sich x und y unterscheiden."

Zu allen anderen reellen Zahlen? Wieviele sind das? Ihre Anzahl ist auf mindestens zweifache Weise begrenzt: Erstens liegt das daran, dass man beim Nachfragen nicht über die ersten zwei Prozent der unendlich vielen Ebenen hinauskommt: Denn man kann von jedem natürlichen Index beweisen, dass er kleiner als $\omega/50$ ist. (Verbesserungen dieser Abschätzung sind sicher noch möglich, hier aber nicht erforderlich.) Dass man zu jeder anderen Zahl y eine Stelle angeben kann, in der sie sich von x unterscheidet, bedeutet aber auch aus einem anderen Grunde nicht viel, und zwar, weil *jede andere Zahl y*, für die man das tun kann, zu den abzählbar wenigen gehört, die eine endliche Definition besitzen.

Aus dieser Diskussion folgt also, dass die Binärdarstellung einer reellen Zahl ohne endliches Bildungsgesetz nicht eindeutig ist. Bei jeder Ziffer wird zwar das Intervall, in dem die Zahl x liegt, verkleinert, aber es gibt immer unendlich viele Zahlen y mit derselben Dezimaldarstellung. Ein unendlicher Pfad kann keine Information übertragen.

Wenn also die Kritik an meiner Nummerierung der Pfade des Binären Baums berechtigt ist und der Pfad nicht gegen einen zwar prinzipiell unerkennbaren, aber doch existierenden Zielknoten verläuft, dann kann es nur ein endlicher Fahrplan sein, der auf jeder Ebene angibt, ob der Weg nach rechts oder nach links fortzusetzen ist.

Endliche Fahrpläne werden aber nur in abzählbarer Auflage gedruckt.

893 Das Kalenderblatt 111114 Der Binäre Baum (16)

Aber Sie verwechseln nach wie vor die richtige Aussage

$\forall m \in \mathrm{M}\ \exists n \in \mathbb{N}$: x ist an oder vor Stelle n von m verschieden

mit der falschen Aussage

$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathrm{M}$: x ist an oder vor Stelle n von m verschieden

[Christopher Creutzig, "B-Baum", de.sci.mathematik, 27. 6. 2005]

{{Nein ich verwechsele diese beiden Aussagen keineswegs. Ich erkenne lediglich den darin enthaltenen Widerspruch im Falle des aktual Unendlichen.}}

1) Es gibt keine endliche Stelle, an der sich x von allen reellen Zahlen unterscheidet.
2) x unterscheidet sich von allen reellen Zahlen.
3) Es gibt nur endliche Stellen.

Oder kürzer: Pfad x trennt sich von jedem anderen, bevor die Ebene $n = \infty$ erreicht ist, wobei aber immer noch unendlich viel übrig bleiben, solange die Ebene ∞ nicht erreicht ist.

[WM, "B-Baum", de.sci.mathematik, 27. 6. 2005]

Es gibt ja überhaupt keinen einzelnen Pfade, sondern die werden immer von (überabzählbar) vielen begleitet.

Aber zwei Pfade P, P' unterscheiden sich entweder ab einem Knoten K (d.h. an einer endlichen Stelle) oder sie sind gleich.

Mit "anderer Pfad" meinte ich einen beliebigen (aber festen) Pfad aus dem Bild der Abbildung Knoten-Pfade.

[Sebastian Biallas, "B-Baum", de.sci.mathematik, 18. 6. 2005]

Was aber ist "ein fester Pfad"? Einer von dem man weiß, wie seine endliche Definition lautet? Oder einer, von dem man weiß, dass er sich vor Knoten K_n von P unterschieden hat? Darf man schicklich nur nach solchen prominenten Pfaden fragen? Ich verzichte einmal auf diese Attribute und frage einfach nach einem Pfad P' aus der niedrigsten Kaste, der sich durch alle Knoten mit P gemeinsam hindurchschlängelt, ohne P selbst zu sein, denn P wird bekanntlich in jedem Knoten von überabzählbar vielen Parias P' begleitet - und auch die steigen nicht erst unterwegs zu. Zwar kann niemand ein P' nennen, sie alle sind namenlos, doch gäbe es sie nicht, würde jeder Pfad, also auch P, unausweichlich vereinsamen und damit einen Knoten zugeordnet erhalten. Nach Hilbert darf ihre Existenz auch angenommen werden: "In meiner Beweistheorie wird demnach nicht behauptet, daß die Auffindung eines Gegenstandes unter den unendlich vielen Gegenständen stets bewirkt werden kann, wohl aber, daß man ohne Risiko eines Irrtums stets so tun kann, als wäre die Auswahl getroffen." Andernfalls hätten wir:

Für jeden Pfad $P' \neq P$ existiert ein Knoten, in dem er sich von P getrennt hat.

Es existiert kein Knoten, an dem der Pfad P sich von jedem Pfad $P' \neq P$ getrennt hat.

Da alle Pfade am Wurzelknoten beginnen, bedeutet das, Pfad P wird durch alle Knoten von mindestens einem Pfad P' begleitet.

Das ist ein Widerspruch, der auch durch Quantorenmagie nicht aufgehoben wird.

Also muss man die Paria-Legende ernstnehmen? Das hängt von der Einstellung zum Unendlichen ab. Wenn wir es nur für unendlich halten und darauf verzichten, von "allen Knoten" und "allen Pfaden" zu sprechen, dann werden auch keine Parias gebraucht.

894 Das Kalenderblatt 111115 Der Binäre Baum (17)

WM: Unterscheidungsmöglichkeiten für reelle Zahlen gibt es an endlichen Stellen nun mal nur abzählbar viele.
SB: Ja. Das ist aber kein Kriterium für die Abzählbarkeit der reellen Zahlen. Zwei reellen Zahlen unterscheiden sich an irgendeiner Stelle (oder sie sind gleich), damit "verbraucht" man diese Stelle aber nicht. Zwei andere Zahlen können sich ebenfalls an dieser Stelle unterscheiden. {{Dieser Vorschlag ist kurzsichtig. Nehmen wir einmal an, vier reelle Zahlen würden sich an dieser Stelle unterscheiden, der Einfachheit halber in zwei gleichgroße Mengen mit jeweils zwei Zahlen. Dann würde natürlich für jedes Paar ein weiteres Unterscheidungsmerkmal benötigt, insgesamt also drei, um feststellen zu können, dass sich drei Zahlen *x*', *x*'', *x*''' von einer Zahl x und auch untereinander unterscheiden. (Man könnte auch an *x*', *x*°' und *x*'° denken, doch wären auch in diesem Falle drei verschiedene Knoten des Binären Baums erforderlich, um die Unterscheidungsmerkmale I, oI und Io darzustellen.)}}
WM: Wir werfen die entsprechenden Kanten sogar weg, weil es noch genug andere gibt, die auf die Pfadbündel abgebildet werden, sobald sie sich unterscheiden (synonym zu: sobald diese Kanten auf sie abgebildet werden.)
SB: Einmal spreche ich über die Menge *aller* Pfade: Es gibt keine Stelle, an der der Pfad sich "plötzlich" von allen anderen unterscheidet; es gibt ja überhaupt keinen einzelnen Pfade, sondern die werden immer von (überabzählbar) vielen begleitet.
Und einmal greife ich mir zwei beliebige (aber feste) Pfade raus: Aber zwei Pfade *P'*, *P* unterscheiden sich entweder ab einem Knoten *K* (d.h. an einer endlichen Stelle) oder sie sind gleich. {{Letzteres gilt auch für beliebige nichtfeste Pfade.}}
WM: Was an einer endlichen Stelle zur Unterscheidung kommt, benötigt dazu eine Kante im Baum.
SB: Ja.
WM: Diese Kante wird auf das Pfadbündel abgebildet und bleibt ihm solange, bis es sich abermals von etwas untescheidet. Dann kriegt es eine andere Kante (die vorherige wird einfach vergessen, es gibt ja genug).
SB: Das hatten wir doch schon. Diese Konstruktion reicht nicht mal aus, um eine Surjektion in die rationalen (!) Zahlen aus [0,1] anzugeben. Der Pfad von 1/3 wird nämlich keiner Kante zugeordnet, da 0.01, 0.0101, usw. schon alle "verbrauchen". {{Das ist richtig. (s. KB111112)}}
SB: Es gibt aber dummerweise endlose Pfade, die auch gerne eine Kante hätten.
WM: Macht nichts. Ich nehme halt, was kommt. Alles, was irgendwo vom mainstream abweicht, kriegt eine Kante.
SB: Und trotzdem gibt es Pfade, die keine Kante bekommen.
WM: Das ist eine unbewiesene und unbeweisbare Behauptung. Pfadbündel, die sich an einer endlichen Stelle voneinander unterscheiden, können das nur in Form von unterschiedlichen Kanten tun {{oder mit Hilfe von endlichen Definitionen.}} [...] Der Grund dafür ist, daß man sich über Grenzwerte nicht hinreichend Klarheit verschafft hat.
SB: Was haben Grenzwerte denn damit zu tun?
WM: Das ist eine lange Geschichte. Sie wurde vor einiger Zeit diskutiert. Im wesentlichen ging es darum, daß eine Folge i. a. ihren Grenzwert nicht enthält, eine Reihe aber doch.
[Sebastian Biallas, "B-Baum", de.sci.mathematik, 19.-20. 6. 2005]

895 Das Kalenderblatt 111116 Der Binäre Baum (18)

WM: Also nochmals: Es gibt keine unendliche natürliche Zahl! Es gibt keine Ebene, die mit einer unendlichen Zahl numeriert wäre. Was nicht bei einer endlichen Stelle geschieht, das geschieht nie. Deswegen gibt es kein jenseits "jeder endlichen Stelle".

CC: Was mit "jenseits jeder endlichen Stelle" normalerweise gemeint ist, ist, dass es (offensichtlich) für jede endliche Stelle ein "jenseits" gibt und dass die behauptete Eigenschaft für jedes dieser "jenseits" gilt. Das ist auch hier der Fall.

WM: Es gibt für jede endliche Stelle ein Jenseits, aber das liegt nicht jenseits jeder endlichen Stelle, sondern jede Stelle jenseits einer endlichen Stelle ist selbst eine endliche Stelle, solange Stellen gemeint sind, die mit natürlichen Zahlen indizierbar sind. Deshalb habe ich es gerügt, denn es ist es irreführend, von "jenseits jeder endlichen Stelle" zu sprechen (es sei denn, man will die offenbar sinnlose omegate Stelle einführen).

CC: Sobald zwei Zahlen festgenagelt sind, kann man eine Stelle finden, wo sie sich unterscheiden.

WM: Das bedeutet, sie unterscheiden sich anhand von abzählbar vielen Unterscheidungsmerkmalen. Jede von ihnen nennt mindestes eines ihr ganz individuelles Eigen.

CC: Nagelt man die Stelle zuerst fest, geht das nicht.

WM: Das hat mit meinem Beweis überhaupt nichts zu tun. Ich will gar nichts festnageln, lasse alles im Baum fließen wie es will (panta rei). Kommt Unterschied, kommt Kante. [...] Wie weit nun dieser Unterscheidungsprozeß auch vorangeschritten ist.

CC: Ein Prozess hilft nicht weiter, gesucht ist eine statische Abbildung der Kanten auf die reellen Zahlen.

CC: Was ich missverstanden hatte, war folgendes: Ich hatte geglaubt, die Bildmenge Ihrer Abbildung sollten die reellen Zahlen sein.
{{Das hatte ich auch geglaubt. Doch hat sich inzwischen herausgestellt, dass die reellen Zahlen im Binären Baum nicht vetreten sind. Wir haben wohl alle geglaubt, dass der Binäre Baum aktual unendliche Folgen von Knoten enthält, weil diese mit bloßem Auge nicht von der Vereinigung aller endlichen Knotenfolgen unterscheidbar sind. Erst die Diskussion hat gezeigt, dass hier ein Unterschied besteht.}}

WM: Es ergibt sich offenbar ein Widerspruch, der aus dem Versuch, das Unendliche zu messen, resultiert.

CC: Ein Widerspruch womit? Cantors Beweis geht nicht von Pfadbündeln aus, sondern in der üblicherweise präsentierten Form von einzelnen reellen Zahlen. Bei denen kommen Ihre Pfadbündel aber nicht an.
{{Ist es nicht merkwürdig, dass Cantors Diagonalziffernfolge dort ankommt? Immerhin ist es eine monoton steigende Folge, die ihren Grenzwert mit Sicherheit nicht annimmt und auch im Binären Baum darstellbar wäre - als eines der Pfadbündel, die niemals ankommen, oder als einer der Pfade, die sich niemals vereinzeln.}}
[Christopher Creutzig, "B-Baum", de.sci.mathematik, 21.-22.. 6. 2005]

896 Das Kalenderblatt 111117 Der Binäre Baum (19)

Als erstes sollten sie begreifen, daß es binäre unendliche Bäume gibt die abzählbar sind und es welche gibt die überabzählbar sind. [Reinhard Kronberger, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci. mathematik, 19. 5. 2005]

{{Diese Bemerkung ist sehr wertvoll. Denn der Binäre Baum, der alle Pfade der Länge *n* enthält, enthält endlich viele Pfade. Die Vereinigung über alle $\aleph_0$ Ebenen *E*(*n*) auf deren jeder 2^n endliche Pfade enden, ergibt $\aleph_0$ Pfade. Wie unterscheiden sich nun die überabzählbar vielen unendlichen Pfade davon?}}

RK: Ihre zweite Frage wie man unendliche binäre Bäume unterscheiden kann. Sie unterscheiden sich in den Pfaden. Z.B. zwei verschiedene Bäume die nur rationalen Zahlen bzw. eine Teilmengen davon als Pfade haben.

1. binärer Baum: Alle rationalen Zahlen stellen einen binären unendlichen Baum dar. Insbesonders ist der Pfad 010101010101..... enthalten.

2. binärer Baum: Alle Pfade der Art (ersten n Stellen aus $\{0,1\}^n$ und ab n lauter 1 oder lauter 0) für alle n aus $\mathbb{N}$. Auch das ist ein unendlicher binärer Baum der aber 0101010101...... nicht enthält also verschieden zu Baum 1 ist.

Sehen sie wie ihre Intuition versagt?

WM: Bisher noch nicht. Aber vielleicht, wenn Sie einen Unterschied zwischen einem binären Baum angeben, der nur alle rationalen Zahlen enthält, und meinem, der alle reellen enthält.

RK: Sie zeigen immer nur obere Teile ihres Baumes. Da kann man nicht entscheiden ob z.B. $\sqrt{}(1/2)$ als Pfad dabei ist. Sie müssen genau definieren welche Pfade ihr Baum hat.
[Reinhard Kronberger, "Cantors Diagonalbeweis widerlegt", de.sci. mathematik, 24. 5. 2005]

{{Eine ausweichende Antwort. Nicht lange danach hatte sich die Erkenntnis aber doch durchgesetzt:}}

RK: Der binäre Baum der rationalen Zahlen ist, was die Ecken und Kanten anbelangt, identisch zum Baum aller reellen Zahlen.

WM: Sehr richtig erkannt! Warum nicht gleich so?

RK: Der Baum also als solcher ist identisch. Der Unterschied liegt nur in der Pfadmenge.
[Reinhard Kronberger, "Cantors Ende", de.sci.mathematik, 14. 1. 2006]

Auch das ist eine entscheidende Aussage: Allein durch Knoten sind die Pfade offenbar nicht definiert. In der gebräuchlichen Mathematik und dem Cantorschen Diagonalargument geht man jedoch (fälschlich) davon aus, dass eine Zahlendarstellung allein durch ihre Ziffern und ein Pfad allein durch seine Knoten definiert ist. Wie kann man aber die aktual unendlichen Pfade nachträglich im Binären Baum aller abbrechenden rationalen Zahlen, der schon bzw. nur alle Knoten enthält, unterbringen?

897 Das Kalenderblatt 111118 Der Binäre Baum (20)

Ich habe schon mehrfach bestätigt, dass die Menge dieser Pfadbündel abzählbar ist. Ich habe ein Problem damit, zu erkennen, wieso Sie ernsthaft zu glauben scheinen, diese Pfadbündel würden „irgendwann“ einelementig – anders gesagt, was das Ganze mit der Anzahl der reellen Zahlen zu tun haben soll. [Christopher Creutzig, "B-Baum", de.sci.mathematik, 22. 6. 2005]

{{Ich habe ein Problem damit, dass andere ernsthaft zu glauben scheinen, Cantors Diagonalkonstruktion würde irgendwann einelementig.}}

Da Mathematik keine Informatik ist, ist es nicht erforderlich, dass die dort benutzte beliebige Eigenschaft in endlich vielen Zeichen beschreibbar ist. [Christopher Creutzig, "B-Baum", de.sci.mathematik, 21. 1. 2006]

Jeder Pfad ist eine geordnete unendliche Menge von Knoten. Doch definiert kein Pfad eine reelle Zahl. Beweis: Wenn ein unendlicher Pfad eine Zahl eindeutig darstellte, dann müsste es einen ersten Knoten geben, der für die Eindeutigkeit maßgebend ist, ein End-Signal, ohne das ein Informationsübertrag unmöglich ist. Einen solchen Knoten gibt es aber in keinem Pfad.

898 Das Kalenderblatt 111119 Der Binäre Baum (21)

Unendliche Pfade haben, wie Sie oben selbst bemerkt haben, kein Ende. [Bernhard Frey, "B-Baum", de.sci.mathematik, 6.6. 2005] {{Aber sie besitzen einen Anfang!}}

WM: Sind die reellen Zahlen im Baum durch Pfade repräsentiert oder nicht? Die Antwort ist gleichbedeutend mit: Sind die Binärentwicklungen aller reellen Zahlen nur an endlicher Stelle verschieden oder nicht? Ich antworte nicht auf diese Frage. Ich habe nur darauf hinzuweisen, daß alle Binärentwicklungen, die sich an ausschließlich endlicher Stelle unterscheiden, im Baum sind, wenn die Diagonalzahl von Cantors Liste in der Liste ist. Es gibt keine letzte Ziffer in der Diagonalzahl. Trotzdem ist diese angeblich vollständig. Andernfalls könnte man sie ja nicht von den anderen Zahlen der Liste unterscheiden.

RK: Cantor gibt eine Regel an, die für alle $n \in \mathbb{N}$ anwendbar ist. Damit hat er auf einen Schlag eine unendliche Menge von Dingen definiert. Du hingegen scheiterst, weil du Regeln angibst, die für *kein* $n \in \mathbb{N}$ erfüllbar sind (z.B. Kanten an der Tiefe n, die Pfadbündel endgültig unterscheiden).

[Rade Kutil, "B-Baum", de.sci.mathematik, 24. 6. 2005]

Nichts muss sich endgültig unterscheiden. Im Gegenteil. Ich beginne mit einem einzigen Pfad und gebe eine Regel an, wo ein neuer Pfad beginnt - genauer: sein unendlicher Endabschnitt, denn die ersten paar Ziffern sind unbedeutend und durch die Position des Anfangsknotens ohnehin codiert. Die Endziffern dürfen die Pfade selbst wählen. Dass ein Endabschnitt ohne Pfad existiert, wird wohl niemand behaupten wollen? Doch diesen Aspekt erkannte ich erst im November:

CS: Falls Du damit meinst, dass jeder Pfad einen Endknoten hat, so stimmt das genau für endliche Pfade.

WM: Jeder Pfad hat einen Anfangsknoten, und zwar einen eigenen. Du müßtest es eigentlich folgendermaßen einsehen können. Betrachte einen beliebigen Knoten eines binären Baumes:

```
  |
  a
 / \
b   c
```

Ein unendlich langer Pfad führt durch den Knoten *a* und einen der beiden Knoten *b* oder *c*. Der zweite Knoten ist Ursprung eines anderen unendlich lagen Pfades. Auf diese Weise wird jeder unendlich lange Pfad genau einem Knoten zugeordnet, seinem Ursprungsknoten. Zwar lassen wir bei der Zifferndarstellung reeller Zahlen so ein paar Anfangsziffern weg, aber die könnten wir sogar wieder einfügen, indem wir bis zum Anfangsknoten dieselben benutzen, die der durchlaufende Pfad enthält.

CS: Ich sehe nur, dass Du einem Pfad seinen Ursprungsknoten zuordnen kannst. Wie Du jedem Knoten einen Pfad zuordnen möchtest, so dass jeder Pfad seinem Ursprungsknoten zugeordnet wird, ist mir nicht klar. Es geht auch nicht, da in jedem Knoten mehrere Pfade beginnen (sogar genau so viele, wie es insgesamt Pfade gibt).

WM: Es gibt also Pfade, die aus Verzweigungen hervorgehen und solche, die das nicht tun.

CS: Nein, durch jeden Knoten gehen viele verschiedene Pfade.

{{Also die übliche Behauptung. Sie greift nicht. Die Annahme, dass in jedem Knoten genau eine unendliche Knotenfolge *P* beginnt, ist konsistent, denn um sich anschließend von *P* zu unterscheiden, muss eine weitere unendliche Knotenfolge *P' in einem späteren Knoten* von der ersten abweichen. Ohne Informationsverlust kann man sie auch dort beginnen lassen.}}

WM: Durch Knoten *a* geht ein einziger Pfad und ein weiterer entspringt dort. Durch Knoten *c* geht genau dieser neu entstandene Pfad und ein weiterer entspringt dort. usw. Durch jeden Knoten geht also genau ein Pfad.

CS: Du willst zu jedem Knoten genau einen Pfad haben, der in ihm beginnt. Dann meinst Du, dass jeder in der Wurzel beginnende Pfad ab irgendeinem Punkt mit einem dieser Pfade übereinstimmen wird. Habe ich Dich richtig verstanden? Dann musst Du nur noch zeigen, dass das geht. Zu sagen, dass es für Dich so aussieht, als wäre es so, genügt nicht.
{{Der geforderte Beweis ist einfach (s.o): Um sich anschließend von *P* zu unterscheiden, muss eine weitere unendliche Knotenfolge *P' in einem späteren Knoten* von der ersten abweichen.}}

CS: Ich könnte also zum Beispiel jeden Pfad (bis auf den ersten) so wählen, dass er dort, wo er entspringt, einmal nach rechts und danach immer nach links läuft?

WM: Selbstverständlich, doch tu es lieber nicht! Die Zuordnung ist natürlich beliebig, denn an der Vollständigkeit des Baumes ändert sich dadurch nichts. Aber Du zeigst damit, daß es nur "abbrechende" Rationalzahlen gibt - und sonst nichts Reelles, nicht einmal algebraische Irrationalzahlen. Ich bin's zufrieden. Wie aber kommst Du aus dem Dilemma? Denn die Existenz der Zahl $1/\pi$ als vollständige Binärziffernkombination behaupte ich nicht.

CS: 1/3 ist also keine relle Zahl?

WM: Zwischen einer reellen Zahl und der zugehörigen Binärdarstellung mag ein Unterschied bestehen. Doch darüber brauchen wir hier nicht zu diskutieren (will ich hier nicht diskutieren).

Wenn es eine Binärdarstellung von 1/3 gibt, *dann* ist der entsprechende Pfad im Baum. Und *wenn* der Pfad im Baum ist, *dann* ist ihm ein Knoten zugeordnet (ganz einfach, weil jedem Pfad ein Knoten zugeordnet wird, sobald er (d.h.) die verkürzte Version beginnt.

WM: Hier noch ein Gedanke, allerdings zunächst unscharf: Zu jeder einzelnen Irrationalzahl existiert eine Partialsummenfolge aus abzählbar unendlich vielen rationalen Zahlen. Die Partialsummenfolgen von zwei verschiedenen, in $\mathbb{R}$ beliebig eng benachbarten Irrationalzahlen unterscheiden sich in abzählbar unendlich vielen Partialsummen, also in unendlich vielen rationalen Zahlen. (Partialsummen von weniger eng benachbarten erst recht.) Jede Irrationalzahl besitzt demnach "einen Halo" aus abzählbar unendlich vielen Rationalzahlen, der zu keiner anderen gehört. {{Und in Verschärfung dieses Gedankens kann man sagen: Die irrationale Zahl repräsentiert im Binären Baum nichts weiter als ihre Folge rationaler Zahlen, deren Glieder abzählbar sind.}}
[Carsten Schultz, "Weniger als alef ", de.sci.mathematik, 22.-25 11. 2005]

899 Das Kalenderblatt 111120 Der Binäre Baum (22)

Die Anzahl der Pfade in einem unendlichen binären Baum = card($\mathbb{R}$) setzt selbstverständliche die *übliche* Definition eines Pfades voraus. Wenn Sie nun *Pfad anders* definieren, mögen Sie alles mögliche zeigen können, oder auch nicht. Aber mit dem *ursprünglichen* Theorem von oben hat das dann nichts mehr zu tun. *Richtig* ist im Zusammenhang mit dem unendlichen binären Baum: Jeder Pfad beginnt am Wurzelknoten (ganz oben). [Franz Fritsche alias amicus, "Weniger als alef ", de.sci.mathematik, 23. 11. 2005]

Nun lass WM doch erst einmal weitermachen, er scheint gerade so gut dabei zu sein, zu zeigen, dass zum Beispiel die Menge der dyadischen Brüche abzählbar ist. [Carsten Schultz, "Weniger als alef ", de.sci.mathematik, 23 11. 2005]

Offenbar wurde hier vorausgesetzt, dass ich mehr zeigen müsse als Cantor, der lediglich die Überabzählbarkeit aller binären Folgen zeigte, die bekanntlich isomorph zu den dyadischen Brüchen sind. (Naja, seine Nachfolger haben das Argument zwar auf Dezimalbrüche ausgedehnt, aber nach wiederum Cantors Beweis wurde der Geltungsbereich damit nicht signifikant erweitert.)

900 Das Kalenderblatt 111121 Der Binäre Baum (23)

WM: Cantor's argument shows hat the "antidiagonal" of every list can be found. Should it fail in one single case, his argument was proven wrong.

Let the exchange prescription contain any rule for the substitution of the digit 0: $0 \to a$.

The following Cantor-List

$0.000...$
$0.a000...$
$0.aa000...$
$0.aaa000...$
...

always contains the segment of the antidiagonal up to line n in line $n + 1$. As the list has no last line (and no line number ω), there is always a line different from all foregoing lines, which ncontains the constructed antidiagonal.

NN: I had just set my Mathematical Writing class an exercise which involved replying to mathematical questions from a non-mathematician. So I gave it to them in hopes they would give me a good answer to send you. But I think they were inhibited by the knowledge that you are a Dean of General Sciences!

In your Cantor-list I assume a is not 0; so let's take it to be 1. Then the Cantor diagonal number will be 0.111... This is different from all the lines in the list, because each of the lines in the list has just finitely many 1's, and this number has infinitely many 1's.

As you rightly say, however far you go down the list, there is always another line. But these lines will always have just finitely many 1's. So far you haven't said anything Cantor would disagree with.

WM: In decimal representation the following "list"

0.1
0.11
0.111
...

is a sequence with limit 1/9. As you say, 1/9 does not, as a term, belong to the sequence because there is no line enumerated by ∞ (=infinity). But you assert that 1/9 is contained in the list as its (unchanged) diagonal number.

If there is no line with infinitely many digits 1 then there is no diagonal with infinitely many digits 1, because those of the lines are required to build the diagonal.

Of course, 0.111... = 1/9 if we take the limit:

$$\Sigma_{n = 1 \,...\, \infty}\, 10^n.$$

"By definition" it is the same as

$$\Sigma_{n \in \mathbb{N}}\, 10^n.$$

But, in fact, it is not. As there is no line number ∞ in Cantor's list, there are only all partial sums on the diagonal. But every partial sum differs by some $10^n > 0$ from the limit of the series. This value becomes as small a positive number as you like, but it is never equal to nought.This intermingling of partial sums and limit is nconsistent, because every series is a sequence too. [Private Korrependenz, März 2005]

Heute würde ich viel einfacher argumentieren: Die Folge (z_k) der Zeilen

$$z_k = 10^1 + 10^1 + ... + 10^k$$

und die Folge (d_k) der Anfangsabschnitte der Diagonale

$$d_k = 10^1 + 10^1 + ... + 10^k$$

sind für jedes $k \in \mathbb{N}$ identisch. Während die Diagonale ihren Grenzwert d_∞ = 1/9 = 0,111... enthält, enthält die Liste ihren Grenzwert z_∞ = 1/9 = 0,111... nicht. Damit ist die Mathematik abhängig von der Schreibweise. Würden zum Beispiel alle Zeilenziffern in einer Zeile untergebracht, so wäre der Grenzwert wieder da. Überflüssig zu sagen, dass eine konsistente Mathematik solche Ergebnisse nicht duldet.

901 Das Kalenderblatt 111122 Der Binäre Baum (24)

WM: Another way to see this inconsistency is the binary tree

```
      .
    0   1
   0 1 0 1
   ...
```

If binary 0.111... = 1, then the tree also contains all other real numbers of the interval [0,1] as infinite paths (but each one stretching over countably many nodes). All nodes (bits) of the tree are countable, the paths are not, according to set theory. But we know that, up to line number *n*, there are $-1 + 2^{n+1}$) nodes whereas 2^{n+1} different paths start from line number *n*. Hence, in the enumerated domain, there are about as many nodes as paths. After leaving any finite line number *n*, if such a border is existing, we can no longer apply these formulae. But we know that any new branching increases the number of paths by 1 and, by definition, the number of nodes by 1 too (because any branching is a node). Therefore, the number of paths always equals that of the nodes +1.

My discussions with some set-theorists have yielded the above statements and facts but not yet an explanation where my arguing would fail, at least not comprehensible to a non-set theorist. Perhaps your class can help?

NN: This is true for finite trees, but Cantor's argument shows that it is not true for infinite trees. I think the key point is that the branches of the infinite tree are not added cumulatively as you build up the infinite tree through finite steps. None of them is in the tree until the tree already has infinitely many levels.

I've had two correspondents who used essentially your argument on building up trees. I said to both of them that the process of building up the tree and the process of accumulating its branches don't go in step: the tree has to have reached infinitely many levels before any of the branches are in it. I know I didn't convince either of them. The first repeated his argument to me with some bells and whistles attached, so I had to add bells and whistles to the reply. This has happened a few times, and I won't be surprised if the next version comes soon. The other told me that if I hadn't got a better argument than that, it just proved he was right all along.

Part of the problem is that as with 'creating' sets, this language of 'building up' trees and 'adding' branchings is metaphor. Set theorists remove the metaphor by defining the sets involved. {{Dies ist der Schlüsselsatz. Wir wissen bereits (s. KB111117), dass die Knotenmenge eines Binären Baums, der nur abbrechende rationale Zahlen enthält, sich nicht von der Knotenmenge des Binären Baums unterscheidet, der alle reellen Zahlen des Einheitsintervalls enthält. Also sind die reellen Zahlen nicht durch Knoten definiert. Also kann keine Argument, das in einer Cantor-Liste Ziffern (= Knoten) ersetzt, eine reelle Zahl nachbilden oder definieren. Im Gegensatz zu einer konvergenten Reihe der Form $\Sigma a_k 10^{-k}$ konvergiert eine Knotenfolge (a_k) nicht. Ohne Konvergenz und ohne End-Signal definiert sie keine Zahl.}} For example let $B(n)$ be the set of all *n*-term sequences of 0s and 1s; then $B(n)$ is the set of all branches of a complete binary tree $T(n)$ of height *n*. We have $T(n)$ a subset of $T(n + 1)$, and in the limit their union is a complete binary branching tree $T(\infty)$. However, the set $B(\infty)$ of branches of $T(\infty)$ is not the union of the sets $B(n)$, so that counting up the number of branches in each $B(n)$ will not help for counting the size of $B(\infty)$.

WM: I am afraid, I must agree with your second correspondent. As this can happen between men of perhaps moderate but certainly not below-average intelligence, we see mathematics in a deplorable state.

Many thanks, nevertheless, for this discussion, which helped much to clear my thoughts about the problem.

[Private Korrepondenz, März 2005]

902 Das Kalenderblatt 111123 Der Binäre Baum (25)

Im Druck erschien mein Binärer Baum erstmals 2005 in dem Aufsatz "Physical Constraints of Numbers", Proc. MACAS 1, Franzbecker, Berlin 2005, p. 134 - 141.
http://arxiv.org/ftp/math/papers/0505/0505649.pdf
dort noch in stabiler Seitenlage abgebildet, geöffnet nach rechts, die Wurzel links und der Pfad 0,111... nach unten weisend.

INFINITY FINISHED.
Transfinite set theory is based upon the observation that there are different infinities. Within its framework there arise quite a lot of paradoxes, for instance the following: By his famous diagonal argument Cantor proved that the set of real numbers (usually only the real interval between 0 and 1 is considered) is non-denumerable. Its cardinal number is $2^{\aleph_0}$ which is distinctly larger than that of the natural numbers, $\aleph_0$. If we consider the binary tree, however, we find that its nodes, the bits, are countable. Every real number of the interval, including all irrationals and all non-terminating rationals like 1/3 = 0.010101..., as well as all terminating rationals like 0.1000..., is realized by one and only one infinite path of the binary tree, each of which begins at "0.", the first node, and does never end. Up to level n the tree contains $B(n) = 2^{n+1} - 1$ nodes or bits. 2^n separate paths arrive at level n while $P(n) = 2^{n+1}$ separate paths leave it. Therefore we have always, i.e., up to any level enumerated by a finite natural number n,

$$P(n) \le B(n) + 1.$$

But even "in the infinite", should it exist, a path cannot branch into two paths without creating a node. Because a node is defined as a branching point, no increase in $P(n)$ is possible without the same increase in $B(n)$. Therefore, the number $P(n)$ of paths cannot be uncountable unless the number $B(n)$ of nodes is uncountable too.

We can even establish a bijection between nodes and paths, for instance as follows: That path leaving a node with negative slope is defined to be the continuation of the incoming path whereas the node is mapped on that path leaving it with positive slope. In this way every path is counted as soon as it separates from other paths. We cannot, of course, determine that node which is mapped on $\sqrt{3}$. But if $\sqrt{3}$ is an individual number which can appear in a list of real numbers (like those being subject to Cantor's diagonal argument) then it must have its individual path in the tree and its individual node with no doubt.

Being sure that the number $B(n)$ of nodes is countable the number $P(n)$ of path must be countable too. By herewith contradicting the result of Cantor's diagonal proof we see that it is not possible to argue consistently in the domain of infinity. Two reasonable proofs can lead to opposite results.

Da im Druck einige Sonderzeichen falsch wiedergegeben waren, schickte ich ein korrektes PDF meines Vortrags an alle Teilnehmer der Konferenz. Ich erhielt nur zwei Rückmeldungen, jedoch erfreulicher Art:

Danke, dass Sie den Vortrag noch einmal herumgeschickt haben! Ich werde ihn noch einmal studieren und wieder ratlos und vergnügt versuchen, den Denkfehler zu finden - aber es gibt wohl keinen!? Ihnen (und durch Ihren Artikel auch mir) ein schönes Herbstwochenende!

Thank you for sending your paper. I really enjoyed your talk and although I haven't read your paper yet am looking forward to it. I have told my students on several occasions about what you said - some of it - and they find it fascinating too - it is good for starting discussions. Inspiring.

903 Das Kalenderblatt 111124 Der Binäre Baum (26)

WM: Ganz einfach: Jeder Pfad wird dort, wo er (abgesehen von einem endlichen Anfangsabschnitt, der nachträglich vorgesetzt wird) beginnt, dem Knoten zugeordnet, in dem er beginnt. Damit besitzt automatisch jeder Pfad "seinen" Knoten.
RK: Was soll der Unsinn? So können sie nicht Mathematik machen.
WM: Ja, so kann man natürlich argumentieren. Und auf die Frage, warum man so nicht Mathematik machen könne, erfolgt sicher die Antwort, daß das ein jeder Mathematiker weiß. Oder?
RK: Weil das nicht Mathematik ist was sie machen. Weit und breit keine eineindeutige Zuordnung von Pfaden zu Knoten.
[Reinhard Kronberger, "Weniger als alef ", de.sci.mathematik, 28. 11. 2005]

RR: Ein Tipp: Bring' doch mal mit kurzen Rückfragen die Beweisführung von WM zum Thema "Baum" auf den Punkt. Versuche bitte, ihn zu immer knapperen Unsinnigkeiten zu verleiten statt ihm immer wieder Auswege zu lassen.
WM: Wo es doch nur abzählbar viele gibt, müßte das leicht möglich sein!
RR: Ist mal so als Vorschlag zu verstehen. Du hast das doch schliesslich drauf. Mit seinen abzählbaren vielen Wegen "im Baum" kannst Du ihn doch locker mal "an den Baum" fahren lassen. Das verbindet dann das Angenehme mit dem Nützlichen.
[Rainer Rosenthal, "Weniger als alef" , de.sci.mathematik, 29 Nov 2005]

{{Doch daraus wurde nichts.}}

WM: Erstaunlich, ja frappierend sind die Ingeniösität und der Eifer, mit dem Verbalinjurien hier ersonnen und niedergeschrieben werden - und vor allem die Beteuerungen, daß alles schon widerlegt sei. Nur auf die oft zitierte Widerlegung warte ich noch vergebens. Zur Erinnerung (Sie haben ja mal gesagt, mein Beweis müsse sich widerlegen lassen - dann habe ich aber nichts mehr dazu gehört von Ihnen [...]
RR: Nein, das ist nicht wahr: Ihren binären Baum, der nur eine von vielen Varianten Ihres Nichtverstehens ist, habe ich stets unbeantwortet gelassen. Ich habe auch nirgends behauptet, dass ich Ihnen auch da noch irgendwas extra beweisen wolle. Ich halte nichts davon, Ihren Ausweichmanövern nachzufolgen. Würden Sie mathematisch argumentieren, müssten Sie nicht ständig das Vokabular wechseln, um Ihr immer gleiches Grund-Unverständnis zu demonstrieren.
[Rainer Rosenthal, "Mengenlehre Diagonalisierungsverfahren", de.sci.mathematik, 25. 8. 2006]

904 Das Kalenderblatt 111125 Der Binäre Baum (27)

Man hat Ihnen genug Antworten gegeben, was soll ich die wiederkäeuen. Wie stellt man 1/3 dar? Wobei mir noch nicht mal klar ist, welchem Knoten "links", "rechts", ("links") zugeordnet wuerde. Sei's drum. Glücklicherweise ist es für die Mathematik vollkommend egal, denn Ihre

Argumente disqualifizieren sich ja zumeist sofort selbst; ein Nachteil gegenueber den sonst üblichen Beweisen/Widerlegungen grosser Thesen, die im Internet herumkursieren. [hbdere, "Weniger als alef ", de.sci.mathematik, 1. 12. 2005]

{{Die Qualifikation der Kritikaster wurde in einzelnen Fällen an ihren mathematischen Aussagen deutlich - allerdings nur, wenn solche erfolgten:}}

H: Gegenargumente, gute wie schlechte. Meines wäre erst einmal der fehlende Nachweis der Abzählbarkeit der Knoten/Kanten.
WM: Das ist ein schlechtes. Sie können von jedem Knoten Ebene und Nummer (z. B. von links) angeben. Das ist eindeutig Abzählbarkeit (für Knoten und auch Kanten), analog zu den algebraischen Zahlen.
H: Tja, schade. Jetzt versteh ich das.
WM: Nein, Sie verstehen es nicht. Der Baum ist genau so tief wie Cantors Liste. Dort wird eine in der Regel irrationale Zahl aus abzählbar unendlich vielen Ebenen (in diesem Falle Einträgen) erzeugt. Es gibt keinerlei Unterschied zum Baum.
H: Wir haben uns mit viel Schwung einmal im Kreis gedreht. Denn natürlich geht Ihr Argument nur durch, wenn man der Baum nur potentiell unendlich viele Knoten hat. Gäbe es ein Level der Tiefe "unendlich", wäre das schon gar nicht mehr so klar, ob man dann noch so einfach durchzählen kann.
WM: Es gibt auch in Cantors Liste kein Level der Tiefe unendlich, weil man dort nämlich die Diagonalziffer nicht mehr finden könnte.
H: Was Sie also mit ihrem Baum bewiesen haben ist, dass die Menge der Kommazahlen mit endlichen Nachkommastellen abzählbar ist.
WM: Wieder falsch. Dann könnte auch Cantors Liste keine Irrationalzahl als Diagonalzahl erzeugen.
H: Dann könnten wir uns darueber streiten, ob nun 1/3 in Ihrem Baum drin ist oder nicht. Aber genauso gut könnten wir uns gleich darueber streiten, ob es transzendente Zahlen gibt oder nicht. Ihren Baum braucht es dafuer nicht.
WM: Was in Cantors Liste drin sein kann, kann auch im Baum sein, denn er besitzt genau dieselbe Anzahl von Levels. (Was davon wirklich existiert, steht hier nicht zur Debatte.)
H: Und als Angriff auf Cantors Diagonalargument ist es auch nicht zu gebrauchen, da das, wenn ich mich nicht sehr täusche, die Tatsache, dass eine reelle Zahl aktual unendlich viele Nachkommastellen hat, schon voraussetzt.
WM: Das setzt der Baum auch voraus. Trotzdem ist die Menge seiner Knoten und auch seiner Kanten abzählbar.
[hbdere, "Cantors Ende", de.sci.mathematik, 16. 1. 2006]

905 Das Kalenderblatt 111126 Der Binäre Baum (28)

WM: Das ist doch derselbe Fall wie bei Cantor. Eine mit natürlichen Zahlen numerierte Liste wird niemals enden. Trotzdem akzepiert jeder (fast jeder), daß man die Diagonalziffer *jeder* Listenzahl ändern kann.
H: Das ist doch der springende Punkt. Es ist überhaupt nicht notwendig, in Cantors Beweis die unendliche Diagonale konkret anzugeben.
WM: Es ist überhaupt nicht notwendig, den unendlichen Pfad konkret anzugeben.
H: Wichtig ist, dass man für jede der Zahlen in der Liste sicher sein kann, dass sich die Diagonalzahl an wenigstens einer Stelle von ihr unterscheidet. Damit wird ja nur gezeigt, dass es eben *nicht* geht, die reellen Zahlen abzuzählen.

WM: Wichtig ist, daß man für jeden Pfad sicher sein kann, daß er zu einem Pfadbündel gehört und daß dies in einer Ebene niemals ohne eine eigenen Kante zu durchlaufen, vom Rest abzweigt.
H: Sie hingegen versuchen, einen konstruktiven Abzählbeweis zu führen.
WM: Nein ich bemerke lediglich, daß kein Pfadbündel ohne eigene Kante abzweigt.
H: Cantor führt den Nachweis, daß es für jede abzählbare Liste von reellen Zahlen *eine* reelle Zahl gibt, die nicht enthalten ist. Sie müssten nachweisen, dass *alle* reellen Zahlen gemeinsam in einer abzählbaren Liste aufzufinden sind.
WM: Nein, denn das ist ja nach Cantor nicht möglich. Der Baum ist zwar listig, aber keine Liste. Es geht nur um die Mächtigkeit der Pfadmenge, nicht darum, sie in eine Liste einzutragen.
H: Cantors Liste ist nie zu Ende. Das wäre ja eine traurige Form von Abzählbarkeit. Hingegen ist die Diagonalzahl von jedem Eintrag verschieden. Sie geben mir die Nummer des Eintrags, an dem sie gleich sein soll, und dann kann ich Ihnen sagen, warum sie dort ungleich ist. {{Warum "was" dort "wem" ungleich ist?}}
WM: Sie geben mir die Ziffern der Irrationalzahl, und ich kann Ihnen sagen, in welchem Pfadbündel sie steckt. Alle angebbaren Ziffern finden sich als Knoten im Baum. Alle.
[hbdere, "Cantors Ende", de.sci.mathematik, 18. 1. 2006]

Das bedeutet freilich nicht, dass man alle Zahlen aus dem Eiheitsintervall im Baum finden könnte, sondern nur alle in Form von Ziffernfolgen, also als Cantorsche Diagonalzahl angebbaren. Die Zahl π^{-1} ist im Baum nicht vertreten. Es wird zwar behauptet, man könne π^{-1} von jeder anderen gegebenen Zahl unterscheiden, doch kann man bekanntlich nicht jede andere Zahl geben (weil man mangels einer letzten niemals fertig wird), womit die Behauptung eine leere ist. Das sollte jdem eine Lehre sein. So wie die Implikation
Wenn ich morgen Milliardär werde, dann bin ich reich.
keinen Reichtum zu erzeugen vermag, sowenig liefert die Behauptung
Wenn *x* von π^{-1} verschieden ist, dann gibt es einen letzten gemeinsamen Knoten.
eine eindeutige Identifikation des Pfades der Zahl π^{-1} im Binären Baum.
Und ohne eine endliche Definition der Ziffernfolge von π^{-1} wäre wohl jeder aufgeschmissen, der die Unterscheidung von gegebenen anderen Zahlen *x* wagen wollte.

906 Das Kalenderblatt 111127 Der Binäre Baum (29)

CC: WMs Ansatz scheint der folgende zu sein (ich bitte ggf. um Korrekturen): In einem endlichen binären Baum können wir Kantengewichte so verteilen, dass für jede Kante das Produkt aus ihrem Gewicht und der Anzahl Pfade durch diese Kante gleich 1 ist. Im vollständigen Baum sind (schon aus Symmetriegründen) die Gewichte einer Ebene alle gleich:

```
    o
   / \      1/4
  /\ /\     1/2
 /\/\/\/\   1
```

Es ist nun offensichtlich, was mit diesen Gewichten passiert, wenn man an den Baum unten eine weitere Ebene anhängt, aber die genannte Eigenschaft behalten will: Sie werden alle halbiert, weil die Anzahl der Pfade verdopelt wird. Auch ist klar, dass die Summe der Kantengewichte entlang eines Pfades in einem vollständigen binären Baum der Höhe *n* gerade $2 - 1/2^n$ ist. Die Summe aller Summen von Kantengewichten über alle Pfade muss natürlich gleich der Summe aller Kantengewichte mal Anzahl der durch sie gehenden Pfade sein, schließlich werden einfach nur endliche Summen umsortiert.
WM: Das ist sehr schön wiedergegeben. Allein die Berechnung der Kantengewichte kann so nicht erfolgen.

CC: WMs Argument ist nun, dass man einfach nur den Grenzwert für n gegen unendlich betrachten müsse und könne damit zeigen, dass die Anzahl der Pfade bis auf endliche Konstanten gleich der Anzahl der Kanten sei. Dieser Schritt birgt eine ganze Reihe von Fallstricken, die nicht gerade selten sind und die man eigentlich (er-)kennen sollte.

Beispielsweise:

- Es fehlt eine Argumentation, in welchem Sinne die betrachteten Größen denn stetig von der Höhe des Baums abhängen sollen. Konstanz genügt dabei nicht, wie das klassische Beispiel mit der Länge der Treppendiagonalen zeigt. Ohne ein Stetigkeitsargument ist es nachgerade fahrlässig, $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$ zu setzen, was WM allerdings tut (er will den rechten Wert erhalten und berechnet dafür den linken). Einfacher wäre es, gar nicht erst mit einer endlichen Argumentation zu beginnen, aber damit bricht der ganze Ansatz zusammen,

WM: Das Stetigkeitsargument liefert der Baum selbst. Ein Pfad(bündel) kann sich nur von einem anderen separieren, wenn dies per eigene Kante geschieht. Deswegen verwende ich den Baum. Die Treppendiagonale hat damit nichts zu tun.

CC: Die geometrische Reihe muss irgendwo anfangen. Bei den endlichen Pfaden beginnt sie am Blatt, aber der unendliche Baum hat ja gar keine Blätter (denn ein Blatt wäre das Ende eines, nun ja, unendlichen Pfades).

WM: Die geometrische Reihe 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... besitzt den Wert 2, ohne daß sie irgendwo aufhört. Warum muß meine irgendwo anfangen? Wir benötigen lediglich den Grenzwert des folgenden Objektes:

1
1/2 + 1
1/4 + 1/2 + 1
1/8 + 1/4 + 1/2 + 1
...

Ich sage "Objekt", weil ich ihm in der Literatur noch nicht begegnet bin und daher seinen Namen nicht kenne, wenn es denn schon einen besitzen sollte. Trotzdem wage ich zu behaupten, daß der Grenzwert für die Gliederzahl $n \to \infty$ genau 2 ist.

Der Nachweis geschieht wie üblich. Das Subobjekt mit n Summanden nenne ich K_n.

$$|K_n - 2| = 1/2^{n-1}$$

wird also beliebig klein.

CC: - Außerdem: Im Grenzwert haben *alle* Kanten ein Kantengewicht von *exakt* Null, womit das Vergleichsargument ebenfalls zusammenbricht.

WM: Das ist wieder Zenons Sichtweise. Ein fallendes Hirsekorn verursacht kein Geräusch, also verursacht ein fallender Sack voller Hirsekörner auch kein Geräusch. Nicht anders ist das bei $\sin x / x$ für $x \to 0$. Die separate Berechnung von Zähler und Nenner führt zu nichts. Wir haben es aber nicht nötig, die Gewichte einzelner Kanten zu bestimmen, sondern es genügt, $\lim_{n \to \infty} (2^{n+1} - 2) / 2^n = 2$ zu berechnen.

[Christopher Creutzig, "Cantors Ende", de.sci.mathematik, 25. 1. 2006]

907 Das Kalenderblatt 111128 Der Binäre Baum (30)

LM: Bei Cantors Beweis wird, ausgehend von einer beliebigen unendlich langen Liste reeller Zahlen, eine Folge F

$0,b_1$
$0,b_1b_2$
$0,b_1b_2b_3$
...

reeller Zahlen nach der Vorschrift konstruiert, daß sich jedes b_n von der n-ten Ziffer der n-ten Zahl der Liste L unterscheidet. Anschließend wird gezeigt, daß die so gewonnene Folge F konvergiert und als Grenzwert eine reelle Zahl hat, die nicht in der Ausgangsliste vorhanden gewesen sein kann.

Es wird *nicht* behauptet, daß die Folge F einen Eintrag enthalte, der nicht in der Liste L enthalten war.

WM: Der Grenzwert der Folge (die Diagonalzahl) wird von den Gliedern der Folge im vorliegenden Falle *nicht* angenommen. Das n-te Glied der Folge unterscheidet sich vom unbekannten Grenzwert um mindestens $10^{-(n+1)}$). (Ich setze dabei einmal voraus, daß zur Bildung der Diagonalzahl die 1 durch 2 und jede andere Ziffer durch 1 ersetzt wird.) Die Diagonalzahl ist niemals fertig, es ist keine Zahl, bei der man alle Ziffern prüfen könnte. Der Grenzwert ist außerdem niemals bekannt. Die fertige Diagonalzahl ist also nichts, was tatsächlich in der Liste erscheint, jedenfalls nicht bevor im parallel dazu angebrachten Baum einelementige Pfadbündel zutage treten. Und zwar genau dann.

Alles was wir sagen können, ist, daß sich das n-te Folgenglied von den ersten n Einträgen unterscheidet.

Die Konvergenz der Folge sagt aber auch bei bekanntem Grenzwert nichts darüber aus, ob sich der Grenzwert von allen Listeneinträgen unterscheidet.

Bsp.:

0,9
0,99
0,999
...

Jedes Glied unterscheidet sich von den Listeneinträgen

1
1,0
1,00
1,000
...

Der Grenzwert unterscheidet sich nicht davon.

[Lukas-Fabian Moser, "Abzählbare Liste aller Irrationalzahlen eines Intervalls - hier bitte!", de.sci.mathematik, 23. 2. 2006]

908 Das Kalenderblatt 111129 Der Binäre Baum (31)

AM: Aber je mehr ich darüber nachdenke, desto besser gefällt mir WMs unendlicher binärer Baum als hübsche Kuriosität.

Woher stammt der unendliche binäre Baum denn? Bislang ist der mir noch nicht untergekommen.

WM: Der Baum wächst und gedeiht schon länger. Dass er eine sehr schöne Darstellung für die reellen Zahlen bietet, ist auch längst bekannt. Dass er aber nur dann überabzählbar viele Zweige (separierte Pfade) enthalten kann, wenn es auch ebenso viele Verzweigungen in ihm gibt, ist offenbar neu. Naja, im Unendlichen ist vieles anders. Nur Cantors Liste funktioniert nach den Regeln fürs Endliche.

[Andreas Most, "Wikipedia: Paradoxien der Mengenlehre", de. sci.mathematik, 23. 3. 2007]

WM: Ein auf Ebene 0 beginnender und bis zur Ebene n sich erstreckender Abschnitt eines Pfades soll als Pfadbündel bezeichnet werden. 0,0 ist zum Beispiel ein Pfadbündel, in dem alle Pfade enthalten sind, die zu reellen Binärzahlen 0,000... $\leq r \leq$ 0,0111... gehören. Ein Pfadbündel enthält mindestens einen Pfad.

PW: Stimmt. Jedes Pfadbündel enthält nach deiner Definition überabzählbar unendlich viele Pfade.
WM: Eine einfache Abschätzung zeigt nun, daß die Anzahl der Pfadbündel, zu denen natürlich auch alle einzelnen Pfade gehören (sofern sie existieren), ...
PW: Nein, die einzelnen Pfade sind keine Pfadbündel aus mehreren Pfaden, und sie sind auch nicht leer. [...] Denn die Pfadbündel werden definiert durch *n* Ja-Nein Entscheidungen, während zur Definition eines einzelnen Pfades unendlich viele Ja-Nein Entscheidungen nötig sind.
WM: Aber der Baum ist unendlich. Wenn unendlich viele Entscheidungen möglich sind, dann sind sie im Baum möglich. Wenn es also einzelne Pfade überhaupt gibt, dann sind sie im Baum.
[Philipp Wehrli,"Abzählbare Liste aller Irrationalzahlen eines Intervalls - hier bitte!", de.sci.mathematik, 12. 3. 2006]

Offenbar muss im Binären Baum ein Unterschied zwischen allem endlichen (den Pfadbündeln) und dem Unendlichen (den Pfaden) bestehen, um einen Widerspruch zu vermeiden. Die übliche Erklärung zum Charakter der Grenzmenge ω

Ich dachte, dass sie größer als jedes ihrer echten Anfangsstücke ist, aber dennoch deren Vereinigung, hieße, dass der Limes der zugehörigen Folge gerade nicht angenommen wird.
[Carsten Schultz, "A question for WM", de.sci.mathematik, 26. 11. 2011]

kann offenbar in diesem Falle nicht gelten, denn auch die unendliche die Vereinigung aller echten Anfangsstücke also aller endlichen Pfadbündel im Binären Baum ergibt keine überabzählbare Menge.

909 Das Kalenderblatt 111130 Der Binäre Baum (32)

WM: Das hast Du missverstanden. Es gibt für jeden Pfad zwei Knoten, die keinem anderen Pfad zugeordnet werden.
KL: Jetzt unterschreitet die Argumentation schon die Anforderungen an Anfänger in schulischer Graphentheorie. Du wirst selber leicht zeigen, dass es in einem unendlichen binären Baum zu je zwei Knoten eines Pfades nicht nur einen, sondern unendlich viele weitere Pfade gibt, die alle durch diese beiden Knoten verlaufen.
WM: Der endliche binäre Baum

```
   0,
  / \
 0   1
```

mit einer Ebene besitzt zwei endliche Pfade, nämlich 0,0 und 0,1. Jedem dieser beiden Pfade wird ein Knoten zugeordnet, der nicht zum anderen Pfad gehört, und die Hälfte des Wurzelknotens. Somit besitzt jeder Pfad genau 1/2 + 1 = 3/2 Knoten ganz allein für sich.
Nun erweitere die Überlegung auf zwei Ebenen

```
     0,
    / \
   0   1
  / \ / \
  0 1 0 1
```

mit 1/4 + 1/2 + 1 = 7/4 Knoten pro Pfad, dann auf drei usw. "usw." bedeutet "unendlich". Das wird ausgedrückt durch $\lim_{n\to\infty} (1/2^n + ... + 1/2 + 1) = 2$ Knoten pro Pfad.
[Klaus R. Löffler, "Wikipedia: Paradoxien der Mengenlehre", de. sci.mathematik, 11. 4. 2007]

910 Das Kalenderblatt 111201 Der Binäre Baum (33)

WM: Unter "Separationsstelle" würde ich den konkreten Knoten, also die letzte Gemeinsamkeit der beiden Pfade verstehen. "Index der Separation" bezeichnet nach meinem Verständnis die Ebene, in der der letzte gemeinsame Knoten liegt.

UL: Sei P die Menge der Pfade und K die Menge der Knoten. Dann haben wir also jetzt eine Abbildung f: Px$P \to K$, die jedem Paar von Pfaden (p, q) seine Separationsstelle zuordnet. Diese Abbildung ist wohldefiniert, aber nicht injektiv, denn:

f(0.10...., 0.01.....) = f(0.11...., 0.00....)

Was genau ist jetzt die Bijektion? f selbst kann ja nicht gemeint gewesen sein, denn für Fehlschlüsse, die auf dem Verwechseln von Wohldefiniertheit und Injektivität beruhen, gehört man ja eigentlich "hinter Gitter".

WM: Wir haben f: $P \leftrightarrow K$. Im Detail, das sich im Baum abz. unendlich oft wiederholt:

a|
K
b/ *c*\

Der Pfad, der durch *ab* (bzw *ac*) verläuft, wird einem Knoten weiter oben zugeordnet. Der Pfad, der durch *ac* (bzw. *ab*) verläuft, wird dem Knoten *K* zugeordnet.

Manche Klugdenker behaupten ja, man könne den Knoten immer dem nach links verlaufenden Pfad zuordnen, so dass man schließlich alle Knoten nur auf rationale Pfade (die mit lauter Nullknoten "enden") abgebildet hätte, womit das Argument zwar stimmig (alles abzählbar) aber zahnlos würde (keine irrationalen Zahlen erfasst).

Dass alle reellen Zahlen (die existieren) im Baum repräsentiert sein müssen, und dass, wenn obiges Argument stimmt, keine einzige irrationale Zahl existiert, entgeht diesen Klugdenkern in der Regel.

Um aber die irrationalen Zahlen nicht ganz hinwegzufegen, lasse ich oben die Zuordnung im Detail offen. Ich verlange lediglich, dass jede existierende reelle Zahl aus [0, 1] im Baum repräsentiert sein muss. Das ist ja wohl nicht zuviel verlangt. {{Doch, nach neueren Erkenntnissen ist es zuviel verlangt. Irrational Zahlen sind nicht, wirklich nicht - und das bedeutet auch nicht am Ende der Unendlichkeit - durch Binärbrüche darstellbar.}}
[Ulrich Lange, "Wikipedia: Paradoxien der Mengenlehre", de. sci.mathematik, 11. 4. 2007]

911 Das Kalenderblatt 111202 Der Binäre Baum (34)

F: Ich denke, dass der Fehler bei uns zu suchen ist. Man hat als Mathematiker einfach die Neigung, falsche Dinge nicht so stehen lassen zu wollen.

CS: Ganz genau diesen Impuls kenne ich auch. Man denkt, es müsse doch helfen, wenn man einen Fehler benennt.

WM: Was war doch noch Deine Fehlerbenennung bezüglich des Binären Baums? Um Dir die Antwort zu erleichtern (falls Du gerade jetzt aus wichtigen Gründen Deinem Impuls nicht nachkommen zu können meinst) hier zum Ankreuzen:

Ich, Carsten Schultz, erkläre:

[ ] Es gibt nicht mehr separierte Pfade als Separationsstellen.
[ ] Es gibt mehr separierte Pfade als Separationsstellen.
[ ] Weiß nicht.

CS: Wenn ich Deine Begriffe richtig deute, gibt es mehr separierte Pfade als Separationsstellen. Jedenfalls ist die Mächtigkeit der Potenzmenge der natürlichen Zahlen größer als die der Menge der natürlichen Zahlen. Abzählbar viele binäre Eigenschaften können überabzählbar viele Objekte unterscheiden. Das alles wurde hier aber schon oft genug geschrieben {{und auch schon bewiesen. Aber die Konsistenz der Theorie, in der jener Beweis geführt wurde, konnte noch nicht erwiesen werden und würde, wäre die Theorie richtig, auch niemals erwiesen werden können. Deshalb ist die Suche nach Gegenbeispielen erfolgversprechend. Übertragen aufs Endliche hieße das hier, es gibt Millionen dreistelliger Zahlen im Binärsystem.}}

WM: Dürfte ich dann noch nachfragen, wie die separierten Pfade in Verbindung zum Wurzelknoten "0," stehen? Ich betone, dass sich die Eigenschaft "separiert" nur auf die Unterscheidbarkeit von anderen Pfaden bezieht, nicht auf eine fehlende Verbindung zum Wurzelknoten.

Im binären Baum können nach Konstruktion durch *X* Separationsstellen *X* + 1 Pfade (umständlicher könnte man auch von Pfadbündeln sprechen) voneindander separieren, d.h. unterscheidbar machen. Mehr ist nicht möglich.

[fiesh, Carsten Schultz, "Wikipedia: Paradoxien der Mengenlehre", de.sci.mathematik, 17. 4. 2006]

Die folgenden Überlegungen sind von den Beschränkungen von Zeit, Raum und Materie vollkommen abstrahiert. Es wird also angenommen, dass Zeit, Raum und Materie in unbegrenztem Umfang zur Verfügung ständen. Damit müssen allein die Beschränkungen der Logik in Betracht gezogen werden.

Die natürlichen Zahlen können in unärer Schreibweise mit einem beliebigen Zeichen, z.B. mit dem Zeichen o in folgender Weise zeilenweise und in geordneter Form dargestellt werden:

o
oo
ooo
oooo
ooooo
...

Jede Zeile enthält eine natürliche Zahl. Die erste Zahl ist die 1. In jeder auf eine Zeile folgenden Zeile steht die auf eine natürliche Zahl folgende Zahl. In der *n*-ten Zeile steht die *n*-te natürliche Zahl.

Nun fragen wir nach der Anzahl der Zeichen in der ersten Spalte. Da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, sollte die Anzahl der o in der ersten Spalte unendlich sein. Nun kann die Anzahl der Zeichen nur unendlich sein, wenn es eine Zeile gäbe die unendlich viele Zeichen enthielte. Denn offensichtlich gibt es zu jedem Abschnitt der ersten Spalte immer eine Zeile, so dass Spalte und Zeile die identisch Anzahl von Zeichen enthalten:

o
o
oo
-----
o
o
ooo
-----
o
o
o
oooo

...

Es kann aber keine Zeile mit unendlich vielen Zeichen geben. Also kann auch die Anzahl der Zeichen in der ersten Spalte nicht unendlich sein - denn jedes Zeichen in der ersten Spalte ist in einer Zeile.

[Albrecht Storz, "Über die Existenz unendlicher Zeichenfolgen", de.sci.mathematik, 29. 7. 2007]

912 Das Kalenderblatt 111203 Der Binäre Baum (35)

CS: Da Du ein Buch geschrieben hast, das auch Mengenlehre behandelt, sollten Dir Übersetzungen von den obigen Gleichungen in Aussagen über Knoten und Pfade und zurück möglich sein.
WM: Kein Problem. Man kann durchaus die Grundzüge der Mengenlehre nach Kapitel 7 meines Buches lernen. Es scheint aber, dass es der Kanonik an Konsistenz gebricht.
CS: Warum sollte ich mir mehr Mühe geben, etwas zu erklären, wenn Du es gar nicht verstehen willst?
WM: Ich möchte gern verstehen, wie Du zu der Ansicht gelangst, dass mehr Pfade (Pfadbündel) als Trennstellen existieren können, obwohl bei jeder Trennung lediglich ein Pfad (Pfadbündel) zur Menge der vorhandenen hinzukommt.
Es geht um den Schluss von separierten Pfaden auf ebensoviele Separationspunkte. Es würde helfen, wenn Du den Fehler in diesem Schluss benennen könntest.
CS: Der Fehler an Deinem Schluss ist, dass er unbewiesen ist.
WM: Per Konstruktion des binären Baums läuft ein Pfad (Pfadbündel) in eine Trennstelle ein und zwei kommen heraus.
|Auslaufende Pfade (Padbündel) - Einlaufende Pfade (Pfadbündel)| = |Knoten|
Diese Gleichung gilt für jeden Teil des Baums. Was ist weiter zu beweisen?
Willst Du auch behaupten, dass die Reihe (2 -1 - 1) + (2 - 1 - 1) + ... nicht gegen Null konvergiert? Sogar von der divergenten Reihe 2 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + - ... kann man mit absoluter Sicherheit feststellen, dass keine ihrer Partialsummen größer als 2 und kleiner als 0 ist. Oder gilt das in Deiner Version von Mathematik nicht? Umordnung muss selbstverständlich ausgeschlossen werden, aber das gilt für alle alternierenden {{nicht absolut konvergenten}} Reihen bekanntlich ebenfalls.
Die Verhältnisse an den Koten des Baums lassen sich nun, wegen der unbestrittenen Abzählbarkeit der Knotenmenge, in genau eine solche wohldefinierte Reihe fassen. Wo bleibt also Raum für "größer als zwei" oder gar "$2^{\aleph_0}$" zusätzliche Separationsergebnisse?
[Carsten Schultz, Wikipedia: Paradoxien der Mengenlehre", de.sci.mathematik, 19. 4. 2007]

913 Das Kalenderblatt 111204 Der Binäre Baum (36)

Das Kalenderblatt 111204

RR: Und um auf Ihr Beispiel zu kommen, in dem Sie die Menge *G* = {2, 4, 6, ...} der geraden Zahlen und die Menge *D* = {3, 6, 9, ...} der durch 3 teilbaren Zahlen benutzen, kann ich ich wirklich nicht verstehen, wieso Sie *G* mehr Realität zugestehen wollen als *D*. Die Aussage "*G* hat mehr Realität als *D*" ist doch schlicht falsch, weil *G* keine Obermenge von *D* ist.
WM: Damit implizieren Sie, dass "weniger Realität" identisch mit "echte Untermenge" ist. Während Cantor zwar den Ausdruck Untermenge nicht verwendet, spricht er doch häufig von Teilmenge (erstmals auf S. 201 seiner Werke). Ich meine, dass er seine Ausdrucksweise "weniger Realität" nicht benötigt hätte, wenn es ihm nur um den Teilmengenaspekt gegangen wäre. Aber, wie schon mehrfach betont, wir können das nicht mehr feststellen, und meine Unterstellung, es sei seine Meinung gewesen, war falsch. [...] Ihre Frage zu *G* und *P* ist damit ebenfalls beantwortet.
RR: Ja, und ich halte die Antwort für falsch, zumindest wenn ich Ihre Andeutung so interpretieren soll dass Ihrer Meinung nach *G* mehr Realität habe als *P*.
WM: Das ist nun aber nicht falsch, wie ich Ihnen versichern kann. *Meiner* Meinung nach (IMHO sagt man wohl heute dazu) hat die Menge *G* mehr Realität als *P*, weil sie mehr Elemente enthält und damit "reicher" ist.

RR: Verzeihen Sie mein Breittreten dieses Themas. Wir haben hier aber die Gelegenheit, auch unser Mengen-Vokabular abzugleichen, bevor ich in den separierten Baum klettere. Hier am Boden der Realität diskutiert sich's schwindelfreier als auf separat schwingenden Ästen, Zweigen und Blättern.

WM: Keine Ursache. Nur sollten wir diese schwankenden "Realitäts-" und Reichhaltigkeitsangaben besser meiden. Es gibt ja sehr verschiedene Maße - ich erinnere nur an die trotz Wikipedia-Rausschmiss allseits bekannte Interzession. Aber für den Baum genügt die gute altbewährte Bijektion.

RR: Drunt' in der greanen Au steht a Birnbaum, schau schau.

WM: Obst vom Bodensee? Aus der Brecht-Stadt Ausgburg kann ich da mit einer anderen Obstsorte beitragen:

An jenem Tag im blauen Mond September
Still unter einem jungen Pflaumenbaum ...

{{
http://ingeb.org/Lieder/anjenemt.html
}}
[Rainer Rosenthal, "Wikipedia: Paradoxien der Mengenlehre", de.sci.mathematik, 13. 4. 2007]

In de.sci.mathematik trat nach diesen Beiträgen eine längere Pause ein. Parallel dazu vernahm man jedoch auch in sci.math ein gewaltiges Rauschen der (nicht vorhandenen) Blätter des (gerade deswegen vollständigen) unendlichen Binären Baums.

914 Das Kalenderblatt 111205 Der Binäre Baum (37)

WM:
line number n

```
0           0.
1         0    1
2       0  1  0  1
...     .................
```

1) Each real number of (0, 1) is given by a path stretching over infinitely many nodes (bits).
2) All nodes (bits) of the tree belong to a countable set.
3) A node can only exist within a path.
4) Any node increases the number of paths by 1, from 1 coming in to 2 going out. 2 - 1 = 1.
5) Any node increases the number of nodes by 1.

RS: It simply boggles my mind that this simple proof gives so many people such fits that they refuse to accept it. I continue to be sadly shocked by the number of posts on sci.math daily refuting Cantor's proof. Of course they are always fuzzy on details, but that's to be expected since they can't actually disprove it.

WM: You are talking about Cantor's proof. You could say the same about mine. I do not say, here, that Cantor's proof is wrong. All I say, here, is that another proof leads to another result. The reason is that set theory is inconsistent. If you do not agree, then point out that step of my proof, which is invalid.
[Ron Sperber, "Cantor and the binary tree". sci.math, 25. 5. 2005]

V: But such an "infinite" binary tree is not a list, so this has nothing to say about the validity of Cantor's theorem.

WM: The tree is not a list. Therefore I chose it. Nevertheless it has to say much about infinite sets and Cantor's theorem, namely that the set of nodes and the set of paths are equivalent

sets. The set of nodes is countable and the set of paths is equivalent to the set of reals in (0, 1). That's quite a lot of information, isn't it?
[Virgil, "Cantor and the binary tree". sci.math, 25. 5. 2005]

MS: The error is that "It is simply impossible to assume that one of these numbers becomes uncountably infinite while the other remains countably infinite" does not follow from the previous statements in your proof. The relationships between nodes and paths you supplied require that the tree be finite.
WM: If you assert that, you should give a number *n* as an upper bound. Would you assert that

0.
1
1
1
...

must be finite? Would you assert that

  0.
0   1
0   1
0   1
...

must be finite? Which branching must terminate the tree? How many nodes are admitted?
To prove that a branching is a node is easy, because it is defined so.
[Martin Shobe, "Cantor and the binary tree". sci.math, 25. 5. 2005]

915 Das Kalenderblatt 111206 Der Binäre Baum (38)

DW: A number along a node is always equal to a rational with a denominator that is a power of two. It is simply impossible to assume that one of these numbers becomes 1/3.
WM: Why should 0.010101... not exist in that tree? Every path is infinite by definition as is 0.010101..., by definition.
DW: The path does exist, but there is no node at the end. Or if you wish there is a node at the end (as J.H. Conway does with his surreal numbers), the number of nodes is uncountable. {{Das ist in meinem Binären Baum weder erwünscht noch möglich.}}
[Dik T. Winter, "Cantor and the binary tree". sci.math, 25.5. 2005]

WM: Set theory requires: The number of separated paths is larger than the number of branchings.
DJ: In the infinite case.
[Daniel W. Johnson, "Cantor and the binary tree". sci.math, 7. 6. 2005]

The set of infinite paths in your tree is uncountable. This follows from the result that the range of a function defined on a set is a set.
[Robert Kolker, "Cantor and the binary tree". sci.math, 13. 6.
2005]

You still do not have a bijection, as this will not assign a node to every path. [...] The loophole is that the individual paths never seperate from *all* the others. There will always be an uncountable number of paths left to seperate from. {{But if not in the domain of nodes, where does this separation happen? In the paradise of paths probably?}}
[Martin Shobe, "Cantor and the binary tree". sci.math, 13. 6. 2005]

In an infinite binary *tree* we have the construct, that on each level we have *all* possibilities: accounted by treeing the digit 1 *and* its opposite. So a tree - different to a list - may be a representation of *all* binary representations, and thus may be a construct, which gives access to un-countability. But then we need not only look at the finite paths (to a certain node) but implicitly at the infinite pathes, too, with all their rules to describe their proceeding. And that rules are not listable.... {{but known not to surpass countable abundance.}}
[Gottfried Helms, "Cantor and the binary tree". sci.math, 10. 6. 2005]

It is *not* Cantor's list, it is a list supplied by an onstander. And when given that list he {{Cantor}} is able to construct a number (giving a construction algorithm for each decimal is sufficient) that is provable not on the list. {{That's why I constructed the all-embracing Binary Tree.}}
[Dik T. Winter, "Cantor and the binary tree". sci.math, 15. 6. 2005]

916 Das Kalenderblatt 111207 Der Binäre Baum (39)

MS: You still do not have a bijection, as this will not assign a node to every path.
WM: It will assign a node to every set of paths which has its individual edge.
MS: No. It fails to do so. I showed you how to construct a path that it does not assign a node to.
WM: Double the number of nodes. The set of nodes remains countable. One of the nodes is always related to a path turning right, the other one to a path turning left. Your idea does no longer apply.
MS: It's not too hard to get it too apply. Just work a level down. I.e.

```
      A
      / \
    B  C
   / \   / \
  D EF G
```

The path assigned to *A* must go through exactly one of *D*, *E*, *F*, *G*.
If the path assigned to *A* goes through *D* or *E*, then the path assigned to *A′* must go through exactly one of *F*, *G*. If the path assigned to *A′* goes through *F*, choose the path that goes through *G*. If the path assigned to *A′* goes through *G*, choose the path that goes trough *F*.
If the path assigned to *A* goes through *F* or *G*, then the path assigned to *A′* must go through exactly one of *D*, *E*. If the path assigned to *A′* goes through *D*, choose the path that goes through *E*. If the path assigned to *A′* goes through *E*, choose the path that goes through *D*.
At the next level, (the diagram will show that we picked *D*, but the process will work equally well regardless of which one we actually picked).

```
      B
      / \
    D  E
   / \   / \
  H  I J  K
```

If the path assigned to *B* goes through *D*, then the path assigned to *B′* must go through *J* or *K*. If the path assigned to *D* goes through *H*, choose the path that goes through *I*. If the path assigned to *D* goes through *I*, choose the path that goes through *H*.
If the path assigned to *B* goes through *E*, then the path assigned to *B′* must go through *H*, *I*. If the path assigned to *D′* goes through *H*, choose the path that goes through *I*. If the pathassigned to *D′* goes through *I*, choose the path that goes through *H*.
Repeat at the next level, ...

This path is not assigned to any of your doubled nodes. {{Nein, aber falls der Pfad durch Knoten definierte ist, dann wird ihm ein Knoten zum Verhängnis, sobald er sich identifiziert. Doch das geschieht niemals:}}

Eh? The infinite paths are not distinguished by any particular edge (or point). Every edge and every point is shared with an uncountable number of other paths. The infinite paths are distinguished by the set of edges (or the set of points) that are on it. {{Die übliche unbedachte Ausrede. Auch unendlich viele Knoten, die sie mit anderen teilen müssen, genügen nicht, um einen Pfad zu individualisieren. Information könnten sie ohnehin nicht preisgeben. Es muss demnach eine endliche Definition vorliegen. Doch davon gibt es bekanntlich nur abzählbar viele.}}

[Martin Shobe, "Cantor and the binary tree", sci.math, 15. 6. 2005]

917 Das Kalenderblatt 111208 Der Binäre Baum (40)

MB: If there is a mathematical notion that set theory cannot express, then please say what it is.

WM: Obviously the notion of "rational relation" as used in the binary tree cannot be expressed by mathematical notion: Consider the binary tree which has (no finite paths but only) infinite paths representing the real numbers between 0 and 1. The edges (like *a*, *b*, and *c* below) connect the nodes, i.e., the binary digits. The set of edges is countable, because we can enumerate them

```
             0.
          /a    \
        0        1
      /b  \c   /  \
    0      1  0    1
     .............
```

Now we set up a relation between paths and edges. Relate edge *a* to all paths which begin with 0.0. Relate edge *b* to all paths which begin with 0.00 and relate edge *c* to all paths which begin with 0.01. Half of edge *a* is inherited by all paths which begin with 0.00, the other half of edge *a* is inherited by all paths which begin with 0.01. Continuing in this manner in infinity, we see that every single infinite path is related to 1 + 1/2 + 1/ 4 + ... = 2 edges, which are not related to any other path. The set of paths is uncountable, but as we have seen, it contains less elements than the set of edges. Cantor's diagonal argument does not apply in this case, because the tree contains all representations of real numbers of [0, 1], some of them even twice, like 1.000... and 0.111... . Therefore we have a contradiction:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Card}(\mathbb{R}) & >> & \mathrm{Card}(\mathbb{N}) \\ || & & || \\ \mathrm{Card(paths)} & \leq & \mathrm{Card(edges)} \end{array}$$

MB: First you say the notion of "rational relation" (whatever that means) "cannot be expressed by mathematical notion". Then you challenge me to say what part of your proof is in conflict with set theory. What is the notion of "rational relation" that "cannot be expressed by mathematical notion"? Are you defining a certain relation in set theory or are you definining a relation you claim not to exist in set theory?

WM: Meanwhile there are many who understand the binary tree.

MB: But, no one seems to understand your binary tree. Please state your claim and its proof using standard terminology and words that you clearly define. For example, use the terminology that Halmos uses in "Naive Set Theory". If you don't like that book, then pick a book you like and tell us what it is.

HdB: There are many readers here who *do* understand Mueckenheim's binary tree. And no, binary trees will not be found in Halmos' "Naive Set Theory". Because it's too naive, I suppose ...

WM: I also made this experience. Many mathematicians understood it on the first glance (and felt its dangereous implications - may be that some biased mathematicians do not want to understand it). I think it is not more difficult than Cantor's proofs.
[Moe Blee, Han de Bruijn, "Cantor confusion", sci.math, 14. - 19. 10. 2006]

WM: The result of my proof is valid for all possible theories which allow to define the infinite binary tree.
DM: I still don't know what you mean. ZFC is enough to define an infinite binary tree. Are you saying that your proof can be done in ZFC or are you not saying this? If not, then what are you saying?
WM: If ZFC is enough to define an infinite binary tree, then it should be enough to see that there are more edges than paths. Where is a gap? is ZFC not able to sum the geometric series? Or is it not possible to consider fractions of elements?
DM: Either you have a proof that can be given in ZFC or you don't. Which is it? This shouldn't be a difficult question to answer.
WM: But it is not an interesting question.
DM: Perhaps not interesting to you, but please answer it anyway.
WM: I know of a really good logician who told me that he is unable to translate my proof into ZFC. I don't know what is missing. Neither does he. But, as I said, I will not learn to calculate horoscopes in order to judge that astrology is nonsense.
MB: About a couple of weeks ago you presented an argument about trees, and as you presented your argument, as you described it, it was clearly reasonable to regard you as intending that as a proof in set theory (it would have been *un*reasonable to think the contrary). But later you switched, so that your argument was not to be taken as in set theory.
WM: Why don't you try to find out how it could be presented in set theory? Or why that cannot be done?
MB: That is completely beside the point. You represented that you were giving us a set theoretic proof.
WM: Never! I gave a mathematical proof. That has nothing to do with set thery.
[David Marcus, Moe Blee "Cantor confusion", sci.math, 31. 10. - 10. 11. 2006]

918 Das Kalenderblatt 111209 Der Binäre Baum (41)

WM: Every path which branches into two paths necessarily needs two additional edges for this sake.
J: This looks like a proof by induction. Indeed, you can prove your formula by induction for *finite* paths.
WM: Thanks for admitting your understanding so far.
J: But for infinite ones, you must do one more transfinite step.
WM: No. Any real number has only finite digit positions. [...] Do we need transfinite induction for all the reals? Then, in fact, the natural numbers are not sufficient. Then some digits of 0.111... are undefined. Or do we need transfinity only in special cases, namely then when otherwise set theory would be smashed? [...] Anyhow, in the binary tree there is no transfinity required.
DW: There is. Namely to show that the number of edges in the infinite tree is equal to the limit of the number of edges in the finite subtrees.
WM: Please try to understand the concept of countability. Only in the case of infinite sets it is of interest. Cantor defined it without (and before he was knowing anything about) transfinite induction. [...] Then you need transfinite induction to prove that the number of rationals in the case of an infinite set $\mathbb{Q}$ is countable.
DW: In the case of the edges you show that for finite trees of order n:

#edges(n) = $f(n)$
with some function n. From that you conclude:
#edges(∞) = $f(\infty)$
which requires transfinite induction. To prove that $\mathbb{Q}$ is countable you do not need infinity at all. See the construction of a bijection I gave from $\mathbb{N}$ to $\mathbb{Q}_+$, using simplified continued fractions. This shows that every finite n maps to a finite $q > 0$ and the reverse. So we have a function g: $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ that has an inverse. And that is all that is needed to show countability.
WM: There is no difference between enumerating all the rational numbers in the well-known scheme, starting at the corner of an infinite square matrix

```
   1
  2  3
 6  5 4
7...
```

and enumerating all the edges of the binary tree according to the same scheme

```
   1  2
  6 5 4 3
7 ...
```

Or do you see a difference?
[jpale, Dik T. Winter, "Cantor confusion", sci.math, 26. 10 - 9. 11. 2006]

{{Viele falsche Einschätzungen mögen darauf zurückgeführt werden, dass es mir nicht in allen Fällen sofort gelang, den Teilnehmern der Diskussion den Binären Baum zu erklären.}}
DW: I have shown how you could concatenate the representation of a node with the representations of its parent nodes to get a number.
WM: A number consists of bits. Some numbers consist even of one bit. But you must not mix up these terms. A number like 1/2 consist of the bit sequence 0.1000.... That is a path in my tree:

```
0.
 |
1
 |
0
 |
0
...
```

DW: 1/3 is not in your tree.
WM: Of course it is, like 0.333... is in Cantor's list of decimals.
DW: You are not clear about what the numbers in your tree are. Are they the nodes? Are they the paths? Sometimes you say one thing other times you say something different. So to get proper understanding. What are the things that represent numbers?
WM: Infinite paths.
DW: I do not understand. You stated the nodes represent bits.
WM: Yes. That's the stuff numbers are built from.
[Dik T. Winter, "Cantor confusion", sci.math, 21. 11. 2006]

{{Andere verstanden den Binären Baum sofort.}}
WM: If you don't understand this simple and clear exposition, then there is no hope that you will be able to think any further. {{Dies bemerkte ich leicht genervt gegenüber einem Diskussionsteilnehmer.}}
HdB: Affirmative. It's not a difficult argument altogether.
[Han de Bruijn, "Cantor confusion", sci.math, 23. 11. 2006]

919 Das Kalenderblatt 111210 Der Binäre Baum (42)

MB: I am open to seeing your argument as set theoretic if you would just cooperate. I can't even begin to evalute your argument in terms of set theory if you won't give me a mathematical definition of the relation you first mention in your argument. And from there, I cannot even begin to evaluate your argument without confirming that your use of mathematical terminology is based on the same definitions I would have. Moreover, definitions in graph theory and tree theory differ even among different authors. I am interested in knowing the precise mathematics of your argument. And I humbly represent myself as not an expert in graph theory or trees, which is all the *more* reason that the definitions need to be clear to me.

WM: We need no experts in trees. This tree does nothing else but represent the real numbers of an interval. Here it is in a form which can be understod by every mathematician.

Consider a binary tree which has (no finite paths but only) infinite paths representing the real numbers between 0 and 1 as binary strings. The edges (like *a*, *b*, and *c* below) connect the nodes, i.e., the binary digits 0 or 1.

```
           0.
         /a   \
        0       1
     /b  \c   /    \
    0      1  0     1
   .........................
```

The set of edges is countable, because we can enumerate them. Now we set up a relation between paths and edges. Relate edge *a* to all paths which begin with 0.0. Relate edge *b* to all paths which begin with 0.00 and relate edge *c* to all paths which begin with 0.01. Half of edge *a* is inherited by all paths which begin with 0.00, the other half of edge *a* is inherited by all paths which begin with 0.01. Continuing in this manner in infinity, we see by the infinite recursion

$$f(n+1) = 1 + f(n)/2$$

with $f(1) = 1$ that for $n \to \infty$

$$1 + 1/2 + 1/4 + ... = 2$$

edges are related to every single infinite path which are not related to any other path. (By the way, the recursion would yield the limit value 2 for any starting value $f(1)$.) The load of 2 edges is only related to infinite paths because any finite segment of a path with *n* edges will carry a load of

$$(1 - 1/2^n)/(1 - 1/2) < 2$$

edges. The set of paths is uncountable, but as we have seen, it contains less elements than the set of edges. Cantor's diagonal argument does not apply in this case, because the tree contains all binary representations of real numbers within [0, 1], some numbers even twice, like 1.000... and 0.111... . Therefore we have a contradiction:

$$\begin{array}{ccc} |\mathbb{R}| & > & |\mathbb{N}| \\ || & & || \\ |\{\text{paths}\}| & \le & |\{\text{edges}\}| \end{array}$$

[Moe Blee, "Cantor confusion", sci.math, 10. 11. 2006]

920 Das Kalenderblatt 111211 Der Binäre Baum (43)

CB: I assume you know what "a surjection *T* from edges onto paths" is, yes? It doesn't map 1/2 of an edge to 1/4 of a path! It is a function that maps each edge *in the original diagram* to a path; so that every path is in the image of the function.

WM: Of course. But what I do is somewhat more sophisticated. It requires to know that 1/2 + 1/2 = 1 and some stuff that like.

CB: Since you refuse to describe what you mean by "shares" in a mathematical sense, I can't assign any particular meaning to the assertion "there are enough shares". How do you define this phrase so that we can construct a surjection *T* (edges *in the original diagram* → paths)?
WM: Every edge is divided into shares, namely in as many shares as there are paths to which this edge belongs. [...] The set of shares into which each edge is divided is an infinite set. One share for every path to which this edge belongs. But it is not necessary to divide an edge at all, because it is equally well possible to to map one full edge on every path. In order to disprove this assertion you have only two ways:
(1) You have to find a path which does not split from another path by an edge. This is impossible.
(2) You have to construct a diagonal number, which in the tree is impossible too.
[cbrown, "Cantor confusion", sci.math, 10. 12. 2006]

WM: If someone makes an asserted list of all real numbers and hands it out to Cantor, then Cantor can construct a diagonal number which is not in the list, contradicting the assertion. If someone makes a binary tree of all real numbers and hands it out to Cantor, then Cantor cannot construct a diagonal number which is not in the tree, so no contradiction of completeness is possible.
V: Actually anyone can. One does it by dealing with successive pairs of binary digits to make the representation equivalent to a base 4 representation, in which the Cantor diagonal method works quite nicely.
WM: Not in the binary (or any other) tree. There is any combination realized. So no real number (path) is missing. {{Argumente dieser Art waren auch in der deutschen Sektion bereits aufgetaucht. Sie erfordern aber stets eine listenmäßige Nummerierung von Pfaden.}} [...] The problem with Cantor's theorem $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ is that the function $f(x) = 2^x$ must be discontinuous
For natural $x = n$ we have $2^n < \aleph_0$, for the least infinite $x = \aleph_0$ we have $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. So there is a gap. The values between $\aleph_0$ and $2^{\aleph_0}$ cannot be taken by the function 2^x.
This is highly suspicious, if $\aleph_0$ is to be a number which is in trichotomy with the natural numbers, but I can't prove it wrong.
By means of the binary tree I can exclude any discontinuity. Therefore the number of branches isolated at a certain level *n* grows continuosly from 1 to its maximum value. If this was $2^{\aleph_0}$, then the number of branches could not but call on $\aleph_0$ or at least at a value between $\aleph_0$ and $2^{\aleph_0}$. To show that this is impossible is achieved by the big advantage of the tree: its undoubted continuity.
V: Since the domain and codomain of that function are neither of them topological spaces, or even metric spaces, the notion of continuity is impossible to consider.
WM: Not in the tree with countably many beginnings of separated parts of paths. [...] By means of the binary tree I can exclude any discontinuity. {{Damit meinte ich, dass die Pfade kontinierlich durch die Ebenen laufen und jeder auf seinen Ursprung, nämlich die Wurzel, zurückverfolgt werden kann.}}
V: What is your topology or metric on the binary tree? Absent metrics, or at least a topology, one cannot even speak of continuity or discontinuity of a function.
WM: Look at the tree. Continuity is guaranteed by the edges between two nodes.
[Virgil, "Cantor confusion", sci.math, 14. 12. 2006]

WM: Imagine a tree which contains only paths of rational numbers in infinite representation, i.e., ending with a period of 000... or 111....
The first rational tree contains only the paths 0.000... and 0.111...

```
   0.
  /  \
```

```
  0    1
 /       \
0         1
 .............
```
The second tree contains the paths 0.000..., 0.0111..., 0.1000..., and 0.111... and so on until all rational numbers are represented. Take the union of all these rational trees. It contains all paths representing rational numbers. What distinguishes this union of rational trees from the complete tree? Nothing.

V: Except that it is easy to construct a path in the complete tree not in any member of the union, and therefore not in the union itself.

WM: Fine. Tell me the node or edge which differs from the nodes or edges of the union.

V: x = 0.101001000100001000001.... cannot be in any member of that union.

WM: These trees are constructed by edges and nodes, rigorously. Something that is claimed to exist in the complete tree but not in the union of all rational trees must be distinguished by a node or edge which is not in the latter, but in the former. We will do strict mathematics of nodes and edges here.

There is no node and no edge of the complete tree which is not in the union of all rational trees.

V: But there are lots of paths which are not in that union.

WM: Same edges, different paths. But you do not begin to doubt ZFC? You would rather prefer to doubt your own existence.

V: E.g., given any f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ which is a strictly increasing polynomial function of degree greater than 1, then $y = \Sigma 1/2^{f(n)}$ is not in your union.

WM: That means, it is not anywhere.

V: See above for specific examples of transcendental numbers corresponding to paths not in your tree.

WM: Examples of dreams are not paths in a real tree, not even in a Christmas tree.

[Virgil, "Cantor confusion", sci.math, 29. 12. 2006]

921 Das Kalenderblatt 111212 Der Binäre Baum (44)

V: No one, except possibly WM, is claiming that an infinite binary tree is the same as the union of all binary rational, and therefore finite, trees.

WM: What else could it be? If it is something else: which nodes are distinguishing it from the union of all trees?

V: We are capable of distinguishing between the union of infinitely many finite trees and a single infinite tree.

WM: But you strictly refuse to tell what the difference is.

V: If we cannot refer to a number by its name, we cannot refer to numbers at all. [...] Do unnamable numbers have any existence at all? What numbers are ever referenced in serious mathematics except by being named?

WM: According to set theory, most numbers have no names, no addresses and, therefore, most probably, no existence.

V: What axiom requires that a number have either a name or an address?

WM: No axiom requires this but the definition of a number as an imaginated item requires that an individual number needs an individual address to think about it. [...] So where are the nodes and edges which make the infinite paths longer than any finite path?

V: If you don't know, no one can tell you.

WM: That's my impression too.

V: And the only object that can be a member of that union of trees is an object which is a member of one of those trees. And every path in a finite tree is a finite path.

WM: What about the union of all finite paths?
V: That infinite union of finite trees contains infinitely many nodes and infinitely many edges in infinitely many finite paths, but no infinite paths.
WM: No infinite paths?
Then every path is finite. Yes?
The tree has only a finite number of levels.
The number of finite paths in a tree with n levels is 2^n.
Therefore: Finite number of paths ⇔ Finite number of levels (and finite number of nodes)
Infinite number of levels ⇔ Infinite number of paths ⇒ Infinite paths.
[Virgil, "Cantor confusion", sci.math, 6. - 8. 1. 2007]

922 Das Kalenderblatt 111213 Der Binäre Baum (45)

WM: Can you really believe that one will accept your assertion that two absolutely identical systems of nodes and edges will supply different systems of paths, i.e., strings of nodes and edges?
DW: Yes, it entirely depends on how you find your paths.
WM: There are no paths to find. Paths do exist in the tree.
DW: Consider a graph consisting of three sets, (1) the edges, (2) the nodes and (3) the paths. Consider the following three graphs:

```
   x       x        x
  / \     /          \
 x   x   x---x     x---x
```

WM: Are you joking? We are talking about paths representing real numbers. There is no real number which simutaneously has a 1 and a 0 at the same place. Your example is totally useless.
DW: It is quite similar with your tree. The union of all finite trees gives a tree with all the nodes and edges, but not all the paths of the complete tree.
WM: Only if you insist that there are real numbers which simultaneously have different numerals at the same position.
DW: While the unions of the sets of edges and nodes behave normal, the union of the sets of paths is *not* the set of paths of the complete tree.
WM: No? Who told you so? There are infinite paths because the paths are not finite. You should know from set theory: An infinite sequence is a sequence which is not finite.
DW: And you are arguing about the union of the sets of paths.
WM: Of course, I am arguing about the union of the set of all path which really exist in a binary tree. This union is an infinite set of paths (although the set of paths in each finite tree is finite), and there is no hint on uncountability.
Take the most right path: It is the union of all numbers 0.111...1 with n "1". This union is the number 0.111.... Similarly the union of all initial segments of a well-ordered countable set is this countable set. The union is not an element of the initial segments. But even in infinity, there is only *one* union and not uncountably many unions. [...]
That is precisely the infinite string of finite digit indexes of irrational numbers and similarly the infinite string of finite nodes of infinite paths. But one has no infinite paths in the tree?
DW: Not in the union of finite trees, but it is in the union of the full tree. The two are not the same.
WM: Name a level or a node or and edge which are in one of the trees only.
DW: Why should I do that?
WM: In order to prove that there is evidence for at least one path being not in both trees.
DW: I can name a *path* that is in the complete infinite tree but not in the union of finite trees.
WM: Without different nodes that is an empty assertion.

DW: How many times do I have to explain that to you? Use the definition of the union of an infinite collection of sets. If an element is in one of the sets from the infinite collection it is in the union, if it is in none of the individual sets it is also not in the union.

WM: Do you claim that the union of all finite trees is not an infinite tree? Why do you deny the same for the paths?

The infinite paths in the union of trees are the unions of the respective finite paths. So much should be clear to every reader. What not has been clear, until most recently, is that these unions cannot be more abundant than the finite paths. The unions can at most be as abundant as the finite paths. That is why you try to come up with your fairy tales of different path-systems in identical trees.

DW: You were talking about the union of sets of finite paths. Asking for an infinite path in that union is the same as asking for an infinite number in the (particular) union of sets of finite numbers.

WM: I do not ask for an infinite path in that union. I claim that the union constitutes infinite paths. (That is obvious.) And I claim that these infinite paths cannot be more than the elements of the union. (That is obvious too.)

[Dik T. Winter, "Cantor confusion", sci.math, 6. 1. 2007]

923 Das Kalenderblatt 111214 Der Binäre Baum (46)

WH: The (potentially) infinite sequence of all digits is not in the list, nor is it in the union of all finite binary trees.

WM: Simply draw the path of 1/3 with a slope of 45°:

0.
 0
  1
   0
    1
     ...

Then you see that it is in the tree which contains all levels enumerated by all *n* in ℕ, if and only if it is the diagonal of Cantors list enumerated by all *n* in ℕ.

WH: Thus one cannot say Cantor's diagonal "consists only of finite initial segments".

WM: One must say so. It is similar to saying ℕ consists of finite numbers only.

WH: No. The statement "All elements of ℕ are finite numbers" is true. The statement "All initial segments of Cantor's diagonal are finite is false." There is one (potentially) infinite initial segment

WM: in a list enumerated by all natural numbers? But there is no infinite path in a tree the levels of which are enumerated by all natural numbers?

WH: There are two such trees.

T_1: The union of all finite trees

T_2: The inifinite tree.

Both T_1 and T_2 have levels which are enumeratred by all natural numbers. However, the trees are not the same. T_1 does not contain an infinite path. T_2 does contain an infinite path.

WM: The trees are sets of nodes. Please give a node which is in one but not in the other tree. Otherwise withdraw your assertion of $T_1 \neq T_2$ as wishful believing. Paths are sets of nodes too, they are subsets of trees.

[William Hughes, "Cantor confusion", sci.math, 16. 1. 2007]

WM: If every node is in the tree, then every node of 0.01010101... is in the tree too. When all nodes are there , then all paths are there.

DW: All paths are in the complete tree.
WM: But the union of all finite trees is not the complete tree?
DW: Pray read what I always state: "the union of the sets of paths in the finite trees is not the set of paths in the infinite tree". {{Das ist völlig richtig, denn in den endlichen Teilbäumen befinden sich nur endliche Pfade. Aber auch die unendlichen Pfade bestehen nur aus Knoten und existieren nur dort, wo Knoten sind.}}
WM: Cantor's diagonal can be represented as a (diagonal) path in an infinite matrix. This matrix is the union of finite matrices. It is the same as with the trees.
DW: The diagonal is *not* the union of the sets of diagonals of the finite matrices, because that is a set with infinitely many elements. {{Diese Aussage ist ebenso falsch wie die Aussage, dass die Menge $\mathbb{N}$ nicht die Vereinigung der Singletons aller natürlichen Zahlen und nicht die Vereinigung ihrer Anfangsabschnitte sei.}}
DW: But when you try to prove that the set of paths is countable you are *using* the union of sets of paths, and that is not the set about which you want to prove something.
WM: What I am using is this:
1) The union of all finite trees contains the union of all finite paths and this set is countable.
2) The union of all finite trees contains all nodes.
3) You cannot add another tree to the set of all finite trees without adding at least one node. (The paths are subsets of the set of nodes. Two different sets must be distinguished by at least one element.)
4) But there is no node to add.
5) Therefore the union of trees contains all possible paths.
6) We know that the set of all paths contained in this union is countable.
[Dik T. Winter, "Cantor confusion", sci.math, 16. 1. 2007]

924 Das Kalenderblatt 111215 Der Binäre Baum (47)

DW: At level 2 the finite tree has only paths that go through two nodes. At level 3 the finite tree has only paths that go through three nodes. In the union of the sets of paths there are both paths that go through two nodes and paths that go through three nodes. They are distinct.

WM: I meant the following: According to my original definition, the tree from level 0 to level 1:

```
     0.
   0   1
```

has the paths 0.0000..., 0.0111..., 0.1000..., and 0.1111. (the tails 000... and 111... are always appended.) This set of four paths is also in the tree from level 0 to level 2 and in all greater trees.

DW: No, they are not. I see only paths that go through two nodes. There are no such paths in higher levels. You may give them the same name, that does not make it the same path.

WM: Please look at the paths in original definition: I'll try to draw it again somewhat more suggestive: The finite tree from level 0 to level 1 is:

```
           0.
         /     \
       0       1
     /  \     / \
   0   1  0   1
    |    |   |    |
   0   1  0   1
    |    |   |    |
   0   1  0   1
  ....................
```

This finite tree I call: Trauerweide

DW: So it contains infinitely many nodes? You are again shifting your paradigm. And I would not think about that as a finite tree, only as a tree that splits at finitely many places.

WM: This was my first definition. The property "finite" belongs to the tree because there are splittings only between level 0 and level n. This shows that the union of paths can really be formed. So your recent objections are removed (therefore I do not answer your recent contribtions.)

DW: Remember what you wrote:

(1) In each finite tree the set of paths is finite.
(2) A countable union of finite sets is countable.
(3) So the set of paths in the complete tree is countable.

(3) is not justified because (2) is not about the set of paths in the complete tree. Now try to do this proof *without* using sets of paths.

WM: We can use sets of levels, sets of edges, sets of nodes or sets of paths. Look at the "Trauerweide".

In the union of all finite squares

(11)
\---
(11), (12)
(21), (22)
\---
etc.

there is no infinite diagonal.

DW: Why not? I only state that that diagonal is not in the union of the sets of diagonals of the finite squares.

WM: Which digit is missing?

DW: None. But all sets of diagonals of finite squares contain only finite diagonals, so there can not be an infinite diagonal in their union (which is a set of infinite size).

WM: So there cannot be an infinite diagonal at all?

The Equilateral Infinite Triangle contains all lines which can be enumerated by natural numbers:

```
1    0.1
2    0.11
3    0.111
...........
```

In addition it contains the complete diagonal 0.111... (Otherwise, Cantor's diagonal proof would fail.)

The union of all finite binary trees contains all levels which can be enumerated by natural numbers:

```
0              0.
              /   \
1          0       1
          /  \   /   \
2       0     1 0      1
..............................
```

But it does not contain the complete path 0.111... (Otherwise Cantor's proof of the uncountability of the real numbers was contradicted).

Now, the path 0.111... in fact would look like a diagonal

```
0    0.
1      1
2        1
3          1
.................
```

Are the different notations "line" and "level" the reason for the difference?

What we need is: All paths in the union tree are countable. All possible nodes are in the union tree.

DW: Yes, you desperately need it. I do not need it, but you do.

WM: The countablity of all paths in the union of finite trees is a theorem of set theory. [...] If there is a difference, then it can exist also in Cantor's list. As the digit a_{nn} has always a finite distance from the first line it has also always a finite distance from the first column. You never cover the complete list.

DW: That is something different. Above we are talking about union. Here you are talking about limit.

WM: Why do you refuse to talk about the limit in case of paths?

DW: In that case *you* have to define what you understand under limit. But lets suppose that s_n is the set of paths in the finite tree of level n. I concede that you might be able to define a limit such that

$\lim_{n \to \infty} s_n = s$

where s is the set of paths in the complete tree. But with this you can show nothing about the cardinality of s because

$\lim_{n \to \infty} |s_n| = |s|$

is not necessarily valid.

WM: There are more limits than sequences?

DW: Eh? Why do you think so? Each sequence has only a single limit (when the limit is properly defined and when it exists).

WM: Correct. [...] But let that be. We don't need it. What we need is: All paths in the union tree are countable. All possible nodes are in the union tree. A path can only then differ from all paths of the union tree if there is another node (or if it is running in other directions --- try that argument?).

DW: How than can you draw conclusions about the cardinality of the sets of paths in the union from the cardinalities of the sets of paths in the finite trees?
WM: A union cannot have more elements than are united.
DW: Indeed. But the union is not the complete collection.
WM: The union of finite trees contains all (initial) sequences (of paths). Their number is countable.
DW: As long as you allow only the *finite* initial sequences, they are countable. Not if you allow more. That is because the union of the sets of paths in finite trees does exist just of the set of finite initial sequences. And you proof about sets of paths works for this. But that set is not the set of all paths.
WM: But if there are other paths, then they should prove their being different by showing a node not in the union. Different sets differ by at least one element.
[Dik T. Winter, "Cantor confusion", sci.math, 16. 1. 2007]

925 Das Kalenderblatt 111216 Der Binäre Baum (48)

FN: You have not given a definition of a union of all finite trees.
WM: The union of two finite trees $T(m)$ and $T(n)$ with m and n levels, respectively, where $m < n$, is the tree with n levels.
FN: 1. Let $T(i)$ denote the tree of (finite) depth $i \in \mathbb{N}$.
2. Define depth$(T(i)) := i$.
3. Let $u(E, F)$ denote the function which yields the deepest of two given trees E and F:

$$u(E, F) := \begin{cases} E & \text{if depth}(E) \geq \text{depth}(F) \\ F & \text{else} \end{cases}$$

Introduce the notation $E \cup F := u(E, F)$. So obviously $\forall\, i, j \in \mathbb{N}$: $(T(i) \cup T(j) = T(\max(i, j)))$.
4. Extend max to an arbitrary set S of integers: If $\exists\, m \in S\ \forall\, i \in S$: $(m \geq i)$ then m is called the maximum of S, max (S). (Note: this definition does not state that every S has a maximum).
5. Let V be some (finite) set of trees $\{ T_1, ..., T_n \}$ $n \in \mathbb{N}$.
6. Define the set of depths of a set of (finite) trees: $D(V) := \{ \text{depth}(t) \mid t \in V \}$
6'. We now introduce the notion of the "union of a finite set of trees" (sloppyly "union of trees") as: $\cup V := T_1 \cup ... \cup T_n \quad (n \in \mathbb{N})$
Proof as an exercise that forall sets of finite trees V having card$(V) \in \mathbb{N}$ it holds that
$\cup V = T(\max(D(V))$.
7. Now let V^* denote the set of all finite trees $\{ T(i) \mid i \in \mathbb{N} \}$.
Since $\cup V^*$ is only defined for V having card$(V) \in \mathbb{N}$. Since V^* does not meet this requirement we (you?) have to define what $\cup V^*$ shall mean. The obvious definition "$\cup V^* = T(\max(D(V^*))$" fails due to the reason that $\max(D(V^*)) = \max(\omega)$ is not defined. The questions is: How do you define $\cup V_\omega$?
WM: This definition unites sets of nodes (and sets of edges, respectively)
FN: Let $T_1 = (V_1, E_1)$ and $T_2 = (V_2, E_2)$. What you define here is
$T_1 \cup T_2 := (V_1 \cup V_2 , E_1 \cup E_2)$
which is perfectly legal. But set theoretically a union of trees (ordered pairs) would read

$$T_1 \cup T_2 := \{ V_1, \{ E_1 \} \} \cup \{ V_2, \{ E_2 \} \}$$
$$= \{ V_1, V_2, \{ E_1 \}, \{ E_2 \} \}$$

which is hardly a tree.
WM: and it is valid for Cut Trees (CT) as well as for trees of type Weeping Willow (WWT).
FN: You should take care that union-operation defined so far *is not* identical with the set-theoretical union.

WM: The union of all finite trees is the union of all trees with *n* levels where *n* is a natural number:

$\cup T = T(1) \cup T(2) \cup T(3) \cup \ldots$

FN: This is undefined since your expression has card(ω) many terms. Please supply a finite substitute of that expression. When we (informally) write

$\{1, 2, \ldots\}$ we mean $\{ i \mid i \in \mathbb{N} \}$

$\{ 1 \} \cup \{ 2 \} \cup \ldots$ we mean $\cup \{\{1\}, \{2\}, \ldots\}$

$= \cup \{\{i\} \mid i \in \mathbb{N} \}$

$= \mathbb{N}$.

But when we (informally) write

$T(1) \cup T(2) \cup T(3) \cup \ldots$ we have not yet any definition at all *and* we have no proof (or axiom) that this "infinite union" does exist.

WM: It depends simply on the question whether the union of all natural numbers does exist. This is connected to the union of levels and initial segments and finite trees. See below:

```
0         0.
         /  \
1       0    1
       / \  / \
2     0  1 0   1
...   .....
```

The union $\cup T_i$ of all finite binary trees covers all levels enumerated by natural numbers. With respect to nodes and edges it is identical with the infinite binary tree

$\cup T_i = T_\infty$

According to set theory (including the axiom of choice) a countable union of countable sets is a countable set. The set of paths in the union tree $\cup T_i$ is merely a countable union of finite sets, and, therefore, $\cup T_i$ contains only a countable set of paths. But does $\cup T_i$ contain only infinite paths? An index denotes the level to which a node belongs. The union of all indices of nodes of finite paths is the union of all initial segments of natural numbers

$\{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} \cup \ldots \cup \{1, 2, 3, \ldots, n\} \ldots \cup \ldots = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

This is also the set of all last elements of the finite segments, i.e., it is the set of all natural numbers $\mathbb{N}$. This is the set of all indices - there is no one left out. With respect to this observation we examine, for instance, all finite paths of the tree $\cup T_i$ which always turn right: 0.1, 0.11, 0.111, ... If considered as sets of nodes, their union is the infinite path representing the real number 0.111... = 1.

From this we can conclude that also every other infinite path belongs to the union $\cup T_i$ of all finite trees. We see, the trees $\cup T_i$ and T_∞ are identical with respect to all nodes, all edges, and all paths (which would already have been implied by the identity of nodes and edges). But the set of all paths is countable in the tree $\cup T_i$ and uncountable in the same tree T_∞.

FN: { 1 } ∪ { 1, 2 } = { 1, 2 } is simply true, but does not "hold". There is no free variable in "{ 1 } U { 1, 2 } = { 1, 2 }" for which it could hold for. It is not a statement form.

WM: Above we see a statement in every-day language. This statement is true, i.e., it holds in every-day language (although it will seldom be expressed in every-day language). [...] The union of all paths turning always right gives the path 0.111...

This and some other paths do exist in the tree. Where is the path due to $1/\pi$? If it exists, formally defined, then it exists as defined by the initial segments of the series of digits or bits (Cantor's Fundamentalreihen). Then it exists in the tree too, because the tree is nothing but a representation of real numbers. If $1/\pi$ does not exist {{as an actually infinite sequence of digits}}, as I suspect, then it does neither exist in the tree. Then, even the infinite tree does not exist.

FN: You shall once and for all commit yourself to whether your want to argument with

1. Union of trees.

2. Union of nodes.
3. Union of edges.
4. Union of paths.

WM: No. Each one will be applied where approriate. Otherwise you cannot see the contradiction.

FN: You switch between trees and paths

WM: and levels and edges and sets and subsets. [...] Paths are subsets of the set of nodes. The tree, as I defined it, is an ordered set of nodes. Edges are not required, because the order is given by the original definition. But we can use edges to distinguish paths of the tree from those not in the tree.

FN: Even if we now use

$T(m) \cup T(n) := T(\sup(m, n))$ (fin-*u*')

and and try to define (inf-*u*) by

$T(1) \cup T(2) ... := T(\omega)$

it is still left open what $T(\omega)$ shall mean. One has to take special care for the notation: The union symbol "$\cup$" does not mean the usual set theoretical union.

WM: It does. The nodes can be enumerated in various ways. Here is a very simple method:

0
11, 12
21, 22, 23, 24,
...

The union of trees is the ordered union of their nodes. The union of above elements exists.
[Franziska Neugebauer, "Cantor confusion", sci.math, 19. 1. 2007]

926 Das Kalenderblatt 111217 Der Binäre Baum (49)

WM: The limit $\{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$ does exist according to set theory. Why should the limit $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, ... = \mathbb{N}$ not exist?

DW: There you go again. Set theory does *not* use limits. I know of *no* definition that gives the limit of a sequence of sets. {{Das Kalenderblatt 100727, in dem Grenzwerte von Mengenfolgen erklärt sind,
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/KB/KB%20401-600.pdf
war noch nicht erschienen, und der grenzwertfreie Beweis der Inkompatibilität zwischen Mathematik und transfiniter Mengenlehre war noch nicht geschrieben.}} So pray write down here how *you* define the limit of a sequence of sets.

WM: We need not get involved into a discussion about limits of sets or the etymology of the limit ordinal number. Consider whether the following definitions of $\mathbb{N}$ in your opinion are correct or not.

$\mathbb{N} = \{n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{N} = \cup \{\{0, 1, 2, ..., n\} \mid n \in N\} = \cup \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, ...\}$

If they are acceptable, then consider whether a set which contains all sets of the form $\{0, 1, 2, ..., n\}$ also contains $\mathbb{N}$. And if every set which contains all sets of the form $\{0, 1, 2, ..., n\}$ contains $\mathbb{N}$, why does the union of finite trees $T(n)$ not contain an infinite path?
[Dik T. Winter, "Cantor confusion", sci.math, 19. 2. 2007]

MB: You've not given any set theoretic definition of

"2 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + - ... "

WM: Everybody who has studied a bit of set theory should know

$2 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + - ... < 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + ... = \aleph_0$

So whatever misunderstanding you may want to apply,

$2 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + - ... < 3 < \aleph_0$.

MB: If you want to talk about an infinite summation, then you need to be able to eliminate the '...' and put it in the form: $\Sigma_{n \to \infty}\ F(n)$.

WM: $\Sigma_{n \in \mathbb{N}} (2 - 1 - 1) < 3$.

That is but another way of writing $2 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + - ... < 3$.
[Moe Blee, "Cantor confusion", sci.math, 6. 5. 2007]

927 Kalenderblatt 111218 Der Binäre Baum (50)

WM: *p*'' is, by definition, that path which is with *p* also at the next node, wherever you rest.

WH: Funny, I thought it was different.

WM: No. That was my original definition which you changed. But if you claim to want to use *p*'' only according to your definition, then I'll take *p** as:

Definition: *p** is a path in the binary tree which is with path *p* at the next node $K(p, n+1)$ in the binary tree, whatever node $K(p, n)$ you investigate.

Lemma: In the binary tree for every path *p* there exists at least one path *p** as defined.

Proof: Choose a node $K(p, n)$ of path *p* in the binary tree. There is a path *p** which is with *p* at node $K(p, n+1)$ too such that $K(p, n+1) = K(p^*, n+1)$. This path *p** has been with *p* at all nodes $m < n$ too. The choice of *n* is arbitrary. Therefore the Lemma holds for all nodes $K(p, n)$ of *p* with $n \in \mathbb{N}$.

Remark: This proof is independent of the number of nodes.
[William Hughes, "Cantor confusion", sci.math, 11. 5. 2007]

WM: Definition: *p** is a path in the binary tree which is with path *p* at the next node $K(p, n+1)$ in the binary tree, whatever node $K(p, n)$ you investigate.

FN: I read that definition as:

Definition: A path *p** is called "with a path *p*" if

$\forall\, n\ (n \in \mathbb{N} \Rightarrow K\,(p, n)$ is in $p^*)$

WM: Lemma: In the binary tree for every path *p* there exists at least one path *p** as defined.

FN: Since a path *p* is "with" path *p* at "the next node", $p^* = p$ is such a path which is "with" *p*. But in that case $p^* = p$ is not *different* from *p*. Hence your lemma does not produce anything new.

WM: We see: The assumption that *p* is never single cannot be satisfied other than by assuming a company which is *p* itself. As this is a contradiction, either the assumption is falsified (hence *p* gets divorced from all its company) or the claim of the actual existence of infinitely many nodes is falsified.

WM: Proof: Choose a node $K(p, n)$ of path *p* in the binary tree.

FN: I choose node 1. And the path $\{ (2^n) \}$

WM: There is a path *p** which is with *p* at node $K(p, n+1)$ too such that $K(p, n+1) = K(p^*, n+1)$.

FN: Yes $p^* = p$ is such a path.

WM: This path *p** has been with *p* at all nodes $m < n$ too.

FN: Sure. This path is even with *p* all the nodes $m > n$, too.

WM: The choice of *n* is arbitrary. Therefore the Lemma holds for all nodes $K(p, n)$ of *p* with $n \in \mathbb{N}$.

FN: This does not prove for all $n \in \mathbb{N}$.

WM: Proof for *n* includes all $m < n$. Proof for every *n* includes all $m \in \mathbb{N}$.

FN: I would like to suggest and prove the following

Theorem 1: There is no *p** which is "with" a given path *p* and which is *different* from *p*.

WM: You can give "proofs" for both cases. That is the disadvantage of the assumption of actual infinity. You can prove that every path is separated from *p*. And you can prove that never more than one path is required to establish the undisputed company of *p*.

FN: Proof: Assume there was a path p^* which is with *p* *and* which is different from *p*.

"with *p*" $\Rightarrow \forall\, n\ (n \in \mathbb{N} \Rightarrow K(p, n)$ is node in $p^*)$

"different from *p*"$\Rightarrow \exists\, n\ (n \in \mathbb{N} \Rightarrow K(p, n)$ is not node in $p^*)$

contradiction. q.e.d.

WM: Not the first one in set theory. But, as I said already, it can also be proven that for no set of nodes of *p* the company must differ.

[Franziska Neugebauer, "Cantor confusion", sci.math, 11. 5. 2007]

928 Das Kalenderblatt 111219 Der Binäre Baum (51)

WM: Assume the set P^* of paths $p^* \neq p$ which share some nodes with *p*.

FN: Def. 1. *p* is path

Def. 2. *K* is a non-empty set of nodes with $\forall\, k\ (k \in K \Rightarrow k \in p)$.

Def 3. A set P^* of paths is called "nice" with respect to *p* and *K* iff

1. $\forall\, p^*\ (p^* \in P^* \Rightarrow p^* \neq p)$ and

2. $\forall\, k\ (k \in K \Rightarrow \forall\, p^*\ (p^* \in P \Rightarrow k \in p^*))$.

WM: I assume you meant

2. $\forall\, k\ (k \in K \Rightarrow \forall\, p^*\ (p^* \in P^* \Rightarrow k \in p^*))$.

Def 4: A nice P^* with respect to *p* and *K* is called "really nice", if it is

1. non-empty (i.e. $\exists\, p^*\ (p^* \in P^*)$) and

2. unique (i.e. $\neg\exists\, P^{*\prime}\ (P^{*\prime} \neq P^* \Rightarrow P^{*\prime}$ nice with respect to *p* and *K*))

Def 5: All *p* and *K* are called "really nice" iff there is a P^* that is really nice wrt *p* and *K*.

Theorem: Every set P^* which is really nice with respect to given *p* and *K* has cardinality 1.

Proof: Assume a P^* which is really nice with respect *p* and *K* and assume $\#P^* > 1$

Then there are p^*_1 and p^*_2 both element of P^* and $p^*_1 \neq p^*_2$. Now construct $P^{*\prime} = P^* \setminus \{ p^*_2 \}$. $P^{*\prime}$ is nice, too. Hence P^* is not unqiue and hence not really nice. $\Rightarrow$ contr. to assumption.

Rationale: To speak of "*the* set P^*" implies $\#P^* = 1$.

WM: Your assumption is wrong. "Assume the set P^* of paths $p^* \neq p$ which share some nodes with *p*" means obviously the set of all those paths. This set is unique, namely $T \setminus \{p\}$, where *T* is the set of all paths.

[Franziska Neugebauer, "Cantor confusion", sci.math, 11. 5. 2007]

929 Das Kalenderblatt 111220 Der Binäre Baum (52)

WM: It is undisputed that *p* shares all its nodes with other paths $p^* \neq p$,

FN: There is no *other single* path p^* which shares all its nodes with a given path *p*. This is undisputed.

WM: in fact we do not need P^* at all. We can simply use König's lemma to see that the set of finite paths

$\{[k(p, 0), k(p, 1), k(p, 2), ..., k(p, n)] \mid k(p, n) = k(p^*, n)$ with $p \neq p^*$ and p^* in T, $n \in \mathbb{N}\}$ is infinite.

Or briefly: The set of intersections of *p* with other paths $p^* \neq p$ is infinite. As every node in it is a node belonging to another path $p^* \neq p$, the whole set is the same as the set of nodes of an infinite path p^{**}.

With $p \neq p^*$ and $p^* \in T$: $p \wedge p^* = \{k(p^{**}, n) \mid$ with a fixed $p^{**} \neq p, n \in \mathbb{N}\}$.

In plain text: If every node of p belongs to another path p* too,

FN: Do you mean:

(1) $\forall\, k\ (k \in p \Rightarrow \exists\, p^*\ (p^* \neq p \Rightarrow k \in p^*))$

or
  (1') $\exists\, p^* (p^* \neq p \Rightarrow \forall\, k\, (k \in p \Rightarrow k \in p^*))$
(1) is true, (1') is not.
  WM: and if there are infinitely many nodes in *p*,
  FN: (2)
  WM: then we can use the nodes of *p* which also belong to other paths p^*, to construct an infinite path p^{**}
  FN: (3)
  WM: which is as long as *p*
  FN: (4)
  WM: and has the same nodes as *p*
  FN: (5)
  WM: but is not *p*.
  FN: (6)
Non sequitur.

$\forall\, k\, (k \in p \Rightarrow \exists\, p^* (k \in p^*))$	(1)
$\#p$ not finite	(2)
p^{**} def = $\{ (n, p_i) \mid n \in \mathbb{N} \}$	(3)
$\#p^{**} = \#p$	(4)
$\exists\, p^{**} (\forall\, k \in p^{**} \Rightarrow k \in p)$	(5)
$p^{**} \neq p$	(6)

(6) does not follow from any of the (1) to (5).
  WM: It follows from your assertion that there is no node in *p* which does belong only to *p*. Or is there any reason why this really nice construction should fail?
  FN: It is not valid.
  WM: Why? If no node in *p* belongs only to *p*, then there must be other paths which share the nodes of *p*. I claim that this set of all nodes can be used to construct one other path. If you disagree, please say why that cannot be done. Please prove that at least two paths are required to use up all these nodes.
[Franziska Neugebauer, "Cantor confusion", sci.math, 12. 5. 2007]

Hier haben wir wieder eine Behauptung, die äquivalent zu der Behauptung ist, dass die Vereinigung von Anfangsabschnitten der natürlichen Zahlen mehr enthält als jeder Anfangsabschnitt beiträgt. Da jeder Anfangsabschnitt zu einer endlichen Menge gehört, gilt für jeden, dass eine Vereinigung von Anfangsabschnitten nicht mehr enthalten kann, als in einem der vereinigten Anfangsabschnitte enthalten ist.

930   Das Kalenderblatt 111221   Der Binäre Baum (53)

  V: There cannot be in any set theory of repute any infinite set which is not actually infinite.
  Whatever WM insists on as being potentially but not actually infinite, it cannot be a set. Call it a pre-set or a quasi-set of a pseudo-set, but not a set.
  WM: So the union $\cup(T(n))$ of all finite trees $T(n)$, formed in an obvious way, is an Actually Infinite Binary Tree AIBT with actually countable sets of paths and nodes and edges.
  Changing to the CIBT {{Complete Infinite Binary Tree}} does not add any node and any edge, but extends the set of infinite paths already present in the $\cup(T(n))$ to the uncountable set of infinite paths. Paths consist of nodes and edges. So nothing is actually changed. That is a theory of repute? Rather it is a theory to refute!
  {{{The infinite path}} *p* is nothing but a union of finite paths.
  V: Not neccessarily. That is the case only if one requires that a path be no more than a set of nodes.

WM: But every path has a soul in addition?
[Virgil, "Cantor confusion", sci.math, 21. 5. 2007]

WM: A path is a path bundle with one element.
WH: As has been pointed out many times, a path bundle with one element does not exist.
WM: In the complete binary tree every real numbers which exists, exists as a path and ends at the level ω.
WH: Some paths do not end.
WM: There is no real number with ω + 1places. If the tree is complete, then all the paths due to real numbers are within the tree and none of them reaches the level $\omega + 1$.
WH: Since there is no level ω in the tree, no path reaches level ω. Since there is not last level in the tree, no path ends
WM: Does ω exist? If so, then obviously $\omega + 1$ will exist too.
WH: Both ω and $\omega + 1$ exist. However, there is no level ω or $\omega + 1$ in the tree.
WM: Why is the poor tree, as it seems being the only infinite entity in the universe, excepted from incorporating ω?
WH: Many infinite entities do not contain ω. For a set to have an infinite number of elements does not mean it has element ω. Take for instance the set of all finite natural numbers. This set contains an infinite number of elements but does not contain ω. There is one level of the tree for each natural.
WM: Take for instance the infinite binary tree with $\omega + 3$ levels. Doesn't such a tree exist? Does the ordered set of the first $\omega + 10$ ordinals exist?
WH: Nope! Trees having transfinite ordinals which are not cardinals as their number of levels do not exist.
WM: Simply say "transfinite ordinals which are not cardinals do not exist". Therefore I ask: Does the tree with $\aleph_1$ levels exist? If so and AC is assumed, then it can be chosen such that it has an initial subtree with $\omega + 3$ levels. And in this subtree all paths corresponding to real numbers will have separated.
[William Hughes, "Cantor confusion", sci.math, 7. 6. 2007]

931 Das Kalenderblatt 111222 Der Binäre Baum (54)

WM:
Let $[x] = n \le x$ such that $n + 1 > x$, i.e. n is the largest integer $\le x$.
Let $]x[= n \ge x$ such that $n - 1 < x$, i.e. n is the smallest integer $\ge x$.

```
    Level
      |0        0.
      |        /  \
      |1      0    1
      |      / \   / \
      |2    0  1 0  1
      |     /\  /\ /\  /\
     ↓  x
```

At height x the number of nodes is $K(x) = 2^{[x+1]} - 1$.
At height x the number of separated path bunches is $P(x) = 2^{]x[}$.
Therefore, at height x we obtain the ratio $P(x)/K(x) = 2^{]x[}/(2^{[x+1]} - 1)$
and for the whole tree we can estimate $P/K = \lim_{x \to \infty} 2^{]x[}/(2^{[x+1]} - 1) < 2$.
This proof fails, if $\lim_{x \to \infty} 2^{]x[}/(2^{[x+1]} - 1) = 2^{\aleph_0}$ is admitted.

And that set of paths is not known.
DW: From elsewhere, it is known by *your* definition of paths in the tree. *Your* definition of paths defines a set of paths. And *all* paths in your definition start at the root.
WM: Yes. And at x there are $P(x)$ path bunches separated (i.e., on the paper, there is a white space between any two black lines. [...] Therefore you cannot use any other knowledge than the number of separated path bunches in the tree. [...]
DW: Sorry, are you talking about paths or path bunches, and if about the latter what is a *precise* definition?
WM: A path, if existing, is a path bunch with only one path, i.e., a single path bunch. It is nothing but the bit-sequence of a real number of the interval [0, 1]. A path bunch is the set of initial sequences of real numbers which are identical. A single path bunch is an infinite sequence which is only identical with itself.
DW: And my argument has *always* been that two paths do have a single separation point. Nothing more, nothing less.
WM: I count what can be proved to be there, because it is different in location. Individual paths, if existing, will separate in the tree before the level ω+ 1, or they are not existing.
DW: What is the level $\omega + 1$? Your tree has only been defined for finite n, and ω, if you wish. And each two paths separate at a finite level, but there is no finite level where all paths are separated.
WM: If $\omega + 1$ does exist as an ordinal number, why then not in the tree?
DW: You have trouble comprehending the idea that you can have a sequence that does not terminate. It is, nevertheless, implied by the axiom of infinity.
WM: This axiom yields the infinite ω and some further arguing yields the ordinal number $\omega + 1$, but all that does not hold for the levels of the tree. That's a mystery.
[Dik T. Winter, " PARADISE LOST: Debunking Cantor's theory", sci math, 28. 6. 2007]

932 Das Kalenderblatt 111223 Der Binäre Baum (55)

WM: My proofs require the proviso that the inequalities

$1 + 2 + 3 + ... > 2$

and

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - ... < 2$

hold. In a mathematics, where these inequalities are wrong, my proofs fail.
DW: Those inequalities do not hold in mathematics unless the left hand side has been defined in such a way that the inequalities make sense and do hold. As in ordinary mathematics the left hand sides are not defined you can not tell whether they hold or not. You can not compare undefined things with numbers.
WM: The left hand side is completely defined, of course, in ordinary mathematics. There can be no doubt. We know in any case what the n-th term is (+1 in case of odd index, -1 in case of even index). What do you miss?
V: You have not defined what you mean by sum of infinitely many terms.
WM: I prefer to calculate it.
V: You have, in the past, declared that calculation to be impossible.
WM. Oh no! It is possible to calculate that the sum is less than 2.
V: The only standard definition which assigns vales to such sums requires that they converge, which yours does not, so your "sum" is meaningless.
WM: Although we cannot fix a unique real value, the problem is far from being completely undefined. If you throw dice, the result is not determined in advance. But you can be sure that it is not negative.
V: You are claiming to perform an operation whose outcome is not even defined, unlike the throwing of dice whose possible outcomes, while uncertain, are all well defined.

WM: It is well defined that the outcome cannot be more than 2. This is defined by the limit of the partial sums.

V: I only agree that none of the *partial* sums can be greater than 2, but, in the absence of convergence, any value for "the sum" is a myth.

WM: The absence of convergence does not prevent the sequence of partial sums to have two limit points. The result of the infinite sum cannot be outside of an epsilon surrounding of the limit points. [...] Anybody who says that the sum can be defined to be 3 or more is outside of any reasonable mathematical discussion.

V: But one can say that "the sum" has no existence as a number, and therefore it is senseless to speak of "the sum" in comparison with numbers which do exist. WM is saying "something which does not exist is less than 2".

WM: The value of the series is not fixed but certainly less than 2. (If it does not exist, then it is also less than 2.)

V: WM assumes continuity "at ∞" but does not even have definitions "at ∞".

WM: If there are infinitely many natural numbers, then I need not define that. If they are not, then I need not define that either.

V: It is WM's arguments that what does not "have a limit" still has a number value which can be compared with actual numbers.

WM The function $f(x) = \sin x/x$ for $x \in \mathbb{R}$ is interesting and defined too. The same holds for the limit of $P(x)/K(x)$ in the tree.

The proof uses the fact that we can determine the value of a function at $x = \infty$ only from its values at $x < \infty$.

V: That requires proof, first that a value exists "at ∞" and secondly that the value "at ∞" equals the limit.

WM: Both is guarateed by the axiom of infinity and the structure of the tree.

[Dik T Winter, Virgil, " PARADISE LOST: Debunking Cantor's theory", sci.math, 28. 6. - 4. 7. 2007]

V: In standard mathematics, any 0/0 situation is standardly *undefined*, even when, as in the $\sin x/x$ case, there is an appropriate limiting value. In $\sin x/x$ one has a so called "removeable discontinuity" but it is never automatically assumed to have been removed. At least not in standard mathematics.

WM: The question is only this: Can removal of the removable discontinuity yield another result than $\lim_{x \to \infty} \sin x/x = 1$? It cannot. And the same it true for

$\lim_{n \to \infty} \Sigma(1 + 2 + 3 + ... + n) > m$ for any $m \in \mathbb{N}$.

as well as

$\lim_{x \to \infty} P(x)/K(x) < 2$.

The paths of the tree are continuous.

V: That is an entirely different form of 'continuity' than the continuity of a real function at a real point. And neither type holds "at ∞". [...]

WM: But this kind of continuity guarantees that the limit of $P(x)/K(x)$ is the only reasonable value for the consideration of the whole tree, like l'Hospital delivers the only reasonable value for $\sin x/x$ at $x = 0$.

V: It may be the only candidate for continuity, but there is no reason to suppose continuity when one jumps from finite to infinite arguments. {{Es gibt auch im Falle des Cantorschen Diagonalargumentes keinen Grund für die Annahme, die an endlichen Fällen ausgebildete Logik sei für unendliche Listen gültig und der Schluss von "jeder" Zeile auf "alle" Zeilen erlaubt. Zu jeder Zeile gibt es eine folgende, zu allen Zeilen aber nicht. Es ist lediglich der historischen Abfolge der Ereignisse zuzuschreiben, dass man im Cantorschen Falle diesen Fehlschluss noch nicht erkannt hat. Vielleicht trägt auch eine gewisse Sensationslüsternheit der ansonsten so nüchternen Mathematiker Schuld, oder die allgemeine Morbidität der Gesellschaft um die damalige Jahrhundertwende?}}

And in this instance there is good reason to doubt it, as there are good reasons to think the number of paths uncountably greater than the number of nodes.

WM: On the other hand, the continuity of the paths guarantees that my result is the only one possible - in mathematics.

[Virgil, "Dik T. Winter says: Definition: sum{i in N} i = 0", sci. math, 7. 7. 2007]

933 Das Kalenderblatt 111224 Der Binäre Baum (56)

WM: My proofs require the proviso that the inequalities

$1 + 2 + 3 + ... > 2$

and

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - ... < 2$

hold. In a mathematics, where these inequalities are wrong, my proofs fail.

[Das Kalenderblatt 111223]

DW: Analysis and algebra are about real numbers, and in those fields infinite sums are not defined, except as a limit. Moreover, using their definition of limits of sequences of ordinal numbers we would get ω. It can make sense to make $\Sigma_{i = 1...\infty}\, i = \aleph_0$ but it does not follow in any way from the usual theorem, and requires some additional definitions.

WM: Then $\Sigma_{i = 1...\infty}\, i$ could also yield another result. But that is certaily false. It can neither be finite nor can it be uncountable. The same holds for $\Sigma_{i = 1...\infty}\, 1 = \aleph_0$.

DW: That depends entirely on how you define it.

WM: It is a common and natural definition. That is proven by the fact that there is no other result possible.

DW: But there are other results possible. Consider my definition: $\Sigma_{i = 1 \in \mathbb{N}}\, i = 0$ now try to prove that that is not possible.

[Dik T. Winter, "Cantor Confusion", sci.math, 16 - 23. 5. 2007]

1. Proof:

$1 > 0$.

There is no negative natural number. Every sum of natural numbers is $\geq 1 > 0$.

2. Proof:

$\Sigma_{n > 0}\, 1/2^n$ is not larger than 1.

This is correct without any axiom and formal limit process, just by observing that always the remaining is divided by 2 and one half of it is removed. It is an absolute truth which will be discovered by any civilisation even if they never use axioms or develop some set theory. It can be proved by experiment.

$\Sigma_{n > 0}\, 1/n$ is not less than 1.

Nicole d'Oresme proved this and even the unboundedness of the harmonic series, i.e., the sum of unit fractions. This is an absolute truth too, which will be discovered by any civilisation even if they never use axioms or develop some set theoretical formalisms. It can be proved by experiment.

$\Sigma_{n > 0}\, n$ is not less than 1.

Again, this is an absolute truth too which can be proved by experiment. Nevertheless there is also a "mathematical" (in the sense of Dik T. Winter) proof, namely: for every positive natural number n we have $n \geq 1/n$. Therefore, replacing $1/n$ by n in the harmonic series, we find that the sum is unbounded.

3. Proof:
Hrbacek and Jech (p. 188):
"It is not very difficult to evaluate infinite sums. For example, consider
$1 + 2 + 3 + ... + n + ...$ $(n \in \mathbb{N})$.
It is easy to see that this sum, $\Sigma_{n \in \mathbb{N}}\, n$ is equal to $\aleph_0$." (and that is larger than 1).
So the Definition: $\Sigma_{i \in \mathbb{N}}\, i = 0$ is obviously wrong. But I can well imagine that some extreme set theorists may agree with Dik. I am curious to see their statements. In particular this example will illuminate the thinking of extreme set theorists and will shed some light on set theory also.
[WM, "Dik T. Winter says: Definition: sum{i in N} i = 0", sci.math, 6. 6. 2007]

WM: And in fact, if there were all the natural numbers actually existing, then an infinite one must be among them.
DW: A common assertion by you, unproven. Pray give a proof, assuming the axiom of infinity, and without using the negation of that axiom.
WM: $1 + 2 + 3 + ... + X = X(X + 1)/2$ for every X in $\mathbb{N}$. Proof by induction left as an exercise.
[Dik T Winter, "Cantor confusion", sci math, 23. 5. 2007]

Parallel zu den öffentlich geführten Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein, zum Beispiel die folgenden:

NN: Dear Sir
Thank you for posting this paper {{On Cantor's important proofs}} on the Internet. Your logic (unlike Cantor's) seems impeccable.

NN: Sehr geehrter Herr Mueckenheim,
mit Verwunderung habe ich Ihre Ansichten zur Mengenlehre zur Kenntnis genommen. [...]
Ich schreibe Ihnen, um dem Vorwurf elitären Hochmutes vorzubeugen, obwohl es eigentlich als Zeitvergeudung erscheint, auf solche unhaltbaren Behauptungen zu reagieren. Sie brauchen sich eigentlich keine Mühe zu geben, mein Argument zu verstehen oder gar zu widerlegen, es reicht, wenn Sie Hausverstand einsetzen! Glauben Sie allen Ernstes, daß Sie klüger sind als Cantor, Hausdorff, Hilbert, Zermelo, Fraenkel, von Neumann, Skolem, Bernays, Gödel, und so weiter und so fort???
Mit höflichen Grüßen, NN

934 Das Kalenderblatt 111225 Der Binäre Baum (57)

WM: Dik T. Winter claimed: Definition: $\Sigma_{i \in \mathbb{N}}\, i = 0$.
VM: How queer! I though that everyone knew that $\Sigma_{n = 1...\infty}\, n = \zeta(-1) = -1/12$.
WM: Apropos zeta. That would fit well with Euler's and Wallis' claim $1/1 < 1/0 < 1/(-1)$.
[Victor Meldrew, "Dik T. Winter says: Definition: sum{i in N} i = 0", sci. math, 6. 6. 2007]

WM: It is an example of a wrong definition. If I define $\sqrt{2} = 7$ or $2 + 2 = 5$, then that's rubbish and nothing else.
H: I can define $2 + 2 = 5$, $2 + 5 = 2$, $5 + 2 = 2$, $5 + 5 = 5$ and obtain a group of order two with neutral element 5. The group is in fact abelian, thus justifying my use of "+" for the group operation.
WM: I think you know what I mean. Therefore it is not very useful to continue with sophisticated arguing. If you believe that
$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +- ... = \infty$ (*)

can be defined, then it is of no use to continue this discussion at all. If however you can follow my arguing that this sum without any further definition can be restricted to

$-2 < 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +- ... < 2$

then you cannot maintain set theory, as the binary tree given below shows. This means: belief in set theory forces belief in such equations as (*). I refer to drop such belief.

The Binary Tree

Let $[x] = n \leq x$ such that $n + 1 > x$, i.e. n is the largest integer $\leq x$.

Let $]x[= n \geq x$ such that $n - 1 < x$, i.e. n is the smallest integer $\geq x$.

At height x the number of nodes is $K(x) = 2^{[x+1]} - 1$.

At height x the number of separated path bunches is $P(x) = 2^{]x[}$.

Therefore, at height x we obtain the ratio $P(x)/K(x) = 2^{]x[}/(2^{[x+1]} - 1)$.

In the whole tree we can estimate $P/K = \lim_{x \to \infty} 2^{]x[}/(2^{[x+1]} - 1) < 2$.

Would you agree that this result is correct although there is not a limit in the usual sense? Or would you prefer to say that because of the quotient is alternating between the epsilon surrounding of 1/2 and the epsilon surrounding of 1 the true result is $2^{\aleph_0}$?
[Hagman, "Dik T. Winter says: Definition: sum{i in N} i = 0", sci. math, 27. 6. 2007]

Parallel zu den öffentlich geführten Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein:

NN: I have a copy of your paper with the title *The Meaning of Infinity*. What is the date of this paper?

I am currently writing a thesis for a Masters Degree on infinity in mathematics. Have you written any articles on infinity which I may use?

Thanking you in advance, NN

Dear Prof Mückenheim

Thank you very much for your response! I would like to congratulate you on your fine articles. Infinity in mathematics is of great interest to me and I am enjoying my thesis.

Dear Dr. Mückenheim,

I will get the three papers that you mention in your message. I must say that all except one of the many of the mathematicians I consulted on your work, refused to answer me. Their attitude was that the countability issue of ℝ has been settled and only crazy people are still studying this problem.

Regards, NN

935 Das Kalenderblatt 111226 Der Binäre Baum (58)

DW: Chapters 1 to 8: These chapters provide an exceptional well written showing about how things developed through the ages.
[Dik T Winter, "Bericht van Review of Mueckenheims book.-discussie", sci math, 14. 2. 2007]
https://groups.google.com/group/sci.math/msg/f9ca12b7e0461b84?hl=nl

DW: I received Wolfgang Mueckenheims book and agreed to make a review. Book:

Die Mathematik des Unendlichen
Wolfgang Mückenheim
Shaker Verlag, Aachen, Germany, 2006, ISBN 3-8322-5587-7.

The book contains two parts.

The first part are the initial eight chapters, the second part contains the last two chapters. They are quite different in content, so I do split the review in two parts (note that I have not yet completed the second part, it takes a lot of time).

My initial conclusion is that chapters 1 to 8 can serve quite well in a course on the history of set theory. The historical context is set out extremely well. Also the outlining of current set theory appears to be adequate. The second part (at least what I have read until now) is nonsense. It consists entirely of misunderstandings, bad logic, ill-defined objects and whatever you can think. Moreover, I fail to see why the author needs over ten examples to show that actual infinity leads to an inconsistency. Only one would be sufficient, if it were valid.

WM: Hahaha! Surely you are joking, Mynheer Winter? Remember Burali-Forti, Russell, Skolem, Banach and Tarski: They all had proofs that set theory is wrong. What happened? Pasting of new axioms, superseding, psychological repression.

And if there are many errors, why not bring them all to light? Further, there are different kinds of contradictions in my book. One sort refutes the trichotomy of naturals and alephs, another shows that the cardinality of the continuum, $2^{\aleph_0}$, is not larger than $\aleph_0$. A third sort of proofs (by MatheRealism, cp.chapter 10) shows that there is no infinite set at all.

{{Und der wichtigste Beweis betrifft natürlich den Binären Baum:}}

WM: Definition: The cross-section $C(n)$ of a finite tree $T(n)$ is the number 2^n of nodes of its last level $L(n)$.

DW: So $C(n)$ is the number of nodes that are at distance n from the root.

WM: Correct, namely the maximum of paths which can be separated in this tree $T(n)$.

DW: Yes, as each path terminates at such a node.

WM: The cross section $C(\infty)$ of the union of finite trees $\cup(T(n))$ is $C(\infty) = |2^\omega| = \aleph_0$.

DW: Proof, please. And how do you *define* $C(\infty)$?

WM: The cross section of the union tree $\cup(T(n)) = T(\infty)$ is $C(\infty) = \aleph_0$. Consider the proof of the countability of the set of all unit fractions required to prove the divergence of the harmonic series: 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) ... or consider the cardinal number of nodes of the union of finite trees.

DW: For the divergence of the harmonic series, countability plays no role.

WM: You misunderstood. There is the saying that $\aleph_0$ parentheses result in $\aleph_0$ terms in parentheses although for every finite segment of n pairs of parentheses we have 2^n terms in the last pair of parentheses.

DW: I can say nothing about such a saying.

WM: The harmonic series as split off in Oresme's proof is isomorphic with the binary tree:

1
1/2
1/3, 1/4
1/5, 1/6, 1/7, 1/8
1/9, ..., 1/16

[Dik T. Winter, "Review of Mueckenheims book.", sci math, 20. 2. - 1. 3. 2007]

Parallel zu den öffentlich geführten Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein:

NN: Professor W Muckenheim
I'm interested in your findings about infinity, esp. that Cantor failed to address de Oresme.

NN: Dear Dr. Mückenheim,
I read with interest your paper on the countability of reals "The Meaning of Infinity". Could you please tell me where you published this paper. I got the paper from the web. Also I would like to

know the reaction of other mathematicians to the example at the end of this paper where you show that the reals are countable.

NN: Sehr geehrter Herr Mueckenheim,
[...] Ich moechte Ihnen den dringenden Rat geben, sich nicht weiter mit abwegigen Fragestellungen ueber den seit langem geklaerten Begriff des Unendlichen in der Mathematik zu befassen.
Mit vorzueglicher Hochachtung, NN

Hello sir,
I found reference to 3 of your papers on arXiv.org e-Print archive. They seem provocative and quite interesting. However they don't seem to be available to download. Can you tell me how I could obtain those papers. They are:
1. On Cantor's important theorems
2. There are less transcendental numbers than rational numbers
3. Cantor's Countability Concept Contradicted

Thank you for your help.

936 Das Kalenderblatt 111227 Der Binäre Baum (59)

WM: There is a bijective mapping between the vertical representations of real numbers, i.e., the paths in the tree, and the horizontal representations of real numbers, i.e., the binary series $\Sigma a_n \cdot 2^{-n}$. The latter are proven uncountable by Cantor's diagonal argument (in fact a somewhat more sophisticated version than that originally given by Cantor is necessary) and the former are proven countable by the limit
$\lim_{n \to \infty} P(n)/K(n) < 2$
which is the correct value of P/K for the whole binary tree because the tree is continuous (i.e., every path starts at the root node).
CB: To return to my original question: you claim $P(n)$ represents the number of "however you like to call them" at level n. How do you define "the set of all 'however you like to call them' at level n" in this respect? And more importantly, what set S is it for which you claim
"$P(n) = |S| = 2^n$"?
WM: $P(n)$ is the set of initial segments of length n of binary sequences representing real numbers. There are 2^n such initial segments.
CB: Understood now; and I agree that for each natural n, there are 2^n such initial segments of length n (proof by induction).
But by "only infinite sequences (paths) represent real numbers", you assert that none of these initial segments represent a real number. How then does counting them tell us anything about whether the reals are countable or uncountable, i.e., whether there exists a surjection from some countable set to the reals?
WM: Because the paths of the tree are continuous, i.e., the set of separated paths at level n has 2^n elements. This is valid for the whole tree. And in fact there is no doubt that there are $2^{\aleph_0}$ real numbers. Therefore $\lim_{x \to \infty} P(x) = 2^{\aleph_0}$. Alas, $\lim_{x \to \infty} K(x)$ is the same and simultaneously it is proven countable.
[cbrown, " PARADISE LOST: Debunking Cantor's theory", sci math, 5. 7. 2007]

WM: Nothing infinite can be a set.
MB: If there are no infinite sets, then your binary tree is not a set. What is it then?

WM: The binary tree does only show that, if countable infinity exists, no uncountable infinity exists. There are other arguments that show that no infinity exists. Therefore, of course, also the binary tree does not exist. But I enjoy how set theorists, who must assume its existence, try to avoid its consequences.
[Moe Blee, "Ultimate debunking of Cantor's Theory", sci. math, 21. 7. 2007]

Parallel zu den öffentlichen Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein:

NN: Hi,
I'm sorry to bother you, but I read your article titled "On Cantor's Important Proofs" and was very pleased to find someone who shares similar beliefs

NN: Lieber Herr Professor Mückenheim,
hoffentlich haben Sie das Unverständnis so vieler Mathematiker und die Frechheit von [...] unbeschadet überstanden.

NN: Dear Wolfgang,
I remember these days our interesting dialogues about infinity. [...] I wish you a merry Christmas for you and your family and a so Happy New Year. And I wish that next year we continue having time for infinity.

Dear Professor Mueckenheim,
[...] I do not quite see how you apply the pigeon principle in this case. The point is that one and the same rational number belongs to an uncountable set of intervals with irrational ends, so I see no problem here.
With best regards, NN

NN: Sehr geehrter Herr Mückenheim,
Ich finde Ihre Überlegungen durchaus interessant - aber für die [...] ist das sicher nicht geeignet. [...] In der von Ihnen diskutierten Situation kann ich paradox-wirkenden Sachverhalte, aber sicher keinen Widerspruch erkennen.
Mit freundlichen Grüßen,
Ihr NN

NN: Hallo,
danke für Ihre Beiträge! Sie machen sehr viel Freude. Zwar habe ich noch nicht alle gelesen, aber was ich las war schlüssig und einleuchtend. Es ist gut, wenn es Menschen gibt, die trotz stets gleicher Reaktionen gegenhalten. Letztendlich ist es eine Frage der Ideologie, ob jemand Gödel, Cantor etc. schlüssig findet oder nicht. Als mir aufgegangen ist, was Cantor da eigentlich tut, fand ich das enorm amüsant. [...] Dennoch wünsche ich Ihnen viel Erfolg. Wenn nur einer begreift, dann ist das schon sehr viel.

NN: I can not find any flaws in your argument. Have you published anything more on the subject? If so, where?
Best Regards, NN

937 Das Kalenderblatt 111228 Der Binäre Baum (60)

WM: Definition: A ternary relation T on three sets A, B, and C which is pairwise surjective and injective is called a trijection. So the trijectiion is a set of triples (a_i, b_i, c_i) where $a_i \in A$, $b_i \in$ B, and $c_i \in C$.

Consider the following infinite matrix

1111111...
1100000...
1110000...
1111000...
...

For all $n \in \omega$ including $n = \omega$ there is a trijection between the initial segments of the first column, the diagonal, and the first line

$(a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1}) \leftrightarrow (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) \leftrightarrow (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$

such that all elements belonging to an initial segment of column, diagonal, and line are 1's.

But there is no such trijection for $n \in \omega$ including $n = \omega$ between the first column, the diagonal and the n-th line

$(a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1}) \leftrightarrow (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) \leftrightarrow (a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$

because there is no line (except the first) with ω 1's. The diagonal gets its ω 1's from ω lines none of which contains ω 1's. The question is how can this be understood geometrically?

MB: If the relation is on AxBxC and is an injection, then it is a function from AxB into C. So, what does "pairwise surjective and injective" mean here?

WM: A ternary relation T on three sets A, B, and C is called a trijection, if it is pairwise injectice and surjective, i.e., if for a_i, $a_i' \in A$, b_i, $b_i' \in B$, and c_i, $c_i' \in C$

1) every binary subrelation of the ternary relation is an injective function

$a_i \mathrm{T} b_j \wedge a_i' \mathrm{T} b_j \Rightarrow a_i = a_i'$
$a_i \mathrm{T} b_j \wedge a_i \mathrm{T} b_j' \Rightarrow b_j = b_j'$
$b_j \mathrm{T} c_k \wedge b_j' \mathrm{T} c_k \Rightarrow b_j = b_j'$
$b_j \mathrm{T} c_k \wedge b_j \mathrm{T} c_k' \Rightarrow c_k = c_k'$
$c_k \mathrm{T} a_i \wedge c_k' \mathrm{T} a_i \Rightarrow c_k = c_k'$
$c_k \mathrm{T} a_i \wedge c_k \mathrm{T} a_i' \Rightarrow a_i = a_i'$

and

2) every element $a_i \in A$, every element $b_j \in B$, and every element $c_k \in C$ belongs to at least one element $t_n \in$ T.

So we can summarize: A set T is a trijection on three sets A, B, and C, if all elements $t_n \in$ T are ordered triples (a_n, b_n, c_n), and if every $a_i \in A$, every $b_j \in B$, and every $c_k \in C$ belongs to one and only one such triple t_n .

In the second case to be considered, the three sets A, B, and C consist of all initial segments of the first column, of all initial segments of the diagonal, and of all sequences of 1's in the lines, respectively, of the matrix given above. When talking about sequences, it is convenient to express the trijection by

$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C$

or by

$a_n \leftrightarrow b_n \leftrightarrow c_n$

such that we get

$(a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1}) \leftrightarrow (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) \leftrightarrow (a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$

Remark: The statement "for $n \in \omega$ including ω" does not imply a last element in $\mathbb{N}$ but is a simple notation for the limiting "infinite sequence including all natural numbers as indexes", i.e., a sequence with $\aleph_0$ elements. [...] For all $n \in \omega$ including $n = \omega$ there is a trijection between the initial segments of the first column, the diagonal and the first line

V: Except that if n is *in* ω it cannot equal ω, which destroys the whole edifice.
WM: I did not want to express that ω is included in ω, but that ω is included in the trijection such that all elements belonging to an initial segment of column, diagonal, and line are 1's.
But there is no such trijection for n in ω including ω between the first column, the diagonal and the n-th line
V: But there is no need for one either, since for all m, n *in* ω, and all $m \leq n$, $a_{mn} = a_{nn} = a_{nm}$.
WM: The complete set of natural numbers has ω elements. It is a valid statement in set theory that a set with ω elements (like the set of all positions of the first column) can be extended to a set of order $\omega + 1$ by adding one element. This feature can be used to investigate the trijection between the positions of 1's of the first column, the diagonal, and the lines in the matrix M:

1000...
11000...
111000...
...

If there is a trijection, then it should remain a trijection after extending the sets involved by one element each. Extending the first column of M by one element we obtain a sequence of order type $\omega + 1$ (because it has the order type ω). After adding one 1 to each sequence of 1's in the lines of M no sequence of 1's has order type $\omega + 1$ (because each one has a finite order type). This can be repeated infinitely often, such that the order type of the first column becomes $\omega \cdot 2$ (notation from Cantor, 1895) while the order type of the set of lines cannot surpass ω. For the diagonal the case remains undecided. But whatever the diagonal may be, there is no trijection between the sequences of 1's in the first column, the diagonal, and the lines - not finally and, therefore, also not initially.
[MoeBlee, Virgil, "A problem of set geometry", sci. math. research, 21. 7. 2007]

938 Das Kalenderblatt 111229 Der Binäre Baum (61)

Z: What properties of a set pass through the limit? For example, given a sequence of measurable sets $\{A_n\}$ with measurable limit set A, and a set X, is it true that

1) $\lim_{n \to \infty} d(A_n, X) = d(A, X)$;
2) If A_n are all convex, the limit is convex;
3) $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$, assuming that $\{A_n\}$ is contained in a compact subset of $\mathbb{R}_n$;
4) Other possible properties?

WM: One should think that the property $\mu(A) \leq \mu(A(0))$ holds without further definition, if $\mu(A(n+1)) \leq \mu(A(n))$, or if even $A(n+1)$ is a subset $A(n)$, for all n in $\mathbb{N}$. But there are other possibilities, at least if we consider increasing sequences and series.
Infinite sums are not defined in standard mathematics. We know of some results of Jakob Bernoulli and Leonhard Euler yielding

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - ... = 1/2$ [1]

and

$1 + 2 + 4 + 8 + ... = -1$ [2]
$1 + 2 + 3 + ... = -1/12$ [3]

respectively
Jacob Bernoulli in 1696 already used the geometric series $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + ...$ with $x = -1$ to obtain his result [1] which also was accepted by Wallis and Euler. Euler used $x = 2$ to obtain [2] and $\zeta(-1)$ for calculating [3]. While Cauchy and Abel dismissed non converging series, later on Borel, Cesaro, and Knopp proposed methods how to attach values to sums of non converging series. The prime condition to be obeyed, first formulated by Hardy as condition of

consistency, is that the summations of convergent series covered by these methods, must yield their existing limits. (Knopp, p. 228)
http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?ht=VIEW&did=D265845&p=233

While such results as [1] obey the condition of consistency and certainly are compatible with mathematical limits in an extended sense, sums [2] and [3] seem to be hardly acceptable (to me). But mathematics is not free of personal opinions. Therefore here is an additional question: Which of the following conclusions (marked below by "⇒") are necessary results of mathematics without any ado, i.e., without any further definition or justification --- and which are not?

$\lim_{n \to \infty} \Sigma_{k = 1...n} 1/2^k = 1 \Rightarrow \Sigma_{k = 1...\infty} 1/2^k = 1$.

$\lim_{n \to \infty} \Sigma_{k = 1...n} 1/k > m$ for any $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \Sigma_{k = 1...\infty} 1/k > m$ for any $m \in \mathbb{N}$.

$\lim_{n \to \infty} \Sigma_{k = 1...n} k > m$ for any $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \Sigma_{k = 1...\infty} k > m$ for any $m \in \mathbb{N}$.

[Zathras, "Properties of a Limit of a Sequence of Sets", sci.math.research, 17. - 24. 9. 2007]

Parallel zu den öffentlichen Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein:

NN: Dear Dr. Mückenheim,

I thank you for the reference and the quote.

Now I see what your opinion is.

What I still can't understand is how Cantor could have come to believe that the set of eventually available definitions was uncountable. I can't believe he could have thought an uncountable hierarchy of languages was available, not even in princple, for humans.

{{Das hat er auch nicht geglaubt und gedacht. Nur hat er nicht bedacht, dass andernfalls keine überabzählbaren Mengen mit individualisierbaren Elementen möglich seien.

So schrieb er am 26. 3. 1887 an Schmidt: Alle sogenannten Beweise (und es dürfte mir wohl keiner verborgen geblieben sein) gegen das geschöpfliche A. U. beweisen nichts, weil sie sich nicht auf die richtige Definition des Transfiniten beziehen. Die beiden für seine Zeit und auch heute noch kräftigsten und tiefsinnigsten Argumente des S. Thomas Aquinatus werden hinfällig, sobald ein Princip der Individuation, Intention und Ordination actual unendlicher Zahlen und Mengen gefunden ist; ein solches Princip liegt in meinen actual unendl. Mächtigkeiten (Kardinalzahlen), Ordnungszahlen und Ordnungstypen.

Und er schrieb am 13. 10. 1895 an Jeiler: Die Resultate, zu denen ich gelangt bin, sind diese: Ein solches Transfinitum [...] ist widerspruchsfrei, also möglich und von Gott erschaffbar, so gut wie ein Finitum. Das Transfinitum ist der mannigfaltigsten Formationen, Specificationen und Individuationen fähig.

Also war Cantor von der Individualisierbarkeit der Elemente aller Mengen überzeugt. Selbstverständlich hätte bei Erkenntnis der Nichtindividualisierbarkeit alle ersthafte Forschung auf dem Gebiet des Transfinite sofort als null und nichtig erkannt und abgebrochen werden müssen.}}

I've realized, however, that he does not speak of formulas (syntactic objects) but of concepts, which seem to be rather semantical objects.

Is it possible that he could have thought that, while the formulas formed a countable set, the set of the corresponding semantic objects (concepts, definition contents) was uncountable?

Since he took transfinite cardinality very seriously, as strict sense cardinality, he would have had to conclude that some formulas were repeated, with altered meaning, along the hierarchy of languages; repeated in fact uncountably many times!

All the best, NN

939 Das Kalenderblatt 111230 Der Binäre Baum (62)

WM: Consider the sets of positive even numbers E, of prime numbers P, of Ulam's lucky numbers L, and of tetration numbers T

$E = \{2, 4, 6, ...\}$

$P = \{2, 3, 5, ...\}$

$L = \{1, 3, 7, ...\}$

$T = \{2, 2^2, 2^{2^2}, ...\}$

each of which may be denoted in the following by

$\{x_1, x_2, x_3, ...\}$.

In every case with exception of the first segment {1} of L the initial segment

$S(n) = \{x_1, x_2, x_3, ... , x_n\}$

of the first n numbers contains such numbers which are greater than the cardinal number $|S(n)|$ of the segment. Now consider the cardinal number of the set of those greater numbers and compare it to $|S(n)|$:

$|\{x_k \mid x_k \in S(n) \wedge x_k > |S(n)|\}| / |S(n)| = 1 - \varepsilon(n)$

In the case of positive even numbers E we have

$\varepsilon(n) = 1/2$ for even n, and

$\varepsilon(n) = (n-1)/2n$ for odd n.

Both sequences converge to the limit

$\lim_{n \to \infty} \varepsilon(n) = 1/2$.

Because of the asymptotic density $n/\log n$ for both P and L, we have in these cases

$\lim_{n \to \infty} \varepsilon(n)\cdot\log n = 1$ yielding $\lim_{n \to \infty} \varepsilon(n) = 0$.

In case of tetration numbers T, we have of course also the

$\lim_{n \to \infty} \varepsilon(n) = 0$.

But is there a more informative short expression available - in the sense of

$\varepsilon(n) \to 1/\log n$ or $\mathrm{Li}(n)/n$

or even

$(\mathrm{Li}(n) + k_1\cdot n\cdot\exp(-k_2\cdot\sqrt{\log n}))/n$

being more informative than simply writing $\varepsilon(n) \to 0$?

AB: Perhaps the Lambert W-function could help in case T?
http://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html

WM: Thanks for your help. Alas, Lambert's W-function gives only the limiting value for the complete power tower - not for the asymptotic behaviour of the sequence of tetration numbers. But there is a simple method to calculate $\varepsilon(n)$ for the initial segments

$\{2\}, \{2, 2^2\}, \{2, 2^2, 2^{2^2}\}, ...$

I use the abbreviation $T(n)$ for a power tower $2^{2^{\cdots^2}}$ consisting of n 2's such that the tetration numbers are now denoted by $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, ... The cardinal number of an initial segment

$S(n) = \{T(1), T(2), T(3), ... , T(n)\}$

is just $|S(n)| = n$. In the special case $n = T(m)$ being a tetration number, we have m numbers, $T(1), T(2), ..., T(m)$, less than or equal to $|S(n)|$. So we obtain

$|\{T(i) \mid T(i) \in S(n) \wedge T(i) > |S(n)|\}| / |S(n)| = (T(m) - m)/T(m)$ [*]

such that in these cases

$\varepsilon(n) = m/T(m)$.

This result is sufficient to determine the asymptotic behaviour of $\varepsilon(n)$.

AB: By setting $n = T(m)$ you get one of very few simple results for tetration numbers. It can be generalized: By adding j further elements to the segment $S(n)$, such that

$n = T(m) + j >$ but $n < T(m+1)$

we get

$|\{T(i) \mid T(i) \in S(n) \wedge T(i) > |S(n)|\}| / |S(n)| = 1 - m/(T(m) + j)$

and for $T(m) + j = T(m+1)$ we obtain [*] with $T(m+1)$ instead of T(m). Therefore, the general result is

$|\{T(i) \mid T(i) \in S(n) \wedge T(i) > |S(n)|\}| / |S(n)| \geq 1 - m/[T(m)]$ [#]
where $[T(m)]$ is the greatest tetration number less than or equal to $|S(n)| = n$.

Is there any special reason for calculating the number of numbers which are larger than the cardinal number?

WM: For large n, nearly all elements $T(i)$ are larger than the cardinal number of the set.

If we obtain a theorem, as this one, which, with increasing strength, holds for all finite cases, we use to say that it also holds in the limit, i.e., in the infinite case.But in the present example this would lead to the result that most tetration numbers must be greater than the cardinal number of the set of all tetration numbers.

Without concluding from all finite cases to the infinite case we could not infer that the infinite harmonic series $\Sigma(1/n)$ is infinite, not even that an infinite geometric series like $\Sigma(1/2^n)$ has a real value. We merely could make statements about finite sums (with arbitrarily many terms though).

On the other hand, it is simple to show that the number of all tetration numbers cannot be equal to or less than any natural (or tetration) number.

This dilemma can only be solved by recognizing that the set of all tetration numbers has no cardinal number which could be compared with the natural numbers: $\aleph_0$, like some complex number or like a tensor or like a triangle or like a flavour, is not in trichotomy with the natural numbers. I wanted to shows this.

If we obtain a theorem, like [#], which, with increasing strength, holds for all finite cases, we use to say that it also holds in the limit, i.e., in the infinite case.

VM: Again "increasing strength" is a vague term. There are many theorems which hold for all finite sets but not for infinite sets.

WM: If you prefer a careful definition of limits, then apply it to [#] please. You will see that the limit of $m/T(m) = 0$.

But in the present example this would lead to the result that most tetration numbers must be greater than the cardinal number of the set of all tetration numbers.

VM: The cardinality of the set of tetration numbers is $\aleph_0$ which is greater than each tetration number (not less than "most" of them).

WM: What does support your assertion? Is it the fact that $\aleph_0$ cannot be smaller than any tetration number? That support is not sufficient as you can see from the fact that there are numbers like i which are not in trichotomy with the natural numbers.

VM: There is a bijection between $\mathbb{N}$ and the set $\{T(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ of "tetration numbers", namely the map T. That is what "the cardinality of the set of tetration numbers is $\aleph_0$".

WM: Of course. That is the definition. But the interpretation of $\aleph_0$ as being a number in trichotomy with natural numbers is wrong. On the other hand, it is simple to show that the number of all tetration numbers cannot be equal to or less than any natural (or tetration) number.

VM: The number (actually the cardinality) of all tetration numbers is $\aleph_0$, which exceeds each natural number (finite cardinal) or tetration number (since each is a natural number).

WM: No set of tetration numbers can reach a cardinal number which is larger than all numbers in the set. For finite sets this is obvious by [#]. For the infinite set this follows from the limit $n \to \infty$ of [#]. This dilemma

VM: There is no dilemma here.

WM: Is it so hard to recognize what $\lim_{n \to \infty} m/T(m) = 0$ proves?

[A. Bell, Victor Meldrew, "A Limit-Question", sci. math.research, 17. 11. 2007 - 26. 1. 2008]

940 Das Kalenderblatt 111231 Der Binäre Baum (63)

WM: There is a set of nodes down to level X and a set of paths which can be distinguished at level X. $N(X)$ and $L(X)$ are their respective cardinal numbers.

N: I am actually not really interested in the number of paths in the tree that I can distinguish at level *X*. I want to know how many paths there are in total.

WM: Of course there are as many as there are nodes. That's because we can prove for the whole tree by means of the condition

```
 |
o
/\
```

Every node increases the number of distinguishable paths by (2 - 1) = 1.

In order to get it somewhat better, consider the following incomplete tree:

```
o-o-o-o- ... -o-------- ...
   | | |  ...   |
   | | |  ...   |
   | | |  ...   |
  ...
```

The ratio of paths to nodes is independent of the finity or infinity of the tree. While the tree shown above is finite, the tree shown below is infinite:

```
o-o-o-o- ...
   | | |  ...
   | | |  ...
   | | |  ...
  ...
```

In both cases there are as many nodes as paths.

N: And it seems to me that you have led me in a great big circle, because at *any* node at level *X* the tree of paths that continue out to infinity has the *same* number of paths as the tree that lies below the root.

WM: That's the same for the nodes of the respective subtrees.

N: This is true whether the number of paths is countable or uncountable. In particular, you have done *nothing* to settle the question of how many paths there really are.

WM: Haven't you seen the ultimate proof (2 - 1) = 1?

N: This picture is simply not good enough for the infinite case.

WM: This picture simply does not depend on any "case". It shows in unsurmountable clarity that every attempt to see more paths than nodes in the CIBT {{Complete Infinite Binary Tree}} is in vain.

N: As we established, at each node you only count *one* path (the one that has nothing but left branches below the node in question).

WM: I count lines. How these lines might be interpreted does not depend on me. I count all lines in the tree. The only correct explanation of the observed discrepancy is that there is no infinite tree. But this implies that there is no infinite list.

N: In particular, even though you *construct* the alternating path 0.010101... (in the limit) you *never get around to actually counting it.*

WM: Try to construct all real numbers as paths in the tree, one by one as I have shown you. If you don't get all real numbers in this way, then you have the proof that also Cantor's list does "*never get around to actually counting it.*" Of course it does not come to an end where the sequence 0.010101... is definitely distinct from 0.010101...010101000...

N: All it establishes is that lim $\{\#T(X)\} \neq \#\{\lim T(X)\}$.

WM: How could lim $\{\#T(X)\}$ be defined other than by $\#\{\lim T(X)\}$?

[Natasha, "A consideration concerning the diagonal argument of G. Cantor", sci.logic, 8. -11. 4. 2008]

Parallel zu den öffentlichen Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein:

NN: Ueberhaupt bewundere ich Deinen Gleichmut, mit dem Du diese ganzen Beleidigungen weg steckst.

WM: Das Internet ist eine intellektuelle Fernwaffe. Man kann damit über weite Strecken große Wirkung erzielen, positive wie negative. Und wer mit offenem Visier schießt, der kann beschossen werden. Wenn jemand zu ausfallend wird, breche ich die Diskussion ja auch ab, nach einer "letzten Warnung". Aber es wäre unmöglich und jedenfalls viel zu anstrengend, auf alle Beleidigungsversuche zu reagieren. Sollte ich NNX oder NNY mit Klagen überziehen? Um dann vielleicht eine Entschuldigung oder einen lächerlichen Geldbetrag zu erhalten? Oder sollte ich sie beschimpfen? Wen interessieren diese Herren schon und was man von ihnen hält? Da bleibt nur die Devise: Mensch ärgere Dich nicht, denn es gibt schon genug andere, die das versuchen. Da halte ich es mit Cantor, der sich in solchen Fällen sagte: Ich habe eine Vertheidigung diesen Angriffen gegenüber nie für nöthig gehalten und glaube, daß ich damit richtig gehandelt habe. ... Wie bisher, rühre ich keinen Finger zu meiner Vertheidigung wider die seit Jahren fortgesetzten boshaften Angriffe Poincarés.

NN: Vielleicht sollten sich die Psychologen 'mal dieser Art von Pathologie annehmen.

WM: Nun, ein gewisses Verständnis habe ich schon dafür, denn was ich behaupte, führt schließlich dazu, dass vieles, was vielen lieb geworden ist, einfach weg ist.

941 Das Kalenderblatt 120101 Der Binäre Baum (64)

GG: The basic picture

```
  |
  o
 / \
```

does not work properly in the infinite case.

WM: It is completely independent of the number of levels of the tree.

GG: Let's look at the argument: WM says that at every node one new "line" starts. (The vertical "line" comes from the previous node and continues on the left, while a new "line" starts on the right.) The problem is that in an infinite tree the slanted lines are in reality not single paths, but in themselves fully branching binary trees,

WM: and for every tree we have the same situation again, such that this "explanation" does not explain anything.

GG: and at every node further down the line you must make a choice of a single branch.

WM: You need not make a choice. The complete tree itself chooses every possible path.

GG: Let's say you arbitrarily choose the left branch as the continuation. Then the two lines in the basic picture (ignoring any other branches for now) actually look like this:

```
        |
        o
       / \
      o   o
     /   /
    o   o
   /   /
  o   o
 /   /
...  ..
```

What this picture shows is that in order to be counted, a "line" must end with an infinite sequence of left branches.

WM: No. You forget a lot of nodes in your picture of the CIBT --- or you forget the "C".

GG: Now consider the path that alternates left and right branches forever. At no finite level will this path ever be counted,

WM: At no finite level it is distinct from every other path. Alas, here are only finite levels in the tree.
GG: because it does not fit the pattern for a "line". Yet it is abundantly clear that the path is in the tree.
WM: And it is as clear that for every other path there is a node, where this path and the other split off. Otherwise this path could not exist in the tree.
[Gus Gassmann, "A consideration concerning the diagonal argument of G. Cantor", sci.logic, 12. 4. 2008]

Parallel zu den öffentlichen Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein:

NN: Dear Dr. Mückenheim,
I have been interested in infinity for quite sometime now. [...] constantly due to my disbelief in Cantor's proof I constantly think of infinity. Disproving this premise of difference in infinity I believe will have an effect on the Godel, Turing's theorems and many other which relate unprovability indirectly to uncountability.
In thinking this I also came up with the binary tree example - including the node/path example for listing rational and irrational numbers. Including the table with the factorial, log and all that. I was thinking of publishing something and I browsed where I could and I saw arxiv is a place to publish. Then I searched in that to see someone has already done it and I found your papers kind of exactly reflecting my thought processes. I want to understand if anyone is taking you seriously if what you contend is taken seriously isnt it a very important result? [...] So is the mathematical community giving any importance to your findings or arguments?

{{Es scheint so, aber eher negative.}}

NN: Jede der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... ist, wie man so sagt, endlich. Trotzdem gibt es unendlich viele dieser endlichen natürlichen Zahlen, bzw. ist die Menge der natürlichen Zahlen unendlich. [...] Wie ist es möglich, daß ein Dozent für qualifiziert gehalten wird, Lehrveranstaltungen im Fach Mathematik abzuhalten, der offenbar bereits damit überfordert ist, die obigen simplen Zusammenhänge zu verstehen?
Das bayerische Wissenschaftsministerium meinte, ich sollte mich mit einer derartigen Frage an den zuständigen Studiendekan wenden.

{{Es gibt ebensoviele endliche Anfangsabschnitte der natürlichen Zahlen wie natürliche Zahlen. Kein endlicher Anfangsabschnitt enthält mehr natürliche Zahlen als durch eine natürliche Zahl angegeben werden kann. Alle natürlichen Zahlen passen in endliche Anfangsabschnitte. Es gibt kein Paar von endlichen Anfangsabschnitten, das mehr natürliche Zahlen enthielte als einer der beiden Partner. Also ist die Behauptung, es gäbe mehr als jede natürliche Zahl von natürlichen Zahlen, ebenso ausgemachter Unfug wie die Behauptung, es gäbe unendliche endliche Anfangsabschnitte, was auch jeder Studiendekan erkennen können sollte.
Die geistig etwas Schwächeren mögen damit beginnen, zu verstehen, dass es im Dezimalsystem unmöglich ist, hundert verschiedene einstelligen Zahlen zu identifizieren. Vielleicht dämmerts dann bei dem Einen oder der Anderen.}}

942 Das Kalenderblatt 120102 Der Binäre Baum (65)

SM: Here's an example: There are three people trying to pick up a table, Sam, Tom and Hank. If I say "None of them is necessary to pick up the table" I can mean two things:

1. It is not necessary to use any people at all to pick up the table --- the table can pick up itself without the help of any humans.

2. No single person is necessary. Sam is not necessary (since Tom and Hank can do it without Sam). Tom is not necessary (since Sam and Hank can do it without Tom). Hank is not necessary (since Tom and Sam can do it without Hank).

WM: You forgot: 3. There is no table.

SM: These are two very different meanings. They could be made precise by clarifying mathematically what it means for a collection to be "necessary" or "not necessary".

The same thing is going on with your problems with FISONs {{Finite Initial Segments Of Naturals, Anfangsabschnitte der natürlichen Zahlen}}. No FISON is necessary in the sense of 2;

WM: Your example does not fit the problem. FISONs are linear concerning the subset relation. I wonder why you and your comrades always come with such unsuitable examples. I am sure you know that they are unsuitable. May it be that there are no suitable examples?

I have shown that the union of the set of all FISONs is not $\mathbb{N}$.

SM: I'm asking you whether you believe that this nonsensical result can be proved using ZF.

WM: ZF proves that there is a set $\mathbb{N}$ which has a number of elements greater than any natural number, namely $\aleph_0$. If ZF also proves that there is a FISON with $\aleph_0$ elements, then I call it inconsistent. If ZF proves that an infinite union of FISONs has $\aleph_0$ elements, then I call it nonsensical. It would be similar to the claim that the sequence $(a_n) = 1/2 + 1/4 + ... + 1/2^n$ of partial sums of the geometric series contains a term $a_n = 1$.

SM: You said "I have shown that the union of the set of all FISONs is not $\mathbb{N}$."

Literally, that means that there is some element m in $\mathbb{N}$ such that the union of all FISONs does not contain the element m.

WM: No. There is no element in $\mathbb{N}$ which requires a set of $\aleph_0$ elements to exist. It is this $\aleph_0$, the actual infinite, which is assumed by you without any evidence. Whenever you mention a natural number, then you mention a FISON. When you mention "forall $n \in \mathbb{N}$", then you think to mention infinitely many. But that's wrong, as I have shown. You rely on an axiom which is in contradiction with mathematics, in particular with the logic according to which there is no FISON with infinitely many elements.

SM: That means that forall FISONs I, I does not contain m. Putting that all together, we have exists $m \in \mathbb{N}$ such that forall $I \in IS$, m is not an element of I. Do you claim that, or not?

WM: No.

SM: Or are you denying that the informal statement "the union of the set of all FISONs is not $\mathbb{N}$" means something other than "there is some element of $\mathbb{N}$ that is not in the union of the set of all FISONs"?

WM: I am denying that it is meaningful to talk about the set of all n or the set of all FISONs. This set does not exist as a completed entity. You can easily see this by the observation that otherwise there must be an infinite finite segment of $\mathbb{N}$ or an infinite sequence of 1's must have the limit 2.

But you seem to believe that if we union all the insufficient FISONs that somehow the insufficeny is compensated by the multitude.

SM:I believe it because it is contradictory to believe otherwise. The claim that union (IS) is finite is this: exists $m \in \mathbb{N}$ such that forall I in IS, size(I) < m.

WM: No. The claim that $\mathbb{N}$ is actually infinite is: There is a set which has more elements than any natural number. The number of elements is $\aleph_0$ which is not a natural number.

If it is claimed that this set is covered by a union of FISONs then it must be covered by one FISON (because FISONs are not cobbled side by side - they cover each other!) This is a contradiction. If, according to your logic, FISONs are cobbled side by side, then you should check your logic. Therefore no FISON is capable of covering $\mathbb{N}$. And as of two different FISONs, in mathematics, only one is useful to continue the covering of $\mathbb{N}$, no union of FISONs can do it.

SM: That principle is a good one for proving contradictions, but if we don't *want* to prove contradictions, it's better not to use it.
WM: You tell the truth.
[Steven Daryl McCullough, "A consideration concerning the diagonal argument of G. Cantor", sci.logic, 12. 4. 2008]

Glücklicherweise habe ich den matheologischen Kunstgriff einer Vereinigung, die kein Element enthält, das außerhalb eines Anfangsabschnitts läge, trotzdem aber von keinem Anfangsabschnitt überdeckt wird, nach langem Überlegen ausschalten können, indem ich mich auf die reine Mathematik und die dort vorhandenen Folgen endlicher Anfangsabschnitte zurückzog - zunächst auf die endlichen Indexmengen der Ziffern der Folge 0,1; 0,11; 0,111; ... und, nachdem die Indizierung von Ziffern kritisiert worden war, auf die Exponentenmengen derselben Folge. Dass in der Menge aller Folgenglieder alle natürlichen Zahlen als Exponenten vorkommen, dass aber keine aktual unendliche Menge natürlicher Zahlen darin vorkommt, wird meines Wissens in Mathematikerkreisen nicht bestritten.

943 Das Kalenderblatt 120103 Der Binäre Baum (66)

WM: The gaps are there where no rationals are.
WH: And every "gap" is defined by a subset of rational numbers that has $\aleph_0$ elements.
WM: Every gap is defined by one rational number *q*. You could see it by the following argument:
Cantor has transformed the dense ordering *DO* of $\mathbb{Q}$ into the well-ordering by $\aleph_0$ single steps as follows:
0) *DO*
1) 1/2, *DO*\{1/2}
2) 1/2, 1/3, *DO*\{1/2, 1/3}
3) 1/2, 1/3, 2/3, *DO*\{1/2, 1/3, 2/3}
...
It is accepted that this well-ordering is complete although there is no last element, therefore it cannot be proven to be finished.
Now take the well-ordering, replace the colons by primed rationals and reverse Cantor's process or, as it is impossible to start with the last step, do the same as Cantor did as follows (I denote 1/2 by *a*, 1/3 by *b*, 2/3 by *c*, etc.)
0) *aa'bb'cc'dd'ee'*...
1) *bb'cc'dd'ee'*... {*aa'*}
2) *cc'dd'ee'*... {*bb'aa'*}
3) *dd'ee'*... {*bb'aa'cc'*}
...
Do you think this is impossible? You are wrong. I can advise every rational of the well-ordering to its place. You think I will never come to an end? That is the character of infinity. There is no last step, neither for Cantor nor for me.
But there is even a better clearer argument:
Define a function on the reals that is
$f(x) = 0$ for $x = q \in \mathbb{Q}$
$f(x) = 1$ for $x = q + e$.
$f(x) = 2$ for $x = q + \pi$.
If all rational numbers exist, the first partial function does exist. If there are only two irrational numbers, call them *e* and π, then the other partial functions do exist too. Note, precondition for

this proof is only the complete existence of these numbers: all $q \in \mathbb{Q}$, e, and π as well as the existence of bijections.
Consider the interval (0, 1).
By the bijection $q \leftrightarrow q + e$ (or $f(q) = q + e$) we see that there is one and only one q mapped on the number $q + e$. Both sets are equal in this configuration and there is no q that is not in the bijection.
By a general symmetry argument we find that between two rationals, q and q', there is always one irrational $q'' + e$ (because the irrationals cannot reside on the same points of the real line where the rationals reside).
In this picture we could identify the gaps in the rationals with the irrationals of the form $q'' + e$. Now remove these two sets from the real line. What remains? For instance all numbers of the form $q''' + \pi$. There are no longer rationals between them. But re-introducing step by step (or simultaneously) the pairs of numbers of the form q and $q'' + e$ does not improve the situation, because none of these steps leads to a reduction of irrational numbers that have no rational between them.
Conclusion: Irrational sets, if they exist, cannot be handled.
WH: There are an uncountable number of subsets of the rationals with $\aleph_0$ elements.
WM: Alas, only a countable set of subsets can be defined. Where are the others?
WH: Every path without an end is defined by a set of nodes that has $\aleph_0$ elements
WM: You forget that this set of $\aleph_0$ nodes has no last element. But every subset that has a last node, defines infinitely many paths. Therefore the path you may have in mind is undefined.
WH: There are a uncountable number of subsets of nodes with $\aleph_0$ elements.
WM: That is true in case you can arrange them in every order you like. But in case of the binary tree just that is excluded. (Therefore I chose the tree.) There is no set of $\aleph_0$ nodes that cannot be the image of a mapping (like in Hessenberg's proof of Cantor's theorem). Every set of nodes belongs to one and only one real. And all sets are countable because:
1) All paths have the root in common.
2) In order to become visibly distinct two paths must split.
3) Every splitting increases the number of visibly distinct path by 1.
4) Every splitting requires a node.
5) The number of nodes is countable.
⇒ 6) The number of splittings is countable.
⇒ 7) The number of visibly distinct paths is countable.
Your argument is that the number of splittings is larger than the number of splittings.
[William Hughes, "A consideration concerning the diagonal argument of G. Cantor", sci.logic, 22. 6. 2008]

944 Das Kalenderblatt 120104 Der Binäre Baum (67)

In the following we consider only real numbers of the interval [0, 1].
A real number of the interval can as well be represented by a vertical path of the complete infinite binary tree (CIBT)

```
Level
  0        0.
          / \
  1      0   1
        / \ / \
  2    0  1 0 1
  ...  ............
```

The CIBT is uniquely determined by its structure of nodes as well as by its structure of paths.

Let x represent a digit, 0 or 1, then we can construct

1) a structure S_1 generated by the set of all terminating paths, i.e., all paths of the form 0.*xxx*...*xxx*000....

2) a structure S_2 generated by the set of all paths of the form 0.*xxx*...*xxx* (followed by an infinite periodical sequence).

3) a structure S_3 generated by the set of all paths of the form 0.*xxx*...*xxx* (followied by an infinite nonperiodical sequence).

It follows that each of these structures, S_1, or S_2, or S_3, generates the complete set of nodes and, therefore, each one is the CIBT that contains the complete set of all infinite paths.

As, by construction, the structure does not contain any other paths than those used to construct it, there is an unavoidable ambivalence concerning its paths.

Two paths P_1 and P_2 can be distinguished if they differ by a node, i.e., if P_1 has a node N_1 which is not in P_2 and P_2 has a node N_1 which is not in P_1. For two paths which cannot be distinguished by a node, every node of P_1 is a node of P_2 and every node of P_2 is a node of P_1. A line is a set of paths which cannot be distinguished by a node.
[WM, "Sequences of digits", sci. logic, 25. 3. 2008]

WM: Do you think that the binary tree is not constructable?

V: If it were constructable, then it would have to include construction of unconstructable paths, since there are too may paths to allow construction of them all.

WM: So they are not in the tree? There are too many reals that have no sequence of digits? And all that because a list cannot contain its anti-diagonal number?

V: If you have actually constructed it, including construction of all its uncountably many paths, other than merely having described it, you should be able to tell us which paths in your tree correspond to the binary expansion of log(1+1/n), for each natural n.

WM: What is the problem? Every digit of the decimal expansion can be calculated for every n. Do you think that binary conversion would be impossible? If so, use the decimal tree.

But the tree contains all infinite combinations of digits. Therefore it is impossible that a *real* number is missing.

V: But you can't. So you did not actually construct it at all.

WM: Why should I expand logarithms? Use a clever program like Mathematica and extend the universe a bit if you run out of hardware. But should that be your argument? *You* don't believe that we can extend the universe - at least the mathematical universe ???
[Virgil, " Why 'meta diagonals' are irrelevant", sci. logic, 16. 10. 2008]

WM: By means of the binary tree (or any other tree) every digit of every real is available, hence every real has been constructed. That set is infinite.

SM: If that's what you mean by "constructed", then the set of constructed reals is uncountable.

WM: The binary tree can be covered completely (such that no node remains outside of every path) by a countable set P of paths P_n. It is up to you to believe in the existence of other reals or other paths in the tree, that can exist without any hardware distinction, i.e., without any node being different from one of these paths P_n. I personally do not believe in such not even imaginary imaginations. But if people believe in the existence of undefinable numbers, they may also believe in the existence of multiple path using, i.e., every one of the countably many paths has a load of an uncountable number of reals. In my eyes that is an absurd idea, and I deplore that the name of mathematics is abused for this imprecise business, but it cannot be refuted, because it is obviously the claim of the existence of a contradiction. Two paths differ if there is at least one node different. On the other hand there is no node in the union of the paths 0.1, 0.11, 0.111, ... that differs from the path 0.111.... Nevertheless you believe that this path differs from

the union of the former. You try to justify that by quantifiers. That would only be valid for potential infinity, never for completed infinity.
[Steven Daryl McCullough, " Why 'meta diagonals' are irrelevant", sci. logic, 16. 10. 2008]

945 Das Kalenderblatt 120105 Der Binäre Baum (68)

WM: The number of paths in the binary tree divided by the number of nodes is about 1 for any initial segment of the tree. But it is $2^{\aleph_0}$ for the complete tree (when using Infinite sets + standard methods). Inconsistency.
SM: No, it's not an inconsistency. An inconsistency is a proof of a statement of the form $A \wedge \neg A$ (both a statement and its negation).
WM: Your argument would be acceptable, if set theory was a realm of its own, disconnected from mathematics. But since set theory is considered a part of mathematics (even being its most basic part), set theory has to pass the exam in mathematics. In mathematics we find - without requiring any arbitrary definition - that
1/2 + 1/4 + 1/8 + ... = 1
This is a mathematical result concerning an infinite set of numbers. And further we find that by summing up 2^ω unit fractions, the harmonic series
(1) + (1/2) + (1/3 + 1/4) + ...
turns out to be divergent.
But there is much more required than real numbers, namely quite a lot of "dark mathematics", to get more distinct paths in the binary tree than nodes creating them.
It is enough, for my purpose, to show that ZF does not consistently fit into mathematics. Whether or not ZF is consistent when considered apart and isolated from mathematics, that is a question that I am not interested in.
[Steven Daryl McCullough, " Why 'meta diagonals' are irrelevant", sci.logic, 7. 11. 2008]

Wrong is the assertion of the complete existence of ℕ, realized, for instance, in the index sequence of 0.111...
Proof 1:
Assume 0.111... does exist completely as an invariable entity. Then each of its digits 1 is the last 1 of a finite initial segment. Two finite initial segments can be replaced by the larger one. If all exist, then there is a maximum. Contradiction.
Proof 2:
0.111... does not contain any more position than the union of all finite initial segments. Why then does the following bijection fail?

```
 0.1, 0.11, 0.111, 0.1111, 0.11111, ...,  ?
  |     |     |       |        |          |
 0.1, 0.11, 0.111, 0.1111, 0.11111, ..., 0.111...
```

[WM, " Why 'meta diagonals' are irrelevant", sci. logic, 19. 10. 2008]

WM: All possible sequences of nodes, i.e., paths are realized in the infinite tree. But all of them are exhausted by paths eventually showing only zeros, 000... The same holds if I say: All possible paths are exhausted by paths eventually showing only ones, 111.... And I can continue as long as I like: The same holds if I say: All possible paths are exhausted by paths eventually showing only the pattern [put in what you like].
V: So that WM now claims there are two mutually exclusives sets of paths, each of which contains all possible paths?
WM: If every real number had an infinite binary sequence representing it, then each one would exist independently of the others, like the four sequences representing the four numbers
0.00, 0.01, 0.10, 0.11.

```
    0.
    /\
   0 1
  /\  /\
 0 1 0 1
```
There can be no doubt that these exist.

The infinite binary tree is not large enough to contain all infinite binary sequences. All it contains and all that exists is: all finite binary sequences. This is an infinite set, and there is no limit that would restrict the length of a sequence (except physical constraints). This is the one and only form of infinity that exists: potential infinity.
[Virgil, "MatheRealism", sci.logic, 1. 12. 2008]

946 Das Kalenderblatt 120106 Der Binäre Baum (69)

A path in an infinite binary tree is the representation of a real number of the interval [0, 1]. (Terminating rational numbers have two representations each.)

Two paths *A* and *B* in the infinite binary tree can be distinguished by at least one pair of nodes *a* and *b* where *a* belongs to *A* but not to *B*, and *b* belongs to *B* but not to *A*.

Assumption: For every pair of paths we can find a distinguishing pair of nodes where no node is used to distinguish another pair of path.

The nodes that distinguish paths can be mapped onto those paths, in the example above *a* can be mapped on *A* and *b* can be mapped on *B*. The assumption is that a node mapped on a path is not needed to be mapped on another path.

Conclusion: The number of paths is not larger than the number of nodes. The number of nodes is countable. As the number of paths is not less than the number of reals in the interval [0, 1], the number of reals in the interval [0, 1] is countable.

Or: The assumption is wrong. There are at least two pairs of paths that cannot be distinguished by different nodes.

DU: No, that's not the negation of the assumption. The negation of the assumption would be that there is a pair of paths such that every pair of nodes distinguishing those two paths also distinguishes another pair of paths. And that's obviously so. Say P_1 and P_2 are any two paths, distinguished by nodes *a* and *b*. If P_1' and P_2' are the same as P_1 and P_2 down to the level of *a* and *b* but then go off in different directions from P_1 and P_2 then *a* and *b* also suffice to distinguish P_1' and P_2'.
{{Kann man wirklich verkennen, dass zur Unterscheidung von P_1 und P_1' ein weiterer Knoten erforderlich ist, und zur Unterscheidung von P_2 und P_2' ebenfalls - und zwar ein anderer?}}
[David C. Ullrich, "Binary Tree and Pairs of Nodes", sci.logic, 6. - 7. 10. 2008]

{{Im Spiel "Wir erobern den Binären Baum" wird durch jeden Knoten ein unendlicher Pfad gelegt, insgesamt abzählbar unendlich viele.}}

LL: This method leaves behind no unmatched trajectory. So, if the binary tree is the outcome in the limit of a constructive procedure, the pairing procedure will end up in a bijection between the set of all nodes and the set of all paths.

As a consequence, the binary tree as a representation of the set of all infinite binary sequences is not constructive. This was to be expected, of course.

Can we conceive of the complete infinite binary tree as something other than the outcome in the limit of a constructive procedure?

I doubt it very much.

WM: Is there something other in mathematics than the outcome of a constructive procedure? I doubt it very very much.

LL: So, a case is here suggested against the intelligibility of the complete infinite binary tree as a representation of an uncountable set.

The binary tree is perhaps a special case, maybe worth of study, because it is intended as (the representation of) an uncountable object but exhibits the appearance of a constructive object, i.e. of a potential output of an algorithmic procedure.

WM's debate with other posters on sci.logic or sci.math may well be a neverending story if, as I think, the ultimate cause of dissent is the twofold nature (or the ambiguity) of the object of the discussion. The binary tree which WM, as a constructivist or a finitist, bears in mind is not the same as the binary tree which non-constructivists are thinking of. Or at least, so it seems to me.

WM: The binary tree contains only those nodes and paths that are constructable and can be exhausted by a bijection with the natural numbers. But what could be added? Where could it be extended. It contains all combinations of 1s and 0s. But in the infinite we see that all numbers ending with 000... or all numbers ending with 111... or all numbers ending with 010101... are the same set, as they all can be used to exhaust the tree, i.e., all possible sequences.

The idea that there should be more paths than nodes, implies the multiple use of the set of nodes already in the finit realm, i.e., the combination of n nodes to n! or 2^n different paths. But this is not at all possible in the tree. Every set of nodes distinguishes at most as many paths as there are nodes.

LL: I dare suggest the discussion should focus on the intelligibility / unintelligibility of a non constructive complete infinite binary tree.

WM: Yes, I would be interested to see what can be put into the tree in excess of the "all infinite paths" already being present there.

N: Another way to look at it is that $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$ has absolutely no pratical consequences, and is therefore superfluous. Some folks here have claimed that Cantor's theory is necessary as a foundation of analysis - a strange idea. The infinity in classical analysis is decidedly potential.

WM: There is absolutely no use for an actually infinite set $\mathbb{R}$, in particular as most of its elements cannot be distinguished or individually identified. Hence they cannot be used in any mathematical framework.

N: One problem is that there is no one generally accepted axiomatic constructivist set theory. I am not quite sure why not. If there were one then all you have to do is to juxtapose the two for the uselessness of the superfluous stuff for the whole world to see.

LL: And perhaps, via generalization, on the intelligibility of non-recursively-enumerable infinite sets.

N: I think that non recursively-enumerable infinite sets and $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$ are two different things.

WM: Correct! Consider the set of all anti-diagonals of Cantor-lists that you construct between midnight and the presentation of your complete list. This is an uncountably finite set.
[LauLuna, Newberry, "WM on the Binary Tree", sci.logic, 21. 10. 2008]

947 Das Kalenderblatt 120107 Der Binäre Baum (70)

{{Im Spiel "Wir erobern den Binären Baum" wird durch jeden Knoten ein unendlicher Pfad gelegt, insgesamt abzählbar unendlich viele.}}

TJ: Es kann doch nicht sein, dass ich für jeden Knoten bei der Wahl eines Pfades völlig frei stehe. Falls ich den ersten Knoten auf Pfad 0.10000..., den zweiten auf 0.01000..., den dritten auf 0.00100... usw. abbilde, dann habe ich den vorgeschlagenen Algorithmus genaustens befolgt, und dennoch werden mehr als ein Paar der möglichen Pfade dadurch verfehlt. Muß man nicht ein bisschen schlauer vorgehen?

WM: Nein. Es wird kein Pfad verfehlt, der das eroberte Gebiet verlässt, jedenfalls kein Pfad der sich durch einen im Endlichen gelegenen Knoten von einem anderen Pfad unterscheidet. Alle Knoten des Baums liegen aber im Endlichen, d.h., alle Ziffern einer reellen Zahl stehen an einer endlich indizierten Stelle.

Was auch immer sich aus dem eroberten Gebiet entfernt, tut dies an einem eroberten Knoten, der noch nicht markiert wurde. Du musst nur so vorgehen, dass Du alle Knoten eroberst. Das ist der springende Punkt. Und das ist möglich! {{Voraussetzung: Es gibt "alle".}}

TJ: Man muss so vorgehen, dass man "am Ende" eine Folge von Pfaden hat, sodass jeder Knoten auf mindestens einem davon liegt?

WM: Ja. Es darf kein Knoten unerobert bleiben, weil das gleichbedeutend mit einem uneroberten Pfad wäre und daher gleichbedeutend mit unendlich vielen uneroberten Pfaden.

TJ: Wenn das so entscheidend ist, wieso wird es nicht in der Beschreibung des Algorithmus explizit erwähnt?

WM: Ich schrieb: The aim of the game is to prove that the complete tree can be conquered by paying not more nodes than available in the conquered domain. And that is obviously possible!

Den gesamten Baum zu erobern, bedeutet alle Knoten (und damit alle durch mindestens einen Knoten unterscheidbaren Pfade) zu erobern. Mit welchem Algorithmus das geschieht, bleibt dem Spieler überlassen, sonst wäre das Spiel ja noch langweiliger, als es ohnehin schon ist. Man kann nämlich jeden beliebigen Algorithmus wählen und gewinnt unweigerlich immer. Ich habe jedenfalls noch keine Verluststrategie finden können.

Ich habe mir dieses langweilige Spiel nur ausgedacht um die seit vielen Jahren widerstrebenden Diskussionspartner davon zu überzeugen, dass alle durch Knoten im Baum unterscheidbaren Pfade eine abzählbare Menge bilden.

TJ: Gibt es weitere Einschränkungen die man beachten muss, die aber nicht aus der Beschreibung deutlich gemacht werden? Wenn nicht, gibt es eine Erklärung dafür wie man dadurch sichert, dass alle Pfade des Baums aufgesammelt werden?

WM: Versuche einmal, das zu vermeiden.

Alle Pfade, die sich durch Knoten voneinander unterscheiden, sind aufgesammelt, wenn kein Knoten mehr übrig ist, durch den sich ein Pfad von den schon eroberten unterscheiden könnte.

TJ: Wieso kann ich nicht einfach alle Kanten des Pfades 0.11111111... zuerst rot malen, alle andere Kanten des Baums schwarz, und dann mich immer nur für ganz schwarz gemalte Pfade interessieren, bis auf möglicherweise ein endliches rotes Anfangsstück, falls ein zu erobernden Knoten direkt auf dem roten Pfad liegt. Das ist jedenfalls möglich, somit wird der rote Pfad durch den Algorithmus nie aufgesammelt.

WM: Wenn das richtig wäre, so müsste er außerhalb des endlichen Anfangsstückes ohne jeden Knoten existieren. Solche Pfade existieren im Baum nicht, denn sie würden reellen Zahldarstellungen ohne Ziffern (ab einer endlichen Stelle) entsprechen. Der Baum ist aber nur ein anschauliches Beispiel für Zahlendarstellungen.

Der rote Pfad enthält nur Knoten im Endlichen. Alle Knoten im Endlichen werden erobert. Das ist die Moral des Spiels: Man kann mit unendlich vielen Pfaden der Form

0.1000..., 0.11000..., 0.111000..., ...

alle Knoten des Pfades 0.111... erobern. Der Pfad hat dann nichts mehr, wodurch er seine Freiheit beweisen könnte. Natürlich kann man auch alle Pfade der Form

0.0111..., 0.00111..., 0.00111...

verwenden, um den Pfad 0.000... zu erobern. Der Phantasie sind keine Grenzen gesetzt.

Der Baum lehrt, da er alle mit Ziffern darstellbaren Zahlen des Intervalls [0, 1] enthält, dass es nicht genügend unterschiedliche Ziffernkombinationen gibt, um die behauptete Menge von reellen Zahlen darzustellen. Nicht einmal die Menge aller rationalen Zahlen passt in den Baum (= existiert als Ziffernfolge). Und für Dezimaldarstellungen gilt dasselbe.
[Tommy Jensen, "Beweis für die Abzählbarkeit von R", de.sci.mathematik, 23. 10. 2008]

Dieser Beweis der Nichtüberabzählbarkeit der durch unendliche Ziffernfolgen darstellbaren reellen Zahlen ist deswegen besonders elegant, weil jede Behauptung des Gegenteils, also von mehr als abzählbar vielen unendlichen Ziffernfolgen, sofort dadurch widerlegt wird, dass der Behauptende unfähig ist, auch nur eine weitere Ziffernfolge im vollständig überdeckten Binären Baum zu identifizieren. Und durch endliche Definitionen können nur abzählbar viele Zahlen identifiziert werden. Dass die Überabzählbarkeit zuweilen trotzdem noch behauptet wird, ist wohl der mehr als ein Jahrhundert alten Gewohnheit zuzuschreiben.

948 Das Kalenderblatt 120108 Der Binäre Baum (71)

WM: Was unterscheidet den Pfad 0.111... von der unendlichen Vereinigung aller Pfade 0.1000..., 0.11000..., 0.111000..., ...? (*)

TJ: Die Vereinigung dieser Pfade besteht aus abzählbar unendlich vielen paarweise disjunkten Pfaden, deren Anfangsknoten einen weiteren Pfad bilden, etwa so:

```
o--o--o---o--o--...
|   |   |   |   |
o   o   o   o   o
|   |   |   |   |
o   o   o   o   o
|   |   |   |   |
o   o   o   o   o
.   .    .   .   .
:   :    :   :   :
```

WM: Ja. Hier ist die Vereinigung aller (bezogen auf die Folgen (*) von Einsen) endlichen Pfade p_n durch "o" markiert.

TJ: Der obere horizontale Pfad ist 0.111111... Der Unterschied ist also eine unendlich abzählbare Ansammlung disjunkter Pfade. Warum?

WM: Achtung: Das Folgende steht unter der Prämisse der aktualen Existenz aller Pfade. Es ist demnach sinnvoll, über alle Pfade zu sprechen, so dass kein weiterer hinzu gedacht werden kann, im Gegensatz zur potentiell unendlichen Menge, wo man niemals alle Elemente zusammenfassen kann, weil dieser Ansatz sofort falsifizierbar wäre.

Die unendliche Vereinigung der p_n überdeckt den unendlichen Pfad 0.111...

Es gibt aber, wie man leicht nachweist, keinen endlichen Pfad p_n, der den unendlichen Pfad überdeckt. Folglich muss in der Menge der endlichen Pfade p_n ein unendlicher Pfad angenommen werden.

Was wäre die Alternative? Zauberei! Eine Menge, die linear wächst, wie die Menge der Einsen in den p_n, müsste nichtlinear wirken, d.h., die einem Pfad zum Erreichen des Klassenziels fehlenden Einsen würden von anderen, genau genommen sogar unendlich vielen anderen Pfaden beigesteuert, obwohl man zeigen kann, dass jeder zum Ausgangspunkt dieser Aktion gewählte Pfad verworfen werden kann, weil er zu dem Erfolg der Gruppe absolut nichts beiträgt. Alles, was er erreicht, wird von seinem Nachfolger auch ohne ihn erreicht. Und trotzdem ist jeder Nachfolger zu kurz.

Das ist eine Geschichte die mit Realität oder Logik nichts zu tun hat. Wie würde derart angewandte Mathematik das Bankwesen sanieren! Jede Bank hat Schulden, aber alle zusammen genommen erzielen eine ausgeglichene Bilanz. Wir bräuchten nur unendlich viele Banken.

Nein, die Magie des Unendlichen wirkt schal.

Damit ist klar, dass eine aktuale Unendlichkeit nicht widerspruchsfrei existieren kann.

Es gibt beliebig lange Folgen (abgesehen von den matherealistischen Positionen, die übrigens sehr empfehlenswert sind), aber es gibt nicht den Fall, das alle unendlich vielen endlichen Indizes vorliegen.

TJ: Zugegeben: eine unendliche Menge unendlicher Pfaden lässt sich nicht, jedenfalls nicht sehr einfach, durch eine Ziffer von 1/9 beschreiben.

WM: Das Standard-Argument lautet hier zwar, die Zahl 0.111... würde sich von jeder der Zahlen aus (*) an einer anderen Stelle unterscheiden.

TJ: Die Zahl 1/9 unterscheidet sich in ihrer Dezimaldarstellung von jeder einzelnen der in (*) genannten Zahlen in unendlich vielen Stellen, und nicht nur das: sie unterscheidet sich in allen Stellen ausser nur endlich vielen. Wie können zwei Dinge überhaupt unterschiedlicher sein?
WM: Wie kann dann die Vereinigung aller dieser p_n den Pfad 0.111... überdecken?

Das gilt aber nur für potentiell unendliche Mengen, bei denen nicht alle Elemente gleichzeitig existieren und nicht alle Zahlen aus (*) gleichzeitig betrachtet werden können. Solche Mengen gibt es in der Mengenlehre nicht. Für eine aktual unendliche Menge, in der alle Elemente gleichzeitig und vollständig existieren, gilt das Argument nicht. (Trotzdem wird es immer wieder missbraucht.)

TJ: Die Menge der Pfade im binären Baum soll jedoch angeblich von viel schönerer Beschaffenheit sein: man kann sie aufzählen. Behauptest Du. Und wie sieht es jetzt aus mit dieser Aufzählung? Sie existiert, wenn man es genau nimmt? Kann man sie beschreiben? Muss man dies nicht fordern um Existenz zu belegen? Reicht die bloße Behauptung der Existenz aus?

WM: Ich spreche von allen Pfaden, die sich durch mindestens einen Knoten voneinander unterscheiden, also von der aktualen Existenz. Unter dieser Prämisse existieren {{als Pfade des Binären Baums}} entweder alle Pfade mit der Endung 000... und sonst überhaupt keine, oder alle Pfade mit der Endung 111... und sonst überhaupt keine, oder alle Pfade mit der Endung 2718281828... und sonst überhaupt keine, oder beliebige sonstige Scharen oder, wie die ursprüngliche Beschreibung meines Spiels
vorschlägt, eine bunte Schar verschiedenster Provenienz.

Um alle überabzählbar vielen reellen Zahlen zu beschreiben (so wie man sie sich per Vollständigkeitsaxiom und Cantor-Beweis vorstellt) gibt es einfach zu wenige Ziffernfolgen - binär ebenso wie dezimal oder sonstwie.
[Tommy Jensen, "Beweis für die Abzählbarkeit von R", de.sci.mathematik, 24. 10. 2008]

949 Das Kalenderblatt 120109 Der Binäre Baum (72)

WM: Die reellen Zahlen sind angeblich Grenzwerte von Folgen endlicher Anfangsabschnitte. Nur zeigt der Baum, dass es nicht mehr als abzählbar viele Grenzwerte geben kann. Andernfalls müsste ein Pfad überabzählbar viele Grenzwerte erzeugen.

TJ: Welche maximale (unendliche) Pfaden werden genau abgezählt?

WM: Es wird alles gezählt, was zählbar ist, d.h., was sich irgendwie unterscheidet - und zwar an einer endlich indizierten Stelle. Unendliche Stellen gibt es bei reellen Zahlen nicht.

TJ: Bei den unendlich vielen Pfaden die von einem Knoten nach unten laufen ist es schwierig einen bestimmten auszumachen. Wähle ich tatsächlich einen aus, etwa derjenige der ab diesem Knoten stets "nach links" läuft, dann wird der Pfad der immer "nach rechts" läuft offenbar nie mitgezählt, sowie auch kein Zickzack-Pfad, oder der 1/7-Pfad, usw., die alle ein anderes Benehmen aufweisen.

WM: Diese Pfade besitzen offenbar keine eigenständige Existenz, denn sie sind ja in den Vereinigungen andere Pfade enthalten. Dabei ist es willkürlich, welche Pfade man für grundlegend erklärt. Zum Beispiel ist der Pfad 0.111... in der Vereinigung aller Pfade 0.1, 0.11, 0.111, ... enthalten.

Mit unserem Spiel haben wir ja gesehen, dass alle Knoten des Baums durch abzählbar viele Pfade überdeckt werden. Da bleibt nichts übrig, um andere Pfade zu bilden.

TJ: Ich (und fast alle anderen) sehen es aber so, dass sobald die Möglichkeit einer Nummerierung nicht vorhanden ist, dann steht die nicht-Abzählbarkeit der Menge damit fest, und ich brauche mich nicht mehr um diese Frage zu kümmern.

WM: {{Bei dieser Einstellung würde auch die Menge sämtlicher Ein-, Nass- und Trockenhörner nichtabzählbar sein.}} Dich interessiert nicht die Tatsache, dass alle Knoten des Baums von einer abzählbaren Menge von Pfaden überdeckt werden?

TJ: Die Interpretation oder Verwendung von dieser Tatsache ist eine andere Sache. Mit "Anzahlen" zu arbeiten scheint verdächtig, denn man denkt dabei in erster Linie an endlichen Mengen. Ein Baum der nur bis zu einer endlichen Tiefe wächst hat natürlich weniger maximale Wege die zu Wurzel führen als er Knoten hat.

WM: Richtig. Daher muss "im Unendlichen" ein ziemlich merkwürdiger Sprung erfolgen. Die Folge der Quotienten aus der Anzahl maximaler Wege und der Anzahl von Knoten bis einschließlich zur Ebene n ist

$2^n/(-1 + 2\cdot 2^n)$ bzw. $2\cdot 2^n/(-1 + 2\cdot 2^n)$ [*]

und das konvergiert gegen 1/2 bzw. gegen 1.

Erst "im aktual Unendlichen" wird daraus $2^{\aleph_0}$. Besonders merkwürdig ist, dass der "Beweis" dafür mit Cantors Diagonalargument erfolgt, das seinerseits nur Ziffern an endlicher Stelle vergleicht, also genau so auf endliche Stellen beschränkt ist wie [*].

Sei dem wie ihm wolle: Für mich ist das nicht auf Endlichkeits- oder Unendlichkeitsbetrachtungen beschränkte Argument

```
I
o
/\
```

in jedem Falle gültig und unwiderlegbar. Und alles, was ihm widerspricht, ist falsch.

TJ: Nur eine weitere Frage der Klarheit wegen. Das Argument wird welche Aussage(n) zeigen?

(I) Die Menge der Pfade ist nicht überabzählbar.

WM: Dieser Begriff ist zweideutig. Die Menge der Pfade ist nicht nummerierbar, d.h. sie ist überabzählbar. Die Menge der Pfade ist gleichzeitig nicht größer als die abzählbare Menge $\mathbb{N}$, also ist sie gleichzeitig nicht überabzählbar.

TJ: (II) Es existiert eine Abzählung der Pfade.

WM: Es existiert ein Beweis, dass die Menge der Pfade nicht mehr als $\aleph_0$ Element enthält.

TJ: (III) Die Pfade können in einer Folge aufgezählt werden.

WM: Nein. Das geht ebensowenig wie die Aufzählung der konstruierten Antidiagonalzahlen.

TJ: (IV) Es gibt eine bestimmte Folge der Pfade und ein dazu passendes Computer-Programm, welches für Eingaben *n* und *m* (beide natürliche Zahlen, sagen wir zwischen 1 und 10^{10}) stets eine korrekte Anwort zu der Frage "liegt der *n*'te Knoten des Baums auf dem *m*'ten Pfad der Folge?" liefert.

WM: Nein. Trotzdem ist die Menge der Pfade durch die Menge der Knoten beschränkt.
[Tommy Jensen, "Antwort an Kluto", de.sci. mathematik. de, 31. 10 - 5. 11. 2008]

Parallel zu den öffentlichen Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein:

NN: Hello Professor Doktor Wolfgang Mückenheim!

I am intrigued by your unusual view of these topics, and I have some questions, that if you can spare the time to answer, I would be most grateful:

1. You disagree with many theorems in set theory which are considered to be true by the mathematical community. I would also assume that these theorems, like for example the theorem that every set is smaller than its power set, have formal proofs that can be derived in a mechanical fashion from the axioms and deduction principles that are widely accepted in the mathematical community, like the axioms of ZFC. After reading several of your articles describing why you do not accept these proofs, I would therefore conclude, and please correct me if I am mistaken, that your disagreement with these proofs can be "boiled down" to a disagreement about the axioms and deduction principles that should be used in set theory. So what I would like to know is, can you specify what are the exact axioms and deduction principles that you are refusing to accept?

2. It seems that you are not accepting the method of diagonalization as a proof device. Besides Cantor's proofs which use diagonalization, which I know you object to, there are also Godel's Incompleteness Theorem and Turing's proof regarding the Halting Problem. These proofs use some sort of diagonalization: Do you deny these proofs as well, and their corresponding implications?
Thank you very much for you time,
Yours Sincerely, NN

950 Das Kalenderblatt 120110 Der Binäre Baum (73)

WT: Ich weiss, dass sich viele der - wie sagst Du? - "Mengenlehrer"
WM: Das soll keine Beleidigung sein, sondern lediglich eine kurze und prägnante Bezeichnung für Leute, die die (transfinite) Mengenlehre lehren, lieben, verfechten, ...
WT: die natuerlichen Zahlen als eine Art Sack vorstellen, in dem sich dann alles befinden soll, was man niemals hineingesteckt hat. Dieser nach meiner Meinung philosophische Unsinn (mit all den von Dir erkannten Konsequenzen, einschliesslich dem potentiell und aktualen Nonsense) ist einer antiquierten Interpretation der formal logischen Aussagen geschuldet, die auf Cantors Definition als Zusammenfassung zurueck geht. Man interpretiert die epsilon Beziehung $\in$ in der Form $a \in b$ i.d.R. als $b = \{a, ...\}$. Das ist weder notwendig noch zielfuehrend. (Tatsaechlich kommen diese Mengenklammern "{" und "}" in modernen Formulierungen der Formalen Theorie ZFC in erster Stufe ueberhaupt nicht vor, und der Mengenbegriff bleibt undefiniert).
Nehmen wir statt der zweistelligen epsilon Beziehung die lexikographische Ordnung lex auf den Woertern "*a*", "*aa*", "*aaa*", ..., die sich durch Hinzufuegen des Buchstabens "*a*" an bereits konstruierte Woerter darstellen lassen zusammen mit dem Buchstaben "*b*". Wir brauchen weder dem Buchstaben "*a*" noch "*b*" nichtssagende philosophische Attribute wir "unendlich", "aktual" oder "potentiell" anzudichten, um zu erkennen, dass alle aus "*a*" bestehenden Woerter dem Wort "*b*" lexikographisch vorausgehen, also *a* lex *b*, *aa* lex *b*, *aaa* lex *b*, usw. gilt.
Trotzdem kaeme kein billig und gerecht Denkender auf die Idee, aus diesem Grund dem "*b*" etwas "aktual unendliches" unterzuschieben, womoeglich noch mit der Begruendung, dass
$b = \{a, aa, aaa, ...\}$.
Mit dem Objekt $\mathbb{N}$ verhaelt es sich analog: Im Modell ist $\mathbb{N}$ ein Objekt (wie der Buchstabe "*b*"), welches nicht erst aus irgend welchen anderen "zusammengebastelt" werden muss (genausowenig wie der Buchstabe "*b*" aus all seinen lexikographischen Vorgaengern).
Mit diesem Verstaendnis platzt der ganze Unendlichkeitsspuk wie eine Seifenblase, und mehr gibt es dazu auch nicht zu sagen.
WM: Das ist eine schöne stromlinienförmige Theorie. Insbesondere die Unärdarstellung der natürlichen Zahlen gefällt mir. Und mangels eines Mengenbegriffs braucht man auch nicht die Anwesenheit aller *a*-Wörter zu fordern. Man könnte also, wenn man denn unbedingt wollte, für die *a*-Wörter das von Dir nicht geschätzte Wort potentiell unendlich verwenden. *b* bzw. $\mathbb{N}$ ist nur die Bezeichnung dafür. In dieser Form verwende ich $\mathbb{N}$.
[Wolfgang Thumser, "Anwort an Kluto", de.sci.mathematik, 10. 11. 2008]

{{Auch hier bleibt anzumerken, dass *b* nicht aus einer unendlichen Folge von *a*-Wörtern *besteht*, sondern ein endlich definiertes Objekt ist. Doch vor allem zwei Folgerungen drängen sich auf. Zum einen ist die Kardinalzahl der Menge aller endlich definierten Objekte (wie hier *b*) gewiss nicht größer als die Kardinalzahl der natürlichen Zahlen, und zum anderen hat die ganze Theorie nichts mit der Zifferndarstellung reeller Zahlen zu tun. Es handelt sich bei ZFC und der Frage nach unzugänglichen Kardinalzahlen bestenfalls um eine sinnfreies Spiel ohne jeden mathematischen Gehalt.}}

Parallel zu den öffentlichen Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein:

NN: Your game is just a countable sequence of choices, a countable choice function. We have no guarantee that such a device will 'finally' give us the entire tree.

The question is not whether we can play your game and lose, the question is whether there is a winning strategy, that is, a definable pairing function. There is none. Try to construct it and you'll find that paths are shaped in more ways than any finitely expressible criterium could take into account.

I think your idea is that whenever a new path parts we have an available node in the 'conquered domain' to match it with, so that "in the limit" we have a sufficient supply of nodes to tag all paths in the tree. You are assuming that whatever holds for all finite initial portions of the tree holds for the whole tree. The assumption is unwarranted. {{Zur Erinnerung: Knoten existieren nur auf endlich indizierten Niveaus.}}

So far I can only concede that the apparently constructive nature of the binary tree is a little baffling to sheer intuition. It seems that we can construct it step by step just as we can generate the naturals; the tree seems to be the outcome of a countable sequence of acts, so that a countable choice function would give it all to us.

But this need not be so, for if we try to define a particular bijection between the set of all paths and the set of all nodes, we necessarily fail. This shows that the passage to the limit doesn't work. {{In Cantors Liste wurde der Grenzübergang ja auch vollständig vergessen.}}

Perhaps (only perhaps) it could be argued that the complete infinite binary tree is unintelligible since it can obviously be constructed step by step by a mathematician following finite instructions (provided with a potentially infinite supply of paper etc.) and yet it cannot be taken to be the outcome in the limit of such an operation because 'somewhere' in its development the tree jumps into the uncountable.

Or equivalently: maybe, if the tree is conceivable at all, it can only be conceived of as the potential output of such a task and at the same time it cannot be conceived of as such output since the potential output of any conceivable algorithm is countable. Then (maybe) we must infer that it is not conceivable.

As far as I can see, this would (perhaps) amount to refuting the existence of the set of all reals. Best. {{Genau zu dieser Folgerung bin auch ich gelangt.}}

951 Das Kalenderblatt 120111 Der Binäre Baum (74)

WM: Für jede natürliche Zahl gilt die vollständige Induktion, wenn wir 'mal annehmen, dass wir sie glauben oder Peano zugrunde legen.

KS: Ich *verstehe* diesen Satz nicht. Was soll heißen: für jede Zahl gilt die vollständige Induktion?

WM: Wenn eine Aussage für die Zahl n als richtig nachgewiesen wurde, so ist sie auch für die Zahl n+1 richtig. Das heißt: Wenn die ersten n natürlichen Zahlen eine endliche Menge bilden, so bilden auch die ersten n+1 natürlichen Zahlen eine endliche Menge. Und das höret nimmer auf, solange nur natürliche Zahlen in Rede stehen. Daher kann man aus natürlichen Zahlen keine Menge bilden, die A Elemente besäße wo A größer ist als jede natürliche Zahl. Anders gesagt:

Die Menge der hier in Unärdarstellung untereinander geschriebenen natürlichen Zahlen

1
11
111
...

bildet nur dann die Zahl 111..., wenn diese Zahl bereits in der obigen Menge enthalten ist. Andernfalls geht das nicht. 111... ist lediglich die Bezeichnung für eine potentiell unendliche Menge, also eine Menge die stets endlich ist (wohl aber veränderlich).

KS: Wir haben die Mengen

$M_1 = \{1\}$
$M_2 = \{1, 2\}$
$M_3 = \{1, 2, 3\}$
$M_4 = \{1, 2, 3, 4\}$
...

Ich schreibe hier nette Pünktchen, die nichts anderes bedeutet sollen als: wenn M_i existiert, dann auch M_{i+1}

Wir sammeln diese Mengen mal ein:

$$M = \{ M_i : i \in \mathbb{N} \}$$

Die Menge M enthält also alle Mengen M_n.

Für jede dieser Mengen M_n gilt, daß sie eine endliche Mächtigkeit besitzen, also daß $|M_n| \in \mathbb{N}$ (wahrscheinlich würden mir sogar alle Beteiligten zustimmen, daß $|M_n| = n$, aber das ist gar nicht wichtig).

WM: Klarer ist die Vorstellung, dass: $|M_n|$ ein Anfangsabschnitt der natürlichen Zahlen ist: $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Dann haben wir $|M_n| \subset \mathbb{N}$.

KS: Für jede dieser Mengen M_n gilt weiterhin, daß es ein $k_n \in \mathbb{N}$ gibt (also ein k_n das abhängig von M_n gewählt wird), so daß $k_n \notin M_n$. Weiterhin gilt für jedes $l \in \mathbb{N}$ (l wird also frei gewählt), daß es eine Menge M_{n_l} gibt (M_{n_l} wird hier also abhängig von l gewählt), so daß $l \in M_{n_l}$.

Zunächst mal wirkt das etwas unintuitiv. Im ersten Fall ist irgendwas immer *nicht* drin, im zweiten Fall ist irgendwas immer drin. Der Unterschied ist offensichtlich: Wenn ich die konkrete Menge M_n kenne, kann ich k_n geschickt wählen, und wenn ich l kenne, kann ich M_{n_l} geschickt wählen.

WM: Richtig. Wenn aber alle Mengen existieren, so brauche ich nicht eine von ihnen zu wählen, denn dann kann ich jede betrachten - auch die mit M übereinstimmende. Eine solche muss es in einer linearen Ordnung nämlich geben. Das "Argument " der Mengenlehrer ist hier: Keine Menge M_n stimmt mit M überein. M ist ja die unendliche Vereinigung der M_n. Gegenargument: Ich kann jedes M_n aus der Vereinigung herausnehmen, ohne M zu beschädigen. Ich kann also, um Klartext zu reden, jeden Anfangsabschnitt M_n der natürlichen Zahlen aus der Vereinigung fortlassen, sofern es zu seiner letzten Zahl n eine größere natürliche Zahl gibt. So sind aber alle natürlichen Zahlen definiert, nämlich dass es zu jeder eine größere gibt. Also kann ich alle Anfangsabschnitte fortlassen, ohne eine leere Vereinigungsmenge zu erhalten. Und dies ist ein Widerspruch.

Das vollmundige Argument mit der unendlichen Vereinigung kann ich ganz einfach entkräften. Wer das Unendliche fordert, soll ersteinmal im Endlichen rechnen. Wenn Du mir zwei Anfangsabschnitte M_k und M_n nennen kannst, die beide gebraucht werden, die also nicht durch einen der beiden ersetzt werden können, dann will ich glauben, dass unendlich viele Anfangsabschnitte nützlich sind, noch nützlicher als nur zwei. Wenn Du das aber nichts kannst, dann ist die Behauptung, unendlich viele würden gebraucht, nichts als heiße Luft ohne jeden Nährwert. Dann ist diese Behauptung genau so stichhaltig wie die Behauptung, dass die Folge 1, 1, 1, ... den Grenzwert $2^{\aleph_0}$ besitzt, was ja tatsächlich im binären Baum von den Mengenlehrern gefordert werden muss. Mag sein, dass manche oder sogar viele das für Mathematik halten. Ich tue das nicht.

KS: Wirkt trivial (und unendliche Mengen etc. kamen erstmal nicht vor, nur $\mathbb{N}$ als die Menge der natürlichen Zahlen. Wir benutzen aber nirgendwo die "Unendlichkeit" von $\mathbb{N}$, wir nutzen lediglich die Tatsache, daß für jedes $i \in \mathbb{N}$ auch $i + 1 \in \mathbb{N}$ (und das ist auch die einzige Eigenschaft, auf die es ankommt)).

WM: Doch, Du benutzt die Unendlichkeit von $\mathbb{N}$, nämlich Du behauptest, dass die unendliche Vereinigung, oben *M* genannt, existiert. Sie existiert nicht.
[Klaus Stein, "Ich will auch, ich will auch", de.sci.mathematik, 10. 11. 2008]

Parallel zu den öffentlichen Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein:

Überdies wissen Sie wissen Sie ja schon längst bestens Bescheid; das sieht man an Ihrem entsprechendem Argument (das ich das "Rechteck-Argument" nenne) in den ersten zwei Auflagen Ihres mir bekannten Buches. Sie behaupten, Sie hätten dieses Argument "zugunsten überzeugenderer Argumente (Binärer Baum) entfernt". Aber in Wirklichkeit haben Sie ein entscheidend wichtiges Argument durch eine andere Erklärung (?) ersetzt, deren Zusammenhang mit dem Diagonalverfahren zumindest von oberflächlichen Lesers (- die meisten heutigen Leser sind oberflächlich) nicht erkannt werden kann. - Das Diagonalverfahren wird von Ihnen auf S. 97 Ihres Buches
{{
W. Mückenheim: "Die Geschichte des Unendlichen", 7. Auflage, Maro-Verlag, Augsburg 2011. ISBN: 978-3-87512-156-8
https://www.maroverlag.de/book.php?id=243&PHPSESSID=ad4ef4dc724b67d924368b7cbfba8a1e
}}
so "linientreu" kritiklos erklärt, dass [...] F. Hausdorff und A.A. Fraenkel, wenn sie noch am Leben wären, ihre helle Freude daran hätten.

Auf welcher Seite stehen Sie jetzt?

952 Das Kalenderblatt 120112 Der Binäre Baum (75)

TJ: Ich möchte den Baum graphentheoretisch beschreiben. Er besitzt einen einzigen Knoten (Wurzel) mit der Eigenschaft zu genau zwei anderen Knoten durch eine Kante verbunden zu sein. Jeder andere Knoten ist zu drei Knoten im Baum so benachbart. Ausserdem gibt es zu jedem Knoten exakt einen einzigen Weg (endliche Kantenfolge ohne Wiederholung von Knoten) der im Baum zu der Wurzel führt.

In mittlerweilen beliebter Bilddarstellung: o< ... -o< ... Besser wäre eigentlich eine Art fraktale Darstellung, etwa auf dem Bildschirm, mit der Möglichkeit beliebig auf der rechte Bildkante einzuzoomen, wobei man langweiligerweise immer das gleiche etwas fuzziges Bild erleben wird, egal wie nahe man geht.

1. Der Baum ist nicht endlich. Denn ein endlicher Baum, der einen Knoten vom Grad *k* enthält, enthält wiederum mindestens *k* Knoten vom Grad 1 (Blätter). Unser Baum enthält Knoten vom Grad 2 und 3 aber keine vom Grad 1. NB: haben wir die Existenz des Baums erst, dann brauchen wir kein Unendlichkeitsaxiom um die Existenz einer unendlichen Menge zu sichern.

2. Ein "Pfad" bezeichnet ein Teilbaum: darin hat die Wurzel den Grad 1 und jeder andere Knoten den Grad 2. Auch ein Pfad ist unendlich, mit demselben Argument wie oben (mit $k = 2$ dieses Mal).

3. Die Menge der Knoten im ganzen Baum ist, wie auch die Menge der Knoten eines einzelnen Pfades, eine abzählbar unendliche Menge. Die Kardinalität ist jeweils $\aleph_0$.

4. Bezeichnet *P* die Knotenmenge eines beliebigen Pfades, etwa der Pfad der im Bild ganz oben liegt, dann ist die Kardinalität der Menge 2^P der Teilmengen von *P* nach Definition gleich $2^{\aleph_0}$, wie für jede Menge der Teilmengen einer Menge der Kardinalität $\aleph_0$.

5. Wir können eine Bijektion von der Menge 2^P in die Menge der Pfade wie folgt kombinatorisch beschreiben. Sei *R* eine Teilmenge von *P*. Male die Knoten von *R* mit roter Farbe, die restlichen Knoten aus *P* mit schwarz.

[WM: Off topic, aber trotzdem charakteristisch für die Argumentation im Unendlichen: Die Summe der Moleküle von roter und schwarzer Farbe ist kleiner als 10^{80}. Die Farbe reicht nicht aus.

TJ: Doch: nach rechts gehend werden die Knoten immer kleiner, genau wie die immer schneller gebackenen Brezeln von Achilles. Gegen Ende braucht ein roter Knoten weniger als ein halbes Farbmolekül.

WM: Folglich wird Blau und bald nur noch UV emittiert. Das Auge sieht schwarz. Für Deine Einfärbung sehe ich schwarz (deutsche Redewendung, manchmal auch als "dunkelschwarz" betont).]

TJ: Bilde einen Pfad, der in der Wurzel anfängt und in jedem Knoten nach rechts dreht falls der eindeutig bestimmter Knoten aus *P* mit gleichem Abstand zum Wurzelknoten rot ist, und nach links falls dieser Knoten schwarz ist. Somit ist ein Pfad des Baums eindeutig der Teilmenge *R* zugeordnet.

WM: Alle Kombinationen von Ziffern 0 und 1 sind im Baum realisiert (soweit wir das überblicken, also für jeden endlichen Abschnitt des Baums).

TJ: 6. Die oben definierte Abbildung hat offenbar ein Inverses: zu einem gegebenen Pfad im Baum gibt es eine eindeutig rot/schwarz-Färbung der Menge *P*, sprich eine bestimmte Teilmenge *R* von *P*, sodass genau dieser Pfad der Menge durch obige Vorschrift zugeordnet wird. Die Abbildung ist daher eine Bijektion.

7. Wir haben eine Bijektion konstruiert von einer Menge der Kardinalität $2^{\aleph_0}$ auf die Menge der Pfade im Baum.

8. Nach üblicher Auffassung haben wir gerade gezeigt, dass die Kardinalität der Pfadmenge $2^{\aleph_0}$ beträgt.

WM: Dein Beispiel ist sehr klar und einsichtig. Die Bijektion zwischen allen Teilmengen *R* von *P* und den unendlichen Pfaden des binären Baums zeigt, dass die Kardinalzahl der Pfadmenge dieselbe wie von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist. Dasselbe findet man aus der Bijektion von $\mathbb{R}$ (den unär dargestellten reellen Zahlen aus dem Intervall [0, 1]) und der Pfadmenge.

Wäre dies nicht der Fall, so wäre die Mengenlehre nur falsch (freilich in einem entscheidenden Punkt), aber nicht selbstwidersprüchlich.

TJ: 9. Der Begriff "cardinal number $\aleph_0$", wie er ganz oben verwendet wird, ist anderer Begriff als er üblicherweise definiert wird.

WM: Es geht um dieselbe Zahl, nämlich die Kardinalzahl der Pfadmenge. Sie wird in meinem Beweis nicht durch eine Bijektion bestimmt, sondern durch eine Abschätzung.

Eine obere Schranke für die Menge aller unterscheidbaren Linien ist die Anzahl aller unterscheidbaren Linien.

Um sie zu bestimmen, genügt es, die Anzahl aller unterscheidbaren Linienanfänge zu kennen, denn die unendlichen Enden können wir nicht sehen. Jede unterscheidbare Linie fängt an einem Knoten an (der bis zu dem Knoten verlaufende Teil ist für die Abzählung unwesentlich und auch unbrauchbar).

TJ: Nun müsste überlegt werden, ob die Menge aller "unterscheidbaren" Teilmengen von $\mathbb{N}$ bijektiv mit der Menge aller unterscheidbaren Linien übereinstimmt. Da ich mich im alltäglichen Leben nur mit "unterschiedlich" statt "unterscheidbar" befasse, zumindest soweit ich es zu erkennen vermag, habe ich damit meine Probleme, doch vielleicht sieht man dies nicht schwer. Wenn es nicht so wäre, dann scheint es ein bisschen unerwartet.

WM: Es ist so. Alle Pfade können bijektiv mit den Teilemengen der natürlichen Zahlen in Beziehung gesetzt werden, z.B. 0.1000... ↔ 1, 0.01000... ↔ 2, 0.010101... ↔ Teilmenge aller geraden Zahlen. Alle Pfade der Form 0.111...111000... mit *n* Einsen entsprechen dann den Anfangsabschnitten der Folge der natürlichen Zahlen {1}, {1, 2}, {1, 2, 3}, ... Und deren

Vereinigung ist ja bekanntlich ℕ, so wie die Vereinigung all dieser Pfade den Pfad 0.111... überdeckt / enthält - auch wenn es nicht so aussieht.
[Tommy Jensen, "Ich will auch, ich will auch", de.sci. mathematik. de, 13. 11. 2008]

953 Das Kalenderblatt 120113 Der Binäre Baum (76)

WM: Cantor's diagonal argument shows that the anti-diagonal number AD cannot exist at the *n*-th place of a diagonalized sequence. From this fact it is concluded that the AD cannot be a member of the complete infinite sequence. But this conclusion is invalid unless the ratio of 0 ADs and 1 numbers

0/1 = 0

at the *n*-th place of the sequence can be extrapolated to yield 0 ADs for the complete sequence.

DU: Given that for every *n* the "AD" is not the *n*-th term in the sequence then by definition the AD is not in the range of the sequence.

WM: Given that for every *n* the set {2, 4, 6, ..., 2*n*} contains larger numbers than *n* then the sequence cannot only contain numbers smaller than its cardinal number.

The only counter argument is that from $0\cdot n = 0$ you cannot conclude $0\cdot\infty = 0$. This holds for all infinite sets.

Of course you can *define* that a sequence contains only natural numbers. Then there is no doubt possible. But do you *define* that the Cantor's list does not contain the AD? Or do you want to *prove* it.

In mathematics we cannot conclude in general from $0\cdot n = 0$ that $0\cdot\infty = 0$ is correct.

Without this possible extrapolation, however, Cantor's proof is invalid. But if this extrapolation holds, then it shows also that the number of elements of the set of positive even numbers cannot be larger than every number of the set.

Let *n* be the cardinal number of the set. The ratio of positive even numbers > *n* and positive even numbers ≤ *n* cannot be less than 1. The minimum of this ratio

$|\{2(n+1), 2(n+2), ..., 4n\}| / |\{2, 4, 6, ..., 2n\}| = 1$

is taken for initial segments of the form {2, 4, 6, ..., 4n}. For all other finite sets of positive even numbers this ratio is larger. By extrapolating as above we see that every infinite set of positive even numbers contains numbers that are larger than the cardinal number of the set.

This can also be seen by a geometric argument: Counting elements means to add a step width of one unit per count on the real axis. But every even number consumes two units on the real axis. Therefore it is impossible to compress any set of even numbers to a diameter that is smaller than the number of elements.

Therefore, every set of positive even numbers contains numbers larger than its cardinal number.
[David C. Ullrich, "Extrapolating linear ratios", sci.logic, 13. 12. 2008]

FJ: Among other things it contains a link to Harvey M. Friedman's lectures "Philosophical Problems in Logic"
http://www.math.ohio-state.edu/~friedman/pdf/Princeton532.pdf
with a quote from Friedman which may not be irrelevant to the current thread (or maybe it is but I thought it was funny):

"I have seen some ultrafinitists go so far as to challenge the existence of 2^{100} as a natural number, in the sense of there being a series of 'points' of that length."

WM: Of course there are not 2^{100} points. Such numbers can only exist by the decimal or binary system. But there are far smaller numbers that cannot exist. At this point it is useful to imagine a small computer that can handle only 7 symbols of a key-board. Its display can show 2^{10000} but not 12345678.

FJ: There is the obvious "draw the line" objection, asking where in 2^1, 2^2, 2^3, ... , 2^{100} do we stop having "Platonistic reality"?
WM: In fact everybody will be stopped at 10^{100} bits. No, you cannot make 10^{100} dots.
[Fred Jeffries, "The modern mathematical concept of infinity is ...", sci.logic, 17. 2. 2009]

Parallel zu den öffentlichen Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein:

Sehr geehrter Herr Professor Mueckenheim,
ich bin beim Lesen Ihrer interessanten Arbeit auf folgendes Problem gestossen: [...] Als es um das mathematische Verständnis der Infinitesimalrechnung ging, hat F. Klein gegen M. Pasch die Unabhängigkeit der Mathematik von den Messinstrumenten, und insbesondere vom Maßstab, behauptet. Das bedeutet so viel wie eine begriffliche Scheidung. [...] Tatsächlich neige ich mitunter dazu, den Kleinschen Gesichtspunkt zu teilen und bin darum der Meinung, dass die Frage wie man die physikalischen Gesetze mathematisch auszudrücken habe, nur teilweise von Heisenberg beantwortet worden ist.

954 Das Kalenderblatt 120114 Der Binäre Baum (77)

WM: Every FISON {{Finite Initial Segment Of Naturals, Anfangsabschnitt der Folge der natürlichen Zahlen}} is fixed. But it is not fixed what FISON represents $\mathbb{N}$. That changes with time and with observer. That is mathematical relativity.
DW: And so in your opinion $\mathbb{N}$ is not a set but a function with time and observer as argument and sets as result. In clear contradiction to the definition given in set theory.
WM: But in agreement with mathematics. The definitions of set theory are in contradiction with mathematics. $\aleph_0$ is contradicted by the fact that every union of FISONs is a FISON. $2^{\aleph_0}$ is contradicted by the fact that in the binary tree the number of edges cannot surpass the number of paths. (In order to make that possible the edges must be combined irrespectively of their natural sequence - but that is impossible in the binary tree.)
So MatheRealism is the only possible honest way to do mathematis. Admittedly it doesn't look very elegant, but it is useful (and it is what all mathematicians, except set theorists, in fact always have done). It is not necessary to have $\aleph_0$ items to do math, as it is not necessary to consider quantization of the terrestrial orbit for astronomical purposes. [...]
DW: For every natural number *n* (there are many of them) there is a finite number available (*n* itself) to distinguish it from all the other natural numbers. So for each *n* there is a number available: *n* itself. And, as we assign *n* strokes to *n*, there is a finite number of symbols per number that is sufficient to distinguish all (many) natural numbers. In most set theories the cardinality of that set is called $\aleph_0$.
WM: But what you describe is the potentially infinite set $\mathbb{N}$. Most set theories entail the error to call $\aleph_0$ a cardinal number that is larger than every natural number in $\mathbb{N}$ whereas $\aleph_0$ is only a name for the possibility to continue in infinity - not a number of elements. [...]
Consider the edges of the complete binary tree (an edge connects two subsequent nodes of a path). Take all edges and put them on one and the same level of the tree, side by side, such that the "tree" now is an array of parallel edges: ||||||... This array limits the number of possible paths of the tree. It is an upper limit, because every path there has only one edge. And there is no further edge remaining to distinguish any further paths (in case you should argue that every edge of my array stands for more than one path).
DW: I confess that I do not understand this at all. What is an array with "parallel" edges?
WM: Take all the edges and put them side by side in a countable array.
[Dik T. Winter, "The modern mathematical concept of infinity is ...", sci.logic, 8. - 22. 3. 2009]

DW: At what stage does the tree contain all paths and all nodes? As far as I can see, at every stage the tree is finite, and so contains only finitely many paths and nodes.
WM: If you like to draw every path at half the time of its predecessor. Then you can calculate the time when you will have finished.
DW: Doing things "infinitely often" is not part of mathematics.
WM: Mathematics is the science of the infinite. You can add infinitely many numbers but get a finite result. You can even subtract infinitely many numbers from infinitely many numbers and get a finite result. Leibniz showed it. See for instance
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/GU/GU02.PPT#324,12,Folie 12
DW: Yes, he thought he could do it,
WM: He did it - and he got the correct results.
I know that there are not more paths in the binary tree than nodes (+1)
DW: Only proven for finite binary trees.
WM: Proven for the construction of the complete tree by path that end with zeros only. Proven by the countable number of edges.
DW: Not proven, because you can not get at the infinite tree by adding edges or nodes or paths one by one.
WM: I can (if this tree exists). I define: The tree is built by all paths that end by zeros. There is no adding at all.
DW: But when you do that in this way it gets difficult to prove things. Those series are currently done using limits, you know, putting it on a sounder basis.
WM: Limits are nothing else. Do you know the symbol they use in mathematics? $n \to \infty$. Do you know what they say (in German) "*n* geht gegen unendlich". It goes, step by step. It grows over all limits.
DW: Not doing things infinitely often.
WM: Doing things infinitely often. See our correspondence.
DW: In that case there must be a step when you get the infinite tree. Which step is it?
WM: It is the same step that completes Cantor's search of Cantor's list.
[Dik T. Winter, "The modern mathematical concept of infinity is ...", sci.logic, 23. - 27. 3. 2009]

Wenn das Unendliche aktual existiert, dann existieren alle endlichen Anfangsabschnitte der natürlichen Zahlen

1
2, 1
3, 2, 1
...

aktual, d.h. vollständig und gleichzeitig, so dass alle zusammen untersucht werden können, und ihre Anzahl ist $\aleph_0$, größer als jede natürliche Zahl. Damit müssen im obigen Dreieck auch $\aleph_0$ natürliche Zahlen existieren. Sie können aber nicht in einer einzigen Zeile existieren, denn jede Zeile enthält nur eine endliche Anzahl natürlicher Zahlen. Sie können auch nicht in mehreren Zeilen existieren, denn die endlichen Anfangsabschnitte bilden eine inklusionsmonotone Folge. Also lautet der Schluss: Wenn alle endlichen Anfangsabschnitte der natürlichen Zahlen aktual existieren, so existieren nicht alle natürlichen Zahlen und damit auch nicht alle endlichen Anfangsabschnitte der natürlichen Zahlen aktual.

955 Das Kalenderblatt 120115 Der Binäre Baum (78)

WM: Dear NN, there is no point of formalizing such an obvious truth as I have shown by my three proofs in the initial posting. But I think that this thread has yielded a lot of new insights for all parties. Perhaps you will agree that when you first answered my FOM-contribution, you had no clue what a multitude of facets the binary tree may hide, won't you?

PW: Personally speaking, I learned nothing from this thread, and it provided no new insights.

WM: That need not be blamed to the thread.

PW: I have heard this argument about binary trees many times before, and its probably been floating around for 100+ years. Anybody who has spent any time in sci.math or sci.logic would realise instantly that the counter-example of 1/3 will be raised {{His (Stevin's) notation was to be taken up by Clavius and Napier but others resisted using it since they saw it as a backwards step to adopt a system which could not even represent 1/3 exactly. [J.J. O'Connor and E.F. Robertson: "The real numbers: Pythagoras to Stevin"]}}, but instead of the crank admitting they have not formed a bijection between $\mathbb{N}$ and $\mathbb{R}$, they will try and confuse their way out of it with some bullshit about 1/3 mapping to some number which is not part of $\mathbb{N}$.

Happens every couple of months here. The informational or educational value of such threads is zero for anybody with the slightest knowledge of set theory.

WM: You could have learned the following: There is no path 0.111... in the tree, namely a path that is distinct by a certain number ($\aleph_0$) of ones from all paths used to construct the tree. There is only, for every path with *n* bits of value 1, another path with one more bits of value 1. That is the whole infinite story.

But the same holds for Cantor's list. There is no line that shows you that the diagonal number is not in the list. There is only a line that shows you that the diagonal number is not in the first *n* lines of the list but that does not exclude that it could be in the next line.
[Peter Webb, "The complete infinite binary tree has only countably many infinite paths", sci.logic, 29. 3. 2009]

WM: The complete infinite binary tree has only countably many infinite paths.

DU: Why do you continue this? Even if you were right, surely it's clear by now you're not going to convince anyone.

WM: You are in error. Everybody not blinded by the blinkers of transfinite set theory will understand very easily that I am right. And here I have given two slightly different versions of the proof that may contribute to convince some more readers.

As Brouwer claimed and as Weyl approved ...

AK: An unfortunate source for support since the diagonal argument is intuitionistically valid.
"Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen"
- Ludwig Wittgenstein, Tractatus Logico-Philosophicus

WM: An unfortunate source for support:
"Set theory is wrong"
- Ludwig Wittgenstein, "Philosophical Remarks", § 174

Without finished infinity the diagonal argument does not show that the diagonal number is not in the sequence, because the sequence is never complete.

Therefore I feel Weyl's and Brower's position comforting, according to which logic fails for infinite sets.

DU: What you use in place of logic may well fail for infinite sets, but there's no problem with *logic* and infinite sets.

AK: It is also of course not Weyl's and Brouwer's position that logic fails when considering infinite sets. {{... classical logic was abstracted from the mathematics of finite sets and their subsets .... Forgetful of this limited origin, one afterwards mistook that logic for something above and prior to all mathematics, and finally applied it, without justification, to the mathematics of infinite sets. ... As Brouwer pointed out this is a fallacy, the Fall and Original sin of set theory even if no paradoxes result from it. (H. Weyl, 1946)}}

WM: I confess that in this respect I remain steadfastly on the side of Brouwer, who blames the paradoxes not on some transcendental logical intuition which deceives us but on an error inadvertently commited in the passage from finite to infinite sets. (H. Weyl, 1949)

[David C. Ullrich, Aatu Koskensilta, "paths through binary trees in ZF", sci.logic, 25. - 31. 3. 2009]

956 Das Kalenderblatt 120116 Der Binäre Baum (79)

These: Der unendliche binäre Baum besitzt nur abzählbar viele Pfade.
PRO
A) Konstruiere den binären Baum beginnend mit einem "Baum", der nur aus einem einzigen Pfad p_0 = 0,000... besteht:

```
0,
 |
0
 |
0
 |
0
...
```

Füge sämtlich Pfade hinzu, die mit unendlich vielen Nullen enden. Jeder noch zu konstruierende Pfadendabschnitt beginnt an einem Knoten des Pfades p_0 oder an einem Knoten eines anderen bereits konstruierten Pfades. Der Baum ist vollständig konstruierbar, da eine Konstruktionsvorschrift gegeben werden kann. [...] Der Baum enthält also abzählbar viele Pfade. Der Baum enthält alle Pfade, wenn man davon ausgehen kann, dass Pfade allein durch Knoten definiert werden. Zum Beispiel ist jeder Knoten des Pfades 0,010101... vorhanden.
B) Der binäre Baum (mit Ausnahme der Wurzel) besteht ausschließlich aus Elementarzellen der Form

```
 |
 o
/ \
```

In jede Elementarzelle läuft eine Linie ein, und zwei unterscheidbare Linien laufen heraus. Die Anzahl der herauslaufenden Linien minus die Anzahl der einlaufenden Linien minus Anzahl der Knoten ist:
2 - 1 - 1 = 0.
Die Anzahl der Knoten ist abzählbar. Die Anzahl der Linien ist daher auch abzählbar, wenn sie nicht größer als die der Knoten ist, wenn also die Summe über alle Elementarzellen
$\Sigma_{n=1...\infty}\, 0 = 0$
oder wenigstens
$\Sigma_{n=1...\infty}\, 0 < \aleph_0$
ist.
Die Anzahl der Linienunterscheidungen ist abzählbar. Die Anzahl der Linien beschränkt die Anzahl der Pfade.
C) Betrachte alle Knoten {{bzw. Kanten}} nebeneinander aufgereiht.
|||||||...
Diese Reihe begrenzt die Anzahl unterscheidbarer Pfade auf $\aleph_0$. Es gibt keinen weiteren Knoten zur Unterscheidung weiterer Pfade.
CONTRA
V. Pratt:
http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2009-March/013493.html
Im finiten Fall eines Baums der Höhe *h* laufen durch jeden Knoten, der den Abstand *d* vom Wurzelknoten besitzt, 2^{h-d} Pfade. Mit zunehmendem *h* laufen durch jeden Knoten eine exponentiell ansteigende Anzahl von Pfaden. Im Grenzfall sind das $2^{\mathbb{N}}$ Pfade pro Knoten. Man

mag argumentieren, dass auch die Anzahl der Knoten sich mit jedem Niveau verdoppelt. So haben wir zu fragen, ob dieses Wachstum der Knotenanzahl stark genug ist, die Anzahl der durch einen Knoten laufenden Pfade zu aufzuwiegen. Im Grenzfall ist jeder Pfad auf $\mathbb{N}$ Knoten verteilt, aber das lässt $2^{\mathbb{N}}/\mathbb{N}$ Pfade pro Knoten, und das kann nicht $\mathbb{N}$ sein, weil $\mathbb{N}^2$ abzählbar ist und $2^{\mathbb{N}}$ nicht.

Meine Antwort: Man kann mit drei Knoten 6 unterscheidbare Pfade bilden, nämlich *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*. Doch dazu muss man die Knoten geschickt kombinieren. Im binären Baum ist das nicht möglich. *n* unterscheidbare Pfade unterscheiden sich durch mindestens *n* Knoten. $\aleph_1$ Pfade kann man nicht mit $\aleph_0$ Knoten unterscheiden.

V. Pratt:
http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2009-March/013493.html
Für Bäume der Höhe *h* finden wir eine Kardinalitätslücke, nämlich 2^h - 1 Knoten gegenüber 2^h Pfaden. Warum sollte der Übergang zum Grenzfall diese Lücke schließen?

Meine Antwort: Dann lassen wir den Baum doch mit einem Vorwurzelknoten beginnen:

```
o
|
o
/ \
...
```

und schon ist die Lücke weg. Ansonsten: gutes Argument! Warum sollte beim Übergang zum Grenzfall eine Lücke entstehen, wenn vorher keine da ist?

D.C. Ullrich
http://groups.google.com/group/sci.logic/msg/82cd07114d4e6d7e?hl=de&dmode=source
Du sagst immer wieder: "Diese Prozedur, selbst wenn unendlich oft angewandt, kann nur das Resultat 0 ergeben, das heißt eine abzählbare Anzahl von Linien", aber das ist einfach nicht wahr.

Meine Antwort: Dies bezieht sich auf Argument B, das in meinen Augen ein äußerst mathematisches ist. Die Akzeptanz einer überabzählbaren Anzahl von Pfaden erfordert demnach die Akzeptanz von $\Sigma_{n=1...\infty}\ 0 > \aleph_0$.
[WM, "Argumente zum binären Baum", de.sci.mathematik, 7. 5. 2009]

Georg Cantor
diskutiert in einem Brief an Vivanti vom 3. 12. 1885 eine Konstruktion des binären Baums aus endlichen Pfaden:

$z_n = a_1/2 + a_2/2^2 + ... + a_{n-1}/2^{n-1} + 1/2^n$

wo a_k die Werthe 0 oder 1 haben kann, so ist die Anzahl dieser Zahlen z_n gleich 2^{n-1}.

Läßt man nun *n* die Werthe 1, 2, 3, ... in inf. durchlaufen, so erhält man:

1+ 2 + 4 + 8 + ... in inf. $z = \{z_1, z_2, z_3, ...\}$

d. h. eine Unendlichkeit von Zahlen *z* von der ersten Mächtigkeit (abzählbar im *engeren* Sinne, d. h. abzählbar durch Zahlen der zweiten Zahlenclasse).

Diese Zahlen bilden aber doch nur einen sehr kleinen, fast möchte ich sagen verschwindenden Theil des Inbegriffs aller Zahlen, die sich in der Form:

$z_n = a_1/2 + a_2/2^2 + ... + 1/2^n + ...$ in inf.

präsentiren, welche das Linearcontinuum (0 ... 1) ausmachen und deren Mächtigkeit wie ich u. a. in Borchardts J. Bd. 76, pag. 260 {{gemeint ist Bd. 77}} bewiesen habe, eine höhere ist, als die erste. Die scheinbare Schwierigkeit löst sich also einfach darin auf, dass die Mächtigkeit der Gesammtheit aller Zahlen des Intervalls (0...1) *nicht* als Grenze der Mächtigkeiten aller Zahlen z_n für $n = \infty$ aufgefasst werden darf [...].

Meine Antwort: Wenn die reellen Zahlen *nicht* durch einen Grenzprozess aus den rationalen entstehen, so kann *auch die Zahl* 0,111... *nicht* durch einen Grenzprozess aus den Zahlen der Folge

0,1
0,11
0,111
...

entstehen, erzeugt, konstruiert, realisiert, erhalten werden. Damit versagt Cantors Diagonal-Konstruktion, denn eine von allen Listeneinträgen verschiedene Diagonalzahl erscheint nicht. Und natürlich versagt auch der in Borchardts J. dargestellte Beweis, denn die Intervallschachtelung führt auch nur als Grenzprozess zu einem Ende, will sagen zur Vollständigkeit.

Cantor hat diesen Grenzprozess selbst verwendet: [...] √3 ist also nur ein Zeichen für eine Zahl, welche erst noch gefunden werden soll, nicht aber deren Definition. Letztere wird jedoch in meiner Weise etwa durch (1,7, 1,73, 1,732, ...) befriedigend gegeben.

Georg Cantor
schreibt in einem Brief an Pater Ignatius Jeiler vom 13. 10. 1895: Die Resultate, zu denen ich gelangt bin, sind diese: Ein solches Transfinitum, sowohl wenn es in concreto, wie auch in abstracto gedacht wird, ist widerspruchsfrei, also möglich und von Gott erschaffbar, so gut wie ein Finitum.

In einem Brief an Kardinal Franzelin vom 17. 12. 1885 schreibt Cantor: Ein Beweis geht vom Gottesbegriff aus und schließt zunächst aus der höchsten Vollkommenheit Gottes Wesens auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum ordinatum, sodann aus seiner Allgüte und Herrlichkeit auf die Notwendigkeit der tatsächlich erfolgten Schöpfung eines Transfinitum.

Meine Antwort: Also das Argument der Scholstiker: Gott kennt alle Zahlen. In welcher Form merkt er sich aber die reellen?

957 Das Kalenderblatt 120117 Der Binäre Baum (80)

Obwohl ich meine bisher veröffentlichten Beweise zum binären Baum und der Unmöglichkeit des aktual Unendlichen gegenüber den verschiedenen in diesem Thread ausführlich besprochenen Einwendungen noch heute vollkommen aufrecht erhalte, dürfte doch der hier folgende neue Beweis desselben Theorems nicht ohne Interesse sein.

Wir betrachten die Menge Q aller abbrechenden binären Rationalzahldarstellungen q aus dem Einheitsintervall und eine nicht darin enthaltene Rationalzahldarstellung wie etwa

p = 1/3 = 0.010101…

Falls das Unendliche aktualer Natur ist, kann mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens gezeigt werden, dass die Menge Q nicht alle reellen Zahldarstellungen des Einheitsintervalls enthält.

Dazu verwenden wir die aus Q erzeugte Liste:

0.1000…
0.01000…
0.11000…
0.001000…
…

Außerdem gilt dann auch unabhängig vom Diagonalargument die Aussage, dass p nicht in der Menge Q enthalten ist.

Nun schreiben wir die obige Liste in etwas Platz und Tinte sparender Form, indem die führende 0 nur einmal hingeschrieben wird und die anschließenden, in allen Binärdarstellungen identischen Ziffern 0 bzw. 1 auch jeweils nur einmal hingeschrieben werden. Das Ergebnis ist eine baumartige Darstellung

```
     0
    /   \
   0    1
  / \    / \
 0 1  0 1
 …
```
der binäre Baum. Man beachte, dass durch diese vereinfachte Darstellung die Menge *Q* in keiner Weise verändert worden ist.

Nun ist es nicht mehr möglich, irgendeine Binärdarstellung wie *p* (oder sonst einer reellen Zahl des Einheitsintervalls) von allen Elementen aus *Q* zu unterscheiden.

Der Beweis dafür folgt unter anderem daraus, dass die baumartige Darstellung unverändert bleibt, wenn anstelle der Menge *Q* eine andere abzählbare Menge von Binärdarstellungen verwendet wird, etwa alle diejenigen, die anstelle der Periode 000… die Periode 010101… als Endung besitzen und damit die Darstellung von *p* selbst enthalten.

Fazit: Vor der Baumkonstruktion gilt die Aussage: *p* kann von jedem Element aus *Q* unterschieden werden. Nach der Baumkonstruktion gilt aber bei unveränderter Menge *Q*: *p* kann nicht von jedem Element aus *Q* unterschieden werden.

Eine der beiden Aussagen muss also falsch sein. Da es die zweite nicht ist, ist es die erste, in die implizit die Annahme einer vollständig existierenden (aktual unendlichen) Ziffernfolge eingeht.

Daraus folgt, dass eine aktual unendlich Folge von Binärziffern, etwa der Form 010101… nicht existiert.

[WM, "Argumente zum binären Baum", de.sci.mathematik, 15. 6. 2009]

WM: Binärer Baum, bestehend aus beliebig vielen Elementen
```
 |
 o
 / \
```
RW: Deine Studenten meinen tatsächlich, diesen Unsinn verstanden zu haben.

WM: Stell Dir einfach einmal vor, dass die Knoten im Baum Löcher sind, aus denen Pfade aus einer dritten Dimension, von hinten also, in die Zeichnung eintreten - aus jedem Loche ein Pfad.

Und nun versuche Dir vorzustellen, dass ein nicht in der Mengenlehre befangener Geist verstehen soll, wie eine Anzahl von Löchern eine größere Anzahl von Pfaden gebiert. Genau das wollen Du und Deinesgleichen aber verordnen! [...]

RW: Was also hat dich bewegt, WMs Argumenten zu folgen? Ich halt sie nach wie vor für eloquent vorgetragenen Unsinn.

WM: Immerhin wohl besser als stumpfsinnig vorgetragener Unsinn. Doch was ist Dir unverständlich an der Beweiskette: Wenn die Menge aller natürlichen Zahlen vollständig existiert, dann muss auch die Folge aller FISONs $F_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ vollständig existieren. Das heißt, es darf keine natürliche Zahl geben, die außerhalb jeder FISON liegt. Da nach Definition aber auch alle kleineren Zahlen in jeder drin bleiben, müssen alle natürlichen Zahlen in einer FISON sein. Natürlich kann niemand die betreffende FISON angeben. Das ist potentielle Unendlichkeit. Aber die Kardinalzahl ist eine natürliche Zahl. Das ist die Widerlegung der aktualen Unendlichkeit $\aleph_0 > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Und wenn das alles nichts hilft: Bist Du wenigstens bereit anzuerkennen, dass alle natürlichen Zahlen, die man identifizieren und zum Rechnen verwenden kann, in einer einzigen FISON unterkommen?

[Rainer Willis, "Cantor / Abbildung N auf R", de.sci.mathematik, 11. - 19. 2. 2009]

DS: Belief has nothing to do with it. I can prove that there are more real numbers than there are descriptions.

WM: What does that mean?

DS: It means what it says.
WM: But it does not say what it means, in particular where are these numbers? What kind of existence do you expect?
DS: I believe that ZFC is consistent. No one has proved otherwise.
WM: I have shown that the complete binary tree contains all infinite binary sequences. The primitive element is a node which has one line going in and two lines leaving. That means the number of all lines that can be distinguished (I know that you don't know what that means, nevertheless I use it!), the number of all lines that can be distinguished is not larger than the number of nodes if the sum over all (countably many) elementary cells is

$\Sigma_{n=1...\infty} (2 - 1 - 1) = 0$

or

$\Sigma_{n=1...\infty} (2 - 1 - 1) < \aleph_0$

But if set theory is free of the contradiction ($|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}|$) then there must be

$\Sigma_{n=1...\infty} (2 - 1 - 1) > \aleph_0$

This is a *mathematical* proof that ZF is inconsistent. It can be followed without any belief. You can see the construction of the tree here:
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/GU/GU12c.PPT#365,38,Folie 35
[Dave Seaman, "Diagonal wanderings", sci. logic, 14. 5. 2009]

Parallel zu den öffentlichen Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein:

NN: Gut, letztlich ist die Mathematik auch nur eine von Menschen erdachte und gelebte Disziplin. [...] Ihr konstruktivistischer Standpunkt scheint mir verständlicher und natürlicher, schlicht näher an der Wahrheit zu sein. Das ist zumindest mein vorläufiger Eindruck.

958 Das Kalenderblatt 120118 Der Binäre Baum (81)

TP: Ich denke, die Lehrmeinung ist hier allgemein bekannt (Cantorsches Diagonalargument), dennoch fällt es mir schwer zu erkennen, welche Argumentationen fehlerhaft sind und welche nicht und werde deshalb auf die Urteilskraft von professionellen Mathematikern vertrauen.
WM: So wie man in der Frage nach Gott der Urteilskraft von professionellen Theologen vertrauen sollte? Jedenfalls hat man dann ein bequemes Leben und vielleicht sogar einen Vorteil danach. [...]
Die Frage ist, ob es *alle* reellen Zahlen gibt. Die Konstruktion des Baums zeigt, dass ganz sicher alle Knoten und damit nach meiner Meinung auch alle Pfade mit Hilfe einer abzählbaren Pfadmenge (ich benutze ja nur alle "endenden" Rationalzahlen) konstruiert werden. Die Alternative ist, wie das Argument über das "Einschleichen" nahelegt, dass mit einer abzählbaren Anzahl von Konstruktionsschritten eine überabzählbare Anzahl von *unterscheidbaren* Pfaden konstruiert werden. (Unterscheidbar voneinander und von jedem der zur Konstruktion benutzten Pfade.)
TP: Letzteres erscheint auch mir sinnvoll: Die Knotemenge und die Kantenmenge des Graphen sind abzählbar, jedoch nicht die Menge der Pfade, auch wenn man den Baum mit abzählbar vielen Konstruktionsschritten erhalten kann.
WM: Man kann mit abzählbar vielen Unterscheidungen nicht überabzählbar viele Elemente unterscheiden. Es geht hier nicht um Kombinationsmöglichkeiten wie bei der Potenzmenge von $\mathbb{N}$ sondern um Konstruktionsschritte. Es geht also um die Konstruktion von linear geordneten Mengen, *a*, *ab*, *abc*, nicht um nichtlineare Mengen wie *ac*, *bc*.
TP: Du arguementierst, dass es in einer endlichen Sprache nur endlich viele Repräsentationen von Zahlen geben kann. Die Abhängigkeit von Zahlen von ihrer Repräsentation ist schon lange

überholt, es gibt auch Zahlen, die nicht mit einem endlichen Alphabet repräsentiert werden können.

WM: Wo gibt es die? Woher weiß man, dass es sich dabei um Zahlen handelt?

TP: Es werden Dinge konstruiert bzw. definiert, so auch die reellen Zahlen und ob dieses Konstrukt nun in der Realität existiert oder nicht, kann es trotzdem gewisse Eigenschaften besitzen.

WM: Aber keine Eigenschaften, die unendliche Definitionen bedürfen. {{Insbesondere hat Cantor seinen "Beweis" in deutscher Sprache mit einem Alphabet aus 10 Ziffern, 30 Buchstaben und ein paar mathematischen Symbolen geführt. In *diesem* Umfeld gibt es jedenfalls nicht überabzählbar viele Zahlen. Cantor konstruiert aber genau dort eine dort nicht konstruierbare Zahl, denn andernfalls hätte man sie wohl vorher in die berühmte Liste geschrieben. Des Rätsels Lösung ist, dass eine unendliche Ziffernfolge keine Information liefert und daher auch keine Zahl beschreibt. Die Information wäre erst nach der letzten Ziffer verfügbar.}}
[Thomas Plehn, "Argumente zum binären Baum", de.sci.mathematik, 18. 4. 2009]

WM: Der Baum enthält alle Pfade, wenn man davon ausgehen kann, dass Pfade allein durch Knoten definiert werden.

CC: Was ist die inhaltliche Bedeutung des letzten Halbsatzes? Wie wird ein Pfad "allein durch Knoten definiert“?

WM: Ein Pfad ist nur ein anderes Bild für die Binärdarstellung einer reellen Zahl aus dem Einheitsintervall.

Wenn alle Knoten eines Pfades gegeben sind (durch Kanten verbunden sind), dann gibt es nichts weiter, was zu seiner Existenz erforderlich wäre.

Zum Beispiel ist jeder Knoten des Pfades 0,010101... vorhanden.

CC: Richtig. Das bedeutet allerdings nicht, dass dieser Pfad in der Menge der bei der Konstruktion benutzten Pfade auftauchen würde. Tut er ja auch nicht.

WM: Der Pfad 0.010101... stellt eine Linie dar, die nicht zu den für die Konstruktion benutzten gehört. Diese Linie enthält nur (maximal) einen Pfad, nämlich binär 1/3.

CC: Der o.g. Pfad ist nicht in der Menge der betrachteten Pfade enthalten. *Obwohl* alle seine Knoten da sind. Wer darin einen Widerspruch zu erkennen glaubt, sollte allerdings detailliert zeigen, *wozu* das ein Widerspruch sein soll.

WM: Die Existenz von X unterscheidbaren Elementen bei $Y < X$ Unterscheidungsmerkmalen ist ein Widerspruch.

Eine überabzählbare Menge unterschiedlicher Pfade kann durch abzählbar viele Schritte entstehen?

CC: Ja.

WM: Wenn alle unendlich vielen Pfade der Form 0.111...111 mit endlich vielen Einsen konstruiert sind, dann hat sich zusätzlich der eine Pfad 0.111... eingeschlichen. Du akzeptierst aber sogar, dass sich mehr Pfade einschleichen, als zur Konstruktion verwendet werden?

Wie unterscheidet man alle? Nicht nur den einen vom anderen, sondern alle auf einmal, was ja möglich sein muss, wenn alle auf einmal da sind.
[Christopher Creutzig, "Argumente zum binären Baum", de.sci.mathematik, 19. 4. 2009]

Wenn jemand Cantor eine Liste aller reellen Zahlen vorlegen möchte, so zeige er sie zuerst mir! Ich beweise ihm dann, dass seine Liste nicht alle *natürlichen* Zahlen enthält, sondern allenfalls ein Achtel. Eine Prüfung auf Vollständigkeit bezüglich der reellen Zahlen ist daher völlig sinnlos.
[WM, "Das Kalenderblatt 100814", de.sci.mathematik, 15. 4. 2010]

V: An infinite path can only be distinguished from all other infinite paths in an infinite binary tree by an *infinite* set of nodes.

WM: And uncountably many paths? How many nodes are required to distinguish them from all other infinite paths?

[Virgil, "Yet another supertask (Daryl McCullough please do not read)", sci.logic, 6. 7. 2011]

WM: Ich behaupte nicht, eine Abzählung der reellen Zahlen angeben zu können. Ich behaupte, dass es im Intervall [0, 1] weniger unendliche Pfade gibt als natürliche Zahlen. Dies kann ich beweisen. Dazu habe ich eine Surjektion von den natürlichen Zahlen auf die unendlichen Pfade konstruiert.
JG: Ich weiß, dass das Thema hier schon oft genug durchgekaut worden ist. Aber meines Wissens haben Sie die Frage noch nicht beantwortet, welche natürliche Zahl in ihrer Surjektion auf 1/3 abgebildet wird.
WM: Muss man den Grenzwert einer Reihe berechnen können, um zu beweisen, dass sie konvergiert? Muss man $\zeta(3)$ kennen, um zu beweisen, dass es irrational ist? Muss man eine Wohlordnung für $\mathbb{R}$ angeben können, um zu beweisen, dass eine existiert? Manches in der Mathematik kann man nur indirekt beweisen.
Wenn die Binärdarstellung von 1/3 als unendlicher Pfad im unendlichen Binären Baum vorhanden ist, dann wird eine der Konfigurationen darauf angebildet (und damit die Nummer dieser Konfiguartion), denn deren Grenzwert ist der Binäre Baum mit allen unendlichen Pfaden.
Wenn aber alle überabzählbar vielen unendlichen Pfade erst *nach* allen natürlich nummerierten Konfigurationen in den Baum schlüpfen, dann kann wohl auch eine einsame Diagonalzahl nach allen natürlich nummerierten Zeilen noch in Cantors Liste schlüpfen. Oder existiert da ein prinzipieller Unterschied?
[Jutta Gut, "Cantor - Zermelo-Fraenkel", de.sci.mathematik, 29. 11. 2010]

959 Das Kalenderblatt 120119 Der Binäre Baum (82)

RF: Was du treibst, könnte man bei analogem Unverständnis des Spieltriebs mathematische Doktorspiele nennen.
WM: Gute Idee: Fragen Sie Dr. Mückenheim. Kürzlich kam ein Student zu mir, der vier Semester Mathe/Physik studiert und sich nun für ein angewandtes Fach bei uns entschieden hatte. Er sagte, er könne einfach nicht mehr begreifen, wie es zugegangen ist, dass in derselben Mathe-Vorlesung gezeigt wurde: Die abzählbaren rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$ und die reellen Zahlen sind überabzählbar. Und keiner aus dem Hörsaal hat etwas gemerkt. [...]
RF: Die übliche Mathematik beweist, dass der Baum, wenn er als Repräsentant einer abzählbaren Menge des offenen Einheitsintervalls (0,1) konstruiert wurde, nach Anwendung z.B. der monotonen Funktion $x \to \sin(x)$ nicht in einem einzigen Pfad übereinstimmt, obwohl das ja eine Teilmenge sein müsste.
WM: Es geht nicht darum, was "die übliche Mathematik beweist". Es geht allein um die Frage, ob Du eine reelle Zahl allein anhand ihrer Ziffernfolge indentifizieren kannst oder nicht.
RF: Die Behauptung, man könne nicht, ist mathematischer Unsinn erster Kategorie, d.h. mit Kindergartenmethoden wiederlegt.
WM: Ich gebe Dir einen mit einer abzählbaren Menge von unendlichen Pfaden konstruierten binären Baum. Frage: Kann jemand für einen mit abzählbar vielen Pfaden konstruierten Baum einen Pfad angeben, der noch nicht darin ist? Die Antwort ist ebenso einfach: Nein, niemand kann das.
RF: Doch, das kann jedes begabte Kind.
WM: Na dann, nur zu! Der Worte sind genug gewechselt. Welcher Pfad fehlt? {{Eine Antwort blieb selbstverständlich aus. Die Behauptung, einen nicht zur Konstruktion benutzten Pfad im vollständig konstruierten Binären Baum identifizieren zu können, wird nicht begründet, denn es ist unmöglich.}}
RF: Das ist trivial. Nun zeichne den Pfad von Summe $(-1)^n/n$ ein und trage die vorwärtstrunkierte Ziffernfolge in eine Liste ein.

WM: Warum sollte ich das tun? Ungeachtet des gewählten Tails habe ich jeden Knoten und vor allem jeden zu jedem Knoten führenden Pfad im Baum etabliert.
RF: 1. Du sollst nicht lügen.
WM: Deshalb betone ich stets, dass es nichts vollendet Unvollendetes gibt.
RF: 2. du sollst die Regeln der Kunst lehren auch wenn du privat kritisch dazu stehst.
WM: Die Regeln der Kunst, nicht aber eine leicht durchschaubare Selbsttäuschung vieler sich für gelehrt Haltender.
RF: 3. Deine Schüler sollen sich - gar in einem Philosophiekurs - in die Lage versetzt sehen, deinen Vortrag den gängigen Methoden der Kritik zu unterziehen.
WM: Die gängigen Methoden sind, wie man am transfiniten Teil der Mengenlehre leicht sieht, ein Schmarren. Ich habe den binären Baum ersonnen, der genau das beweist.
RF: Nur was der Kritik standhält (nicht wer, sondern was) kann Wahrheitsanspruch erheben.
WM: Ach ja: ich hatte diesmal als Tails die Ziffernfolge von ln2 gewählt.
[Roland Franzius, "Kann man pi und e 'hinten' unterscheiden?", de.sci.mathematik, 11. 7. 2009]

UB: Aus der Abzählbarkeit der Knoten auf die Abzählbarkeit der Pfade zu schließen ist falsch. Und das ist letztlich m. E. der Kern des Irrtums, hier halt geschickt versteckt. Klar gibt es nur abzählbar viele Knoten und abzählbar viele Kanten. Da bis zu jeder endlichen Tiefe nur endlich viele Kanten und Knoten existieren. Aber "Pfade" sind etwas anderes. Um festzustellen, dass diese nicht abzählbar sind, kann man eben das berühmte Cantorsche Diagonalargument heranziehen.
WM: Das berühmte Cantorsche Diagonalargument ist falsch. Es funktioniert nicht auf Zahlendefinitionen wie $\sqrt{(6\cdot\Sigma 1/n^2)}$ sondern nur auf Hochstaplern wie 3,14...
UB: Eleganter und beeindruckender kann man das Kartenhaus von der Abzählbarkeit nicht zusammenstürzen lassen.
WM: Es funktioniert nicht für die Liste

0,0
0,1
0,11
0,111
...

Wenn vorschlagsgemäß 0 durch 1 ersetzt wird, so ergibt sich die Zahl 0,111..., die mehr als jede natürliche Zahl von Einsen enthält, nämlich $\aleph_0$ Einsen. Sie unterscheidet sich um eine Eins (was anderes ist ja nicht darin) nicht nur von jedem Listeneintrag, das wäre einfach und schlichtweg potentiell, sondern aktual von allen Listeneinträgen, denn sonst würde sie zur Liste gehören. Wo steht aber die Unterscheidungs-Eins? Ihre ganz vorn oder mehr zur Mitte hin stehende Einsen sind bereits alle mit Einsen in den Listenzahlen identisch, also nicht zur Unterscheidung geeignet. Es muss wohl mehr eine Eins weiter hinten sein - und zwar sehr weit hinten, weiter als jeder natürliche Index reicht.
UB: Nun bleibt es an Dir, zu überlegen, wo Dein Denkfehler sitzt. {{Der Denkfehler sitzt bei Cantor. Auf *jede* Zeile seiner Liste folgen unendlich viele. Deshalb gilt seine Aussage nur für *jede* Zeile, nicht aber für *alle* Zeilen.}}
WM: Mich würde vor allem Deine Meinung zu den Contra-Argumenten interessieren. Selbst wenn alles falsch wäre, was ich hier und an Pro-Argumenten geschrieben habe, bliebe immer noch die Tatsache, dass "... classical logic was abstracted from the mathematics of finite sets and their subsets .... Forgetful of this limited origin, one afterwards mistook that logic for something above and prior to all mathematics, and finally applied it, without justification, to the mathematics of infinite sets. ... As Brouwer pointed out this is a fallacy, the Fall and Original sin of set theory even if no paradoxes result from it." (Hermann Weyl)
[Uwe Bosse, "Argumente zum binären Baum", de.sci.mathematik, 18. 4. 2009]

960 Das Kalenderblatt 120120 Der Binäre Baum (83)

WM: Nun frage ich Dich nochmals: Wenn ich jeden einzelnen Knoten des Pfades *X* besitze, wie sollte sich der "wirkliche Pfad *X*" von der Folge aller Knoten unterscheiden, die ich ja besitze - und zwar in der richtigen Reihenfolge.

BE: Du "besitzt" jede einzelne Kante und sogar jeden einzelnen endlichen Pfad. Wenn ich mal "Pfad kaufen" mit "Pfad entlang gelaufen" gleichsetzen darf, könnte man sagen, du bist jeden einzelnen endlich langen Pfad irgendwann einmal abgelaufen. Wie auch immer, du bist nur genau die unendlich langen Pfade abgelaufen, die du gekauft hast. Du kannst nun behaupten *alle* unendlich langen Pfade abgelaufen zu sein, weil du von jedem unendlich langen Pfad jedes endliche Teilstück abgelaufen bist, aber entschuldige bitte, wenn ich das nicht so sehe.

WM: Ich sage nicht, dass ich überhaupt einen aktual unendliche langen Pfad abgelaufen habe, ja nicht einmal, dass es einen aktual unendlich langen Pfad überhaupt gibt.

Ich sage nur, dass Du nicht in der Lage bist, anhand von Ziffernfolgen eine relle Zahl aus dem Einheitsintervall zu bezeichnen, die im Baum fehlt. Der Baum besteht aus abzählbar vielen Pfaden - wenn es aktual unendlich lange gibt, so sind sie unendlich lang, wenn es keine aktual unendlich langen gibt, so sind sie eben so lang wie es geht. (Dass ich die zur Konstruktion benutzte Pfadmenge nicht angebe, geschieht nur aus dem einem Grunde, um zu beweisen, dass Du keinen weiteren Pfad im Baum finden kannst.)

BE: Hier nun das versprochene PDF:
http://files.getdropbox.com/u/1515287/binbaum.pdf

WM: Das ist eine sehr schöne Bschreibung.

BE: Du kannst zum Beispiel mal versuchen zu erahnen, welches Pattern ich im Hinterkopf hatte als ich den Baum im Beispiel gefärbt habe.

WM: Deine Pfade laufen immer nach links, Du hast also immer Nullen angehängt. Das ist das einfachste Muster. Der ungefärbte Baum würde sich aber auch bei anderer Konstruktion nicht unterscheiden.

BE: "Gekaufte Pfade" sind genau diejenigen, die ab einem gewissen Knoten nur noch monchrom weiter verlaufen.

WM: Du hast Recht. Mit Zusatzinformationen über die Konstruktion des Baumes kann man gekaufte von ungekauften Pfaden unterscheiden. Ich möchte aber keine Zusatzinformationen geben.

BE: Das reicht mir.

Von jedem Knoten aus gehen zwei verschiedenfarbige Kanten "nach unten". Damit sollte auch klar sein, wie man zu jedem gefärbten Baum einen Weg konstruieren kann, der nicht "gekauft" wurde -- nicht monochrom wird.

WM: Das Problem ist nur, dass Dezimaldarstellungen von Zahlen nicht gefärbt sind. Meine Behauptung war: Wenn Du nur die Knoten hast, dann kannst Du nichts über die Konstruktion aussagen. Das Ergebnis ist wichtig für Cantors Listenargument. Dort gibt es auch keine Zusatzinformation in Form von Farben oder anderen Anhaltspunkten.

Gib mir die Farben (Tosca).

Der Kern der Sache ist aber dieser: Der Pfad 0,111... ist, insofern nur Ziffern und nicht zusätzliche Informationen mitgeliefert werden, nichts weiter als die Überlagerung aller Pfade der Liste 0,1; 0,11; 0,111; ... Das dürfte inzwischen wohl unstrittig sein.

Diese Überlagerung kann man aber auch erhalten, wenn man nach Hinzufügen des *n*-ten Pfades den (*n*-1)-ten wieder entfernt.

Folglich zeigt uns diese Konstruktion, dass 0,111... nichts weiter ist als *ein* Pfad der unendlichen Liste. und dies zeigt, dass 0,111... nicht aktual existiert.
[Bastian Erdnüß, "Kann man pi und e 'hinten' unterscheiden?", de.sci.mathematik, 14. 7. 2009]

WM: Wie war doch Deine Antwort auf meine Frage, wie sich denn unterschiedliche Färbungen in gewöhnlich schwarz- weiß geschrieben Ziffernfolgen bemerkbar machen?

BE: Ich kann mich nicht erinnern, die Frage beantwortet zu haben.
WM: Ich auch nicht. Darum frug ich ja - höflich floskuliert. Denn ohne eine Antwort auf diese Frage erscheint Deine Färbegeschichte irgendwie unbefriedigend.
[Bastian Erdnüß, "Das Kalenderblatt 100310", de.sci.mathematik, 7. 4. 2010]

BH: Du konstruierst eine Folge von Bäumen mit jeweils endlicher Knotenzahl. Jeder dieser Bäume repräsentiert eine endliche Menge von Zahlen mit endlich vielen Nachkommastellen. Damit bist du nicht mal in der Lage, die rationalen Zahlen zu verlassen. Vermutlich erfasst du so nicht einmal $\mathbb{Q}$ komplett. Keiner der von dir konstruierten Bäume repräsentiert auch nur eine einzige nicht-rationale Zahl.
WM: Das ist richtig. Aber die Vereinigung aller soll alle reellen Zahlen enthalten.
BH: Dass du die Baumgröße und die Stellenzahl wachsen lässt, hilft dir da nicht weiter.
WM: Dass die Cantorsche Liste immer weiter wächst, hilft ihr dann auch nicht weiter, eine reelle Diagonalzahl zu enthalten.
BH: Du solltest dich schon bequemen, auf einer Definition von $\mathbb{R}$ aufzubauen, wenn du Aussagen über $\mathbb{R}$ machen willst.
WM: Die Mengenlehre geht davon aus, dass jede reelle Zahl eine Binärdarstellung besitzt. Diese ist dann als Pfad im Baum enthalten.
BH: Als recht anschauliche Definition empfinde ich $\mathbb{R}$ als Menge von Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen. Die Abzählbarkeit dieser Menge könntest du dann zu belegen versuchen.
WM: Wozu? Weshalb sollte der unendliche Binäre Baum kürzer als eine unendliche Folge sein?
BH: Wenn man spricht von 'unendlichen Dezimalbrüchen', dann ist dies ja nur eine Sprechweise. Ein solcher Dezimalbruch ist ja letztlich nur die Beschreibung einer konkreten Cauchyfolge, die eine Äquivalenzklasse repräsentiert, und diese Äquivalenzklasse *ist* die eigentlich reelle Zahl.
WM: Macht doch nichts. Zumindest ein Repräsentant der Zahl ist als Pfad im Baum.
BH: Und auch wenn dir Erkenntnisse über die mglw. aktuale Existenz solcher Dezimalbrüche (einer Menge von ggf. unendlichen Ziffernfolgen) gelingen sollten,
WM: Ohne diese Existenz existiert auch keine Diagonale einer unendlichen Liste.
BH: so wäre deren Übertragbarkeit auf $\mathbb{R}$ (einer Äquivalenzklassenmenge) sehr kritisch zu hinterfragen.
WM: Das ist just mein Thema: Das aktual Unendliche kritisch zu hinterfragen.
[Benno Hartwig, "|R überabzählbar (Maschineller Beweis in ZFC für Hartgesottene)", de.sci.mathematik, 30. 11. 2010]

961 Das Kalenderblatt 120121 Der Binäre Baum (84)

CC: Hier ist de.sci.*mathematik*, und da hat Deine Glaubensaussage, die Pfade seien alle verbraucht, ohne Begründung einfach nichts zu suchen. Wir befassen uns hier lieber mit belegten Tatsachen als mit so einer Theologie.
WM: Darum habe ich ja die Nagelprobe vorgeschlagen. Ich wiederhole: ich konstruiere einen vollständigen Baum aus einer abzählbaren Menge von Pfaden. Du sagst dann, welche Pfade Dir zu fehlen scheinen.
Kannst Du das, dann hast Du Recht. Kannst Du es nicht, dann habe ich Recht mit meiner Behauptung, dass Du alles Mögliche mit Deinen Zahlen verknüpfst - nur keine Dezimal- bzw. Binärdarstellungen.
CC: Mach mal. Aber bitte nach Deinen Spielregeln, dass Du dafür auch wirklich alle verwendeten Pfade vollständig aufschreiben musst, ohne Punkte.

WM: Ich werde alle benutzten Pfade so angeben, dass Du verstehen kannst, welche ich benutzt habe. Du glaubst ja an das Unendliche. Wenn ich also sage, ich benutze alle endlichen Pfade, die zu den Knoten führen, und hänge als Tail die Binärfolge von √17 an, solltest Du es verstehen können.

CC: Ich habe nie bestritten, dass man alle Knoten des Baums in einer abzählbaren Menge von Pfaden findet. Wie oben bereits geschrieben: Wo mir der Beleg fehlt ist die Behauptung, das sage irgendetwas darüber aus, wie viele Pfade man aus diesen Knoten basteln kann. {{Im Binäeren Baum wird nicht gebastelt! Im Gegensatz zu der Potenzmenge einer Menge enthält der Binäre Baum alle Knotenfolgen in einer unveränderlichen Ordnung. Deswegen erfordert jede Konstruktion eines zusätzlichen Pfades mindestens einen zusätzlichen Knoten.}}

WM: Der Beleg liegt darin, dass Du nicht in der Lage bist, im fertig konstruierten Baum einen Pfad zu finden, der nicht zu der abzählbaren Pfadmenge gehört, welche ich zur Konstruktion benutzt habe.

Ergo musst Du einsehen, dass die von Dir behaupteten Pfade nicht allein mit Knoten des Baums identifiziert werden können, [...] dass Du alles Mögliche mit Deinen Zahlen verknüpfst - nur keine Dezimal- bzw. Binärdarstellungen.

CC: Auch die, aber sie sind sicherlich nicht der wesentliche Teil der Zahlen. Auch wenn sie sie eindeutig identifizieren.

WM: Wesentlich sind die unendlichen Folgen jedenfalls für Cantors Liste und den "Beweis", dass ihrer überabzählbar viele existieren sollen. Alle anderen Identifikationsmöglichkeiten sind mit endlichen Wörtern verknüpft und daher abzählbar, also nicht ausreichend zur individuellen Indentifizierung aller Elemente der behaupteten Menge.

Du findest keinen Pfad, der im Baum fehlt. Du kannst keinen Pfad identifizieren, den ich nicht benutzt hätte. Ich habe aber nur abzählbar viele benutzt.

Wann bist Du soweit, einzusehen, dass es hier um ein Spiel mit Ziffernkombinationen geht, nicht um Zusatzinformationen?

CC: Vor einigen Jahren.

WM: Der Beleg liegt darin, dass Du nicht in der Lage bist, im fertig konstruierten Baum einen Pfad zu finden, der nicht zu der abzählbaren Pfadmenge gehört, welche ich zur Konstruktion benutzt habe.

CC: Der ist leicht gefunden: $n \to 0$.

Und dieser gerade eben kläglich gescheiterte Beweisversuch ist ohnehin albern: Du zeigst, dass Du Dein gesamtes Taschengeld ausgegeben hast und führst das als Beleg dafür an, dass der Supermarkt jetzt leer ist.

WM: Es geht um eine Zahlendarstellung auf Ziffernbasis. Dazu ist es nicht erforderlich, dass ich Dir sage, was ich mir sonst noch so gedacht habe oder denken möchte.

CC: Du hast Dir irgendwelche Pfade gekauft. Ich habe Dir gerade einen Pfad genannt, den Du nicht gekauft hast. Ich weiß wirklich nicht, wie ich das noch einfacher sagen soll.

WM: Ich beginne mit dem Wurzelknoten und kaufe als erstes den Pfad 0,000... Ich weiß wirklich nicht, wie Du Gegenteiliges erkannt haben willst.

CC: Ich habe da oben eine Darstellung ausschließlich durch Ziffern genannt. Und zwar eine eines Pfades, den Du nicht gekauft hast.

WM: Du bist im Irrtum.

CC: Ich habe nie behauptet, dass ein einzelner Knoten dafür genügen täte. Im Gegenteil. Jeder Pfad ist durch eine unendliche Kette von Knoten definiert.

WM: Genau. Und Du behauptest, dass in meinem Baum viele solche Ketten fehlen. Deshalb solltest Du nach Ansicht des Baums, aber ohne zu wissen, welche Ketten ich zur Konstruktion verwendet habe, sagen können, welche denn noch fehlen.
[Christopher Creutzig, "Kann man pi und e 'hinten' unterscheiden?", de.sci.mathematik, 11. - 21. 7. 2009]

JH: First, what does the diagonal argument prove?

WM: It proves the inconsistency of set theory by showing that there are uncountable sets and that there is no uncountable set.

Enumerate all rational 4-dimensional coordinates of spacetime. Then map all those coordinates which are in geometrical contact with the physical definition of a real number (it would be sufficient to map one quadrupel of space-time coordinates on a number, but many will be ok). This would even be possible in an open, infinite universe. Cantor or his followers should have been capable of recognizing that. By this procedure every real number which will result as a "non-enumerated" entitiy in clumsy attempts of enumerating à la Cantor - in particular every real number that ever in the history of the universe will spring off from a Cantor-list - is proven as a member of a countable set.

Further there is a defined list that contains all definable numbers (but not alone these numbers but every definition):

0
1
00
01
10
11
000
001
...

[Jesse F. Hughes, "Who's up for a friendly round of debating CANTORS PROOF?", sci.math, 23. 8. 2011]

962 Das Kalenderblatt 120122 Der Binäre Baum (85)

CC: Bauen wir das Ganze doch einmal minimal um: Gegeben sind die vier endlichen Pfade

```
   ______    ______
  |         | |         |
  |         | |         |
  |         | |______  ______|
```

Und ich setze daraus diese Figur zusammen:

```
    ______
  |    |
  |    |
  |______|
```

So, welche Pfade habe ich jetzt nicht verwendet? Kannst Du mir nicht sagen? Dann ist also 2 = 4.

WM: Du schweifst in Analogievorstellungen ab, die sogar einen gewissen Reiz haben. Nur haben sie mit dem Baum nicht das Geringste zu tun.

CC: Falls Du der Meinung sein solltest, das sei doch eine vollkommen andere Situsation, zeig bitte ganz genau, an welcher Stelle der bislang verwendeten Formulierung Deines "Beweises“ Du welchen Unterschied in der Situation benutzt hast und mit welchen Worten in welcher Nachricht. Implizite Verwendung gilt nicht.

WM: Pfade beginnen stets am selben Punkt, dem Wurzelknoten, und erstrecken sich ins Unendliche. Wenn ein Pfad nicht als fehlend identifiziert werden kann, dann ist er da (soweit er existiert).

Deine oben gemachte Voraussetzung über die von mir gewählte Basismenge zeigt ganz klar, dass Du ohne das Wissen darüber nicht in der Lage bist, auch nur eine zu den unendlich vielen von mir im Baum präsentierten unendlichen Ketten hinzuzufügen.

CC: Genauso wenig, wie ich zu jeder anderen echten Teilmenge des Intervalls [0,1] eine darin nicht enthaltene Zahl angeben kann, ohne die Teilmenge zu kennen, richtig. Das ist aber auch nicht weiter berraschend – wenn ich Dir sage, dass ich aus der Potenzmenge von {1, 2, 3, 4} acht Mengen ausgesucht habe, deren Vereinigung ganz {1, 2, 3, 4} ist, kannst Du mir auch keine Menge aus der Potenzmenge nennen, die ich nicht verwendet habe. Das bedeutet noch lange nicht, dass 8 = 16 gelten täte.

WM: Der Baum enthält aber keine echte Teilmenge des Intervalls, sondern alle im Intervall enthaltenen Zahlen / Binärfolgen. Das gerade kannst Du nicht verneinen, weil Du keine Zahl angeben kannst, die im Baum fehlt. [...] Wenn die meisten reellen Zahlen weder anhand von endlichen Namen noch anhand von unendlichen Ziffernfolgen identifizierbar (oder erkennbar und damit auch verwendbar) sind, dann erscheint die Frage nach ihrer Existenz in ganz anderem Licht.

CC: Es gibt viele Abhandlungen über die philosophische Frage, was "Existenz“ in der Mathematik bedeutet und bedeuten kann. So sehr ich Deinen Umgang mit Sprache auch zu schätzen weiß – Du wirst zu dieser Frage genauso wenig Nützliches Neues beitragen können wie ich. Ich habe einfach von Philosophie zu wenig Ahnung

WM: Es geht nicht um Philosophie, sondern um die ganz simple mathematische Erkenntnis, dass es unmöglich ist, eine irrationale Zahl anhand ihrer unendlichen Binärfolge zu identifizieren, oder anders gesagt: Es ist unmöglich, aus der Binärfolge einer irrationalen Zahl auf die Zahl zu schließen. Das hat noch niemand zuverlässig hingekriegt. Denn dazu bedarf es eines endlichen Ausdrucks.

CC: Um eine Aussage über die Mächtigkeit der Menge aller Pfade zu bekommen, müsste die Frage lauten, ob es eine Bijektion von den Knoten auf die Pfade gibt.

WM: Es wäre unmöglich, Mengenlehrer direkt zu überzeugen, denn sie würden alles behaupten, um ihr Spielzeug zu retten. Nur im vorliegenden Falle versagt dies "wir glauben fest und unerschütterlich", weil es nicht um Glauben geht, sondern um mangelndes Wissen. Ein aus abzählbar vielen Pfaden konstruierter Baum beweist die Ohnmacht der Mengenlehrer, irgend etwas Überabzählbares objektiv als fehlend anzugeben. Die mit den Ziffern allein gelieferte Information reicht dafür nicht aus. Ergo tragen Ziffern allein nichts zur Existenz einer überabzählbaren Menge bei.

1) Jeder Pfad ist im Baum. Der Baum besteht aus abzählbar vielen Pfaden.

2) Damit sich zwei Pfade unterscheiden lassen, ist genau ein Knoten erforderlich, in den beide gemeinsam einlaufen, und aus dem sie getrennt herauslaufen. Mehr Trennstellen als Knoten gibt es nun einmal nicht.

Was wäre elementarer als einfache Ziffernfolgen und der Nachweis, dass Du nicht herausbringen kannst, welche zur Konstruktion des binären Baums verwendet worden sind? Dann solltest Du beginnen einzusehen, dass nicht mehr als abzählbar viele Folgen durch Angabe ihrer Ziffern identifiziert werden können.

CC: Durch explizite Angabe in endlicher Form? Das habe ich eingesehen, ja. Es stimmt ja auch. Ich sehe zwar keinen Zusammenhang mit Deinem Baum, insbesondere da dessen Pfade nicht durch "endlich beschreibbar“ o.Ä. eingeschränkt sind, aber die Tatsache war mir glücklicherweise bereits vertraut. {{Man beachte: Die Behauptung, einen nicht zur Konstruktion benutzten Pfad im vollständig konstruierten Binären Baum identifizieren zu können, wird nicht begründet, denn es könnte weder durch eine endliche noch durch eine unendliche Angabe und also gar nicht geschehen.}}

WM: Bitte gib eine nicht endliche Form an, um Deine Behauptung zu untermauern.

CC: Die Existenz der Menge der reellen Zahlen (die durch eine endliche Definition, genauer gesagt durch mehrere zueinander äquivalente endliche Definitionen angegeben werden kann) hängt nicht notwendigerweise an der Möglichkeit, sämtliche Elemente endlich definieren zu können.

WM: Die Existenz der Menge ist von der Existenz der Elemente streng zu unterscheiden.

CC: Natürlich *kann* man sich auf den Standpunkt stellen, nur Objekte zu betrachten, die jeweils einzeln durch endliche Definitionen beschreibbar sind.
WM: So ist es. Man kommt nur mit sehr unsauberen Methoden bei überabzählbaren Mengen an.
CC: Das sagt aber überhaupt nichts über diejenige Mathematik aus, die diese Einschränkung eben nicht macht. Insbesondere kann man keine Widersprüche oder Fehler in dieser Mathematik nachweisen, wenn man dabei jene verwendet, sie sind schlicht inkompatibel.
WM: Wenn man nicht endliche Definitionen akzeptiert, kann man keine Fehler nachweisen, das ist wohl richtig. Nur sollte man das ganze dann nicht mehr Mathematik nennen. Es sind halt keine Definitionen (man beachte, dass da das Wort finit drinsteckt).
[Christopher Creutzig, "Kann man pi und e 'hinten' unterscheiden?", de.sci.mathematik, 11. - 21. 7. 2009]

963 Das Kalenderblatt 120123 Der Binäre Baum (86)

RR: Das mit den fünf Primzahlen war durchaus hilfreich gemeint. Zum einen ist es nicht so schwierig, solch eine Primzahl-Leiter mit 5 Stufen zu finden, und ausserdem kann man wirklich mathematisch argumentieren, wieso eine solche Folge, wenn sie aus nicht allzu riesigen Zahlen besteht, nicht verlängerbar sein kann.
WM: Das glaube ich Dir. Dasselbe Argument gilt aber auch für die Folgen von mir mit künstlich eingeführten oberen Schranken.
RR: Das ist bestimmt nicht so. Denn wie ich bereits sagte, gibt es ein spezifisches elementarmathematisches Argument dafür, dass eine 5-sprossige Primzahl-Leiter wie z.B.
5, 11, 17, 23, 29
mit Differenz 6 nicht verlängert werden kann, ja, dass sogar keine einzige weitere Leiter mit diesem Sprossen-Abstand 6 existiert, die überhaupt nur die Länge 5 erreicht. Um so etwas zu bekommen, muss man wenigstens den Sprossenabstand 30 haben. Beispiel:
7, 37, 67, 97, 127
Wie Du siehst, ist es hilfreich, genau hinzuschauen. Dann kommt das gute und griffige mathematische Argument bald herbei, das einem zeigt, dass trotz grossartiger Leistung von Terence Tao ("es gibt beliebig lange Primzahl-Leitern") keine unendlich lange Primzahl-Leiter existieren kann.
WM: Das glaube ich doch auch! Aber was hat es mit der Frage des aktual Unendlichen zu tun? Auch die von mir angeführten Folgen können keine unendliche Länge besitzen. Und selbst eine beliebige Folge natürlicher Zahlen kann keine unendliche Länge besitzen. Sicher stimmst Du Borel zu, wenn er sagt, dass eine bestimmte (natürlich unbekannte) natürliche Zahl niemals überschritten wird. Es gibt zwar beliebig lange Zahl-Leitern, trotzdem kann keine unendlich lange Zahl-Leiter existieren. {{Dies ist ein sehr schönes Beispiel für die Unterscheidung zwischen potentiell unendlich und aktual unendlich: Die Länge von Primzahlfolgen der Form
p_k = p_1 + k*d
http://mathworld.wolfram.com/PrimeArithmeticProgression.html
besitzt keine obere Schranke, doch endet jede einzelne Folge.}} Nun sage ich, angenommen, wir hätten eine unendlich lange Strichliste ... [...] Aber leider scheint mein Beweis (ganz unten nochmals auf die Kernaussage reduziert) noch nicht hinreichend perzipiert zu sein. Wer hat sich schon über Unärdarstellungen von natürlichen Zahlen Gedanken gemacht - seit der letzten Eiszeit? Ich kenne da nur Albrecht und mich. [...] Cantor sagt: Wenn hingegen die Gesammtheit der Elemente einer Vielheit ohne Widerspruch als "zusammenseiend" gedacht werden kann, so daß ihr Zusammengefaßtwerden zu "einem Ding" möglich ist, nenne ich sie eine consistente Vielheit oder eine "Menge".

Das würde bei der aktual unendlichen Menge *aller* Striche auf eine aktual unendliche natürliche Zahl (von Strichen) führen, also auf einen Widerspruch. Folglich ist die Menge der Striche nicht als fertige Menge (und nur solche besitzen Kardinalzahlen) zu denken.
[Rainer Rosenthal, "Kann man pi und e "hinten" unterscheiden?", de.sci.mathematik, 15. - 17. 6. 2009]

AS: Ein Herr Dr. Geschke sagt also, dass die gesamte Mathematik mit der Mengenlehre betrieben werden kann. Ich nenne das halt: Die Mathematik wird mit Mitteln der Mengenlehre modelliert. Es kann ja sein, dass auch ein Herr Dr. Geschke falsch liegt.
WM: Ganz bestimmt liegt er falsch. Die Spieltheorie und darin das Spiel "Wir erobern den binären Baum" kann mit der Mengenlehre entweder nicht beschrieben werden, oder eine Beschreibung widerlegt die Mengenlehre. Dass diese simple Tatsache noch keinen Einzug in die Fachliteratur gefunden hat, spricht nicht gegen die Tatsache. Die experimentelle Widerlegung der subterranen Hölle wurde auf Radio Vatikan auch noch nicht besprochen.
[Albrecht Storz, "Zahlen sind elementarer als Mengen", de.sci.mathematik, 6. 10. 2009]

Parallel zu den öffentlichen Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein. Die folgenden schrieb ich in Beantwortung einer Frage.

Liebe NN,
Sie haben einen Beweis, der von der Mehrheit der Mengenlehrer nicht anerkannt werden wird, weil Sie nicht das aktual Unendliche verwenden, sondern nur das potentiell Uendliche; Sie schreiben: "Wir werden eine Formel angeben, die in jedem *k*-ten Schritt, *k* verschiedene Primzahlen […] berechnet." Das eben genügt den Mainstream-Mathematikern nicht, denn eine Ziffernfolge stellt bis zu *jedem k*-ten Schritt eine rationale Zahl dar.
Als ein Beispiel betrachten wir den binären Baum. Der binäre Baum enthält alle reellen Zahlen aus [0, 1] als unendliche Pfade, alle Binärstellen dieser Zahlen als Knoten. Die Knoten bilden eine abzählbare Menge. Folglich müssen auch die Pfade eine abzählbare Menge bilden, denn bis zu jeder *k*-ten Ebene, gibt es mehr Knoten als Pfade. Dieser Beweis ähnelt dem Ihrigen, gilt aber eben nur für das potentiell Unendliche.
Sie schreiben: "beim Fortschreiten vom Schritt *k* (*k* Stellen) auf Schritt *k*+1“. Im binären Baum verdoppelt sich beim Fortschreiten die Anzahl der unterscheidbaren Pfade. Trotzdem bleibt sie endlich.
Sie schreiben schließlich: "Unsere Arbeit […] ist ein Beweis dafür, dass die reellen Zahlen […] abzählbar sind."
Nach der (engen) Definition von Abzählbarkeit bedeutet dies, dass eine Abzählung angegeben werden kann. Das ist aber nicht möglich.
Ich will nur auf diese Punkte hinweisen, ohne Ihnen den Mut zu nehmen, denn im Grunde haben Sie ja Recht. [...] die Standard-Verteidigung lautet: Auf welche natürliche Zahl wird 0,333… abgebildet, oder π?.

Liebe NN,
um mit dem Schluss Ihres Briefes zu beginnen: Sie brauchen mich nicht von Ihrem Beweis zu überzeugen. Ich bin überzeugt, dass eine Regel, die mit *n* auch für *n*+1 gilt, alles, also auch das Unendliche abdeckt.
Wovon Sie mich jedoch noch überzeugen müssen, ist die Notwendigkeit Ihrer Verwendung von Primzahlen. Man kann durch einfaches Abzählen zeigen, dass die Menge aller Knoten (und damit auch aller Kanten) des binären Baums abzählbar ist. Niemand zweifelt daran. Und selbstverständlich ist die Menge der Pfadstücke von der Wurzel bis zu jeder endlichen Ebene des Baumes abzählbar - sogar endlich.
Wozu also Primzahlen?

964 Das Kalenderblatt 120124 Der Binäre Baum (87)

WM: The direct statement that you want to have formalized is: The set of paths can be put in a bijection with ℕ. I do not pretend that this can be done.

OJ: Discussion over, then. This is a necessary property for a "countably infinite" set.

WM: What I have shown is that the set of paths cannot be larger than a countable set, namely the set of all nodes respectively all lines in the tree.

OJ: Leaving aside whether you've shown that or not, proving that a set is no larger than ℕ is not the same as proving it to be the same size as ℕ.

WM: It is proving that the set does not contain more elements than ℕ contains. In the present case it is proving that most real numbers do not exist as distinct infinite sequences of bits.

Further we know that most real numbes have no finite definition: The set of finite words over a finite alphabet is countable. The set of meanings of these words, i.e., the set of languages, is countable. The set of finite alphabets is countable. The cartesian product of these, and possibly some further features, is countable.

Therefore we know that most of what set theorists call the real numbers does not exist at all, neither as infinite bit sequences nor as finite definitions like π, e, or Liouville's numbers.

OJ: Proving it to be the same size as ℕ would involve either invoking the continuum hypothesis (which would mean acknowledging that modern infinite set theory is sound) or constructing an injection from ℕ to the set of paths in an infinite binary tree and an injection from the set of paths in an infinite binary tree to ℕ.

WM: You can see my proofs. There is no continuum hypothesis necessary nor a bijection with ℕ. All we need is faith in the truth that an infinite sum of zeros is not larger than countable infinity.

Presumably this proof would need some hundred pages in FOPL + ZFC. Or maybe it cannot be formalized at all. I don't know and I am not interested in that topic

OJ: Definitions:

1: R is a node.

2: ancestors(R) is {}.

3: For every node x, y and z are nodes such that:

a) $x \neq y$ and $x \neq z$

b) $y \neq z$

c) $y \notin$ ancestors(x) and $z \notin$ ancestors(x)

d) ancestors(y) = ancestors(z) = ancestors(x) $\cup$ {x}

4: For a set of nodes P, P is a path if and only if P contains R and for every pair of distinct nodes $x \neq y$ in P, $y \in$ ancestors(x) or $x \in$ ancestors(y).

5: For path P, P is an infinite path if and only if for every node $x \in P$ there is a node $y \in P$ such that $x \in$ ancestors(y).

(There may be a simpler set of definitions. The goal for me was to take, say, R = 0 and construct the binary tree (0 $\to$ 1,2; 1 $\to$ 3,4; 2 $\to$ 5,6; ...) by induction, and to provide a hopefully-correct and hopefully-formal definition of an infinite path. {0, 1, 3, ...} should be an infinite path in the above tree, and {0, 1} and {0, 1, 3} are both finite paths in it.)

Conjecture: There exists a bijection between the set of all infinite paths and the set of natural numbers ℕ.

WM: As I said above: There is no bijection. Nevertheless the set of paths is not arger than the set of natural numbers.

OJ: Would you accept a formal, computer-checkable proof that this conjecture is false in ZFC as proving that your conjecture is false in ZFC? The above conjecture and definitions are what everyone else in this thread hears when you say "The complete infinite binary tree has only countably many infinite paths."

WM: What I know is that the set of all infinite sequences of bits (or digits) has not more elements than the set of all natural numbers, when proved in the way I did it here.

OJ: Depressingly, there's a kernel of a worthwhile discussion in this sentence. However, you don't seem to want to discuss alternate set theories where this might be true. It's provably false in ZFC.

WM: ZFC is of no interest to me. I am interested in the contradiction. Of course, if we take another point of view, then we can prove that there are far more real unverses than natural numbers. Consider only the harmonic sequence (1/n) and the rationals between the points of the sequence.

It is impossible to consistently enumerate the infinite. That is my point.
[Owen Jacobson, "The complete infinite binary tree has only countably many infinite paths", sci.logic, 26. 3. 2009]

DL: This article is inspired by the current thread [1] The complete infinite binary tree has only countably many infinite paths, sci.logic, 184 articles
http://groups.google.com/group/sci.logic/browse_thread/thread/393003b1fba1194a

In [1], WM claims to prove that the usual binary tree (finite depth nodes under 1 root) has only countably many infinite branches through it, thereby showing ZF inconsistent since it also proves there are continuum many such branches.

I myself believe ZF is consistent. (Bah! ZF? I think ZFC + high large cardinals are consistent.)

WM: I have not (yet?) understood your proof. But I did not try hard, because I do not deny that there may be proofs showing the set of paths beeing uncountable. My problem is that I am not able to explain how a countable set of points of distinction (nodes), where every point distinguishes exactly one more path, is able to distinguish an uncountable set of paths. Therefore I feel Weyl's and Brower's position comforting, according to which logic fails for infinite sets. {{Eine Antwort von DL erfolgte nicht.}}
[David Libert, "paths through binary trees in ZF", sci. logic, 30. 3. 2009]

965 Das Kalenderblatt 120125 Der Binäre Baum (88)

WM: For every finite initial segment of the path 0.111... there is a path of my construction. So it is impossible to distinguish 0.111... from all paths of my construction other than saying "all 1's of 0.111...". But all is not a precise expression when numbers are available.

If you have problems with construction, then use my proof (B). I wrote the tree can be constructed though, but in fact there is no construction required. Take the infinite agglomeration as given.

OJ: Then it contains paths that do not appear in your construction, even though every node appears in at least one path in your construction.

Let me turn this around a bit. What is it about the way I've identified paths that are missing that's unclear? You've repeatedly stated that you disagree with it, but never gone into detail as to why.

WM: I just quote from my answer to Dik. He asked me to decide what is the proper criterion of my tree:

(1) It contains all paths that ultimately continue with an infinite sequence of 0's.

(2) It contains all paths with 1's and 0's in arbitrary positions.

My answer: Neither nor. The tree is a means to prove that there is no "all" with respect to infinity. We start with (1), conclude that the tree, i.e., the structure of edges and nodes, then must also satisfy (2), and find that it's impossible.

OJ: We can construct all finite initial subsets of the {{even}} naturals from finite initial subsets of the naturals:

$N_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$

$f(x) = 2x$
$E_n = \{ f(x) \mid x \in N_n \} = \{2, 4, 6, ..., 2n\}$
(Construct E_n by applying $f(x)$ to every $x \in N_n$.)
For the same reason that we can't extend your iterative construction of unions of FISONs to constructing $\mathbb{N}$ ...
WM: I do not agree. When every step for every FISON is defined like
$F(n) \cup F(n + 1) = F(n + 1)$
then with $\lim(n \to \infty) F(n)$ we have constructed $\mathbb{N}$.
OJ: ... we can't actually extend the above to proving that $|E| = |\mathbb{N}|$ where E is the set of even naturals. It's only meant as a demonstration that there are ways to construct finite sets of even numbers from finite sets of the naturals that are not based on removal and do not produce images smaller than the domain.
WM: Would you expect that π can be an element of $\mathbb{N}$ on the ground that an inductive proof for every FISON is not sufficient to exclude it?
An inductive proof is valid because eventually every number is covered, notwithstanding the fact that there are always others remaining.
Therefore we can prove: Every set of natural numbers is finite. (Not only every finite set but every set that contains only finite natural numbers.)
OJ: If you can see a mistake, please, by all means highlight it. Be specific! If I made it and haven't seen it yet, reiterating that you disagree with something you believe to be a conclusion will not help me identify the root problem.
WM: You have shown that ZFC + FOPL lead to an uncountable set of paths in the tree. You have not said whether you think that the infinite lines are countable or not. [...] There is no complete binary representation of any number. Did you ever see the complete bit sequence of π? There are only infinitely many finite approximations.
OJ: I guess this comes down to the question of "what is a number". If you believe that a given symbol represents a number if and only if that symbol can be replaced by a finite sequence of digits, then π itself is not a number, nor are any of the infinite cardinals.
WM: I accept π as a number (perhaps of second class). It is given by one or more definitions or names like: Circumference of a circle divided by its diameter, pi, 3.14..., 4 times the limit of the series of Gregory-Leibniz, Twice Walli's product, Smallest positive angle x where $\cos(x) = -1$.
OJ: Under this definition, π is a number that has an exact binary representation (in which for every natural number n, the n'th bit is either 1 or 0, and for all natural numbers there is an n'th bit) as well as each of its countably many finite initial subrepresentations.
WM: "As precisely as we want" is not identical with "all digits can be used". We can use as many digits as we want, but never we have all digits available. This is why there is no diagonal of an infinite list.
OJ: The transfinite cardinals and ordinals are *also* numbers: the existence of at least one set containing $\aleph_0$ as a member is provable from ZFC.
WM: Numbers like π above are finite sequences (words) of bits. All of them are contained in the list of everything (LOE)

0
1
00
01
10
11
000
...

including all definitions of all possible languages. (The latter appear somewhat later.)

This LOE contains everything that can be expressed, but there is one thing that is not contained, namely a diagonal.

The LOE cannot be diagonalized. All lists that can be diagonalized are lists that attempt to contain the representation of numbers. In fact they do not, because there is no complete infinite representation of any number. All we can achieve there are rational approximations, i.e., examples or pictures of numbers.

Conclusion: Cantor's argument is false. It is like handwaving with incomplete drawings because it concerns only improper pictures of real numbers, not numbers themselves ((the set of) its finite definitions).

[Owen Jacobson, "Answer to OJ", sci.logic, 2. 4. 2009]

966 Das Kalenderblatt 120126 Der Binäre Baum (89)

IW: The one thing I don't understand about these WM binary tree threads is how WM, as an ultrafinitist who believes that numbers as large as a googolplex don't exist {{Das ist ein Missverständnis. Jede Zahl, die angegeben werden kann, exististiert. Und in den Diskussionen zum Binären Baum wird ohnehin die Existenz jeder individualisierbaren Zahl vorausgesetzt.}}, can believe that an infinite tree even exists in the first place, much less debate over whether it's countable or not.

TL: That has been asked before. If I recall correctly, his answer was along the lines of it merely being a premise for a reductio ad absurdum argument.

IW: OK, I see. So it's sort of like "assume infinite sets exist. Then the binary tree is both countable and uncountable - contradiction. Hence only finite sets exist."

WM: Yes, you got it. But instead of saying "only finite sets exist" which would most mathematicians immediately cause to stop reading, one should say sets can be potentially infinite in the sense infinity was applied over thousands of years: ∞. (Unless MatheRealism is invoked. Then sets of numbers are finite but values of numbers are not limited.)

[I. Walker, Tim Little, "The complete infinite binary tree has only countably many infinite paths", sci.logic, 26. 3. 2009]

CO: All paths will occur in the final tree (the union of what you get by unioning all the infinite paths he adds).

WM: And no other path than those used for construction can appear in the tree. Because paths do not reproduce.

V: Your 'constructive' generation of such a tree always omits most paths. You can constructively generate complete trees to any finite depth, but not a complete infinite tree.

CO: No, it need not. There is a countable set of paths, such that its union yields the entire tree, and thus all paths.

WM: Nice to see that at least few readers understand.

For that argument I deviced my proof (A). Paths may be imagined to do this or that. They cannot but follow one line in the tree. And there are all lines in the tree. There is no infinite sequence of bits that is lacking. Neverteless all this is constructed by a countable number of paths.

V: Claimed but never proven, and all constructions so far presented have been shown to fail.

CO: No, I don't think so. He has not rigorously provided the construction, but it is quite trivial.

WM: So it is, but only after you have found just the thing.

CO: He adds only a countable number of paths, and there is no infinite sequence of bits that is lacking. All of this is correct. The point is that the paths interact. Again, suppose he adds no path corresponding to .1111....

He does add

.100000....

.110000...
.111000...

So when they are all unioned, the path .111111... will also be there along with an uncountable number of other paths that he never *explicitly* added in his countable list.

WM: Do paths have sex together? Even only those ending by zeros?

[...] When you consider my proof (A), then you see that I add always exatly one path.

V: The way you do it prohibits any path from having a path with infinitely many branches in the opposite direction from the ones you add.

CO: I think now that under the most natural way of understanding what he is saying, this is incorrect.

All paths will occur in the final tree (the union of what you get by unioning all the infinite paths he adds).

V: How does one get a path with infinitely many 1's (right branchings) by unioning sets of paths none of which have infinitely many 1's?

WM: How do you get an infinite set by unioning infinitely many FISONs {{endliche Anfangsabschnitte der natürlichen Zahlen}}?

V: Your 'constructive' generation of such a tree always omits most paths. You can constructively generate complete trees to any finite depth, but not a complete infinite tree.

WM: There is a countable set of paths, such that its union yields the entire tree, and thus all paths.

V: Such a union may 'cover' all nodes without 'covering' all paths.

WM: That is a word! Let me put it as: Paths have souls. It is not sufficient to cover all their bones (nodes).

I am collecting reasons why I am in error. Now I have already three:

1) Σ 0 = infinite.
2) Paths reproduce themselves (even those with same endings).
3) Paths have souls.

I will ask my students and other bright people whether finished infinity is worth to be paid by swallowing at least one of these snags.

[Calvin Ostrum, Virgil, "The complete infinite binary tree has only countably many infinite paths", sci. logic, 27. 3. 2009]

967 Das Kalenderblatt 120127 Der Binäre Baum (90)

WM: The problem boils down to the following:

$\exists n\ \forall m: m \le n \Leftrightarrow \forall m\ \exists n: m \le n$ [*]

$\exists n\ \forall m: m \le n \Rightarrow \forall m\ \exists n: m \le n$ [**]

You know: Classical logic was obtained from finite sets ... Show me a finite set that obeys [**] but not [*].

DW: The above is not contested: [**] implies [*].

WM: I said: For complete linear sets [*] is true. You said [*] is not true, but [**] is true. Weyl said: Classical logic was obtained from finite sets. Therefore I asked you: Show me a linear complete finite set, that makes your claim [**] right and my claim [*] wrong.

DW: What is contested is that

$\exists n\ \forall m: m \le n \Leftarrow \forall m\ \exists n: m \le n$ [***]

implies [*]. And *that* is the form you do use.

WM: No. I do not use the implication only, I use the full equivalence. Of course the equivalence includes the implication [***] as well as the implication [**].

DW: There is a trivial finite counter-example. Take three dice where on each of the sides one of the numbers one to nine is printed (some of them repeated). Say the set is {d1, d2, d3}. Define $d_i < d_j$ when the probability to throw a higher number with d_j than with d_i is larger than to

1/2. (I would submit that all this is quite physical.) There is a set of three dice such that $d_1 < d_2$, $d_2 < d_3$ and $d_3 < d_1$.
And so we have:
$\forall m\ \exists n$: $d_m < d_n$ ($d_1 < d_2 < d_3 < d_1$)
but not
$\exists n\ \forall m$: $d_m < d_n$ (there is no best die).
WM: Of course there is no best die. Therefore this set is not linear. Every finite set of natural numbers has a "best" number.
Why do you bother with such nonsense examples? The answer is easy: Because you have no other examples.
[Dik T. Winter, "Answer to Dik T. Winter", sci. logic, 26. 5. 2009]

{{Zu meiner Sammlung von Beispielen aus Tänzern, Tänzerinnen, roten Kreisen und grünen Dreiecken, die das Verbot der Quantorenvertauschung begründen sollen, gesellten sich hier nun die nichtlinearen Würfel, eng verwandt mit Stärkevergleichen zwischen Schachspielern oder Fußballclubs oder mit relativen Beliebtheitswerten von Schauspielern oder Politikern.
Natürlich sind alle diese Beispiele verfehlt, denn die ganzen Zahlen bilden eine linear geordnete Menge. Für jede endliche linear geordnete Menge gilt nun einmal die mit [*] bezeichnete Äquivalenz. Und da die Logik anhand von endlichen Mengen entwickelt worden ist, sollte das Verbot der Quantorenvertauschung erst einmal anhand einer endlichen linear geordneten Menge begründet werden, was absolut unmöglich ist. Dass die temporär größte Zahl einer potentiell unendlichen Menge niemals bekannt sein kann, sollte doch den anhand von Zermelos Wohlordnungsatz zum Glauben an das Unsichtbare gewöhnten Mengenlehrer nicht wirklich von ihrer Nichtexistenz überzeugen.}}

PB: Yet there is increasing scepticism about the objective truth of the Continuum Hypothesis and similar statements.
TC: I'm curious about this "increasing scepticism" that you speak of. Do you have any statistical evidence of increasing scepticism?
WM: Concerning the question of statistical evidence for growing scepticism I can report my personal efforts over many years: When I teach Cantor's diagonal argument, every student understands that the real numbers are uncountable (because it is really not hard to understand that argument).
When I represent all the real numbers of the unit interval by the paths of an infinite binary tree with a countable number of nodes, every student understands that there cannot be more paths than nodes (because it is really not hard to understand that argument). No student of mine has ever argued against that, although that would not have changed her marks!
In this way I have contributed to increase the scepticism against transfinite set theory by some hundreds of heads (that are not below average intelligence).
[Paul Budnik, Tim Chow, "The boundary of objective mathematics", FOM, 18. 3. 2009]

CM: Ultrafinitism is in fact a coherent, if ultimately unfeasible, philosophical/mathematical theory. While WM's philosophical outlook might best be described as ultrafinitist, his exposition is confused and his reasoning is flatly unsound.
WM: Why do you think so? Here is the shortest reasoning: Construct the binary tree from a countable set of paths. Let someone else find one of the uncountably many paths suspected to be in the tree. See him fail. Cp. no. 11 of
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/GU/Pruefung%20GU0907.pdf
[Chris Menzel, "Would it matter if ZF was inconsistent?", sci.logic, 18. 7. 2009]

PW: I am still waiting for your construction of the tree. This is done by specifying the set of nodes, and the set of links between nodes.

WM: A definition can be done by text or by drawing, like here:
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/GU/GU12c.PPT#361,34,Folie 34
My definition has the property that the number of paths, by logical reasons, cannot be larger than that of nodes.

PW: If you think you have been successful, as a first step please determine what *N* corresponds to the Real 1/3. If there is no such *N*, then you have failed.

WM: In my game "conquer the binary tree", node number 1 may correspond to 1/3. Would that be alright?
[Peter Webb, "Would it matter if ZF was inconsistent?", sci.logic, 21. 7. 2009]

968 Das Kalenderblatt 120128 Der Binäre Baum (91)

Eine entscheidende Idee bestand in der Konstruktion des Binären Baums mit Hilfe von abzählbar vielen geheimgehaltenen Pfaden und der Aufforderung an überzeugte Matheologen, die verwendeten Pfade sowie vor allem nicht verwendete Pfade zu identifizieren. Gäbe es überabzählbar viele Pfade im Binären Baum, dann müsste dies möglich sein. Selbstverständlich ist kein einziger Vorschlag eingegangen.

WM: We have a list of a countable set P of terminating paths p_n. By the diagonal method we can distinguish p from every p_n (if actual infinity exists).

Now we write the paths p_n in slightly different form: The beginning zeros of all paths are written only once, the following 1 or 0 also are written only once each and so on. Note, we have not done anything else but writing the list in slightly different form, saving some ink. In particular we have not added any new path.

This yields the complete binary tree. You know that you are unable to distinguish any binary sequence representing a real of the unit interval from every path of the tree.

This proves that you, contrary to the assumption, have been unable at the beginning too, because there the same set of paths was presented to you. You only believed that you were able. Cantor's diagonal method is falsified.

You cannot distinguish p from the tree,

WH: Irrelevant. You do not distinguish p from the tree. You distinguish p from every element of P.

WM: You cannot distinguish p from every path of the tree. Every path of the tree is from P.

WH: The union of the paths in P contains every subset of nodes. However, p is a subset of nodes that is not contained in any single element of P.

WM: Then you would be able to distinguish p from every path of the tree that is constructed by P. But you aren't.

WH: When you add subsets of nodes to the tree you create other subsets of nodes in the tree that you did not add.

WM: I add the paths p_n, that have a tail of zeros beginning at node n, one by one, in the following order:

          0
        -, 1
    -, 2, -, 3
  -, 4, ...

What unadded subset is created when what path is added?

Remember: A union of sets contains only elements that are contained in at least one of the united sets. I add singletons $\{p_n\}$.

WH: Indeed, you do not produce a path by adding a single path. You produce a path by adding a set of paths.

WM: And Cantor's proof does not fail when considering a single line but when considering a set of lines.

Why do you believe that we should stick to mathematics and logic in that case, if we believe in magic creation of paths in case of the tree?

WH: A: actually infinite paths exist, B: the infinite tree contains a path p that can be distinguished from every path of P. You agree

$A \Rightarrow B$

You want to show

$\neg A$ [Follows from $(A \Rightarrow B \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$] by proving $\neg B$

(Note that assuming $\neg A$ is circular).

Please answer yes or no: t is not an element of P

WM: The actually infinite path t is not an element of P and not a path of T, because t does not exist. Proof by the fact that t cannot be distinguished from the set P after its elements have been ordered as paths of the tree.

$\neg B$ is proven by the impossibility to distinguish t from every path of the binary tree

WH: Nope. You just said that if actual infinity exists, it is possible to distinguish t from every path of the binary tree. Hence you cannot prove $\neg B$ without assuming $\neg A$.

WM: I prove $\neg B$, for instance by your inability to distinguish t from T, with no regard to the truth of A.

[William Hughes, "Answer to Dik T. Winter", sci. logic, 15. - 20. 6. 2009]

Parallel zu den öffentlichen Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein:

NN: Hello sir!

Forgive my lack of speaking German, but i am simply a poor American.

I had read your paper "a severe inconsistency of transfinite set theory" and i was extremely interested in the conclusions, mainly the notion that infinity implies a direction and that we need no symbols that pretend it is a type of captureable element. The reason i am interested in this is that i have a problem with irrational numbers and the idea of a function having form. I do not see how an "instantaneous" topography of a plane can emerge without some type of *real* enumeration. I do not understand how we can arbitrarily imply that the entire topography exists without process, bringing it into being without something unfolding. I cannot accept functions, or number lines or planes and volumes as static objects which can arises through all elements of the infinites being "identified" simultaneously. I do firmly believe that even within the abstract, and especially out side of mechanical or computational entities in the physical world, that such things as number lines and planes and volumes and the topography of functions, cannot exist instantaneously through simultaneously selecting all elements, something of a timing, even if we can never catch it.

NN: Lieber Kollege Mückenheim,

Ihr Buch "Die Mathematik des Unendlichen" hat mir als Ferienlektüre gut gefallen. Können Sie mir Ihr Skript "Die Geschichte des Unendliche" zukommen lassen?

969 Das Kalenderblatt 120129 Der Binäre Baum (92)

DW: Doesn't it bother you that he gets letters from other mathematicians in Germany complaining about it, and that he is proud about that fact?

WM: I have never got a letter from a mathematician complaining about that. I would never publish a letter of my private correspondence without consent of the correspondent. My university of applied sciences got a letter from a greasy informer who may be whatever but certainly is not a mathematician.

DW: Do you not think that it might lower the value of other degrees in Germany as well?

WM: But you think it would increase this value if I taught, as you propose, that the sum of all natural numbers can be zero? Or if I taught, contrary to fact, Cantor's claim that a real number is the limit of its finite initial segments but all real numbers are not the limits of all their finite initial segments?

DW: [...] it bothers me that somebody who teaches mathematics and puts part of his nonsense in the exams to his students (the "explanation" of the binary tree), bothers me quite a lot.

BC: Much more effective would be to create a critique web-site (in German of course) such that anyone contemplating going to study or sending their children to study at the Augsburg Whateverschule [capitalised because it's supposed to be a German noun] will immediately find it. {{Ja, das müsste wohl alle Eltern abschrecken, wenn Sie wüssten, dass ihre Kinder als potentielle Studenten ohne das aktuale Unendliche ihr Leben meistern müssen, weil ich es ihnen einfach nicht vermitteln kann?}}

WM: People must get informed. If possible, explain that in a manner that is understandable not only by "the community" but by soberly thinking intelligent beings.

Perhaps you will start in this way: Once upon a time, there was a man who assumed that there are all real numbers and then proved that it is impossible that there are all real numbers. But he did not conclude that it is impossible that there are all real numbers, but he concluded that there are different finished infinities.

That already must be convincing the non-community, mustn't it.

[Dik T. Winter, Brian Chandler, "Answer to Dik T. Winter", sci. logic, 26. 5. und 5. 7. 2009]

DW: I asked you for a mathematical definition of "actual infinity" and you told me that it was "completed infinity".

WM: Here is, to my knowledge, the simplest possible explanation. Consider the infinite binary tree. Paint all paths of the form

0.111...
0.0111...
0.00111...
0.000111...

and so on. Potential infinity then says that every node and every edge on the outmost left part of the tree gets painted. Actual infinity says that there is a path 0.000... parts of which remain unpainted. - And that is wrong.

[Dik T. Winter, "Another AC anomaly?", sci.logic, 4. 12. 2009]

RW: Ich verstehe die aristotelische Unterscheidung zwischen aktual und potentiell einfach nicht und halte sie daher für überflüssig. Das magst du für eine Form von Theologie halten, ich nenne das Pragmatismus.

WM: Keine der folgenden Einserfolgen ist unendlich. Trotzdem gibt es keine Schranke für die Anzahl der Einsen. Das ist potentielle Unendlichkeit.

MK: Das ist sicher, wenn man die potentielle Unendlichkeit so definiert, wie du es tust.

WM: Nein. Das ist absolut sicher. Selbstverständlich wird die Vereinigung beliebig vieler Einserfolgen mit Tails aus Nullen

1000...
11000...
111000...
...

niemals eine Einserfolge ohne Tail aus Nullen erzeugen. Auch im Unendlichen wird Rote Grütze nicht grün. Denn sie ist definitionsgemäß rot, deshalb schrieb ich das groß. (Etwas anderes ist es mit der Birne Helene.)

Die Einserfolge 111... bietet eine Möglichkeit, das aktual Unendliche darzustellen.

RA: Sicherlich gibt es den Unterschied, aber es ist eine philosophische Frage und hat nichts mit Mathematik, wie sie heute verstanden wird, zu tun.

WM: Für die Mitleser, die wenigstens ein wenig verstehen können: Cantors Liste ist fertig, so fertig, dass keine Zeile hinzugefügt und keine Diagonalzahl nachgetragen werden darf. Dieses religiös anmutende Verbot kennzeichnet die aktuale Unendlichkeit, Cantor sagt auch vollendete Unendlichkeit. Für die etwas schwächer Begabten oder stärker Entnommenen kann man auch "vollendete Folge" oder "fertige Liste" sagen. Das ist die Grundlage der Mathematik, "wie wir sie heute verstehen", wenn wir denn wenigstens die verstehen. Von ihrer Fehlerhaftigkeit und Inkonsistenz wird sich natürlich niemand überzeugen können, der nicht einmal diese Basis versteht.

[Rainer Willis, Michael Klemm, Rolf Albinger, "Das Kalenderblatt 100226", de.sci.mathematik, 27. - 28, 2. 2010]

MK: Auch im Unendlichen gibt es Regeln, die genau eingehalten werden müssen. Eine Kreislinie z. B. kann zwar beliebig ("potentiell unendlich") aber nicht "aktual unendlich" lang werden, eine gerade Linie dagegen schon.

WM: Das ist ein interessanter Hinweis. Geraden sind immer aktual unendlich, die Länge von Strecken ist dagegen nur potentiell unendlich. Das passt zu Rainers Primzahlfolgen, die ja beliebig lang aber nicht aktual unendlich sein können, und ebenso zu den endlichen Anfangsabschnitten, die auch immer endlich sind, deren Länge aber nicht beschränkt ist.

Dass im Unendlichen auch Regeln einzuhalten sind, konzediere ich Dir gern, ja ich bestehe sogar darauf. Insbesondere muss jemand, der behauptet, die reellen Zahlen besäßen in Dezimaldarstellung nur Ziffern an endlich indizierten Stellen, auch bereit sein, mit der dadurch gegebenen Information auszukommen und nicht zusätzliche Information zu verlangen. Ja, das ist die Regel!

[Michael Klemm, "Das Kalenderblatt 100310", de.sci.mathematik, 10. 4. 2010]

Potentiell unendlich: Zu jeder Zeile n gibt es eine Zeile $n + 1$ mit $n + 1$ Primzahlen. Es gibt keine Zahl S, die größer wäre als die Zeilenzahl der Liste. Es gibt keine Zahl S, die größer wäre als jede Primzahlleiter.

Es gibt also keine obere Schranke. Es gibt keinen Unterschied zwischen den Unendlichkeiten von Liste und Primzahlleitern. Wir wissen nur, wir können immer weiter gehen.

Aktual unendlich: Eine aktual unendlich lange Liste besäße die Länge ω. Das ist nach Definition eine Zahl, die größer als jede endliche Zahl n ist.

[WM, "Was sind und was sollen die Peano-Axiome?", de.sci.mathematik, 26. 5. 2010]

970 Das Kalenderblatt 120130 Der Binäre Baum (93)

Wir erobern den Binären Baum, Conquer the Binary Tree - ein Spiel, das ich mir für meine Studenten ausgedacht hatte, fand auch anderenorts Interesse

FW: Suppose that ZF could prove $0 \neq 0$, but the shortest proof was provably $10^{10^{10}}$ formulae long.

WM: The shortest proof of inconsistence is less than 10^5 bits.
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/GU/Pr%fcfung%20GU0907.pdf
look up number 11.

JB: "Der binäre Baum kann dazu dienen, die Existenz einer aktualen Unendlichkeit ad absurdum zu führen. Die Pfadmenge kann nämlich als größer (nach Cantor), oder als gleichgroß (pro Knoten wird ein weiterer Pfad unterscheidbar) oder als kleiner als eine abzählbar unendliche Menge nachgewiesen werden. ... ist der Nachweis erbracht, dass die Menge der Knoten größer als die der Pfade ist."

This translates to: "The binary tree can be used to show the absurdity of an actual infinity. It can be either shown that the set of path is greater (after Cantor), or equal (for each node there is a new path distinction) or less than a countable set. ... we have proved that the set of nodes is bigger than the set of paths."

Funny indeed.

So what is the logical flaw? The logical flaw is to find the way somebody steps from 0...*n* to 0...

WM: No, with respect to set theory you are wrong. If every part of the tree can be conquered, then there is nothing remaining. We have the whole tree. (In principle you are right, however. Infinity is never finished.)

JB: Here is a simpler form of this logical flaw: Let's assume achilles and the turtle can run same speed, and achilles is one meter in front of the turtle. Achilles runs on the left lane and the turtle runs on the right lane. We will now show that the infinite left lane is longer than the infinite right lane (sic!). We show that achilles is always at step $x + 1$ when the turtle is at step x.

Induction foundation: The turtle starts at point 0, and achilles starts at point 1, (achilles is one meter in front of the turtle)

Induction step: The turtle and achilles have the same velocity, so when achilles is at step $x' - 1 + 1 = x'$, and the turtle is at $x' - 1$ (for $x' > 0$), then after that achilles will be at step $x' + 1$ and the turtle will be at step x'.

What is the flaw here? Well very easy, there is a jumping to conclusions from some ordering on the elements to the cardinality of the set of these elements. But cardinality does not work this way, it is careless about orderings on the elements. (That's why it is called cardinality and not ordinal).

WM: Correct. Your explanation covers all those cases, in particular $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ and the like. How should it be "proved" without ordering?

But if the actually infinite tree would exist, then we could conquer it by defining when which part is conquered and showing that there is no part remaining unconquered forever.

JB: Why do you think a function f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash 0$, $f(x) = x + 1$ involves ordering?

WM: Have you ever seen the proof of equnumerousity of $\mathbb{N}$ and $\mathbb{Q}$? However, if for any element of a set we can say when it is used, then the whole set is used (because there is nothing remaining).

JB: Yes, $\mathbb{N}$ and $\mathbb{N}\backslash 0$ can be ordered, and somehow I invoked ordering when I proved surjectivity. But the question is not how many nodes are in the tree, but how many infinite paths are in the tree.

WM: The question is: How many infinite paths must be conquered so that nobody is able to find a path that is not conquered. (Of course I do not publish which subset of paths I have used, in order to show set theorists that their claim is nonsense.)

JB: A node does not identify an infinite path. It only identifies a finite path from to root to the node itself.

WM: I construct the complete binary tree by means of a countable set of nodes. Tell me which nodes have not been constructed.

JB: So it is kind of fractal. When ever you have conquered down to the level *n*, with your 2^n leaf nodes, then each leaf node points again to an infinite tree.

WM: No. My argument shows that a countable set of paths fills the complete infinite binary tree such that nobody can tell what further paths are missing (none is). That proves that the whole blathering about actual infinity is nonsense. There is not even a single actually infinite path.

JB: Further arguments have to be persued whether the infinite tree exists. And one further argument might be diagonalization, which then excludes the countable case.

WM: By definition the tree contains every binary sequence. So there is no diagonalization possible.
JB: Actually the infinite tree can indeed be conquered, by the countable. This is mathematically true. But still there are uncountable infinite paths.
WM: That cannot be. You will see this when constructing the tree from a list by simply dropping some bits along these lines:
0.111000...
0.1111000...
will be unioned to
000...
0.111
1000...
Got it? Then you see that no addtional paths have a chance to creap into the tree. They simply do not exist.
[Frederick Williams, Jan Burse, "Would it matter if ZF was inconsistent?", sci.logic, 16. - 17. 7. 2009]

971 Das Kalenderblatt 120131 Der Binäre Baum (94)

Das Folgende ist die Zussammenfassung einer längeren Korrespondenz aus der ersten Hälfte des Jahres 2009.

NN: Sehr geehrter Herr Professor Mueckenheim,
ueber die Erzaehlung eines Ihrer Studenten bin ich auf Ihr Buechlein "Die Geschichte des Unendlichen" gestossen. Ich finde es interessant und sehr angenehm zu lesen.
Mich als Mathematiker [...] interessiert natuerlich Ihre Kritik der Begriffe des aktual Unendlichen und gar des Ueberabzaehlbaren besonders, da sie weit verbreiteten Vorstellungen widerspricht.
WM: die Zahlenmengen ℝ und ℕ benutze ich, wohl wissend, dass sie nicht aktual unendlich sind. Doch glücklicherweise stört das so wenig, wie die Portionierbarkeit von Butter durch deren molekulare Struktur beeinträchtigt wird. [...] Was mich wundert, ist, dass die meisten Mathematiker nicht fähig oder willens sind, zu erkennen, dass der binäre Baum die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen schlagend und einfach widerlegt, während bisher keiner meiner Studenten damit auch nur die geringsten Probleme hatte.
NN: Nun, warum haben gerade Berufsmathematiker da Probleme?
WM: (Wie gesagt, nicht alle.) Ganz einfach. Sie haben gelernt, dass Cantors Beweis richtig ist, sie haben bemerkt, dass er wunderschön ist (auch ich habe ihn früher, in den ersten 15 Jahren meiner Lehrtätigkeit, als Beispiel für die Größe des menschlichen Geistes gepriesen) und sie haben nicht bemerkt, dass es im Unendlichen keine eindeutige Beweislage gibt. Dazu kommt, dass die Meinungen von non-main-stream-Autoritäten so sorgfältig vor ihnen verborgen werden wie die Segnungen des Kapitalismus in Karl-Eduard von Schnitzlers Schwarzem Kanal, falls Sie den noch kennen.
NN: Ich teile uebrigens mit einem Ihrer Studenten zeitweilig das Buero und Sie haben recht: Ihm leuchtet alles ein, was Sie sagen.
WM: Das freut mich. Hoffentlich hat er eine 1 bekommen.
NN: Ich muss ihn mal fragen.
Aber ich kann Ihnen das Kompliment machen, dass Ihre Vorlesung Spass gemacht hat. Ich finde, Freude an der Mathematik zu vermitteln ist auf jeden Fall ein Verdienst um den Mitmenschen.
WM: Die Mathematik ist durch Beobachtung und Abstraktion aus der Natur entstanden. Diese Wurzeln kann niemand leugnen. Cantor verwendet den Terminus "in der Natur", wir würden

heute sagen in der Realität oder der Wirklichkeit. Und dort liegt der von Cantor behauptete Sachverhalt nicht vor.

NN: Ein Beweis ist kein Experiment.

WM: Ein Beweis ist ein Experiment - nichts weiter. Es ist ein Experiment im Kopf eines höchst fehlbaren Säugetiers.

NN: Nein, der Mathematiker benutzt keine Instrumente. Jedenfalls nicht der reine.

WM: Auch nicht Zirkel und Lineal?

{{Die Diskussion drehte sich dann um Wittgenstein und den binären Baum.}}

NN: Tja, das ist Wittgenstein. Das ist halt ein anderer Realitätsbegriff. Das geht am Mengenbegriff halt auch nicht spurlos vorüber.

WM: Es gibt nur eine reale Realität.

NN: Ein Freund von mir (auch Berufsmathematiker) war übrigens genau der der Meinung von Bishop. Er nannte das das soziologische Kriterium für einen Beweis.

WM. Doch wie sollte es anders sein? Die Zahl der Pfade des Baums auf einer bestimmten Ebene ist durch die Knoten auf dieser Ebene beschränkt, sogar genau definiert. Dies gilt für alle der unendlich vielen im Baum existierenden Ebenen. Eine obere Abschätzung der Pfadanzahl erhalten wir, wenn wir alle Knoten auf eine Ebene legen. Die Anzahl der Knoten ist abzählbar. ⇒ Die Anzahl der Pfade ist abzählbar.

NN: Daran ist nicht zu zweifeln.

WM: Da bin ich nun aber baff. Ausnahmslos alle Mengentheoretiker, mit denen ich das bisher diskutiert habe, und das sind nicht wenige, bestreiten das.

NN: Aber: Was hat das mit den Reellen Zahlen zu tun?

WM: Diese Frage wurde mir von Mathematikern bisher noch nie gestellt. Denn jede reelle Zahl kann als eine uendlich lange Zeichenfolge dargestellt werden. Diese Darstellung kann in einer Zeile oder als Pfad im Baum erfolgen. Zwischen beiden existiert eine Isomorphie. Wenn Sie aber diese Darstellungsform ablehnen, dann ist auch Cantors Liste futsch. Und wenn Sie behaupten wollten, dass eine reelle Zahl im Baum fehlt, dann müssten Sie schon sagen, welche das ist.

NN: Ihr Begriff von Baum ist, das entnehme ich aus dem Kontext, der eines Baumes mit salopp gesagt unendlicher Tiefe. Weiter sind klassischerweise auch Pfade endlich. Dabei bleibe ich, auch wenn man sich in unendlichen Baeumen bewegt. Das ist natuerlich Definitionssache. Ich verwende den Begriff in dieser Weise, damit ein Pfad einen Anfang und ein Ende hat.

In dem Moment allerdings, in dem man unendlich lange Pfade betrachtet, ist's aus mit unserer Uebereinstimmung: Die Menge der unendlichen Pfade ist ueberabzaehlbar unendlich.

WM: Und wie kommen Sie von Ihrem "zweifellos" zu dieser konträren Erkenntnis?

NN: Die Menge der konstruierbaren Zahlen ist abzaehlbar, das ist klar. [...] ich behaupte, Sie koennen nur die wenigsten Zahlen im Binaerbaum konstruieren. Aber vermutlich haben wir auch nicht den gleichen Begriff von Konstruktion, oder???

WM: Eine Konstruktion einer Ziffernfolge liegt vor, wenn zu jeder Ziffer ein Verfahren angegeben werden kann, womit sie in endlich vielen Schritten berechnet werden kann. Andernfalls wäre schon die Menge $\mathbb{N}$ nicht konstruierbar. [...] Der Baum existiert vollständig, *wenn* alle reellen Zahlen vollständig existieren.

NN: Aber jetzt muss ich doch nochmal nachfragen: Sagen Sie, dass Ihr Beweis richtig ist *und* der von Cantor,oder sagen Sie, *nur* Ihr Beweis ist richtig?

WM: Wenn man das aktual Unenendliche nicht akzeptiert, dann gilt Cantors Beweis nicht mehr (meiner natürlich auch nicht - aber dann wird er ja auch nicht mehr benötigt), denn es handelt sich um einen Widerspruchsbeweis.

NN: Im ersten Fall kann man die Mathematik wegwerfen, im anderen nur einen gewissen, ich sage mal "analytischen" Teil.

WM: Die Mathematik ist glücklicherweise sehr stabil. Die transfinite "Grundlegung" hat sie ohne nennenswerte Schäden überstanden (abgesehen von einigen Spintisiererereien wie unerreichbaren Kardinalzahlen) und auch die Erkenntnis, dass die im Vorwort meine Buches beschriebenen Lücken in der Wirklichkeit unumgänglich vorhanden und nicht zu schließen sind, wird die Mathematik nicht umwerfen oder entwerten. Man muss nur ein Bisschen vorsichtiger sein und darf nicht glauben, sich in der Mathematik nur mit absoluter Wahrheit zu beschäftigen.

972 Das Kalenderblatt 120201 Der Binäre Baum (95)

Die Ordinalzahlzählung stockt in gewissen Fällen: Bilden wir ein paar Vereinigungen nach einfachem Kaufmannsrechnen. (Das wird der "höheren Mathematik" wohl keinen Abbruch tun.) Die Ergebnisse sind doppelt unterstrichen.

{1}
{1, 2}
{1, 2, 3}
{1, 2, 3}

{1}
{1, 2}
{1, 2, 3}
...
{1, 2, 3, ...}

{1}
{1, 2}
{1, 2, 3}
...
{1, 2, 3, ...}
{1, 2, 3, ...}

{1}
{1, 2}
{1, 2, 3}
...
{1, 2, 3, ...}
{1, 2, 3, ..., *a*}
{1, 2, 3, ..., *a*}

{1}
{1, 2}
{1, 2, 3}
...
{1, 2, 3, ...}
{1, 2, 3, ..., *a*}
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*}
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*}

{1}
{1, 2}
{1, 2, 3}
...
{1, 2, 3, ...}
{1, 2, 3, ..., *a*}

{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*}
...
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*, ...}

{1}
{1, 2}
{1, 2, 3}
...
{1, 2, 3, ...}
{1, 2, 3, ..., *a*}
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*}
...
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*, ...}
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*, ...}

Nur in zwei Fällen ist das Ergebnis größer als jeder Summand. Die Rechnungen können nun auf die Ordinalzahlen abgebildet werden: Die erste, ganz oben auf {1, 2, 3}, die zweite auf {1, 2, 3, ...}, die dritte auf {1, 2, 3, ...}. Irgendwie stockt es zwischendurch immer mal wieder, obwohl ein Summand hinzugefügt wird, der größer als alle bisherigen ist.

Also Rechnen à la Limesordinalbahnhofsuhr. {{Die Bahnhofsuhr legt zu jeder vollen Minute eine kleine Pause ein und hält inne.}}

Im Pfadmodell gilt: Vereinigt man alle Pfade, die kürzer als ein Limesordinalpfad sind, so erhält man den Limesordinalpfad. Vereinigt man alle Pfade, die kürzer als ein Nachfolgeordinalpfad sind, dann erhält man den Vorgänger des Nachfolgeordinalpfades.

Der resultierende kleine Fehler beim Zählen scheint den Mathematikern bislang verborgen geblieben zu sein. Im Gegensatz zur Arithmetik, die bekanntlich eine der tragenden Säulen der Mathematik ist (oder war?), zählt man die oben angedeuteten Pfadevereinigungen nämlich so:

{1}
{1, 2}
{1, 2, 3}
...
{1, 2, 3, ...}
{1, 2, 3, ...}
{1, 2, 3, ..., *a*}
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*}
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*, *aaa*}
...
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*, *aaa*, ...}
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*, *aaa*, ...}
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*, *aaa*, ..., *b*}
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*, *aaa*, ..., *b*, *bb*}
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*, *aaa*, ..., *b*, *bb*, *bbb*}
...
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*, *aaa*, ..., *b*, *bb*, *bbb*, ...}
{1, 2, 3, ..., *a*, *aa*, *aaa*, ..., *b*, *bb*, *bbb*, ...}
...

und so weiter (wenn es denn überhaupt so weit hat kommen müssen).

Das von Hilbert einst so gepriesene "über das Unendliche Hinauszählen" hakt hier also ein wenig.

Die Ursache liegt darin begründet, dass die Vereinigung aller natürlichen Zahlen eine unendliche Zahl sein soll. Weil die natürlichen Zahlen sich selbst abzählen, ist das, wie übrigens

Albrecht schon vor langer Zeit (und inzwischen auch viele andere) erkannte, ein Widerspruch. Das wird von den Mengenlehrern zwar vehement bestritten, denn sie zählen so:
1, 2, 3, ..., ω, ω + 1, ω + 2, ..., ω + ω, ω + ω + 1, ...
Doch lässt sich dieser Widerspruch nicht mehr leugnen, wenn man zum Zählen ein Medium wählt, in dem sich Zahl und Abgezähltes nicht unterscheiden. Dort wird Cantors "Haken" offenbar. Und das begründet auch die Divergenz der Ergebnisse bei der Konstruktion des binären Baums. Die Vereinigung aller endlichen Pfade scheint dasselbe zu bieten wie die Vereinigung aller endlichen mit den unendlichen Pfaden. Folgte man Cantor, wäre es auch so, mit dem Resultat, dass alle Knoten sowohl mit der Menge aller endlichen Pfade ausgeschöpft würden als auch noch alle unendlichen Pfade *zusätzlich* realisieren würden. Das ist ein Widerspruch. {{Denn bei der Zifferndarstellung ist kein Unterschied zwischen "allen Elementen" und der "Menge" erkennbar.}}
[WM, "Das Kalenderblatt 091206" de. sci mathematik, 11. - 12. 12. 2009]

973 Das Kalenderblatt 120202 Der Binäre Baum (96)

NN: Dear Professor Mückenheim,
I read your paper on "The Infinite in Sciences and Arts" in the proceedings of the meeting MACAS 2 at the South Denmark University.
There is a very strange mistake in the paper, it seems. At some point it discusses the infinite binary tree and "the union of all finite binary trees", which is of course not a well-defined concept, e.g. one would first think of the disjoint union of these trees, which is not what is meant in the context. But in any event, one understands the meaning from the context, I suppose.
In the paper it is then stated that "The set of paths in the union tree T_∞ is merely a countable union of finite sets". The entire argument is concerned with finite and infinite paths in the infinite binary tree. Can it be that "countable union" refers to the union of finite trees, and "finite sets" refers to the finite set of paths in a single finite tree? There is no different meaningful interpretation, is there? In which case the quoted statement says that every infinite path in T_∞, the inifinite binary tree, is a finite path, one of the paths in one of the finite binary trees. Which is of course an absurdity.

In meiner ersten Antwort erklärte ich:
By "union of binary trees" I understand a kind of projection (root upon root). [...] The union of all finite paths is countable. If you look at the example given above, there is the union of six paths: 00, 01, 000, 001, 010, 011. But the union over the paths of all finite trees covers all edges and all nodes of the infinite tree. Therefore there is nothing "additional" in the infinite tree that could be used to distinguish its infinite paths from all finite paths.
To see my result from another perspective, you may look at the game that I devised for my students: "Paint the binary tree".
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/GU/GU12c.PPT#361,34,Folie 34
During this game the infinite binary tree is painted, infinite path by infinite path. During every step we paint more nodes than paths. And we can paint all nodes, because the set of nodes is countable.
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/GU/GU12c.PPT#363,35,Folie 35
So what would remain after all nodes have been painted and simultaneously not more than a countable number of paths have been painted? Nothing. So the whole infinite binary tree contains merely a countable number of infinite paths.

Mein Korrespondent behauptete - nach den Grundsätzen der Mengenlehre zu recht -, dass eine Vereinigung von Mengen endlicher Pfade nicht zu einer Menge von unendlichen Pfaden führen könne, an deren Überabzählbarkeit er zudem unerschütterlich glaubte. Trotz mehrfacher Email-

Wechsel gelang es ihm nicht, zu erkennen, dass die Vereinigung von unendlich vielen endlichen Knotenmengen zum unendliche Binären Baum und damit natürlich auch zu den darin enthaltenen Pfaden führen muss.

NN: I asked about the statement in your article which you had formulated as follows: "The set of paths in the union tree T_∞ is merely a countable union of finite sets." This you kindly clarified to mean, more precisely: the set of paths in the union tree T_∞ is merely the union taken over the countable set of finite trees of the finite set of paths in the finite tree.

The latter statement is obviously false, since there are infinite paths in the tree T_∞, which is the same as the infinite binary tree, but such paths do not occur as elements of any set of paths of a finite tree. Hence the set of paths of T_∞ clearly has other elements than the union of the sets of paths of finite trees. It looks like just a strange mistake not motivated by anything previous in the text, a kind of extended misprint.

Mein Korrespondent war nicht nur nicht zu überzeugen, im Gegenteil, er trug sogar seine Beschwerde bei Frau Dr. X, der Referentin für wissenschaftliches Fehlverhalten in the DFG-Geschäftsstelle in Bonn vor und schickte eine Kopie an den Augsburger Ombudsmann Prof. Dr. Y. Dies weiß ich allerdings nur, weil mein Korrespondent es mir mitteilte. Ich bin weder von Frau Dr. X, noch vom Kollegen Dr. Y jemals angesprochen worden und nehme an, dass man den Beschwerdeführer darüber informiert hat, dass matheologische Glaubensbekenntnisse keinerlei Wirksamkeit besitzen - erst recht keine rechtliche.

Als ich meinen Korrespondenten en passant über die Voraussetzungen der Mengenlehre aufklärte (You seem to believe that transfinite cardinal numbers can exist without assuming actual infinity to exist. That is an error.), traten seine Defizite zutage, die wie in vielen ähnlichen Fällen, so auch hier mit schlechtem Benehmen einhergehen. Er schrieb mir nämlich: "You are being confused or silly. I am positively certain that transfinite cardinalities can exist without assuming anything at all. Assuming only the general properties of sets, I can even prove that they do exist. In any event it is impossible for me to believe something which speaks about something called "actual infinity" the meaning of which I have no idea about."

Das hatte ich mir bereits gedacht. daraufhin brach ich die Korrespondenz mit ein paar Hinweisen, die selbstverständlich wirkungslos verhallten, ab:

The assumption that all $\aleph_0$ natural numbers exist is nonsense unless all natural numbers exist. And that *is* assuming actual infinity. Everybody who is concerned with this topic knows that. [...] There is no such assumption introduced. For the last time I explain it to you: I obtain a contradiction:

The trees T_∞ and T are identical with respect to all nodes, all edges, and all paths. But the set of all paths is countable in the tree T_∞ and uncountable in the same tree T.

And this shows that the assumption of actual infinity (here the existence of "all levels") is false.

974 Das Kalenderblatt 120203 Der Binäre Baum (97)

RR: Es ist eine beliebte Quelle von Fehlschlüssen und nichtsnutzigen Spekulationen, wenn man auch bei unendlichen Mengen *M* die Kardinalität card(*M*) als "Anzahl der Elemente von *M*" bezeichnet. Man sollte das unterlassen.

WM: Wenn man die Ungleichung $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ behauptet, wobei "$a > b$" der üblichen Definition von "*a* umfasst mehr (Einheiten, Elemente, ...) als *b*" entspricht, so darf man sich nicht wundern, wenn dies mit den üblichen Mittel nachgeprüft wird.

RR: Mich wundert das ja auch gar nicht. Ich wundere mich auch nicht, dass Leute bei Rot über die Kreuzung rennen, wenn sie es eilig haben. Das heisst doch aber nicht, dass es erlaubt ist, und es heisst auch, dass man mit Unfällen rechnen muss.

WM: Wenn jemand behauptet, die Menge der Pfade im binären Baum habe eine größere Kardinalzahl als die Menge der Knoten (aus denen die Pfade bestehen) so gibt er das schlechtest mögliche Beispiel eines unbelehrbar Verbohrten. Begründung: Kürzlich brachte Dik T. Winter das Problem auf den Punkt. Er schrieb nämlich:

Every finite node of a path means all the nodes of the path.

Every finite part of the path does *not* mean all parts of the path.

Wenn Pfade aus nichts weiter als Knoten bestehen, so bilden diese beiden Sätze einen Widerspruch. Die einzige Möglichkeit, ihn scheinbar zu vermeiden, besteht darin, in den Pfaden mehr zu sehen als nach nüchterner Überlegung drinsteckt.

Natürlich lässt sich gegen derartige Glaubenssätze kein Argument durchsetzen.
[Rainer Rosenthal, "Wikipedia: Paradoxien der Mengenlehre", de. sci. mathematik, 10. 4. 2007]

WM: Ich konstruiere vom Wurzelknoten aus zu jedem anderen Knoten einen Pfad. Dieser Pfad ist endlich und wird durch einen unendlichen Tail zu einem unendlichen Pfad ergänzt. Beispiel: 0,111010100101|000... mit dem Tail 000... Denn den Tail, den Du im Baum zu vermissen meinst, den könnte ich benutzt zu haben behaupten. Warum? Weil es an der Konstruktion nicht das Geringste ändern würde.

WT: Rainer koennte sich fuer die Konstruktion folgenden "Diagonalpfads" entscheiden:

WM: Alle Pfade im binären Baum unterbringen zu wollen, würde bedeuten, *zusätzlich* zur Vereinigung aller endlichen Indexmengen $\{1\} \cup \{1, 2\} \cup ... = \{1, 2, 3, ...\}$ auch noch die unendliche Indexmenge $\{1, 2, 3, ...\}$ unterbringen zu wollen. (Als Indexmenge bezeichne ich die Menge der Ordinalzahlen der Ebenen, die von einem Pfad oder einem speziell interessierenden Abschnitt durchlaufen werden.)

Das Problem ist vergleichbar mit dem Versuch, die Pfade 0.0 und 0.00 und 0.000 von dem Pfad 0.000... unterscheidbar darzustellen, wenn alle endlichen Pfade mit dem Tail 000... fortgesetzt würden. Das kann nicht funktionieren.

WT: Beginnend mit der Wurzel des Baumes entscheidet er sich zunaechst fuer den linken Knoten k_1, um einen Pfad der Laenge eins zu erhalten. Diesen hast Du gemaess Deiner Konstruktion durch einen unendlichen Tail fortgesetzt. Geht diese Fortsetzung ueber den linken Nachbarknoten von k_1, waehlt Rainer den rechten Nachbarknoten fuer k_2, ansonsten den linken, um auf Ebene zwei zu gelangen. Diese Konstruktion setzt er auf Ebene zwei analog fort, um den Knoten k_3 seines unendlichen Pfades $P = k_1, k_2, k_3,...$ zu erhalten. Er wird argumentieren, dass P in Deiner Aufzaehlung nicht enthalten sein kann, weil sich P an jedem der Knoten k_1, k_2, k_3,... anders verzweigt als Deine Konstruktion es vorsieht.

WM: Bitte vergiss nicht, dass ich zu *jedem* Knoten im Baum einen Pfad konstruiere.

Beispiel: Entscheide ich mich, dass der endliche Pfad 0.0

```
     0.
    /
   0
```

durch den Tail 000... ergänzt werden soll, dann brauche / kann ich die endlichen Pfade 0.00 und 0.000 usw. nicht mehr (zu) konstruieren, denn sie sind bereits da. (Wie ich oben sagte, kann man sie nicht mit Ziffern voneinander unterscheiden, wenn jede Zahl aus einer unendlichen Folge von Ziffern bestehn muss, wie das im Baum der Fall ist.) Aber selbstverständnlich ist auch jede Rechtswendung in der Konstruktion enthalten, weil der mit $\aleph_0$ Pfaden konstruierte Baum jeden Knoten enthält oder anders ausgedrückt, weil jeder Knoten gefärbt wird.

WT: Sagst Du ihm an einer Stelle Deiner Konstruktion nicht, wie es weitergehen soll, dann haelt er sich solange auch mit seiner Konstruktion zurueck. Wer gewissermassen den naechsten Schritt macht, verliert.

WM: Die Darstellung von reellen Zahlen durch Ziffern und ihr Analogon: Pfade im Baum, ist von der Entstehungsweise völlig unabhängig. Wie sie zustande kommen, spielt also keine Rolle. Wichtig ist nur, dass alle da sind (und zwar mit $\aleph_0$ Schriten hergestellt - selbst wenn ich den Pfad 0.000... auf $\aleph_0$ verschiedene Weisen konstruieren wollte). Und Rainer kann an keiner Stelle einen Knoten wählen, der dem so konstruierte Baum noch mangelt.
[Wolfgang Thumser, "Das Kalenderblatt 091206", de.sci.mathematik, 15. 12. 2009]

Parallel zu den öffentlichen Diskussionen gingen aus der ganzen Welt zustimmende und ablehnende Briefe und Emails ein:

Dear Prof. Mueckenheim,

I am reading now with great interest your articles in arXiv. I share the point of view that the set theory is a contradictory one in its basement. Now I send you this e-mail to clear up a possibility of contact with you on this problem.

Best regards, Prof. NN

NN: Thank you for your answer. The discrete infinity, which certainly is the greatest mistake mathematics ever knew, is a part of my more general interest to the nature as the complete mathematical object. However, I have found that the only way to publish the results on this is to publish the pieces of the whole. The first piece deals with impossibility of discrete infinity and the second, which is much simpler, refers to time as the dependent variable. Tell me, please, can be this second problem of interest to you?

Do you know the paper A.A. Zenkin, The Time-Sharing Principle and the Analysis of a Class of Quasi-Finite Reliable Reasonings (in Terms of the G. Cantor Uncountability Theorem) - Doklady Mathematics, vol 56, No. 2, pp. 763-765 (1997). Translated from Doklady Akademii Nauk, Ser. Mathematics, Vol 356, No. 6, pp. 733 - 735 (1997)? Prof. A.A. Zenkin was an active opponent of AI {{Actual Infinity}}, unfortunately he died last year.

975 Das Kalenderblatt 120204 Der Binäre Baum (98)

WM: Pfade beginnen alle beim Wurzelnoten. Anfangsabschnitte des Pfades 0.000... sind linear geordnet. Teilmengen der natürlichen Zahlen sind nicht linear geordnet. Das klassische Beispiel ist { }, {1}, {2}, {1, 2}.

CC: Es gibt eine triviale bijektive Abbildung der Pfade auf Teilmengen der natürlichen Zahlen. Schon alleine deswegen sind die Aussagen, die sich machen lassen, äquivalent. Ob die eine oder andere Präsentationsform der gleichen Aussage einfacher ist, hängt natürlich vom Betrachter ab.

WM: Wenn alle Knoten im binären Baum konstruiert sind, bleibt nichts mehr übrig, das noch hinzugefügt werden könnte.

CC: Es bleibt nichts mehr übrig, das der Menge der Knoten hinzugefügt werden könnte. Das ist richtig. Genau wie bei den natürlichen Zahlen. Übrigens betrachtest Du bei der Konstruktion doch nur Teilmengen der Knotenmenge, die nicht die gesamte Knotenmenge überdecken, sondern immer nur solche, die einen einzelnen Pfad überdecken.

WM: Ich konstruiere alle endlichen Pfade; das sind abzählbar viele {{anhand der folgenden Konfigurationen}}:

a)

```
   0
  /
```

```
    0
 b)
      0
     /  \
    0  1
 c)
        0
       /  \
      0   1
     /
    0
 d)
        0
       /  \
      0   1
     / \
    0  1
 e)
        0
       /  \
      0   1
     / \   /
    0 1 0
 f)
        0
       /  \
      0   1
     / \   / \
    0 1 0 1
 usw.
```

WM: Versuche doch einfach einmal, eine Zahl anzugeben, die ich noch nicht konstruiert habe. (Welche unendlichen Tails ich verwendet habe, werde ich Dir aber erst anschließend mitteilen, damit Du selbst erkennst: Zahlen, *die allein durch Ziffern definiert sind*, sind nicht mehr übrig.)

CC: Gern: [...] Geht der *n*-te von Dir verwendete Pfad an seinem *n*-ten Knoten nach links, geht meiner nach rechts. Und natürlich umgekehrt.

WM: Kannst Du aus Diagramm f erkennen, dass es keinen ersten, zweiten usw. *n*-ten Pfad im fertigen Baum gibt? Das bedeutet: die Reihenfolge der Konstruktionen ist belanglos für das Ergebnis.

CC: Dass dieser Pfad nicht in endlich vielen Schritten durchlaufen ist, ist richtig. Das gilt aber für jeden Pfad im unendlichen binären Baum; wenn Du also keine Pfade akzeptierst, die mehr als endlich viele Knoten durchlaufen, hast Du keinen einzigen Pfad zur Verfügung, also auch die Knotenmenge nicht überdeckt.

WM: Die Vereinigung ist unendlich. Wenn Du keine Zeile in Cantors Beweis akzeptierst, die mehr als endlichen Index hat, so hast Du keine unendliche Liste, kannst also auch nichts über alle Zeilen einer unendlichen Liste sagen.
[Christopher Creutzig, "Das Kalenderblatt 091206", de.sci.mathematik, 16. 12. 2009]

WM: Wir können die vier Anfangsabschnitte {{der Menge {1, 2, 3, 4}}} vereinigen, also die Menge daraus konstruieren: {1} ∪ {1, 2} ∪ {1, 2, 3} ∪ {1, 2, 3, 4} = {1, 2, 3, 4} Dies kann in vier Schritten geschehen. Natürlich könnte die Konstruktion auch in einem {1, 2, 3, 4} oder in fünf Schritten geschehen: {1} ∪ {1, 2} ∪ {1, 2} ∪ {1, 2, 3} ∪ {1, 2, 3, 4} = {1, 2, 3, 4}. Jedenfalls ist nach Bildung der Vereinigung *jede* der Untermengen von { } bis {1, 2, 3, 4} vorhanden, muss also in einem der Schritte entstanden sein.

RR: Es gibt da aber einen ekligen Haken: Werden nicht bei Deinem Verfahren erst dann alle Untermengen erzeugt, wenn das letzte Element erschienen ist?

WM: Oben werden im zweiten Schritt zum Beispiel {1, 2} und {2} erzeugt.

SG: Wir stellen berrasch950t fest: *Ein* "Konstruktionsschritt" kann *mehr als eine* Teilmenge erzeugen.

WM: Dass Dich das überrascht, oder dass Du Dich überrascht stellst oder feststellst, spricht leider nicht für Deine geistige Durchdringung des Baums. Genau aus dem Grunde habe ich ihn nämlich konstruiert, weil die dortigen Pfade nicht zu mehreren in einem Schritt entstehen können.

SG: Also: Wenn du die Konstruktionsschritte zählst, dann zählst du nicht die dabei enstehenden Teilmengen.

WM: Wie gesagt, im Baum ist das anders. Jeder Knoten kann nur einen einzigen Anfangsabschnitt fortsetzen. Oder besser formuliert: Kein Knoten kann zwei auf Ebene n unterscheidbare Anfangsabschnitte auf Ebenen n + 1 fortsetzen.

SG: Ich kann die 'Konstruktion' von {1, 2, 3, 4} auch in einem einzigen Schritt vollziehen:

{1, 2, 3, 4} = $\cup_{i=1 \text{ bis } 1}$ {1, ..., 4}

Dennoch würde ich *nicht* auf die absurde Schlußfolgerung kommen

"{1, 2, 3, 4} wurde in 1 Schritt konstruiert" ⇒ "Es gibt 1 mögliche Teilmenge von {1, 2, 3, 4}".

WM: Nein, da hättest Du dich auch geirrt - ebenso wie mir Deiner absurden Unterstellung, dass ich diese Meinung hegte.

[Rainer Rosenthal, Stephan Gerlach, "Das Kalenderblatt 091206", de.sci. mathematik, 11. 1. 2010]

976 Das Kalenderblatt 120205 Der Binäre Baum (99)

RR: Und mit welcher Dezimaldarstellung darf sich 1/3 danach bekleiden?

WM: Mit überhaupt keiner, aber mit der Ternärdarstellung 0,1 zum Beispiel.

RR: Was sprach nochmal gegen 1/3 = 0.3333... = $\Sigma_{k=1...\infty}$ $3 \cdot 10^{-k}$?

WM: Nichts spricht dagegen. Noch einfacher ist 0,[3]. 5 statt 25 Zeichen.

Bitte versuche Dich von dem Denkschema freizumachen, das Dich seit ca. 50 Jahren beherrscht. Eine unendliche Folge, deren Bildungsgesetz man nicht kennt, ja, die vielleicht gar kein Bildungsgesetz besitzt, kann niemals einen genauen Zahlenwert bezeichen.

Beispiel: Alle Zahlen, die mit den Zeichen "0,3" beginnen, bezeichnen mit Sicherheit Zahlenwerte im Intervall von 0,3 bis 0,4. Aber wieviele Ziffern auch noch folgen mögen: Keine dieser Folge kann eine reelle Zahl definieren. Cantor und andere haben den Kraftakt versucht und gesagt: Dann werden eben unendlich viele Ziffern zum Ziel führen. Das sind Cantors berühmte Fundamentalreihen. Doch diese Behauptung ist genau so sinnvoll wie die Annahme, dass eine unendliche Folge von Einsen schließlich doch auch eine 2 enthalten muss.

RR: So ganz unüblich ist das ja nicht, nicht wahr?

WM: Der Schluss von ∃ finite Definition ⇒ ∃ infinite Folge, ja. Nur der Umkehrschluss ist es nicht.

RR: Die Ternärdarstellung 0,1 = $\Sigma_{k=1...\infty}$ $a_k \cdot 10^{-k}$ mit a_1 = 1 und a_k = 0 sonst, ist natürlich auch hübsch.

WM: und auch endlich.

[Rainer Rosenthal, "Das Kalenderblatt 091206", de.sci.mathematik, 16. 12. 2009]

WM: Ich verstehe, dass Du Dich der Magie ergeben hast. Du sagst, dass die unendlichen Pfade nicht in den vereingten Mengen vorkommen, in der fertigen Vereinigung aber doch, obwohl außer den vereinigten Mengen nichts vereinigt wird.

RR: Wir müssen unterscheiden zwischen der Menge der Knoten und der Menge der Pfade. Das hat nichts mit Magie zu tun und wird sicher von Dir zugestanden.

In der fertigen Vereinigung kann nur etwas drin sein, was in einer der beteiligten Mengen drin ist. Diese Aussage ist goldrichtig und wird von mir nicht bestritten.

Habe ich mich nunmehr, geführt von Deiner Weisheit und Güte, aus dem Bannkreis der bösen Magie lösen können?

Die wenigen verbliebenen Leser schauen gespannt. Die bornierten Mengenlehrer blicken bange, weil der tapfere und dämlich weiterkämpfende Mitstreiter einzuknicken droht; die WM-Sympathisanten andererseits wittern Morgenluft. Oh, oh, ich weiss nicht, ob es jetzt, weit nach Mitternacht, der rechte Zeitpunkt ist, diese entscheidende Schlacht zu schlagen. Ich glaube, es muss sein - Matheologie hin oder her!

Gehen wir also zurück zu meinem obigen Satz: Bei oberflächlicher Betrachtung könnte man auf den Gedanken kommen, dass die Pfadmenge ebenfalls nichts weiter sei als die unendliche Vereinigung eben dieser endlichen Pfade. Dieser Gedanke ist in der Tat nur ein oberflächlicher, weil er durch nichts begründet wird und offenbar auch nicht begründbar ist, wie der Fall des unendlichen Pfades $P = 0{,}010101...$ ja {{dem Gläubigen}} zeigt.

WM: J'adoube. Bitte gestatte, dass ich da etwas zurechtrücke: Jeder Pfad der Pfadmenge ist als Untermenge in der vollständigen Knotenmenge enthalten.

RR: Ich sage, dass die unendlichen Pfade nicht in der Vereinigung der endlichen Pfadmengen vorkommen. Ich sage weiterhin, dass sie in der Vereinigung der endlichen Knotenmengen gebildet werden. {{Gebildet? Einfach so? Ohne mathematisch begründbaren Anhaltspunkt und in überabzählbarer Menge, obwohl jede Folge mindestens ein Element und maximal einen Grenzwert besitzt? Da wäre es wohl an der Zeit, bange zu blicken.}}

Und schon ist der Vorwurf haltlos. Am Beispiel des Pfades P kann ich das noch einmal erläutern. P kommt - und da stimmst Du ja mit mir überein - nicht vor in der unendlichen Vereinigung $\{ P_1 \} \cup \{ P_2 \} \cup \{ P_3 \} \cup ...$ Die Knoten von P kommen aber alle vor in der unendlichen Vereinigung $\{ K_1, K_2, K_3, ... \}$.

WM: Und deshalb ist P als Untermenge in der fertigen Knotenmenge vorhanden. Da P in keiner endlichen Vereinigung von Knotenmengen B_n als Untermenge vorhanden ist, muss er in einem unbeobachteten Augenblick auf Brett gesetzt worden sein - als Untermenge versteht sich. Bleibt also die Frage, wer hat die dazu nötigen letzten Knoten-Könige hingestellt. Und wenn die Regeln das erlauben, dann sollte das auch mit der Dame D in Cantors "(noch) Immergrüner" erlaubt sein.

RR: WM schrieb: ... eine Art Antwort ... wie schade, dass Du hier nicht genauer gelesen hast. Du könntest wirklich etwas lernen. {{Das ist wohl im folgenden Absatz enthalten?}}

RR: Ich glaube, dass ich WM's kognitiven Prozessen etwas näher gekommen bin beim letzten Diskutieren. Ich habe jedenfalls mitbekommen, dass der binäre Baum ihm deswegen so gut gefällt {{leider nicht, aber es ist auch recht kompliziert (*)}}, weil eine gewisse Problematik weiter hinaus geschoben wird, die bei der Betrachtung der Teilmengen von $\mathbb{N}$ sehr schnell ins Auge fällt. Schon im endlichen Fall ist nämlich leicht zu sehen, dass die Menge der Teilmengen grösser ist als die Menge der Elemente. Bei endlichen Bäumen ist aber die Menge der Pfade gleich gross wie die Menge der Knoten {{sogar kleiner}}. Wenn man nun nur fest genug daran glaubt, dass im Unendlichen auch nichts anders sein wird als im Endlichen, dann kommt man zu der Ansicht, Pfadmenge und Knotenmenge müssten stets gleich sein.

Dabei ist es aber so, dass Pfade erst einmal stets Knotenmengen sind, dass man jedoch bei endlichen Pfaden sich zur Identifizierung auf den letzten Knoten beschränken kann. Dieser Optimierungsschritt versagt zwar bei unendlichen Pfaden, aber wenn man der Meinung ist, im

Unendlichen würde eh alles versagen, dann kann man daraus einen schönen Brei rühren. {{Das ist eine sehr tiefe Wahrheit.}}

So wie $a^{bc} \neq a^{b^c}$ nicht notwendig zum Untergang des mathematischen Abendlandes führen muss, so bleibt auch im Falle der Nicht-Reduzierbarkeit der Pfade noch genügend Struktur übrig. {{Das ist eine sehr konkrete Aussage - wenn man nur fest genug daran glaubt.}} Das sage ich jetzt aber nur Dir, denn zu einer Diskussion mit WM bleibt mir, wie ich bereits sagte, für eine Woche keine Möglichkeit. {{Und auch anschließend hat sich die Potentia nicht wieder aktualisiert.}}
[Rainer Rosenthal, "Das Kalenderblatt 100117", 30. 1. 2010]

(*) Der Binäre Baum gefällt mir deswegen so gut, weil er zeigt, dass Pfade, die nur aus Knoten ent- und bestehen, nicht aktual unendlich lang sein können. Die aktual unendliche Menge der Knoten erzeugt lediglich einen potentiell unendlichen Binären Baum, bestehend aus der aktual unendlichen Menge aller potentiell unendlichen (also jeweils endlichen) Pfade. Um die aktual unendlichen Pfade hinzuzufügen, müsste also noch etwas hinzukommen, das durch Knoten nicht ausgedrückt werden kann.

977 Das Kalenderblatt 120206 Der Binäre Baum (100)

NN: Lieber Herr Mueckenheim,
Cantors Methode versagt fuer keine Auflistung von reellen Zahlen, wie der einfache diagonale Beweis zeigt: Zu jeder Liste reeller Zahlen kann man eine relle Zahl finden, die in der List nicht vorkommt. Folglich kann es keine Bijektion zwischen den natuerlichen und den rationalen Zahlen geben.

Es gibt immer wieder Einwaende gegen den Cantor Beweis, und ich erhalte ab und zu 20-seitige Abhandlungen darueber, die zum Teil dann auch noch die Heisenbergsche Unschaerferelation mit ins Spiel bringen. Ich kann davon ruhigen Gewissens abraten. Es hat sich bewaehrt, einfach auf den einfachen Beweis von Cantor und seine Aussage zu verweisen, und zurueckzufragen: Wo ist der Fehler in diesem Beweis? Und: Eine gegebene Liste von reellen Zahlen ist eine gegebene Liste. Wenn Sie sie irgendwie veraendern, erhalten Sie am Ende wieder eine gegebene Liste, fuer die das Diagonalargument greift.

Natuerlich koennen Sie bezweifeln, dass es eine fertige Menge aller rellen Zahlen gibt. Niemand kann in ZFC die Konsistenz von ZFC beweisen, vorausgesetzt, dass ZFC widerspruchsfrei ist.
Mit freundlichen Grüßen, NN

Diese Korrespondenz stammt aus 2003. Damals war ich leider noch nicht in der Lage, meine Einwände präzise genug zu formulieren. Heute würde ich antworten: Ein Widerspruchsbeweis wie der von Cantor muss in allen Fällen funktionieren. Betrachtet man aber eine spezielle Cantor-Liste wie die folgende

0,0
0,1
0,11
0,111
...

so erhält man bei Ersetzung von 0 durch 1 die Zahl 1/9 = 0,111, die entweder konstruiert wird, indem 0,1 unendlich oft verlängert wird (dann steht die "Diagonalzahl" *d* bereits in der Liste, denn die Liste ist eine unendliche; was in ihr fehlt, kann durch weitere Schritte nicht erzeugt werden), oder die nicht konstruierbar ist, weil keine aktual unendliche Menge von natürlichen

Exponenten existiert (dann unterscheidet sich die Diagonalzahl d nicht von allen Listeneinträgen z_k. Die Annahme jedenfalls, dass die Folge der Zeilenzahlen z_k mit

$$z_k = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + ... + 10^{-k}$$

ihren Grenzwert nicht enthält, während die Folge (d_k) der endlichen Anfangsabschnitte

$$d_k = z_k$$

der Diagonalzahl d ihren Grenzwert 1/9 annimmt, ist eine zutiefst unmathematische und würde wohl von keinem Mathematiker akzeptiert - wüsste er nicht, dass dieser unmathematische Unfug die unabdingbare Basis für das Funktionieren des Cantorschen Diagonalargumentes ist.

TJ: I was looking in the 2008 proceedings of a conference MACAS2 on mathematics education. Wolfgang Mückenheim (WM) contributes with a paper featuring his argument about the infinite binary tree, the one which uses as an unproven premise that the union of the sets of paths of finite subtrees is equal to the set of paths in the infinite tree.

I have written to WM and to the editors suggesting the need for producing an erratum, which is obviously an appropriate action. Now, in an erratum or a retraction, it is customary to give credit to the discoverer of the counterexample or disproof.

Can anyone help with digging back into history and figuring out who was first to point out to WM that the two sets of paths, the union of sets of paths of finite subtrees, and the set of paths of the entire tree, are actually not the same but (very) different. The name(s) should be added to the erratum in an ackowledgment. I feel that I need help with this, since I am unsure whether WM will be able to produce the names by himself, and since it is difficult to find answers just by searching back. I found some nice quotes dating from January 2007, but it was in a marathon thread of 7873 posts, and I could not spend time to dig back through the whole mess looking for earlier instances. I suspect these are not the earliest yet. I hope to get help also from the German groups.

WM: Frequently I have been asked why I had coined the word matheology. Here I will explain it in an easily comprehensible way. Men consist of molecules. Theologians recognize something that exists independently and that remains even when the molecules have gone: the soul. Mathelogians argue in a similar way. They recognize souls within real numbers.

The complete infinite binary tree can be constructed using countably many finite paths (each one connecting a node to the root node), such that every node is there and no node is missing and every finite path is there and no finite path is missing. I will call these components of the tree the molecules of the tree. Matheologians now recognize by far more in the tree, namely uncountably many paths of infinite length. This recognition cannot be confirmed by looking at the molecules of the tree. Therefore it must be something analogous to the soul, which has been breathed into the purely mathematical construction of molecules. My theological interpretation, however, is not only based upon the close analogy between set theory and theology. It is also suggested itself by the fact that the concept "soul of tree" has been triggered by the work of a trusting anti-darwinist. But the remarkable point is, that Cantor himself did not apply the soul-concept. His diagonal argument of 1891 applied only "molecules", namely digits (or more generally the terms W and M of a sequence) existing at *finite* places.
[Tommy Jensen,"Help! with Infinite tree history", sci.math, 6. 12. 2009]

978 Das Kalenderblatt 120207 Der Binäre Baum (101)

KS: Mein Vorschlag für die Definition des BB als Startpunkt für eine saubere Formulierung deines Arguments steht jedenfalls noch im Raume. Wie sieht es aus?

RR: Hier ist die von WM abgesegnete Definition

Definition "der binäre Baum"

Der binäre Baum ist die Menge aller Ebenen E_n, die definiert sind durch

E_n = { (n, i) | $i = 2^n-1, ..., 2\cdot(2^n-1)$ } für n = 0, 1, 2, 3, ...

WM: Gut. Ich habe mir nur erlaubt, die Pünktchen zu vervollständigen.

RR: Probe:

Ebene E_0 = { (0, 0) },

Ebene E_1 = { (1, 1), (1, 2) },

Ebene E_2 = { (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) }

Ebene E_3 = { (3, 7), ..., (3, 14) }

Ebene E_4 = { (4, 15), ..., (4, 30) }

WM: Ich habe die vom Copy-and-Paste stehengebliebenen Ebenennummern berichtigt.

RR: Definition "Pfad"

Ein Pfad ist eine Menge P von Knoten mit folgenden Eigenschaften:

(i) (0, 0) ist Element von P.

(ii) Für jedes e gibt es höchstens ein k, so dass (e, k) Element von P ist.

(iii) Für e > 1 gilt: wenn (e, k) Element von P ist, dann ist auch (e-1, [(k-1)/2]) Element von P. Dabei ist [x] die grösste ganze Zahl kleiner oder gleich x.

WM: Das ist sehr schön. Die Knoten können wir nun sowohl in der von Dir gewählten Form (n, i) adressieren als auch in der Form von K_j, wo j eine natürliche Zahl ist. Das gemahnt an die Cantorsche Linearisierung einer Ebene. Und Deiner geschickten Wahl des zweiten Index' als fortlaufend über alle Ebenen ist es zu danken, dass für den k-ten Knoten die einfache Zuordnung besteht: $(n, k) \leftrightarrow K_k$.

RR: Nun, das war ein Eigenlob von Dir: ich habe ja nur Deine Vorgabe umgesetzt.

Jetzt haben wir das Bäumchen und können es eine Weile wachsen lassen. Dann zählen wir mal die Pfade und schauen, welche Pfade in welchen Knoten enden usw.

Fröhliches Diskutieren! Und immer lesen, was der jeweils andere schreibt.

[Kruno Sever, Rainer Rosenthal, "Das Kalenderblatt 100328" de.sci.mathematik, 12. 3. - 12. 4. 2010]

Leider lieferte auch diese "saubere Formulierung", wie viele vorherige, keinen Ansatz für eine ernsthafte Diskussion.

WM: Dass die Behauptung einer solchen Liste einen Widerspruch enthält, erkennt man am binären Baum.

MW: Das bedeutet also, dass du genau weißt, dass man eine solche Liste nicht mal ansatzweise aufschreiben kann. Wofür schreibst du dann eigentlich noch?

WM: Um Dir und anderen zu zeigen, dass es überhaupt keine aktuale Unendlichkeit gibt. Du benötigst dazu nur wenige Basisaussagen der Mengenlehre.

1) Die Anzahl der Knoten im binären Baum ist abzählbar.

2) Jeder Knoten kann durch einen endlichen Pfad mit dem Wurzelknoten verbunden werden.

3) Jeder dieser Pfade wird durch einen Tail (z. B. 000... oder 010101...) zu einem unendlichen Pfad vervollständigt.

4) Die Anzahl dieser endlichen Pfade ist abzählbar.

Daraus folgt:

5) Alle Knoten des binären Baums sind damit überdeckt.

6) Du kannst keinen zusätzlichen Pfad konstruieren, der allein durch Knoten definiert ist.

7) Es gibt nicht mehr als abzählbar viele Pfade im Baum.

8) Es gibt nicht mehr als abzählbar viele reelle Zahlen in [0, 1], die allein durch Ziffern definiert sind.

9) Die Annahme einer aktualen Unendlichkeit ist ein Widerspruch.

[...] Es geht nicht um eine Liste!

SG: Es ging nach meinem Verständnis darum, daß du der Meinung warst, sämtliche im *Baum* enthaltenen Pfade wären "auflistbar"; es geht also auch um eine *Liste*.

WM: Sämtliche enthaltenen Pfade lassen sich erwiesenermaßen mit abzählbar vielen Schritten konstruieren, von denen kein Schritt mehr als zwei Pfade erzeugt. [...] Dieser Baum, der transfinadlige Weihnachtsbaum, enthält alle Pfade, die er enthalten kann.

SG: Was eine Binsenweisheit ist; ich würde sogar soweit gehen, das eine Tautologie zu nennen. Diese Tautologie beweist erstmal rein gar nichts über irgendwelche (Nicht-)Abzählbarkeitseigenschaften von Knoten und/oder Kanten.

WM: Der Baum enthält alle Pfade, deren Bitfolgen reelle Zahlen im Sinne von Cantor darstellen können.

SG: Es hat auch im gesamten Faden, soweit man den noch überblicken kann, keiner versucht einen Pfad im Baum zu finden, den der Baum nicht enthalten kann.

WM: Der Baum enthält jeden Pfad, sobald er jeden Knoten enthält. Jeden Knoten enthält er aber, nachdem zu jedem Knoten ein Pfad konstruiert wurde. [...] Ich zeige, dass es weniger unendliche Pfade gibt als endliche,

B: Auch das zeigst Du nicht; Du verkündest es nur, und das in der einen oder anderen Form schon seit Jahren.

WM: Dann solltest Du zeigen können, wo es fehlgeht. Einen Fehler nachzuweisen dürfte bei der Simplizität meines Argumentes nicht schwer sein, wenn ein solcher Fehler enthalten ist.

1) Der vollständige binäre Baum mit allen Knoten und allen Pfaden wird in abzählbar unendlich vielen Schritten konstruiert.

2) In jedem Schritt wird ein endlicher Pfad nach bekanntem Muster konstruiert.

3) In keinem Schritt wird mehr als ein unendlicher Pfad konstruiert.

[Markus Wichmann, Stephan Gerlach, Bobo, "Das Kalenderblatt 091206", de.sci.mathematik, 14.-31. 12. 2009]

F: Zwar ist mir keinerlei Mathematik bekannt, die sich nicht in ZFC (plus eventueller grosser Kardinalzahlaxiome) formalisieren laesst [...]

WM: Wie wäre es denn mit der Aufgabe, die Mathematik des binären Baums zu formalisieren und eine Möglichkeit zu finden, mehr Pfade als Knoten nicht nur zu behaupten, sondern mit der Wurzel zu verbinden?

[fiesh, "Das Kalenderblatt 091028", de.sci.mathematik, 10. 11. 2009]

F: Das Problem ist ja noch ein anderes. Waehrend Mathematiker darauf hoffen, mit ihren Resultaten Aufmerksamkeit zu erregen und Zuspruch zu finden, bringt [...] die immer gleichen Argumente, die verglichen mit heutiger mathematischer Forschung an Komplexitaet einfach laecherlich sind

WM: Denk' doch mal an die Komplexität der heutigen theologischen Forschung. Was beweist das?

Bisher haben hier ca. 4 bis 5 Leute sinnvolle Gegenargumente zur Abzählbarkeit des Binären Baums gepostet. Nachdem ich ihnen ihren Irrtum nachgewiesen hatte, sind sie verstummt. Manche auch schon früher. Meistens nachdem ein gewisse Formalisierung erreicht war.

Bisher ist kein einziger Beweis (natürlich außer dem unseligen Cantorschen) dafür gepostet worden, der meine Behauptung falsifiziert, der Binäre Baum könne mit abzählbar vielen Pfaden überdeckt oder in abzählbar vielen Schritten vollständig konstruiert werden.

Wenn es einen solchen Beweis gäbe, so sollte er doch trotz der Komplexität der gegenwärtigen Forschung auf eine so einfache Weise formulierbar sein, dass er wenigstens einem intelligenten Studenten einleuchtet.

[fiesh, "Hilfe: Suche gute Erklärung für das Diagonalargument", d.sci.mathematik, 17. 11. 2010]

979 Das Kalenderblatt 120208 Der Binäre Baum (102)

CC: Nach abzählbar vielen Schritten enthält die konstruierte Knotenmenge alle Knoten, die die unendlichen Pfade enthalten. Es ist aber kein einziger unendlicher Pfad konstruiert. {{Auch dieses Beispiel zeigt wieder sehr anschaulich, dass zur "Widerlegungen" meines Baumargumentes matheologische Elemente herangezogen werden, wie in diesem und dem folgenden Beitrag die Unterscheidung des unendlichen Pfades von der vollständigen Folge aller seiner Knoten.}} Das ist exakt das Gleiche, wie ℕ als Vereinigung endlicher Teilmengen zu konstruieren und daraus folgern zu wollen, die Potenzmenge von ℕ sei abzählbar. Sorry, ist einfach so. {{Der Unterschied besteht darin, dass die Teilmengen von ℕ im Gegensatz zu den Pfadabschnitten nicht linear geordnet sind, so dass in einem einzigen Schritt mehrere Teilmengen fertig werden können. Zum Beispiel vollenden sich beim Hinzufügen von 3 zur Menge {1, 2} die Teilmengen {3}, {1, 3}, {2, 3} und {1, 2, 3}, die vorher noch nicht vorhanden waren.}}

Du vermischst völlig verschiedene Mengen: Du beginnst mit der Menge *EP* der endlichen Pfade. Die ist abzählbar. Dann bildest Du die Menge *EPK* der Knoten der endlichen Pfade,

WM: Nein, diese Knoten sind bereits alle da. Interessieren aber nicht weiter.

CC: $EPK = \cup_{p \text{ in } EP}\, p$, wenn wir, was ja durchaus sinnvoll ist, Pfade einfach als Mengen von Knoten ansehen. Die ist natürlich ebenfalls abzählbar. Anschließend betrachtest Du die Menge *UP* der unendlichen Pfade und die Menge *UPK* der Knoten der unendlichen Pfade, also $UPK = \cup_{p \text{ in } UP}\, p$. Was niemand bestreitet, ist, dass $EPK = UPK$.

$$\begin{array}{ccc} EP & & UP \\ | & & | \\ \text{Vereinigung} & & \text{Vereinigung} \\ \downarrow & & \downarrow \\ EPK & \equiv & UPK \end{array}$$

Du behauptest, daraus $EP = UP$ oder wenigstens card(EP) = card(UP) folgern zu können. Genau das ist der Punkt, wo Dir Widerspruch entgegenschlägt und den Du nicht einmal ansatzweise begründen kannst.

WM: Ich kann begründen, dass die Konstruktion aller endlichen Pfade ohne die Konstruktion aller unendlichen Pfade gar nicht möglich ist. [...] Wenn {1, 2, 3, ...} aus den unendlich vielen endlichen Anfangsabschnitten vereinigt wird, ist es dann auch etwas ganz anderes als ℕ?
[Christopher Creutzig, "Das Kalenderblatt 091206", de.sci.mathematik, 1. 1. 2010]

B: (1) Zu jedem *n*-ten Konstruktionsschritt sei $P(n)$ die Menge der bis dahin konstruierten (endlichen) Pfade. Die Vereinigung aller dieser Mengen $P(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) ist die Menge aller endlichen Pfade. Kein unendlicher Pfad ist Element dieser Vereinigung, die wir kurz mit *E* bezeichnen wollen. Damit ist *E* nicht die Menge aller Pfade des Baums.

Allerdings steht (1) nicht im Widerspruch zu der Aussage, dass die Menge *X* der unendlichen Pfade überabzählbar ist.

WM: Aber es steht im Widerspruch zu der Aussage, dass die Vereinigung aller endlichen Anfangsabschnitte ein unendlicher Abschnitt ist.
[Bobo, "Das Kalenderblatt 091206", de.sci.mathematik, 1. 1. 2010]

MK: Wenn der unendliche binäre Baum als gegeben vorausgesetzt ist, dann sind alle unendlichen Pfade da und brauchen nicht als Vereinigung endlicher Pfade beschrieben werden.

WM: Können aber. Ich frage: Wie kann man {1}, {1, 2}, {1, 2, 3}, ... vereinigen, ohne {1, 2, 3, ...} zu erhalten?
[Michael Klemm, "Das Kalenderblatt 091206", de.sci.mathematik, 1. 1. 2010]

WM: Path *p* cannot be distinguished from every path of *P*.
V: Whatever countable set of paths, *P*, may be used to build a maximal infinite binary tree, there are too many paths in the resulting tree to be contained in the original *P*.
WM: I have built a complete maximal binary tree by means of a countable set *P* of path. You may choose a path and prove wether it is in the tree or not. I will tell you afterwards what *P* is. But this is of no relevance, because every countable set of terminating paths or paths with a special tail like 31415... or 121212... will yield the same tree.
[Virgil, "Answer to Dik T. Winter", sci. logic, 14. 6. 2009]

WM: I do not argue that there is a bijection with all real numbers.
DW: You did assert that there was a bijection with the set of all paths in the tree. You have not proven that.
WM: I do not argue that there is a bijection with what you dream of as "all real numbers". I show that the number of paths that can be identified by sequences of nodes or bits is countable.
[Dik T. Winter, Ralf Bader, Brian Chandler, "Answer to Dik T. Winter", sci. logic, 30. 6. 2009]

WM: My proof rests upon the fact that after the set of all finite paths of the form 0.1, 0.11, 0.111, ... has been constructed, there is no chance to construct the path 0.111... in addition.
RR: Why not start with path 0.111... and then add those other paths 0.1, 0.11, 0.111, ...?
WM: This is really a splendid idea! In this manner all real numbers of the unit interval can be inserted into the infinite binary tree, 1/3 and 3/137 and even $1/\pi$. In addidion the tree can be completed by all the "terminating paths" (those with tails 000...). Alas, we have used for construction a countable set of paths (because all real numbers you know or can construct by means of Cantor's diagonal method form a countable set).
This leads to the result that there are not uncountably many paths in the tree, unless they sneak in during / after construction.
[Rainer Rosenthal, "Answer to Dik T. Winter", sci. logic, 12. 6. 2009]

980 Das Kalenderblatt 120209 Der Binäre Baum (103)

```
    0
   1  2
  3 4 5 6
 7 ...
```

RR: Und eine weitere Trivialität, mit Verlaub, ist es, darauf hinzuweisen, dass das Zickzackverfahren auf Dubletten stösst.
WM: Es ist ebenso trivial wie die Tatsache, dass nicht jeder meiner Konstruktionsschritte einen unendlichen Pfad erzeugt, dass aber alle erzeugt werden, wenn $\mathbb{N}$ existiert.
RR: "nicht jeder" ist übertrieben: "keiner" trifft es genauer. {{Jeder Bruch besitzt unendlich viele Dubletten, doch wird in keinem Schritt des Cantorschen Zickzackverfagrens eine unendliche Menge von Dubletten "fertig".}}
WM: Wenn Du das auch hier einsiehst:

$\{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} \cup ... \neq \mathbb{N}$

bin ich zufrieden. Wenn nicht, müsste ich allerdings an Deiner Logik zweifeln, denn dann akzeptierst Du zwar

$\{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} \cup ... = \{1, 2, 3, ...\}$,

aber nicht

$\{0\} \cup \{0, 1\} \cup \{0, 1, 3\} \cup \{0, 1, 3, 7\} \cup ... = \{0, 1, 3, 7, ...\}$.

Das könnte man aber leicht durch eine weitere Bijektion beweisen.

RR: Wenn Du die Abzählbarkeit der Pfade postulierst, musst Du sie auch abzählen können.

WM: Weshalb sollte ich sie abzählen können, wenn ich beweisen kann, dass sie eine abzählbare Menge nicht übertreffen? Wo bleibt denn da der Mathematiker? Muss man alles zeigen können, was man beweist? Frag' doch 'mal nach, ob Zermelo die Wohlordnung der reellen Zahlen schon angegeben hat.

Es geht immer so weiter, im ganzen Baum. Nur kann man mit $\aleph_0$ Knoten eben nicht an mehr als $\aleph_0$ Stellen fortsetzen.)

Also klare Antwort: ich weiß nicht, wann welcher Pfad fertig wird, aber ich kann beweisen, dass in keinem Schritt mehr als einer fertig wird.

RR: Dann hast Du keine Abzählung angegeben, sondern Du glaubst lediglich, dass es eine solche geben müsse, und dass man sie mit viel Geschick auch bewerkstelligen könne.

WM: Ich glaube das so, wie Euklid glaubt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt oder wie man glaubt, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. Ja, genau aus diesem Grund glaube ich das. Das nennt man Mathematik.

RR: Du gibst aber hoffentlich zu, dass dann, wenn jemand auch diese Herkulesarbeit vollbracht und die von Dir visionär entworfene Abzählung der Pfade auch wirklich realisiert hat, die Frage entschieden werden kann, wann welcher Pfad fertig wird?

WM: Nein, denn es gibt diese vollendet unendlichen Pfade überhaupt nicht. Man kann nur auf jedem beliebig lange fortschreiten. Selbstverständlich bleibt alles im Endlichen.

Wir können die vier Anfangsabschnitte vereinigen, also die Menge daraus konstruieren:

$\{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Dies kann in vier Schritten geschehen. Natürlich könnte die Konstruktion auch in einem

$\{1, 2, 3, 4\}$

oder in fünf Schritten geschehen

$\{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Jedenfalls ist nach Bildung der Vereinigung *jede* der Untermengen von { } bis {1, 2, 3, 4} vorhanden, muss also in einem der Schritte entstanden sein. Daher ist die Anzahl der Untermengen gegeben durch die Summe

$\Sigma_{k = 1...4} N_k$

wobei N_k die im k-ten Schritt erzeugten Untermengen sind.

Dies für mathematisch falsch, dubios oder irgendwie bemerkenswert zu halten, gibt es keinen Grund.

Gäbe es überabzählbar viele Pfade, die in abzählbar vielen Schritten konstruiert werden könnten, dann müsste wenigstens ein Schritt dabei sein, in dem überabzählbar viele Pfade onstriert würden. Das ist, wie der Baum zeigt, nicht möglich.

RR: Hmm ... dann kann der Baum ja nicht einmal abzaehlbar viele Pfade haben. Denn es gibt ja keinen Schritt, in dem abzälbar viele Pfade konstruiert werden.

WM: Hmm ... dann kann $\mathbb{N}$ ja nicht einmal abzälbar unendlich viele Elemente enthalten. Denn es gibt ja keinen Schritt, in dem abzälbar unendlich viele viele Elemente konstruiert werden.

RR: Deine Argumentation mit den "Konstruktionsschritten" ist also nicht überzeugend, weil durch die Konstruktionsschritte stets nur endliche Pfade konstruiert werden.

WM: Willst Du nun schließen: Der unendlichen Pfade sind überabzählbar viele, weil es keinen einzigen gibt? [...] Oben werden im zweiten Schritt zum Beispiel {1, 2} und {2} erzeugt.

RR: Inwiefern ist das ein Gegenargument? Die letzten Untermengen gibt es trotzdem erst, sobald das letzte Element aufgezaehlt worden ist, oder?

WM: Da es kein letztes Element / keinen letzten Schritt gibt, kann er nicht aufgezählt werden. Wie Du schon sagtest: Man kann zählen, bis man schwarz wird. Doch mit X Knoten kann man nicht auf X+1 Hochzeiten tanzen, zumindest nicht auf 2^X.

Was also auch immer passiert: Es gibt nur $\aleph_0$ verschiedene Konfigurationen des binären Baums in meiner Abzählung; damit kann es nicht mehr als $\aleph_0$ durch diese Konfigurationen unterscheidbare unendliche Pfade geben.

RR: Gäbe es einen Knoten K_0, der 0.000... zumacht und einen solchen, der 0.111... zumacht, so muss doch die Frage erlaubt sein, welcher dieser beiden Knoten zuerst erscheint in der Aufzählung aller Pfade. Und wenn das geklärt ist, kommt gleich die Frage nach dem Wert des Knotens, der 0.10101010... zumacht.

WM: Es gibt weder einen Knoten, der 0.000... zumacht, noch einen, der 0,111... zumacht, weil es überhaupt nichts gibt, was zumacht und damit $\{1\} \cup \{1, 2\} \cup ... = \mathbb{N}$ falsch ist, wenn man es aktual interpretiert, also als "zugemacht".

Die potentielle Interpretation bleibt richtig, aber da wird eben nichts zugemacht, weder Pfade noch der ganze Baum noch die Menge U. Das war ja Cantors großer Fehler, die Unendlichkeit als vollendet anzunehmen.

Wichtig ist: Es gibt keine unendlich langen Dezimalentwicklungen, die eine reelle Zahl *x* identifizieren, denn bis zu jeder Ziffer gibt es eine Zahl *y*, die damit übereinstimmt. Und mehr als jede Ziffer ist nicht möglich.

Für alle reellen Zahlen $\neq P$ kann man zeigen, dass sie nicht mit *P* identisch sind und ihre Pfade also auch unendlich viele Knoten besitzen, und zwar untehalb der Gürtellinie, die von denen von *P* verschieden sind.

RR: Hast Du das auch einfacher? "Zwei verschiedene reelle Zahlen unterscheiden sich an mindestens einer Dezimalstelle." Wieso müssen sie sich an unendlich vielen Stellen unterscheiden?

WM: Weil nach jeder noch unendlich viele folgen.

[Rainer Rosenthal, "Das Kalenderblatt 091206", de.sci.mathematik, 9. - 11. 1. 2010]

981 Das Kalenderblatt 120210 Der Binäre Baum (104)

The complete infinite Binary Tree consists of $\mathbb{N}$ (= $\aleph_0$) nodes and $\mathbb{N}$ levels.

```
L0          0,
          /    \
L1     0         1
     /   \     /   \
L2  0     1   0     1
   /
L3 0 ...
...
```

Each level *L* of the Binary Tree doubles the set of distinguishable sets of infinite paths. So the complete set of distinguishable sets of paths is $2^{\mathbb{N}}$. Each node of the Binary Tree adds one set to the distinguishable sets of infinite paths. So the complete set of distinguishable sets of paths is $\mathbb{N} + 1$. Therefore $2^{\mathbb{N}} = \mathbb{N} + 1 = \mathbb{N}$

[WM: "The Binary Tree analysed by nodes and levels", sci.logic, 3. 7. 2011]

MB: No infinite path is a member of B_k and no infinite path is a subset of B_k.

WM: What do we learn?

Cantor's list as an ordered set of infinite sets L_k of bits L_{kj} (or nodes):

$L_k = L_{k1}, L_{k2}, L_{k3}, ...$

Define $D_{kk} = 1 - L_{kk}$.

There is always a node D_{kj} that is not an element of L_k.

$\Rightarrow D$ is not in L_1 to L_k.

$\Rightarrow D$ is not in $\cup L_k$.

Binary Tree with finite initial segments B_k:

No B_k with k in $\mathbb{N}$ contains an infinite path P.
There is always a node P_{kj} of P that is not element of B_k.

$\Rightarrow$ P is not in B_1 to B_k.

$\Rightarrow$ P is not in $\cup B_k$.

[MoeBlee, "Balls and vase dyslexia", sci.logic, 17. 7. 2011]

{{Der entscheidende Fehler der konventionellen Mathematikinterpretation lässt sich in wenigen Worten ausdrücken:}}

WM: Eine unendliche Ziffernfolge identifiziert keine Zahl.

RR: Die Zahlen sind durch unendliche Ziffernfolgen identifiziert.

WM: Jede reelle Zahl r ist nur durch eine unendliche Ziffernfolge *im Verein* mit unendlich klein werdenden Potenzen der Basis definiert: $r = \Sigma d_n \cdot 10^{-n}$, weil es dann für jedes $\varepsilon > 0$ eine Potenz 10^{-n} gibt, so dass die Unsicherheit in der n-ten und allen folgenden Stellen kleiner als ε wird. Denn Cauchy und den präcantorialen Mathematikern war ja noch klar, dass man eine Ziffernfolge nur bis zu einer endlichen Stelle definieren kann. {{Es ist nicht möglich, etwas durch unendliche Folgen zu definieren.}} Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Die Ziffernfolge $d_1, d_2, ..., d_n$ definiert keine reelle Zahl.

Cantor zeigt in seinem Diagonalverfahren, dass die Diagonalziffernfolge (d_n) bis zur n-ten Stelle mit keiner Listenzahl übereinstimmt. Daraus schließt man, dass sie mit gar keiner Listenzahl übereinstimmt.

Ich zeige, dass die Ziffernfolge (d_n) bis zur n-ten Stelle keine reelle Zahl definiert. Daraus schließt man aber nicht, dass sie gar keine Zahl definiert, sondern im Gegenteil, Du sagst: die Zahlen sind durch unendliche Ziffernfolgen identifiziert. Daher zieht das Argument der 'endlichen Definition' nicht.

Kurz: Wenn Du diesen Unendlichkeitsglauben bei Ziffernfolgen unbedingt durchsetzen willst, warum dann nicht bei Cantors Liste? In der unendlichen Liste ist die Diagonalzahl eben doch enthalten. Der widersprechende Einzelfallbeweis ist nunmal im Unendlichen nicht valide.

Cantor zeigt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Der Anfangsabschnitt der Diagonalzahl $d_1, d_2, ..., d_n$ unterscheidet sich von jeder Zahl in den ersten n Zeilen der Liste. Daraus schließt man, dass die Diagonalzahl gar nicht in der Liste vorkommt.

Man zeigt ebenfalls: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Der Anfangsabschnitt der Diagonalzahl $d_1, d_2, ..., d_n$ unterscheidet sich von jeder irrationalen Zahl. Daraus schließt man, dass die Diagonalzahl gar keine Irrationalzahl ist.

RR: Bitte bedenke, dass Dein Aufzählverfahren derart schlecht ist, dass mit seiner Hilfe nicht einmal die rationalen Zahlen aufgezählt werden können.

WM: Also nicht einmal alle einäugigen Nashörner. Selbstverständlich ist das ein Beweis dafür, dass ich erst recht nicht alle achtäugigen Nashörner aufzähle.

[Rainer Rosenthal, "Das Kalenderblatt 091206", de.sci.mathematik, 14. - 17. 1. 2010]

RR: Ich erhalte von Dir somit diese beiden Aussagen als wahr:

(1) 0,010101... ist endliche Binärdarstellung

(2) 0,010101... ist keine endliche Binärdarstellung

Macht das Verstehen nicht gerade einfach, finde ich.

WM: Es ist leider auch nicht einfach, weil bisher in der mathematischen Begriffsbildung geschludert wurde. Erst am binären Baum ist mir das vor relativ kurzer Zeit klar geworden. Ich will es hier erklären.

Ein Pfad, der nur n Knoten besitzt, wonach *absolut nichts* folgt, ist ein endlicher Pfad. Eine Ziffernfolge, die nur n Ziffern besitzt, wonach *absolut nichts* folgt, ist eine endliche Ziffernfolge. [...] Da aber die Vereinbarung, dass nur Nullen folgen, den Wert nicht ändert, habe ich schon oft solche Ziffernfolgen wie 0,11000... als endliche Ziffernfolgen 0,11 bezeichnet.

Wenn also die drei Pünktchen stehen, so ist die Definition eine endliche. Stehen sie hinter drei Nullen, so kann man auch die definierte Ziffernfolge cum grano salis als eine endliche interpretieren, im Prinzip ist es aber eine unendliche. Stehen sie hinter drei anderen Ziffern, so ist eine unendliche Ziffernfolge endlich definiert.

Zu Deiner obigen Frage muss ich also antworten: 0,010101... ist eine endliche Darstellung auf Grundlage des Binärsystem und des Zeichens "...". Es ist eine endliche Definition einer unendlichen Ziffernfolge, die jedoch ohne dieses endliche Bildungsgesetz nichts definiert oder identifiziert.

[Rainer Rosenthal, "Das Kalenderblatt 100117", de.sci.mathematik, 21. 1. 2010]

AM: Wenn Du aus den unendlich vielen Binärpfaden, die durch einen Knoten gehen, nur einen Binärpfad auswählst, wie stellst Du dann sicher, tatsächlich für jeden Binärpfad einen Knoten angegeben zu haben? Anders ausgedrückt, wie stellst Du die Surjektivität sicher?

WM: Durch einen Widerspruchsbeweis: Nehmen wir an, es gäbe einen Pfad r, der nicht Bild eines Knotens ist. r müsste ein Pfad sein, der nur aus Knoten besteht, die bereits auf andere Pfade abgebildet sind. (Sonst bliebe ein Knoten von r übrig, der auf r abzubilden wäre.) Für r gilt also:

1) r unterscheidet sich von allen Pfaden, auf die seine Knoten abgebildet sind.

2) Für alle Knoten K_n gilt: r stimmt bis zu dem Knoten K_n mit mindestens einem Pfad überein, auf den der Knoten K_n abgebildet wird.

Das ist ein Widerspruch, jedenfalls wenn r nur aus Knoten K_n mit endlichen Indizes n besteht.

[Andreas Most, "Beweis für Ueberabzaehlbarkeit von R?", de.sci.mathematik, 21. 3. 2011]

982 Das Kalenderblatt 120211 Der Binäre Baum (105)

WM: Man kann Regeln angeben, die unbeschränkte Binärdarstellungen zu konstruieren erlauben, z. B. "1/3" = "0,010101..." . Hier habe ich *zwei endliche* Regeln angegeben. Die unbeschränkte Binärdarstellung habe ich natürlich nicht angegeben, nicht angeben können. Das kann keiner.

WT: Unbeschränkte Binärdarstellungen (genauso wie endliche) lassen sich also in gewissen Faellen durch endliche Regeln ueber einem endlichen Alphabet beschreiben.

Eine solche Beschreibung gestattet (im Prinzip jedenfalls), die n-te Binaerstelle einer solchen Zahl fuer jedes vorgegebene natuerliche n auszurechnen.

Eine solche Zahl wollen wir eine endlich beschreibbare reelle Zahl nennen (kurz: eine e.b. Zahl). $\sqrt{2}$ oder π sind bspw. e.b. Zahlen, da es einen Algorithmus (ein endliches Programm) gibt, der die n-te Binaerstelle dieser Zahlen (im Prinzip jedenfalls) fuer jedes vorgegebene n auszurechnen gestattet, wie man aus den Rekorden fuer π ja weiss.

Es ist klar, dass die Menge aller e.b. Zahlen abzaehlbar ist (da die Menge aller Woerter ueber einem endlichen Alphabet abzaelbar ist, und die Menge aller e.b. Zahlen ist eine Teilmenge davon).

Hier stellt sich nun die interessante Frage: Ist diese Abzaehlung ebenfalls endlich beschreibbar? M.a.W.: Gibt es eine endliche Vorschrift (ein Programm), welche zu einer vorgegebenen natuerlichen Zahl n als Input gerade die endliche Zeichenkette zurueckliefert, die wiederum die n-te e.b. Zahl unserer Abzaehlung beschreibt?

Vergisst man also saemtliche "Moonshine" reellen Zahlen und beschraenkt sich auf die Menge M der e.b. Zahlen, so kommt man mglw. zu dem Schluss, dass M zwar abzeahlbar, aber *nicht* e.b. abzaehlbar ist.

WM: Ich habe für diesen Fall die folgende Liste zur Hand:

0
1

00
01
10
11
000
...

Sie enthält alles, was gesagt, gezählt geschrieben werden kann, selbstverständlich auch alle e.b., Zahlen. Außerdem enthält sie auch alle Zeichen aller endlichen Alphabete und alle endlichen Definitionen, selbstverständlich nur in einer vielleicht noch zu ersinnenden Sprache, aber dafür auch alle Übersetzungsregeln in alle Sprachen. Kurz: Durch diese Liste und ggf. das kartesische Produkt mit endlich vielen weiteren Listen ist alles Sagbare gesagt. Dieses Produkt ist abzählbar. Damit ist keine Abzählung in Deinem Sinne gegeben, aber eine Abschätzung aller e.b. Zahlen nach oben als nicht überabzählbar.

Dass Deine Frage nicht bejaht werden kann, liegt einfach an der Widersprüchlichkeit der Annahme des aktual Unendlichen. Zu jeder Menge e.b. Zahlen kann man eine weiter finden, weil es diese Menge nicht vollständig gibt.

Dass die ganze Abzählerei versagt, habe ich hier in für mich (und zahlreiche andere) jedenfalls überzeugender Weise gezeigt.

1) Die unendlichen Pfade des binären Baums sind isomorph zur Menge aller Binärfolgen der reellen Zahlen im Einheitsintervall.

2) Alle Konfigurationen des binären Baums einschließlich der vollständigen (und selbstverständlich einschließlich aller unendlichen Pfade) entstehen in einer abzählbaren Vereinigung von Konfigurationen nach mehrfach gezeigtem Muster.

3) Da die unendlichen Pfade vorher nicht da waren, nachher aber da sind, müssen auch sie alle in dieser abz. Vereinigung entstanden sein. (Hier geht es nicht um irgendwelche platonische Existenz, sondern um die Anwesenheit in einer Vereinigung.)

4) Anhand der bekannten Konfigurationen kann jeder, der möchte, prüfen, dass niemals zwei Pfade in einer Konfiguration vorhanden sind, die beide in der vorausgehenden fehlten.

5) Will man die Existenz von überabz. vielen Pfaden trotzdem behaupten, so müssen sie "kurz vor dem Unendlichen" entstehen, jedenfalls nach jedem endlich nummerierten Schritt.

6) Wenn das jemand behaupten wollte, dann müsste er diese Möglichkeit auch in Cantors Diagonalargument zulassen. Auch dort können schließlich nur alle endlichen Konfigurationen geprüft werden - genau wie bei meinem Argument. Auch die Diagonalzahl könnte dann "am Ende" in die Liste eingeschwärzt werden.

7) Dann gibt es aber keinen Beweis mehr für Überabzählbarkeit. Also ist diese Idee in jedem Falle selbstwidersprüchlich und unmathematisch.

[Wolfgang Thumser, "Das Kalenderblatt 100117", de.sci.mathematik, 23. 1. 2010]

983 Das Kalenderblatt 120212 Der Binäre Baum (106)

$\Sigma_{k = 1...4}\, N_k$ mit $N_k < 3$ beschränkt die Summe der N_k auf maximal 8.

$\Sigma_{k = 1...\infty}\, N_k$ mit $N_k < 2$ beschränkt die Summe der N_k auf maximal abzählbar unendlich viele.

1) Bis zur *n*-ten Stelle definiert der Pfad nicht seine reelle Zahl. Trotzdem wird geglaubt oder postuliert, dass er nach unendlich vielen Stellen seine Zahl definiert.

2) Bis zur *n*-ten Stelle ist die Diagonalzahl von den Listenzahlen verschieden, hier folgt aber kein "Trotzdem", sondern hier wird die für alle endlichen Stellen beweisbare Tatsache auch nach unendlich vielen Stellen noch akzeptiert.

WM: Jeder Knoten definiert alle seine Vorgängerknoten im Pfad. Deswegen wird ein Pfad durch einen Knoten bestimmt oder gar nicht.

RR: Ein endlicher Pfad wird durch seinen letzten Knoten bestimmt. So weit, so gut. Aber Pfade ohne letzten Knoten werden gewiss nicht durch einen Knoten bestimmt. Was erzaehlst Du da bloss immer wieder fuer Zeug? {{Ich erzähle: Die Eigenschaft "ohne letzten Knoten zu sein" bedeutet nicht, dass solche Pfade dort existieren können, wo keine Knoten sind. Alle ihre Knoten zählen zu den $\aleph_0$ Knoten des Binären Baums. Jeder Knoten macht genau zwei Pfade unterscheidbar - alles Weitere muss tiefer liegenden Knoten überlassen werden (würden an diesen keine Verzweigungen mehr folgen, wären es also nicht binäre, sondern unäre Knoten, so würden auch keine weiteren Pfade mehr abzweigen können. Deswegen gibt es nicht mehr als $\aleph_0$ Pfade.}}

WM: Trotzdem gilt für jeden Knoten im Baum, dass man alle Vorgänger vergessen kann, wenn es um die Identifizierung des Pfades geht. Die Annahme, dass mehr als einer erforderlich wären, ist beweisbar falsch. Du erkennst das leicht, wenn Du ein Beispiel angeben sollst (gern auch in einem unendlichen Pfad) für den Fall, dass zur Identifizierung ein Knoten notwenig wäre, der einen Nachfolger besitzt. Es geht nicht. Deswegen ist die Konsequenz offensichtlich falsch, dass unendliche Pfade durch mehrere Knoten definiert würden, sondern die Konsequenz lautet: unendliche Pfade identifizieren überhaupt keine Zahl!

RR: Die Diagonalzahl ist an jeder Stelle durch die hypothetische Liste der Z_n definiert. Was für Stellen sollen das sein, wo sie "nicht identifiziert" wird?

WM: Die Abwesenheit unendlicher Pfade ist für jede endliche Konfiguration ausgeschlossen. Was für Konfigurationen sollen das sein, wo die unendlichen Pfade ins Spiel kämen?

Aber der binäre Baum wird für diese Überlegung gar nicht benötigt. [...] Die fertige Menge $\mathbb{N}$ enthält mindestens $\aleph_0$ fertige unendliche disjunkte echte Untermengen, wie z. B. alle Mengen aller Potenzen von Primzahlen {2, 4, 8, ...}, {3, 9, 27, ...}, {5, 25, 125, ...}, ... Da die Mengen disjunkt sind, können sie nicht gleichzeitig in der Vereinigung der Anfangsabschnitte

$\{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} \cup ... = \mathbb{N}$ [*]

fertig werden, sondern es werden dazu nach allen Abschnitten, die keine unendliche Untermenge enthalten, noch mindestens $\aleph_0$ verschiedene Anfangsabschnitte gebraucht, von denen jeder mindestens eine unendliche Untermenge enthält.

Jede Zeile Nummer Z_n von Cantors Liste gehört aber zu einem Anfangsabschnitt {1, 2, 3, ..., n}, der noch keine einzige dieser unendlichen Untermengen enthält. Folglich muss die Vereinigung [*] über $\aleph_0$ Abschnitte der Beobachtung und auch der mathematischen Analyse unzugänglich verlaufen. Oder, wenn man denselben Maßsstab wie bei der Diagonalzahl anwenden will: Folglich gibt es diese unendlichen Untermengen gar nicht.

RR: Dass ich behaupten "muss", dass alle Knoten zur Identifikation benötigt werden, tut mir keinesfalls weh. {{Es ist aber leicht ersichtlich falsch.}} Nur bei endlichen Pfaden kann man die Spuren verwischen und sie noch rekonstruieren. Wenn Du bei einem unendlichen Pfad die Spur verwischst, ist der ganze Pfad weg. Da Du ein nur für endliche Pfade gültiges Argument verwendest.

WM: Falsch. Mein Argument, dass jeder Knoten seine Vorgänger definiert, gilt für jeden endlich indizierten Knoten, auch in unendlichen Pfaden.

RR: Mit welchem Knoten wird der Pfad 0,010101... identifiziert?

WM: Genau darum geht es. [...] Kannst Du einen Knoten des Pfades 0,010101... angeben, der einen Nachfolger besitzt und zur Identifizierung des Pfades benötigt wird? Es gibt keinen Knoten, der den Pfad definiert. Das wird schon daraus ersichtlich, dass die Folge 0,1,0,1,... nicht konvergiert. Solche Pfade kann man nur durch eine endliche Definition festlegen.

Und genau genommen, gibt es keinen Knoten, der irgendeinen Pfad definiert, wenn man nicht die Zusatzdefinition angibt: "Jetzt kommen nur noch Nullen."

Du solltest Dir klarmachen können, dass die Menge der einen Pfad definierenden Knoten leer ist. Jeder Knoten an endlicher Stelle definiert ein Intervall. Das Intervall wird zwar immer kleiner, aber es wird für keinen Knoten Null. Das ist genau dasselbe wie bei der Folge $1/n$. Die Werte werden zwar immer kleiner, aber es gibt keine natürliche Zahl, deren Kehrwert Null ist. Selbst wenn Du unendlich lange wartest oder behauptest, dass jedenfalls unendlich viele Knoten ausreichen würden. Es gibt die Zahl 0,010101...., nämlich in Form einer konvergenten Reihe.

FB: Interessant ist übrigens, daß die Zahl (wenn als Binärkommazahl interpretiert) sogar eine rationale Zahl ist und zwar 1/3 (in Dezimalschreibweise).

WM: Ja. Und es wurde auch schon erwähnt, dass diese Zahl als Potenzreihe konvergiert, aber eben nicht als Ziiffernfolge.

FB: 1/3 .01010101010101010101010101010101010101010101010101010101010101010

WM: Es ist nicht schwer, aus der endlichen Vorschrift "1/3" eine beliebig lange Folge von Nullen und Einsen zu erzeugen. Das Kunststück ist das Umgekehrte: Finde aus einer beliebig langen Folge heraus, wie sie fortzusetzen sei.

[Rainer Rosenthal, Frank Buss, "Das Kalenderblatt 100125", de.sci.mathmatik, 26. - 29. 1. 2010]

984 Das Kalenderblatt 120213 Der Binäre Baum (107)

CC: Rainer meinte ganz offenkundig drin sein im Sinne einer Element-von-Relation. Du wechselst dabei immer wieder, was natürlich zu beliebigen Aussagen führt.

WM: Nein! Ich benutze nur Mengen und die Inklusion.

CC: Insbesondere wirst Du sicherlich nicht behaupten wollen, eine Teilmenge der Vereinigung müsse Teilmenge einer der beteiligten Mengen sein.

WM: Selbstverständlich können die Elemente der Untermenge in verschiedenen Mengen der Vereinigung stecken.

CC: Insbesondere auch in unendlich vielen davon, womit eine Reduktion auf eine einzelne nur in Ausnahmefällen möglich ist.

WM: Nicht, wenn es sich um eine lineare Folge handelt, die Du sehr treffend als inklusions-monotone Vereinigung bezeichnest. Da braucht man nämlich niemals zwei oder mehr Untermengen.

CC: Dann führ einen formal sauberen Beweis, dass das in dem Fall anders sein soll.

WM: Was für einen Beweis benötigst Du, um zu erkennen, dass jeder Anfangsabschnitt der natürlichen Zahlen alle vorhergehenden Abschnitte als Untermengen enthält?

1) Jeder endliche Anfangsabschnitt ist die Vereinigung aller seiner Vorgänger.
2) Jeder endliche Anfangsabschnitt ist endlich.
3) Wie viele vereinigt werden, spielt keine Rolle, sofern sie nur endlich sind. Das sind sie nach (2).

CC: Einmal abgesehen davon, dass das kein Beweis ist {{weniges wird in der Mathematik so missbraucht wie die Behauptung, der Sprecher wisse, was unter "ein Beweis", "eine Definition" und "sauber" zu verstehen sei und vor allem was nicht}}, sondern eine Auflistung zu beweisender Aussagen, gewissermaßen das Inhaltsverzeichnis des Beweises, ist Schritt (3) falsch.

WM: (1) ist eine Definition, und (2) ist eine Trivialität, sogar eine Tautologie. Einzig (3) ist eine Folgerung, die davon ausgeht, dass sich Eigenschaften von mathematischen Objekten nicht dadurch ändern, dass sie zu mehreren auftreten. Das setze ich tatsächlich voraus.

CC: Richtig wäre "sofern sie nur endlich viele sind“. {{Hier wird leider wieder einmal der matheologische Glaubenssatz hervorgehoben, die Eigenschaften endlicher Objekte seien von der Multiplizität ihres Auftretens abhängig.}}

WM: Die wesentliche Eigenschaft eines Anfangsabschnittes, alle Elemente seiner Vorgänger zu enthalten, soll also davon abhängen, wie viele man betrachtet?

CC: Die Vereinigung endlich vieler endlicher Anfangsabschnitte ist ein endlicher Anfangsabschnitt. Die Vereinigung unendlich vieler verschiedener endlicher Anfangsabschnitte ist kein endlicher Anfangsabschnitt.

[Christopher Creutzig, "Das Kalenderblatt 100117", de.sci.mathmatik, 31. 1. - 5. 2. 2010]

{{Man erkennt die völlig willkürliche und unmathematische Setzung. Mit demselben Recht ließen sich in der unendlichen Vereinigung endlicher Anfangsabschnitte unendliche natürliche Zahlen behaupten oder in der Folge aller Exponentenmengen der Folge (a_k) mit $a_k = 10^{-1} + ... + 10^{-k}$ eine unendliche Exponentenmenge vermuten - was offensichtlich falsch ist.
Und immer wieder flammt das Unverständnis der Inklusionsmonotonie auf. Da werden Tänzer und Tänzerinnen, rote Kreise und grüne Dreiecke, Transportarbeiter (s. KB120102) oder Marathonläufer bemüht, um die unausweichlichen Konsequenzen einer Linearen Ordnung auf die Quantorenreihenfolge abzumildern:}}

WM: Um einen Pfad von einem anderen zu unterscheiden, bedarf es eines Knotens. Mehr Pfade als Knoten kann man also nicht unterscheiden.
MS: Wir betrachten einen Marathonlauf mit n Haltepunkten, an denen die Läufer etwas trinken können:
Start, P_1, ..., P_n, Ende
Man startet bei Start, endet bei Ende und kann, muß aber nicht, an jedem der P_1, ..., P_n pausieren. Zwei Läufe sind verschieden, wenn der eine mindestens einen Punkt beinhaltet, den der andere nicht beinhaltet. Wie viele verschiedene Läufe gibt es? Wie kann man diese unterscheiden, wo man doch nur n Punkte hat?
WM: Du hast leider das Prinzip der Inklusionsmonotonie noch nicht verstanden. Auf den Pfaden des binären Baums trinkt jeder Läufer an jedem Haltepunkt, bis er sich entscheidet, einen auszulassen. Aber dann lässt er alle folgenden ebenfalls aus. Man kann das als Folge darstellen, wie ich es schon oft hier getan habe (aber wohl noch nicht oft genug):
1000...
11000...
111000...
...
Und damit ergeben sich selbst auf einem unendlich langen Pfad nur abzählbar viele verschiedene Läufe. [...] Außerdem könntest Du erkennen, dass es gar nicht das obige Argument ist, von dem ich mir eine Heilung der durch Transfinites blockierten Denkapparate verspreche. Es ist der offensichtliche Widerspruch in nachfolgenden zwei kurzen Aussagen:
A) Die Diagonalzahl steht in keiner Zeile Nummer n von Cantors Liste. Damit ist sie auch in der Liste (dem Falle für $n \to \infty$) nicht enthalten.
B) Eine Ziffernfolge ist durch keinen Anfangsabschnitt d_1, ..., d_n definiert. Damit ist sie auch im Grenzfall (für $n \to \infty$) nicht definiert.
Du behauptest, dass die Cantor-Liste nichts enthält, was in jeder Zeile auszuschließen ist, die Liste
{1}
{1, 2}
{1, 2, 3}
...
aber alle unendlichen Untermengen von $\mathbb{N}$ enthält, obwohl das für jede Zeile auszuschließen ist.
Viele postulieren, dass eine unendliche Ziffernfolge eine Zahl definiert. Eine Zahl ist aber nicht "sauber" definiert, bevor die letzte Ziffer der Folge erkannt ist.
[Markus Sigg, "Das Kalenderblatt 100125", de.sci.mathmatik, 1. - 3. 2. 2010]

985 Das Kalenderblatt 120214 Der Binäre Baum (108)

Der Binäre Baum ist eine geordnete Knotenmenge.
Ein Pfad ist eine geordnete unendliche Untermenge.

Er stellt eine reelle Zahl binär dar.
Ein endlicher Anfangsabschnitt ist eine endliche Untermenge.
[WM: "Das Kalenderblatt 100328", de.sci.mathematik, 26. 4. 2010]

Immer wieder wurden Formalisierungen wie z. B. die folgenden gebracht, die es indessen niemals zur Grundlage einer weiterführenden Diskussion gebracht haben.

SG: 1) $\cup_{P \in M} P = \cup_{K \in B} K = B$.
4) $\{B_1, B_2, ...\}$ ist abzählbar.
5) $B = \cup_{k \in \mathbb{N}} B_k$.
7) Für jeden unendlichen Pfad $P \in M$ gilt $P \subset B$.
8) B ist abzählbar.
9) Für keinen unendlichen Pfad $P \in M$ gibt es ein $B_k \in \{B_1, B_2, ...\}$ mit $P \subset B_k$.
10) $\Sigma_{k \in \mathbb{N}} N_k \leq \aleph_0$.

WM: Wichtig wäre noch festzuhalten, dass B_k höchstens einen der überabzählbar vielen unendlichen Pfade als Untermenge enthält, der nicht schon im vorhergehenden B_{k-1} enthalten ist. Aber das folgt selbstverständlich leicht aus (9). Und nun möchtest Du wissen, wie man daraus auf
6) M ist abzählbar
kommt. Dabei habe ich Dir doch schon mehr als einmal gesagt, dass man daraus nicht auf "M ist abzählbar" kommt. Sondern ich sagte
B ist die Vereinigung aller B_k.
Wenn M aber trotzdem überabzählbar ist und alle Elemente von M als partiell disjunkte Untermengen in B sind, *dann* kann auch die fehlende Surjektion von der Menge aller natürlichen Zahlen auf die Menge aller reellen Zahlen nicht als Nachweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ gewertet werden. Denn dann gibt es offenbar beim Übergang von allen endlichen natürlichen Zahlen k zur *Menge* aller natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ keine Möglichkeit, das Einschwärzen von einer Diagonalzahl (und sogar überabzählbar vielen Pfaden) auszuschließen.

Dann ist in der unendlichen Vereinigung der einzelnen endlichen Anfangsabschnitte offenbar mehr möglich als in der unendlichen Menge der einzelnen endlichen Anfangsabschnitte - selbst wenn die Menge durch Vereinigung zustande kommt.
[Stephan Gerlach, "Das Kalenderblatt 091206", de.sci.mathematik, 19. 2. 2010]

WM: $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ... \cup B_n \cup ... = B$. K_0

Dabei bezeichnen die Konfigurationen B_n die Anfangsabschnitte der geordneten Knotenmenge des binären Baums in der folgenden linearen Ordnung

K_0
K_1 K_2
K_3 K_4 K_5 K_6
...

Beispiel: $B_3 = (K_0, K_1, K_2, K_3)$ enthält die endlichen Pfade 0 und 0,0 und 0,1 und 0,00.

B: 1. Eine partielle Ordnung (T, <) heißt Baum, wenn für jedes x aus T die Menge $V(x) = \{y \in T \mid y < x\}$ eine Wohlordnung ist. Ist M eine Teilmenge von T, die (bzgl. <) maximal linear geordnet ist, so nennen wir M einen Pfad (Ast, Zweig).

Bei dieser Definition hat der vollständige binäre Baum (B, <) nur Pfade, die unendlich sind. Wenn man nun endliche Pfade betrachten will, dann könnte man den Begriff "Teilpfad" definieren oder aber dazu übergehen, Teilbäume von (B, <) zu betrachten, was Du ja im Wesentlichen durch das Betrachten verschiedener Ebenen von (B, <) schon gemacht hast. Ich nehme 'mal auf eines Deiner Beispiele Bezug:

Z.B. ist der Pfad $\{K_0\}$ eine maximal linear geordnete Menge des Baums $(\{K_0\}, <)$; dieser ist ein Teilbaum von $(B, <)$. Und der Pfad $\{K_0, K_1, K_3\}$ ist eine maximal linear geordnete Menge z.B. des (Teil-)Baums $(\{K_0, K_1, K_3, K_4\}, <)$ von $(B, <)$. Ganz allgemein können wir nun einen Knoten x aus B hernehmen und von dem Pfad $P(x) = V(x) \cup \{x\}$ reden, wenn wir den Teilbaum $(P(x), <)$ von $(B, <)$ betrachten oder zumindest einen Teilbaum von $(B, <)$ betrachten, in dem x ein *Blatt* ist.

Deine Betrachtungsweise lässt sich also mit Hilfe von Teilbäumen nachvollziehen. Und immer sind es diesbezüglich maximal linear geordnete Mengen, d.h. hinsichtlich etwa eines "letzten Knotens" bei endlichen Pfaden wird so ein Pfad durch alle seine Vorgänger identifiziert.
[Bobo, "Das Kalenderblatt 100125", de.sci.mathematik, 3. 2. 2010]

986 Das Kalenderblatt 120215 Der Binäre Baum (109)

WM: Eine Zahl ist nicht definiert, bevor die letzte Ziffer der Folge erkannt ist.

HJ: Was ist denn die "letzte Ziffer der Folge", wenn die Folge unendlich ist?

WM: Es gibt sie nicht. Deshalb kann eine unendliche Ziffernfolge ja auch keine Zahl definieren.

HJ: Mit genau dieser Argumentation möchtest Du auch die Existenz unendlicher Mengen bestreiten, was zeigt, da Du nicht auf dem Boden von ZFC argumentierst. ZFC + Mückenheimsches Endlichkeitsaxiom ist tatsächlich widersprüchlich.

WM: Ich argumentiere hier auf dem Boden von ZFC. Ich akzeptiere unendliche Ziffernfolgen als gegeben. Aber auch in ZFC besitzt eine unendliche Folge keine letzte Ziffer. Die zu einer Folge gehörende Zahl ist aber nicht definiert, solange noch eine Ziffer folgt. Und das ist immer der Fall.

Beachte den Unterschied zur Zahldarstellung, i.e. Potenzreihe: $\Sigma_{n=1,...,\infty}\, d_n \cdot 10^{-n}$. Auch dort gibt es keine Letzte Ziffer d_n, aber es genügt, dass $|\Sigma_{n=1,...,k}\, d_n \cdot 10^{-n} - \Sigma_{n=1,...,\infty}\, d_n \cdot 10^{-n}|$ mit wachsendem k beliebig klein wird.

Für Ziffernfolgen, wie sie in Cantors Liste verwendet werden, muss dagegen *jede* Ziffer stimmen, d.h. die Differenz zur Grenzfolge muss Null sein. Und das kann nicht funktionieren, da es keine letzte, abschließende Ziffer gibt.

AF: Wollen Sie damit behaupten, daß die nichtabbrechende Art für die Darstellung einer Zahl die Nichtexistenz dieses Zahlenobjekts beweist?

WM: Nein. Ich will nur darauf hinweisen, dass man aus einer unendlichen Ziffernfolge niemals auf die damit bezeichnete Zahl schließen kann (denn nach jeder betrachteten Ziffer folgt eine weitere, deren Wert unvorhersehbar ist, wenn man nicht das allgemeine Bildungsgesetz kennt).

Die Zahl π existiert. Sie besitzt eine endliche Definition (sogar zahlreiche). Daraus kann man jede Ziffer der Dezimalentwicklung berechnen. Aus jeder Ziffer der Dezimalentwicklung kann man π nicht erschließen, weil keine Ziffer die letzte ist und damit nicht die abschließende Information enthält.

MW: *e* ist definiert als die Summe der Kehrwerte {{der Fakultäten}} aller natürlichen Zahlen. Wie allgemein bekannt ist, gibt es derer unendlich viele. Also kann man von *e* gar nicht die letzte Ziffer berechnen. Dennoch existiert *e*, und es existiert eine Definition für *e*.

CC: Nicht in Wolfgangs Gedankenwelt.

WM: Doch! Wie kommst Du zu der gegenteiligen Aussage? *e* existiert. Die (korrekte) Definition existiert und bestimmt jede Ziffer der Dezimalentwicklung.

Es existiert eine endliche Definition, weil nämlich eine unendliche Definition keine Definition ist. Ich sagte nur, dass keine unendliche Definition existiert.

MW: π ist geometrisch als das Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines Kreises definiert.

WM: Auch hier gilt wieder: Es existiert eine endliche Definition, keine unendliche.

Man kann aus einer endlichen Definition eine unendliche Ziffernfolge erzeugen. Man kann aber nicht das Umgekehrte tun.
[Hermann Jurksch, Alfred Flaßhaar, Markus Wichmann, Christopher Creutzig, "Das Kalenderblatt 100125", de.sci.mathematik, 5. 2. 2010]

FB: Du meinst also, es gibt 2/9 nicht, nur weil man es nicht in einer Zahlendarstellung mit Komma abschließend aufschreiben kann?
WM: Es gibt 2/9, denn wir beide können uns ja darüber unterhalten ohne es mit einer anderen Zahl zu verwechseln. Wir können auch die Ziffernfolge konstruieren, im Neunersystem oder im Zehnersystem, soweit wir eben können.
[Frank Buss, "Das Kalenderblatt 100226", de.sci.mathematik, 27. 2. 2010]

RR: Könnte es sein, dass Du die Länge der natürlichen Zahlen mit ihrer Anzahl verwechselt? Ihre Längen sind endlich, ihre Anzahl aber unendlich.
WM:
1) Für endlich viele natürliche Zahlen in Unärdarstellung gilt: Eine Menge von M Zahlen enthält mindestens eine Zahl, die aus mindestens M Zeichen besteht.
2) Dies gilt für jede endliche Menge M. Damit sind alle endlichen Zahlen M ausgeschöpft. (Will sagen, offenbar kann man mit endlichen M nicht "mehr" erreichen.)
3) Eine aktual unendliche Menge ist "mehr" als jede endliche Menge: $\aleph_0 > M$.
4) Wie kann aber, wenn alle endlichen M bereits zur Darstellung aller endlichen Mengen verbraucht wurden, noch mehr dargestellt werden? Wie kann mit der Menge aller endlichen M mehr dargestellt werden, als als mit der Menge aller endlichen M?
RR: Ich sehe nicht so recht, welcher dieser beiden Aussagen Du nun eigentlich ernsthaft widersprechen möchtest:
Aussage 1: jede natürliche Zahl hat endliche Länge in der Unitär-Darstellung
Aussage 2: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.
WM: Keiner dieser beiden, aber ich möchte der Aussage widersprechen, dass es eine Menge natürlicher Zahlen gibt, die (im Gegensatz zur Induktion, die zu jeder Zahl n eine Zahl n+1 kennt) nicht weiter vermehrbar ist.
[Rainer Rosenthal, "Das Kalenderblatt 100303", de.sci.mathematik, 4. 3. 2010]

RR:
A1. Jede natürliche Zahl ist in einem Anfangsabschnitt.
A2. Es gibt keinen Anfangsabschnitt, in dem alle natürlichen Zahlen sind.
Mir scheint das verträglich, Dir hingegen nicht. Es zeigte sich, dass ein von Dir als "Beweis" titulierter Satz so formal ordentlich geschrieben werden kann:
$\forall x, y \in \mathbb{N}$: $\forall X, Y$ Anfangsabschnitte:
$(x \in X) \wedge (y \in Y) \Rightarrow ((x \in X) \wedge (y \in X)) \vee ((x \in Y) \wedge (y \in Y))$.
C1. Jeder Bayer wird in die Sterbeliste von Bayern (SvB) eingetragen und gehört dann zu einem Anfangsabschnitt dieser Sterbeliste.
C2. Es gibt keinen Anfangsabschnitt von SvB, in dem alle Bayern eingetragen sind.
Hier haben wir Inklusionsmonotonie der SvB-Anfangsabschnitte und wir haben Korrektheit und Verträglichkeit der C-Sätze.
WM: Sehr gutes Beispiel! Warum gilt Dein C-Satz ohne den letzten Bayern? Weil die Menge der Bayern noch nicht fertig tot ist. Ich bin ja auch noch nicht tot. Und wenn sie fertig tot ist, dann gibt es einen letzten Eintrag, den dann sicher ein Preiß (Preußen = alle Deutschen nördlich von Bayern) macht.
Und wenn Bayern ewig existiert? Dann haben wir potentielle Unendlichkeit. Es gibt zu jedem Zeitpunkt einen letzten Eintrag, aber keinen endgültig letzten. Erhalt' Dich Gott, Du Land der Bayern!

RR: Jetzt sollten wir uns aber bitte daran machen, aus diesem Beispiel Schlüsse zu ziehen. Die C-Sätze sind den A-Sätzen ja recht ähnlich. Die C-Sätze sind korrekt und verträglich. Was ist an ihnen anders als bei den A-Sätzen, die Du ja als korrekt aber nicht verträglich bezeichnet hattest?
WM: Die Sterbeliste hat immer einen letzten Eintrag. Es gibt also immer einen endlichen Anfangsabschnitt, in dem alle Gestorbenen enthalten sind. *Das* ist genau mein Argument.
Es gilt also für Dein Beispiel:
$\forall\, x, y \in \mathbb{N}$: $\forall\, X, Y$ Anfangsabschnitte:
$(x \in X) \wedge (y \in Y) \Rightarrow ((x \in X) \wedge (y \in X)) \vee ((x \in Y) \wedge (y \in Y))$.
Und Dein Argument, wonach es keinen Anfangsabschnitt gibt, der alle Verstorbenen enthält, ist falsch.
[Rainer Rosenthal, "Das Kalenderblatt 100125", de.sci.mathematik, 13. 2. 2010]

987 Das Kalenderblatt 120216 Der Binäre Baum (110)

Die Konfigurationen B_j des Binären Baums sind folgendermaßen erklärt:

B_0 =

K_0

B_1 =

K_0
/
K_1

B_2 =

K_0
/ \
K_1 K_2

B_3 =

K_0
/ \
K_1 K_2
/
K_3

...

B_j =

...
... K_j

...

Sie bilden eine Folge oder Liste. Das bedeutet, der ganze Binäre Baum kann mit abzählbar vielen Schrittten konstruiert werde. Und damit werden auch alle Pfade des Baums in abzählbar vielen Schritten konstruiert.
In jedem Schritt kommt ein endlicher Pfad hinzu. In keinem Schritt kommt mehr als ein unendlicher Pfad hinzu, denn die unendlichen Pfade sind Grenzwerte von Folgen und eine Folge kann per Definition nicht mehr als einen Grenzwert besitzen, muss aber mindestens ein Folgenglied besitzen. Folglich ist die insgesamt im Baum vorhandene Menge von endlichen Pfaden abzählbar und die insgesamt im Baum vorhandene Menge von unendlichen Pfaden höchstens abzählbar.

Und wenn nach jedem endlichen Schritt doch noch überabzählbar viele Pfade eingeschwärzt werden, dann kann derselbe Prozess für die einzelne Diagonalzahl in Cantors Liste nicht ausgeschlossen werden.
[WM, "Das Kalenderblatt 100328", de.sci.mathematik, 22. 4. 2010]

WM: Es gibt eine Konstruktion des Binären Baums in Form einer Liste. Und es gibt zwei weitere Fakten:
1) In keiner Zeile der Liste gibt es mehr als zwei Pfade, die in der vorhergehenden fehlten.
2) In allen Zeilen der Liste gibt es alle Pfade, auch alle unendlichen Pfade.
B: Solange Du Deine Aussage 2) weiterhin als Fakt hinstellen möchtest erübrigt sich hier eine weitere Diskussion.
WM: Würdest Du behaupten, dass in den Nummern, die die Cantorche Liste nummerieren, irgendeine von denen fehlt, die zu der Menge aller Potenzen von 3 gehören, oder irgendeine fehlt, die zu der Menge aller Potenzen von 4711 gehören?
Wenn nicht, so enthält die fertig nummerierte Cantorsche Liste in allen ihren Zeilennummern auch alle Untermengen der natürlichen Zahlen.
Würdest Du dem zustimmen? Obwohl jede natürliche Listennummer endlich ist?
Und man könnte ebensogut mit Anfangsabschnitten nummerieren, von denen jeder endlich ist.
B: Vielleicht wolltest Du aber mit 2) aber auch den ω-Schritt ausdrücken?
WM: Nur ist das leider kein einzelner Schritt. Es sind in Anbetracht der obigen Erörterungen mindestens so viele Schritte wie es disjunkte Untermengen der natürlichen Zahlen gibt. [...]
HJ: Du gibst zu, daß die Menge der unendlichen Pfade nicht abzählbar ist.
WM: Ich gebe zu, dass sie durch eine abzählbare Menge majorisiert wird.
HJ: Die Konstruktion einer Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und der Menge der unendlichen Pfade bleibst Du wieder schuldig. Deine Behauptung der Gleichmächtigkeit dieser Mengen beweist Du nicht.
WM: Ich konstruiere eine Majorante. Das macht man so in der Mathematik des Unendlichen.
1) Die Anfangsabschnitte von $\mathbb{N}$ bilden eine streng inklusionsmonotone Folge.
2) Die Vereinigung aller Anfangsabschnitte enthält alle natürlichen Zahlen als Untermenge.
3) Kein Anfangsabschnitt enthält alle natürlichen Zahlen als Untermenge.
RR: [...] weil aus dem Beispiel nirgends klar wird, welche der drei Aussagen Dir missfällt.
WM: Wenn einer zwei verschieden lange Beine hat und sich darob grämt: Grämt er sich dann um das eine oder das andere?
Es ist keine der drei Regeln, die mir missfällt. Sie passen nur nicht alle drei zusammen.
Eine inklusionsmonotone Folge enthält nur, was das letzte Glied enthält. Wird angenommen, dass es kein letztes Glied gibt, dann folgt daraus, dass es nicht alle Folgenglieder gibt, dass also die Folgenglieder keine statische Menge im Sinne der ML bilden.
Du behauptest zwar, dass es alle Anfangsabschnitte gibt, behauptest aber gleichzeitig, dass es aber keinen gibt, der alle Anfangsabschnitte enthält.
Und gebeten, diese Behauptung - wie in der Mathematik üblich - zu beweisen, indem Du wenigstens zwei nennst, weigerst Du Dich (weil Du es natürlich nicht kannst, das weiß ich wohl), gibst Deinen Fehler aber nicht zu, sondern behauptest, dass es unendlich viele Anfangsabschnitte gibt, die nicht alle in einem Anfangsbaschnitt enthalten sind. Und weil das Unendliche so verlockend einfach und unlogisch ist, behauptest Du, dass die einfache Folgerung [*] falsch wäre, wenn unendlich viele Abschnitte betroffen sind, obwohl sie gar nichts mit der Anzahl der Abschnitte zu tun hat, sondern für jedes Paar von Abschnitten gilt.
Seien a, $b \in \mathbb{N}$ und A, $B \subset \mathbb{N}$ zwei Anfangsabschnitte, dann gilt:
$(a \in A \wedge b \in B) \Rightarrow (a, b \in A \vee a, b \in B)$ [*]
Und wie gesagt, das hat nichts damit zu tun, wie viele Anfangsabschnitte vereinigt werden. Es hat überhaupt nichts mit Vereinigungen und Mengen zu tun. Jede Menge von natürlichen Zahlen, die ohne höhere Einsicht und tieferen Glauben verwendet werden können passt in einen Anfangsabschnitt.

RR: Du lässt im Dunkeln, welche der drei Aussagen denn nun falsch sein soll. Wenn Dein Beispiel darüber Aufschluss gibt, dann nenne doch bitte die Nummer der Aussage, mit der Du nicht einverstanden bist.

WM: Entweder gibt es alle natürlichen Zahlen. Das hat Cantor mal so einfach angenommen, weil ihm nicht bewusst war, dass diese Annahme sich sofort als falsch herausstellt, wenn man Anfangsabschnitte heranzieht. Denn die Ausrede, dass die Inklusionsmonotonie für unendliche Vereinigungen versagt, ist doch zu billig, schon deswegen, weil sie auch ohne Vereinigungen versagen müsste. 1) ist vollkommen richtig. 3) ist damit unvereinbar.

Im Grunde hat Cantor nur die Quantoren vertauscht. Aus der richtigen Aussage "Für alle *n* existiert ein Abschnitt *A* mit *n* in *A*" hat er die falsche gemacht "Es existiert ein Abschnitt *A* so dass für alle *n* gilt *n* in *A*" und diesen Abschnitt hat er dann en passant ℕ genannt.

[Bobo, Hermann Jurksch, Rainer Rosenthal, "Das Kalenderblatt 100125", de.sci.mathematik, 8. 2. 2010]

988 Das Kalenderblatt 120217 Der Binäre Baum (111)

WM: Wenn ein Pfad P_0 in einer Pfadmenge *P* nicht enthalten {{und nicht anderweitig, also durch eine endliche Definition definiert}} ist, so gibt es mindestens einen Knoten von P_0, der zu keinem der Pfade der Pfadmenge *P* gehört.

CC: Verständlich formuliert, nur leider nicht nur ohne Beweis, sondern auch noch völlig falsch. Das Lemma gilt nicht einmal für endliche Pfade.

WM: Endliche Pfade gibt es nicht im unendlichen binären Baum.

Aber ein ähnliches und noch einfacheres Beispiel ist die Menge aller Einserpfade mit Tails aus Nullen: 0,1000...; 0,11000...; 0,111000... usw. Der Pfad 0,111... besteht nur aus Knoten, die in der Menge der aufgelisteten Pfade sind. Also unterscheidet er sich nicht durch einen Knoten von den Pfaden dieser Menge. Durch was unterscheidet er sich aber von allen?

Es geht nicht darum, dass er sich von jedem fest gewählten an einer Stelle unterscheidet. Ich möchte wissen, wie er sich von allen unterscheidet, denn alle sind im Baum und existieren zeitunabhängig nach den Grundsätzen der ML.

Entweder erkennt man, dass es diesen Pfad nicht gibt, oder man glaubt an die Seelen der Pfade. Ich bevorzuge ersteres.

[Christopher Creutzig, "Das Kalenderblatt 100326", de.sci.mathematik, 31. 3. 2010]

AG: Einen unendlichen Pfad kann ich nur durch die unendlich vielen Knoten, die zu ihm gehören, identifizieren (also von *allen* anderen unendlichen Pfaden unterscheiden),

WM: Diese Aussage ist falsch. Kein Knoten ist notwendig oder hinreichend, um einen unendlichen Pfad zu identifizieren.

AG: Ich habe nicht behauptet, dass ein Knoten hinreichend ist. I.A. benötigt man alle Knoten eines Pfades, und die sind dann logischerweise alle notwendig

WM: Weder i. A. noch logischerweise sind alle Knoten nötig. Du kannst leicht erkennen, dass die ersten *n* Knoten nicht nötig sind, und auch berhaupt nicht von Vorteil, denn der Knoten *n*+1 enthält alle Information über seine Vorgänger.

CC: Nein, man benötigt eine beliebige unendliche Teilmenge. Die muss nicht einmal coendlich sein.

WM: Zeige mir zwei Elemente der behaupteten Teilmenge, die man benötigt,

CC: Ich habe nirgendwo behauptet, es gäbe irgendein einzelnes Element, was nötig ist.

WM: Dann stimmst Du sicher mit mir überein, dass aus der Entbehrlichkeit den *n*-ten Elementes auch die Entbehrlichkeit des *n*+1-ten Elementes folgt. Und diese Schlusskette höret nimmer auf, umfasst also jedes Element an endlicher Stelle.

Mein Gegenbeweis: Für alle m, n in $\mathbb{N}$ gilt: Anfangsabschnitt a_n ist in Anfangsabschnitt a_m oder umgekehrt. Also wird a_n nicht benötigt oder a_m wird nicht benötigt.

CC: Richtig. Das folgt übrigens auch aus dem, was ich schrieb.

WM: Aber das, was Du schriebst, folgt nicht aus dem, was dort steht.

Um die Entbehrlichkeit aller endlich indizierten Elemente zu verstehen, muss man entweder an das omegate Element glauben, oder wissen, dass alle Elemente entbehrlich sind, weil das einzig Unentbehrliche eine endliche Definition ist, woraus dann alle Elemente folgen. Oder man akzeptiert die potentielle Unendlichkeit, wo immer ein letztes Element existiert, das natürlich nicht entbehrlich ist, das jedoch keine feste Zahl ist, sondern über alle Schranken wachsen kann.

Das sind die drei Alternativen, wobei die erste aber keine Mathematik enthält - oder besser: wobei die Mathematik aber nicht die erste Alternative enthält.

Hier haben wir einen Gegensatz zur potentiellen Unendlichkeit. Da existiert jeweils ein letzter Knoten. Der darf natürlich nicht entfernt werden.

AG: Welcher letzte Knoten existiert denn da? Wie kann ich den identifizieren?

WM: Garnicht. Aber da Du Knoten mit kleinem n identifizieren kannst und Knoten mit Index ω nicht zur Mathematik gehören, muss irgendwo dazwischen ein letzter Knoten sein, der natürlich in seinem Index nicht festgelegt ist, sondern, wenn Du meinst, Du hast ihn, schon längst woanders sitzt.

Dieser Unterschied kann übrigens dazu dienen, aktual und potentiell zu unterscheiden. Wenn Du aus einer Folge alle endlichen Anfangsabschnitte entfernen kannst, ohne den Grenzwert zu verändern oder ganz zu verlieren, dann ist sie aktual unendlich (denn es sind ja angeblich mehr Glieder vorhanden, als jeder endliche Anfangsabschnitt enthält).

AG: Das geht nicht. Wenn Du *alle* Anfangsabschnitte entfernst bleibt nichts mehr brig.

WM: In der Tat. Trotzdem kann man für jeden natürlichen Index sehen, dass man alles bis zu ihm entfernen kann. Findest Du nicht, dass da ein Widerspruch sich auftut?

Er wird aber ganz leicht gelöst durch die Erkenntnis, dass eine aktual unendliche Folge als Aufzählung sowieso nichts definiert. Die Folge wird durch eine endliche Definition definiert, z. B. $a_n = 1/n$. Und deswegen kannst Du 1/2 oder 1/1000 oder auch alle Glieder der Aufzählung entfernen. Das ändert überhaupt nichts.

AG: In der Mathematik glaubt man nicht, man beweist.

WM: Zum Beispiel, dass aus jeder unendlichen Aufzählung der Glieder einer Folge jedes endlich indizierte Glied entfern werden kann. Aber da Du den Beweis nicht glaubst, hat die Mathematik wohl doch mit Glauben zu tun.

AG: Willst Du nur den Pfad 0,111... kappen oder alle Knoten, die zu diesem Pfad gehören? Das ist ein wesentlicher Unterschied.

WM: Nur wenn man glaubt, dass Pfade Seelen haben. Die Knochen, äh Knoten sind die Hardware.

[Adolf Göbel, Christopher Creutzig, "Das Kalenderblatt 100310", de.sci.mathematik, 22. - 31. 3. 2010]

WM: Die Liste Z_n führt zum Widerspruch. Nach jeder Zeile folgen nämlich noch unendlich viele Zeilen.

MK: In der n-ten Zeile Z_n steht die Zahl n, sonst nichts. Ich beschreibe eine beliebige und damit jede Zeile.

WM: Dann beschreibe doch einfach mal eine Zeile, vor der schon alle Vielfachen von 3 stehen, aber noch nicht alle Vielfachen von 5 oder meinetwegen auch umgekehrt; ich kenne mich in den aktualen Sphären nicht so aus. Es muss aber $\aleph_0$ solcher Zeilen geben, wenn es alle Untermengen von $\mathbb{N}$ gibt und diese tatsächlich disjunkt sind, also nicht durch Hinzufügen eines einzigen Schlusssteins alle fertig werden.

[Michael Klemm, "Das Kalenderblatt 100128", de.sci.mathematik, 8. 2. 2010]

989 Das Kalenderblatt 120218 Der Binäre Baum (112)

AS: Für jede Menge M, bestehend aus m Elementen aus der Klasse $\mathbb{N}$ (ohne 0) gilt: Es gibt mindestens ein $X \in M$ für das gilt: $X \geq m$.

Folglich müsste eine Menge $M = \mathbb{N}$ ein Element $X \geq \text{card}(\mathbb{N})$ enthalten.

RR: Das ist fein formuliert. Ist es auch richtig? Welche Ableitungsregel steckt hinter Deinem "folglich"?

WM: Das ist eine Schlussfolgerung, die mir so klar erscheint, dass ich nicht begreife, wie man sie übersehen kann. {{Zugegeben, das ist etwas polemisch formuliert, denn der Trick ist eigentlich leicht durchschaubar: Die Werte der natürlichen Zahlen sind potentiell unendlich, also alle sind endlich, wenn auch ohne obere Schranke. Da gibt es keinen, der größer als alle anderen wäre. Die Anfangsabschnitte sind aber aktual unendlich. Da gibt es einen, der größer als alle anderen ist, nämlich $\mathbb{N}$ höchstselbst.}} Jede natürliche Zahl n in Unärdarstellung endet nach n Schritten, ist also "endlich entscheidbar". Das wird sehr anschaulich für jede natürliche Zahl der Liste {{der Unärdarstellungen}}

1
11
111
...

Diese Liste enthält nicht die nicht endlich endscheidbare Zahl 111... = ω. Die aktual unendliche Liste selbst wäre aber, wenn sie existierte, nicht endlich entscheidbar. Dies würde dem einfachen Satz oben widersprechen.

Doch wie lautet die Alternative? Dann hätte man ja mit demselben Material, das alle endlichen Mengen n definiert, auch die unendliche Menge ω definiert. Dann würde die unendliche Menge aber nichts anderes sein als die Summe der endlichen Mengen, denn etwas Zusätzliches kann man objektiv unterscheidbar in Unärdarstellung nur mit Hilfe eines "mehr" an Symbolen darstelllen, da ein "anders" an Symbolen in Unärdarstellung nicht möglich ist.

Wenn aber die unendliche Menge nichts anderes als die Summe der endlichen Mengen ist, dann gilt das auch für die Pfade im binären Baum, und das beweist dann die Abzählbarkeit aller Pfade.

RR: So ganz sauber kann's nicht sein, weil es keine unendlich großen natürlichen Zahlen gibt. {{$\mathbb{N} \Rightarrow X$ und $\neg X$ ist doch ein recht sauberer Beweis für $\neg\mathbb{N}$, es sei denn man hält $\mathbb{N}$ für sakrosankt und nimmt dafür eine gewerbsmäßige Vertauschung unterschiedlicher Unendlichkeiten in Kauf, was besonders peinlich wirkt, wenn die v. Neumannsche Konstruktion zugrundegelegt wird, die ja gerade Anfangsabschnitte benutzt! Aber zurück zum Binären Baum:}}

WM: Ob ein Pfad P zu der Menge A gehört oder nicht, ist aus der Konstruktion (Überdeckung) nicht erkennbar. Daher sind eventuelle weitere Pfade nicht aufgrund von Knoten zu identifizieren. Folglich kann deren Überabzählbarkeit auch nicht anhand von Knoten nachweisbar sein.

[Albrecht Storz, Rainer Rosenthal, "Das Kalenderblatt 100310", de.sci.mathematik, 12. 3. - 12. 4. 2010]

WM: Alle endlichen Anfangsabschnitte des binären Baums können mit abzählbar vielen unendlichen Pfaden aus einer Menge A überdeckt werden. Ich will auch gern solche Pfade fest wählen. ich sage Dir aber nicht, welche das sind, um Dir deutlich vor Augen zu führen, dass man sie an ihren Ziffern bzw. endlichen Anfangsabschnitten nicht erkennen kann.

Ich brauche nur jeden endlichen Anfangsabschnitt zu jedem Knoten. Als Tails wähle ich 000..., wenn ich mag, vielleicht aber auch 101010... oder etwas anderes. Ob ein Pfad P zu der Menge A gehört oder nicht, ist aus der Konstruktion (Überdeckung) nicht erkennbar.

KS: Aber damit gestehst du doch ein, dass dein Argument nicht funktioniert. *Deine* Aufgabe in *deinem* Argument ist es zu zeigen, dass ein gegebener Pfad *P* zu deinem *A* gehört, denn *du* behauptest doch *A* wäre komplett. Wenn du dazu nicht in der Lage bist, schlägt dein Argument fehl, denn du kannst nicht ausschliessen, dass *P* nicht drin ist.

WM: Ich behaupte, dass Du nicht unterscheiden kannst, ob *P* zu meiner Society gehört. Es ist allein meiner reinen Willkür überlassen, ob ich den Daumen hebe oder senke, wenn Du geraten hast. Das ist aber keine Mathematik! Denn die lehrt die Verwendung von objektiven Kriterien.

Ich kann ausschließen, dass irgendein unendlicher Pfad existiert. Es gibt weder einen in *A*, noch *P* noch sonst dergleichen. Es gibt schlicht keine aktual unendlichen Pfade, obwohl ich mich redlich bemühe, sie zu verwenden. Sie scheitern an Dir. Denn Du bist unfähig, sie in die Mathematik einzuordnen. Dort verwendet man Ziffern. Das ist, was zu beweisen war. Die Elemente von *A* sind nicht durch Ziffern, Knoten, endliche Anfangsabschnitte definiert. Es gibt keine unendlichen Tails. Es gibt endliche Anfangsabschnitte. Und das ist alles.

KS: Entweder du wählst tatsächlich Pfade, dann kann man es erkennen.

WM: Nein, das kann man nicht. Stell DIr doch vor, ich hätte wirklich Pfade gewählt. Woran wolltest Du sie erkennen?

KS: Oder du assoziierst Tailmengen zu endlichen Anfangsabschnitten, dann wählst du keinen Pfad, also kann ein solcher auch nicht erkannt werden.

WM: Selbstverständlich ist jeder endliche Anfangsabschnitt mit einem Tail wie 000... ein unendlicher Pfad. Was sollte ihn denn als solchen disqualifizieren?

KS: Sobald du dich einmal festgelegt hast, hast du verloren, stimmst du überein?

WM: Sobald ich zugebe, Pfade {{im Binären Baum}} durch mehr als endliche Anfangsabschnitte definieren zu können, habe ich die konkrete Mathematik verloren und bin zum Matheologen geworden. Als Physiker glaube ich nicht an die Seelen von Menschen und als Mathematiker nicht an die Seelen von Zahlen. Zumal ja auch alle Matheologen nicht müde werden zu betonen, das ihre Zahlen nur mit endlich indizierten Stellen ausgestattet sind. Die Wahrheit dieses Anspruchs will ich jetzt testen.

KS: Wenn man dir alle endlichen Anfangsabschnitte des BB vorlegt, könnten die einzelnen endlichen Anfangsabschnitte von *P* allesamt aus Pfaden ≠ *P* stammen, d.h. *P* war nicht beteiligt an der Konstruktion der vorgelegten endlichen Anfangsabschnitte. Trotzdem sind mindestens die endlichen Anfangsabschnitte von *P* enthalten. In diesem Fall wäre es dann falsch, *P* zu rekonstruieren.

WM: Folglich enthält *P* mehr Information als aus seinen endlichen Anfangsabschnitten extrahiert werden kann. Oder mit der gehörigen Präzision formuliert: Wenn es mehr als abzählbar viele Pfade im binären Baum gibt, dann muss jeder Pfad mehr Information enthalten, als aus seinen endlichen Anfangsabschnitten allein extrahiert werden kann.

Ja, darauf können wir uns einigen. QED würde ich sagen, wenn ich Euklid wäre, aber lateinisch spräche, was jedoch eine in jeder Hinsicht absurde Annahme ist.
[Kruno Sever, "Das Kalenderblatt 100328", de.sci.mathematik, 1. - 14. 4. 2010]

990 Das Kalenderblatt 120219 Der Binäre Baum (113)

AF: Mathematiker (der reellen Analysis) wissen heute mehr als Cauchy (mit allem Respekt vor dem Altvater der Analysis). [...] Meine Maßstäbe orientieren sich am Strukturverständnis und infolge dessen am folgerichtigen Schließen, so wie es uns die Natur in langer Entwicklungszeit hat antrainieren und vererben können.

WM: Ein Mathematiker sollte sich nicht dazu verleiten lassen, darin {{in einer unendlichen Ziffernfolge}} eine verborgene Zahl zu vermuten.

AF: Na und, es gibt ausreichend starke Werkzeuge, um Eigenschaften der Grenzwerte zu bestimmen, ohne jene jemals anfassen zu müssen. Taufen kann man sie trotzdem. Die naturwissenschaftliche/technische Praxis lebt davon.

WM: Versuche doch einfach einmal, den Grenzwert einer unendlichen Ziffernfolge, von der Du aber ab irgendeinem n_0, wie groß es auch sei, nicht mehr weißt, wie sie weitergeht, zu bestimmen. Das dürfte die Frage am ehesten klären. {{Wichtige Erkenntnis: Zahlen sind nicht durch unendliche Ziffernfolgen identifizierbar. Zur "sauberen" Identifikation ist der letzte Buchstabe des Namens erforderlich!}}
[Alfred Flaßhaar, "Das Kalenderblatt 100314", de.sci.mathematik, 13. 3. 2010]

AG: Einen unendlichen Pfad kann ich nur durch die unendlich vielen Knoten, die zu ihm gehören, identifizieren (also von *allen* anderen unendlichen Pfaden unterscheiden). Zur Unterscheidung von anderen vorgegebenen Pfaden genügen natürlich endlich viele Knoten.
WM: Ich behaupte, Du kannst einen unendlichen Pfad gar nicht identifizieren. Nimm zum Beispiel den Pfad 0,111... Alle seine unendlich vielen Knoten sind in der Menge aller Pfade der Form 0,111...111000... (jeder mit endlich vielen Einsen) enthalten. Der Baum besitzt demnach genau dieselbe Struktur, ob der Pfad 0,111... darin ist oder nicht. Du kannst also nicht bestimmen, ob ein Dir vorgelegter unendlicher binärer Baum den Pfad 0,111... enthält oder nicht.
AG: Nochmal: Es ist für mich nicht offensichtlich, dass Du alle Knoten mit nur abzählbar unendlich vielen Pfaden erreichen kannst.
WM: Schau es Dir bitte hier an:
http://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/GU/GU12c.PPT#363,35,Folie 35
Das kann man beliebig fortsetzen. Es findet kein Ende, gilt also für den unendlichen Baum.
AG: Ich sehe, dass Du dort endliche Pfade konstruierst. Unendliche Pfade, die den unendlichen binären Baum ja erst wirklich darstellen, sehe ich dort nicht. Genau genommen hat das mit dem unendlichen binären Baum also nichts zu tun. Wie konstruierst Du so unendlich viele unendliche Pfade?
WM: Ich kann sie konstruieren, indem ich sie angebe, z. B. den Pfad für $1/\pi$ oder den Pfad für 1/2 usw., oder ich kann Pfade benutzen, von denen ich nur weiß, dass sie den speziellen Knoten enthalten und dass sie niemals enden. Das ist die eleganteste Methode. Sie erinnert an Cantor ganz beliebig aufgebaute Liste.
[Adolf Göbel, "Das Kalenderblatt 100310", de.sci.mathematik, 24. 3. 2010]

KS: Wenn man mal natürliche Zahlen mit Addition und Multiplikation als gegeben annimmt, kann man auf mindestens zwei verschiedene Weisen (Cauchy-Folgen, Dedekind-Schnitte) einen solchen Körper konstruieren.
WM: Mit Zahlen, die nicht durch Ziffern voneinander unterscheidbar sind.
KS: Gehen wir davon aus, dass die Menge der reellen Zahlen existiert, als vollständig angeordneter Körper. Würdest du hier sagen, dass $\sqrt{2}$ nicht durch "Ziffern" von anderen reellen Zahlen unterscheidbar ist?
WM: Ja. Die Zahl $\sqrt{2}$ existiert. Aber sie existiert durch eine endliche Definition. Den Vogel schießen π und der goldene Schnitt ab. Jedenfalls gibt es für sie sehr viele endliche Definitionen. Dadurch existieren sie.
KS: Gib doch mal ein eigenes anschauliches Beispiel.
WM: Die Reihen von Gregory-Leibniz, Vieta, Wallis, Euler: Sie alle geben mit wenigen Buchstaben eine Anleitung, wie alle endlichen Anfangsabschnitte von π berechnet werden können. Aus der Ansicht einer Folge von endlichen Anfangsabschnitten hingegen kannst Du nichts außer einem Zielbereich (Intervall) erkennen und vielleicht vermuten, dass auf die prominenteste Zahl, die Du in diesem Intervall kennst, gezielt wird.
KS: Was interessiert mich, wie Cantor reelle Zahl definiert hat? Was auch immer er sich gedacht hat, seine Aussagen lassen sich über modernere Sichtweisen (zum Beispiel über ZFC) legitimieren.
WM: Man könnte ebensogut den Vatikan damit beauftragen, die Existenz des Teufels zu legitimieren.

Wenn Du nicht durch unendliche Folgen von endlichen Anfangsabschnitten identifizierbare Zahlen akzeptierst, ihre mathematische Existenz aber behauptest, dann musst Du sie doch irgendwie anders identifizieren. Damit landest Du bei endlichen Definitionen und bei abzählbaren Mengen. Oder welche Möglichkeit siehst Du da noch?

KS: Hatte ich schon mal erwähnt: die Menge der reellen Zahlen wird durch ihre Eigenschaften definiert (Kurzform: vollständig angeordneter Körper).

WM: Es geht nicht um *die Menge*, sondern um die *Elemente*. Gibt es überabzählbar viele unterscheidbare Zahlen oder nicht? Zahlen werden durch Namen identifiziert. Gibt es unnennbare Namen?

CC: Jede reelle Zahl (einzeln) ist durch ihre (unendliche) Folge von Dezimalziffern eindeutig festgelegt, das habe ich nie bestritten. Die Menge der endlichen Anfangsabschnitte aller rationalen Zahlen und die Menge der endlichen Anfangsabschnitte aller reellen Zahlen sind allerdings identisch.

WM: Auch in der Menge aller endlichen Anfangsabschnitte einer Zahl sind ausschließlich endliche Anfangsabschnitte rationaler Zahlen. Das bedeutet, ES gibt irrationale Zahlen nur als Folgen bzw. Grenzwerte von Folgen von endlichen Anfangsabschnitten.

Da ES nur abzählbar viele unendliche Folgen von endlichen Anfangsabschnitten gibt, wie der Binäre Baum mit der abzählbaren Überdeckung aller Pfade (= Folgen) beweist, und da jede Folge mindestens ein Glied und höchstens einen Grenzwert besitzt, ist die Menge der Grenzwerte rationaler Folgen abzählbar.

[Kruno Sever, Christopher Creutzig, "Das Kalenderblatt 100328", de.sci.mathematik, 7. 4. - 13. 5. 2010]

GG: Her damit! Zeig uns diesen "längeren Beweis". Hic Rhodus, hic salta.

WM: Die Konfigurationen B_k des Binären Baums sind folgendermaßen erklärt: {{s. KB120216}} Sie bilden eine Folge. Das bedeutet, der ganze Binäre Baum kann mit abzählbar vielen Schrittten konstruiert werde. Und damit werden auch alle Pfade des Baums in abzählbar vielen Schritten konstruiert (sofern sie aufgrund von Knoten im Baum adressierbar sind und nicht nur aufgrund von Knoten im Gehirn.)

In jedem Schritt kommt ein endlicher Pfad hinzu. In keinem Schritt kommt mehr als ein unendlicher Pfad hinzu, denn die unendlichen Pfade sind Grenzwerte von Folgen und eine Folge kann per Definition nicht mehr als einen Grenzwert besitzen, muss aber mindestens ein Folgenglied besitzen. Folglich ist die insgesamt im Baum vorhandene Menge von endlichen Pfaden abzählbar und die insgesamt im Baum vorhandene Menge von unendlichen Pfaden höchstens abzählbar.

[Gus Gassmann, "Das Kalenderblatt 100326", de.sci.mathematik, 27. 3. 2010]

991 Das Kalenderblatt 120220 Der Binäre Baum (114)

RR: Es ist ja gerade das Charakteristische an einer überabzählbaren Menge, dass ihre Elemente eben nicht mit abzählbar vielen Namen unterschieden werden können. Wieso muss man Dir eigentlich nach vielen Jahren solche Basics erläutern?

WM: Weil es das ebenso Charakteristische und für Zahlen noch viel Grundlegendere ist, dass man sie unterscheiden kann. Ununterscheidbare Zahlen sind etwa so gut wie ununterscheidbare Unterscheidungsmerkmale.

RR: Überabzählbar viele Zahlen kann man nicht abzählen. Das ist die Folgerung, mit der man seit Cantor zu leben hat.

WM: {{Damit hat nur zu leben, wer aus unerfindlichen Gründen (Ungründen) Zermelos haltlose Behauptung glaubt, jede Menge könne wohlgeordnet werden - im irreführenden Schafspelz des Auswahlaxioms präsentiert und notwendig einhergehend mit einer Sünde wider den menschlichen Geist, der Annahme nämlich, ES gäbe vollendete Unendlichkeiten.}} Nein, es ist

eine Folgerung, die Cantor selbst zum Beispiel überhaupt nicht akzeptierte. {{Im Besonderen ist also auch die Mächtigkeit des Linearcontinuums gleich einem bestimmten Alef. Schon hieraus aber ergibt sich, daß das Linearcontinuum, aus seinem Zusammenhang gerißen, in einem höheren Sinne abzählbar ist, d. h. als wohlgeordnete Menge dargestellt werden kann. [Cantor an Hilbert, 26. 9. 1897]}} Es ist eine Folgerung, die sofort, als jemand sie erkannte (ich möchte wirklich einmal wissen, wer dieser Esel war - anders kann ich ihn nicht nennen), zu der Erkenntnis hätte führen müssen, dass mit Cantors Beweis etwas faul ist. Inzwischen ist wie in vielen Bereichen so auch hier ein Abhärtungseffekt eingetreten, und undefinierbare Zahlen sind quasi selbstverständlich geworden. Aber früher war das anders. Zahlen sind da, um die Wirklichkeit schärfer aufzufassen. Zahlen, die sich selbst nicht auffassen lassen, sind keine Zahlen.
[Rainer Rosenthal, "Das Kalenderblatt 100310", de.sci.mathematik, 6. - 9. 4. 2010]

Überabzählbar viele Zahlen dienen angeblich dazu, die Wirklichkeit zu unterscheiden. Man kann aber nicht einmal diese Zahlen selbst unterscheiden. Das ist doch ein fragwürdiges Verhältnis.
[WM, "Das Kalenderblatt 100328", de.sci.mathematik, 9. 4. 2010]

GT: Ja, man macht den Fehler, das Konzept von $T(n)$ und $T(\infty)$ einzueins auf T zu übetragen. Das funktioniert ja schon bei bijektiven Abbildungen auf Teilmengen nicht.
WM: Bitte sage mir, was T und $T(\infty)$ von der Substanz der Zahldarstellungen, nämlich den Ziffern her, unterscheidet. Nichts!
GT: $T(\infty)$ ist also die Vereinigung der Pfade aller endlichen Binärbäume.
WM: Richtig! (Aber ebenso und gleichzeitig, aller Knoten.)
GT: Die verwendeten n-Tupel b implizieren eine direkte Identifizierung mit endlichen Bitfolgen/Binärzahlen der Gestalt $1.b_1b_2...b_n$, das wären dann rationale Zahlen aus [1,2) mit endlicher Binärdarstellung. Und hier entwischen einem schon die rationalen Zahlen, die eine periodische Binärdarstellung haben.
WM: Nein. Denn der Baum $T(\infty)$ ist ja nirgends zu Ende. Welche Ziffer einer rationalen Zahl sollte wohl fehlen? T enthält alle Knoten, also zu jedem einen nächsten, ebenso wie $T(\infty)$.
GT: Mit der oben verwendeten Abzählung der Knoten kann man längs eines unendlichen Pfades, der unendliche viele Knotennummern tragen soll, nicht arbeiten.
WM: Aber selbstverständlich kann man mit der Abzählung arbeiten. Das ist ja gerade der Witz am Beweis. Gestatte bitte, dass ich ausnahmsweise mit der 0 zu zählen beginne: Die Knoten des Baums

0
0 1
0 1 0 1
...

werden dann wie folgt nummeriert.

0
1 2
3 4 5 6
...

Der Pfad 0,000... besitzt demnach die Knoten mit den Nummern 0, 1, 3, 7, ... Dieser Pfad ist in $T(\infty)$ und in T. Falls Du skeptisch bist, frage Dich bitte, welcher Knoten fehlt. Keiner.
GT: Wie man es dreht oder wendet, T ist ein Objekt, dass sich von $T(\infty)$ unterscheidet.
WM: Nicht bezüglich der Knoten und, wie ich oben gezeigt habe, nicht bezüglich irgendeines unendlichen Pfades.
GT: Solange man sich in der klassischen Mengenlehre bewegt und die Konstruktion von T per Existenzaussage akzeptiert, ergibt sich *kein* Widerspruch. Der Widerspruch ergibt sich erst, indem von außen nicht zur klassischen Mengenlehre gehörende Restriktionen hinzugenommen werden.

WM: Welche sollen das sein? Meine einzige Forderung ist, dass jede reelle Zahl eine Binärdarstellung besitzt. Ohne diese Forderung versagt auch Cantors Diagonalverfahren.

GT: Wenn die Existenz des aktual Unendlichen abgelehnt wird, ist klar, dass es "nur" beliebig lange Pfade gibt. Die sind automatisch abzählbar und die "anderen" gibt es einfach nicht. So vermeidet man Überabzählbarkeit. Dann brauchen wir aber auch gar nicht streiten. Höchstens darüber, ob *innerhalb* des Gebäudes der klassichen Mengenlehre ein Widerspruch besteht. Innerhalb wird die Existenz des aktual Unendlichen vorausgesetzt. So gelangt man zu Überabzählbarkeit - ohne Widerspruch.

WM: Diese Aussage ist falsch und deshalb kann ich sie so nicht unwidersprochen stehenlassen. Um das zu erkennen, muss man sich nur klarmachen, dass bezüglich aller *Knoten* $T = T(\infty)$ ist. Und $T(\infty)$ enthält absolut nichts Überabzählbares. Um also ins Überabzählbare zu gelangen (a priori oder a posteriori ist dabei gleichgültig), bleibt nichts anderes übrig, als den aktual unendlich langen Pfaden etwas nicht durch Knoten Darstellbares zuzuschreiben.

Die transfinite Mengenlehre benötigt also solche "Seelen der Pfade" - oder wie immer man das nennen möchte, was den Pfaden anzuhängen ist. Doch das Cantorsche Diagonalargumentnwürde gegen diese Anhängsel vergebens kämpfen.

Die transfinite Mengenlehre erfordert also im Binären Baum etwas, das ihren wichtigsten Beweis zunichte macht und seine Ergebnis negiert. Und wegen dieser Inkonsequenz enthält die transfinite Mengenlehre einen Widerspruch.

GT: Solange Sie einem nicht klarmachen können, wie formal ihre Konstruktion von T und $T(\infty)$ durch die Knoten aussieht und formal daraus folgt, dass Gleichheit vorliegt,

WM: Wie ich schon sagte: Jede Informationsmethode ist gleichberechtigt. Es gibt Vertreter der Mengenlehre, die eine Formalisierung des Baums für nicht möglich halten. Mich stört das wenig. Die von mir nun zweimal gebrachte Konstruktion, Knoten für Knoten, ist eindeutig und auch verständlich.

GT: $T^* := \{f: \mathbb{N} \to \{0,1\}$, es gibt ein n aus $\mathbb{N}$, so dass $f(i) = 0$ für alle $i > n\}$
$T := \{f: \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$

Nimmt man erst einmal an, dass die Definition die ich für T^* und T geliefert habe *nicht* Binärbäume darstellen sondern irgendwelche zwei Mengen, würden Sie dann zu stimmen, dass T Elemente enthält, die nicht in T^* sind?

WM: Nein. Falls Sie anderer Meinung sind, so bitte ich um die Angabe einer Knotenfolge aus T, die nicht in T^* enthalten ist - und zwar konkret! (Also nicht in der Form 1/3 oder $1/\pi$, sondern um die Angabe *ab welchem Knoten genau* einer dieser Pfade nicht in T^* enthalten ist.)

GT: $f(i) = 1$ wenn i prim
$f(i) = 0$ wenn i nicht prim
Diese f ist nicht in T^* aber in T.

WM: Welcher Knoten fehlt denn?
[GToeroe, "Das Kalenderblatt 100815", de.sci.mathematik, 25. - 31. 8. 2010]

992 Das Kalenderblatt 120221 Der Binäre Baum (115)

GT: Betrachtet man ein f {{einen Pfad}} aus T {{dem vollständigen Binären Baum}}, in dem es auch $\mathbb{N}$ als Knotenmenge gibt, so braucht man u.U. unendlich viele Knotennummern um den Pfad eindeitig zu beschreiben, denn an jedem Knoten beginnt der ganze unendliche Binärbaum von neuem.

WM: Das ist auch mit dem aus endlichen Pfaden aufgebauten Binärbaum so, denn er ist ja ebenfalls ohne Ende.

GT: Beginnt man in T oben bei der ersten Knotennummer, so ist erst einmal nur klar dass hier unendlich viele Pfade starten.

WM: In T^* {{dem Grenzwert der Folge aller endlichen Binären Bäume}} auch.

GT: Jeder endliche Anfangsabschnitt bis zum Level *n* kann mit einer Knotennummer eindeutig beschrieben werden, aber diese Nummer legt nur eine (unendliche) Teilmenge von *T* fest. Das muss doch jedem unmittelbar ersichtlich sein.

WM: Selbstverständlich. In *T** ist es ja nicht anders.

Das ist die eine Seite der Medaille. Die andere ist die, dass *T* und *T** bezüglich Knoten identisch sind, also die darin möglichen Pfade, sofern sie nur aus Knoten bestehen, ebenfalls identisch sind. Es gibt in beiden Bäumen gleichviele rechts-links-Entscheidungen. [...] Bitte betrachten Sie zunächst einmal nur diejenigen Primzahlen, die als Indizes von Nichtnullknoten in mindestens einem Element von *T** vorkommen: Kommen diese Primzahlen in mindestens einem Element von *T** vor?

Und gibt es noch mehr?

GT: Wir haben es hier mit

$T^* := \{f: \mathbb{N} \to \{0,1\}$, es gibt ein n aus $\mathbb{N}$, so dass $f(i) = 0$ für alle $i > n\}$

und

$T := \{f: \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$

erst einmal mit zwei Mengen von Funktionen zu tun, die $\mathbb{N}$ in die Menge {0,1} abbilden. Beide Mengen sind nicht endlich. Aus der Definition ist ersichtlich, dass *T* *T** umfaßt, weil die Eigenschaft, die ein *Tf* hat, auch auf ein *T*f* zutrifft.

Umgekehrt gilt das nicht, denn ein *T*f* liefert für schließlich alle Argumente den Wert 0, was für ein *Tf* nicht gelten muss. Im Rahmen der klassischen Mengenlehre ist hier nichts auszusetzen. Um das tun zu können, muss man mit einem Argument, einer Unterscheidung, einem Axiom oder was auch immer kommen, was es innerhalb der klassischen Mengenlehre nicht gibt oder fdas dort nicht zulässig ist.

WM: Innerhalb der klassischen Mengenlehre ist die Frage nach allen Indizes, die zu Nichtnullknoten von Elementen aus *T** gehören unzulässig?

Diese Behauptung halte ich für falsch: Summenaxiom oder Axiom der Vereinigungsmenge: Ist *A* eine Menge, die mindestens ein Element enthält, so existiert auch die Menge *S*(*A*), die die Vereinigung aller Elemente der Elemente von *A*, aber keine weiteren enthält.

Damit kann die obige Frage gestellt in ZF werden. Mit Bezug auf Ihr Primzahlbeispiel lautet sie: Bitte betrachten Sie zunächst einmal nur diejenigen Primzahlen, die als Indizes von Nichtnullknoten in mindestens einem Element von *T** vorkommen: Kommen diese Primzahlen in mindestens einem Element von *T** vor? Und gibt es noch mehr? (Auch diese Frage ist nach ZF zulässig, weil dort die Existenz der Menge aller Primzahlen ein Theorem ist, also über alle Primzahlen gesprochen werden kann.)

Die Sache ist doch viel einfacher. Schon 1/3 genügt, um den Kern zu erkennen. Alle Pfade von *T** enden auf Nullen: 0,*abc*...*xyz*000.... Also ist 1/3 nicht darin enthalten. Andererseits existiert kein Knoten von 1/3, der - samt allen seinen Vorgängern - in *T** fehlte. Wenn also der Pfad 1/3 allein durch alle seine Knoten definiert ist, dann haben wir einen Widerspruch.

JR: Nehmen wir doch $1/\sqrt{3}$. Dann haben wir gerade bewiesen, dass $\sqrt{3}$ rational ist, und das ist wirklich eine nützliche neue Einsicht.

WM: Nein, wir haben gerade bewiesen, dass es keinen Pfad gibt, der $1/\sqrt{3}$ darstellt, auch keinen unendlich langen. Wir haben bewiesen, dass $\sqrt{3}$. kein Bruch ist, auch kein "Dezimalbruch".

$1/\sqrt{3}$. und die Formeln zur Berechnung beliebiger Ziffern sind endliche Definitionen. Und davon gibt es nun einmal nur abzählbar viele.

Wenn *alle* unendlich vielen Pfade aus *T** aktual existierten, dann müsste es auch aktual unendlich viele indizierte Nichtnullknoten geben, worauf noch einmal unendlich viele Nullknoten folgten. Es müsste demnach ω Nichtnullknoten geben und darauf müssten noch einmal ω Nullknoten folgen, etwa so wie bei der Aufzählung der Ordnungszahl $2\cdot\omega$ (oder $\omega\cdot 2$):

1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ...

Aber das ist hier ausgeschlossen, denn die Indizierung beginnt ja bei den Nullknoten nicht erneut, sondern setzt sich einfach fort.

*T** überdeckt den gesamten Binären Baum. Beweis: Es gibt keinen Knoten, der in jeder Funktion *f* fehlen würde. *T** ist bezüglich der Knoten genau dasselbe wie *T*. Beweis: Es gibt keinen Knoten in *T* der in *T** fehlen würde.

*T** ist ein Binärer Baum, der mit endlichen Pfaden konstruiert wurde, an die jeweils ein unendlicher Tail 000... angehängt wurde. Dasselbe kann man mit einem Tail aus lauter Einsen machen:

$T^{**} := \{f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$, es gibt ein n aus $\mathbb{N}$, so dass $f(i) = 1$ für alle $i > n\}$

Oder mit einem Tail aus der Folge 31415... (etwas umständlicher zu formulieren).

Alle diese Konstruktionen führen auf die vollständige Knotenmenge ein- und desselben Binären Baums *T*.

Mein Beweis dafür, dass aktual unendliche Pfade (die bis zur Ebene *n* definiert sind und anschließend aus Tails bestehen) überhaupt nicht existieren, besteht darin, den Baum mit endlichen Pfaden zu konstruieren, an die ich eine spezielle Sorte von Tails anhänge, also z. B. 000... oder 111... oder 123123123... oder 31415...

Wenn ich mich weigere, bekanntzugeben, welche Tails ich verwendet habe, so kann kein Mensch diese Information aus dem vollständig konstruierten Baum entnehmen. Das ist ein schlagender Beweis dafür, dass aktual unendliche Tails überhaupt nicht existieren. Sie sind nichts als eine Einbildung - wie andere Massensuggestionen auch. Deswegen führt es zu demselben Ergebnis, nämlich $T(\infty) = T$, wenn nur alle endlichen Pfade (ohne Tails) zur Konstruktion verwendet werden. Niemand kann das unterscheiden.

Diese Überlegungen sind so einfach, dass eine Formalisierung überflüssig ist. Ich habe nichts gegen eine Formalisierung. Wem sie hilft, der möge sie machen. Aber mir könnte sie nur dazu dienen, das klare Bild zu verschleiern. Deshalb mache ich sie nicht.

[GToeroe, Jürgen R, "Das Kalenderblatt 100815", de.sci.mathematik, 25. - 31. 8. 2010]

993 Das Kalenderblatt 120222 Der Binäre Baum (116)

Ein Pfad kann aufgrund seiner stetigen Verbindung mit dem Wurzelknoten nicht aus dem ihn umgebenden Pfadbündel heraus. Das müsste er offenbar, wenn aus $\aleph_0$ oder weniger Pfadbündeln $2^{\aleph_0}$ Pfade entspringen sollten.

Zur Prüfung dieser Überlegungen definieren wir den Majorantenbaum. Er besitzt bezüglich der Knoten genau dieselbe Struktur wie der Binäre Baum, jedoch werden seine Knoten nicht von Pfaden durchlaufen, sondern an jedem Knoten beginnen drei Pfade, die sich ohne Weiteres ins Unendliche erstrecken. Die Menge der Pfade des Majorantenbaums ist auf jeder Ebene eine Majorante der Menge der disjunkten Pfadbündel des Binären Baums. Die Menge aller Pfade des Majorantenbaums ist $3 \cdot \aleph_0$.

[WM, "Das Kalenderblatt 110705", de.sci.mathematik, 5. 7. 2011]

Die beiden Folgen (a_n) und (b_n) mit

$a_n = |\{1, 2, 3, ..., n\}|$

und

$b_n = |\{1_1, 1_2, 1_3, ...,1_n\}|$

besitzen denselben Grenzwert $\aleph_0$ für $n \to \infty$.

Um reelle Zahlen als unendliche Dezimalbrüche widerspruchsfrei darstellen zu können, muss man einen anderen Widerspruch (an möglichst unauffälliger Stelle) dulden. Der besteht darin, dass die Folge (a_n) ein Maximum besitzt, (b_n) aber nur ein Supremum, das nicht Maximum ist {{denn die Zahl 0,111... = 1/9 wird durch die unendliche Einserfolge (b_n) nur angestrebt, nicht erreicht}}.

[WM, "Hilfe bei Cantors 2. Diagonalargument!", de.sci.mathematik, 17. 10. 2011]

The sequence (b_i) =

0.1
0.11
0.111
...

has the limit but does not assume its limit b_∞ = 1/9.

The sequence (d_i) constructed of the last digits of the b_i is identical with (b_i) except that it assumes its limit d_∞ = 1/9.
[WM, "Who is able to answer these simple questions in ZF-set theory coherently?", sci.math, 13. 11. 2011]

WH: Both the tree and the list include the limit vertically. Neither has a last line.
WM: The tree is written vertically. It is said to include its limit paths. Otherwise it would be a countable set of paths. The list (b_j) does not include its limit b_∞.
WH: Piffle, look at the first column or the diagonal.
WM: Just that I did. And I observed the identity of the sequences (b_k) and (d_k). Then either the diagonal does not contain d_∞ or the list contains b_∞. More formally:

$\neg\exists d_\infty \vee \exists b_\infty$

aka

$\exists d_\infty \Rightarrow \exists b_\infty$
$\wedge$
$\neg\exists b_\infty$

[William Hughes, "A definition of an infinity, perhaps!?", sci. math, 5. 11. 2011]

H: Note that the set of all paths in the limit tree is not the limit of the sets of paths
WM: The limit B_∞ contains all paths as subsets. That means the paths must somehow be constructed between B_0 and B_∞. {{Wenn alle Knoten des Binären Baums konstruiert sind, dann sind auch zwangsläufig alle Pfade vorhanden. Daran kann keine Quantorenmagie und auch keine Grenzschmuggelei entwas ändern - sofern der Begriff "alle Pfade" sinnvoll ist. Andernfalls würde auch Cantors Diagonalargument zusammenbrechen.}}
H: What is L_l? What do you mean with "contain"? What kind of "limit" are you refering to?
WM: To see the similarity to the Binary Tree, let's use

$B_1 = (L_1)$
$B_2 = (L_1, L_2)$
$B_3 = (L_1, L_2, L_3)$
...
B_∞ = complete Cantor-list.

H: How does standard theory prove that your notion of "limit" commutes with your notion of "contain"
WM: The limit is the complete Cantor-list. Otherwise there was no reason to believe in uncountability at all.
[hagman, "Who's up for a friendly round of debating CANTORS PROOF?", sci.math, 28. 1. 2011]

B: Der WM-Baum ist einfach nur eine Folge von gewissen endlichen binären Bäumen (WM nennt diese "Konfigurationen"); die Folge selbst ist der WM-Baum. Klar, die Menge aller Knoten des WM-Baums ist abzählbar. Die Menge der unendlichen Pfade des WM-Baums ist leer, ganz einfach aus dem Grund, weil nur die unendlichen Pfade der einzelnen endlichen Bäume des WM-Baums zusammengefasst werden und eben keiner dieser Bäume einen unendlichen Pfad besitzt.

WM: Der Grenzwert dieser Folge ist der vollständige Binäre Baum.

Deine Argumente hier sind mathematisch leer, es sei denn, Du würdest es auch ablehnen, die Menge aller natürlichen Zahlen als Grenzwert der Folge ihrer Anfangsabschnitte anzuerkennen.

Aber das wäre nach herrschender Lehrmeinung falsch.

Im KB101123 ist übrigens die Meinung eines offenbar versierten Matheologen dargestellt: Der vollständige Binäre Baum enthält eine Repräsentation aller reellen Zahlen aus [0, 1].

B: Ich habe nur Dein "Argument" dargestellt.

WM: Du hast es ja nicht verstanden. Du sagst: Es wird der Grenzwert einer Reihe (von Konfigurationen) gebildet. Das ist der vollständige Baum.

B: Beispiel 2 (Deiner Argumenationsform): Jeder echte Anfangsabschnitt der Menge der natürlichen Zahlen hat die Eigenschaft endlich zu sein, deshalb ist auch die Vereinigung aller echten Anfangsabschnitte endlich.

WM: Ich verwende dieses Argument nicht. Cantor verwendet: Jeder echte Anfangsabschnitt der Liste enthält die Diagonalzahl nicht. Deshalb enthält auch die unendliche Liste die Diagonalzahl nicht.

B: Beispiel 3 (zu Deiner Argumentationsform): Die Glieder der Folge ($1/n$) haben die Eigenschaft von 0 verschieden zu sein. Deshalb ist der Grenzwert der Folge auch von 0 verschieden.

WM: Ich verwende dieses Argument nicht. Cantor verwendet: Jeder echte Anfangsabschnitt der Menge $\mathbb{Q}$ lässt sich nummerieren. Die unendliche Menge aller rationalen Zahlen lässt sich nummerieren.

Äquivalenzen:

Jeder endliche Anfangsabschnitt des Binären Baums enthält keinen unendlichen Pfad. ⇔ Jeder endliche Anfangsabschnitt von Cantors Liste enthält die Diagonalzahl nicht.

Der gesamte Binäre Baum enthält überabzählbar viele unendliche Pfade. ⇔ Cantors Liste enthält (überabzählbar oft) die Diagonalzahl.

Der gesamte Binäre Baum enthält keinen unendlichen Pfad. ⇔ Cantors Liste enthält die Diagonalzahl nicht.

Beide, der BB und Cantors Liste, sind Grenzwerte von Reihen (von Konfigurationen bzw. Anfangsabschnitten).

B: Es gibt ein Problem: Wenn du behautest, dass Deine Ausführungen zum WM-Baum dazu geeignet sind, dass aus ZFC folgte, dass der binäre Baum (damit meine ich den binären Baum, so wie er üblicherweise in der Mathematik definiert wird und nicht den WM-Baum) [...]

WM: Würdest Du bitte angeben, in welchem Knoten bzw. Pfad sich diese beiden nach Deiner Meinung unterschiedlichen Bäume unterscheiden?

[Bobo , "Das Kalenderblatt 101109", de.sci.mathematik, 22. - 24. 11. 2010]

994 Das Kalenderblatt 120223 Der Binäre Baum (117)

WM: Dass unendlich viele Knoten einen unendlichen Pfad bilden, das glauben die Mengenlehrer ja unbesehen [...]

BE: Und dass sie einen endlichen Pfad bilden, das glaubst dann wohl du.

WM: Du musst zwischen aktual und potentiell unterscheiden.

BE: Ich dachte dein Problem sei es gerade, dass es überhaupt einen unendlichen Pfad in BB gibt, obwohl es in den B_k nicht der Fall ist.

WM: Im unären Baum 1-1-1-1-... gibt es einen potentiell unendlichen Pfad. Das wird leicht mit dem aktual unendlichen Pfad verwechselt. Natürlich wird auch dort nichts wirklich fertig. Aber im

Binären Baum ist es offensichtlich, dass aus abzählbar vielen Knoten nicht überabzählbar viele unendliche Pfade entstehen können. Siehe meine Folge (B_k) {{KB120216}} und das Schubfachprinzip.

Dass unendlich viele Knoten einen unendlichen Pfad bilden, ist ja nicht die Ungereimtheit des Binären Baums, sondern dass bis zu jedem Knoten überhaupt noch kein unendlicher Pfad vorhanden ist,

BE: Welch Wunder.

WM: Nein. Ein Wunder ist die Anwesenheit aller unendlichen Pfade in BB, dem Grenzwert der Folge (B_k). Dass aber dann doch irgendwie überabzählbar viele Pfade da sind, das ist es, was dieser "Mathematik" das Ende bereitet. Denn wenn das eine passieren kann, dann kann auch das andere passieren, dass nämlich alle reellen Zahlen nach allen endlich indizierten Zeilen / Anfangsabschnitten noch in die Cantor-Liste schlüpfen, also irgendwie die Geist-Hirn-Schranke passieren (ich nehme an, sowas gibt es analog zu
http://de.wikipedia.org/wiki/Blut-Hirn-Schranke
)
[Bastian Erdnuess, "Das Kalenderblatt 100624", de.sci.mathematk, 1. 7. 2010]

WM: *X* Pfade nebeneinander erfordern *X* Knoten. So viele Knoten gibt es aber nicht.

BE: Und wir sind uns doch einig, das ein Knoten einen Pfad noch nicht eindeutig abgrenzt. Daher seh ich auch nicht, wie du deine Aussage "*X* Pfade nebeneinander erfordern *X* Knoten" rechtfertigen willst.

WM: Pfade sind allein durch ihre Knoten definiert (so wie die zu den Pfaden isomorphen reellen Zahlen durch ihre Ziffern). Die Behauptung, dass es *X* unterscheidbare Zahlen gäbe, erfordert also wegen Isomorphie, dass es *X* unterscheidbare Pfade gibt. Pfade können aber nur durch Knoten unterschieden werden, wobei die Knoten, die sie mit anderen Pfaden gemeinsam haben, überhaupt nichts zur Identifikation beitragen. Die Kenntnis unendlich vieler Knoten als ausreichend zu behaupten, ist Unsinn.

Man kann natürlich auch auf jede Identifikationsmöglichkeit verzichten und "die reellen Zahlen" als einen Brei mit undefinierbaren Bestandteilen oder einen Ozean mit Tropfen ansehen. Aber in der Mathematik geht das eben nicht. Da möchte man ja meistens etwas ausrechnen - nicht nur "beweisen", dass man es ausrechnen könnte, wenn man es könnte. So wie Zermelo bewiesen hat, dass man jede Menge wohlordnen kann, wenn man sie wohlordnen könnte, wobei er leider den Konjunktiv vergessen und tatsächlich "kann" geschrieben hat.

Das erste Ziel ist, zu erkennen, dass die ersten 3, dann 4, und schießlich *n* Knoten eines Pfades nichts, aber auch gar nichts zu dessen Identifikation beitragen. Im Binären Baum liefern die ersten drei Knoten keinerlei Information.

BE: Doch. Sie liefern Information! {{Hier geht die gewöhnliche Vorstellung über die Zifferndarstellungen der Zahlen ein. Dort wird selbstverständlich jede Ziffer benötigt.}}

WM: Sie liefern keinerlei Information, die in Knoten Nr. 4 nicht vollständig enthalten wäre. Mit oder ohne die in den ersten drei Knoten enthaltene Information ergibt sich kein noch so geringer Unterschied.

BE: Wenn man noch mindestens einen anderen Knoten danach kennt.

WM: Richtig. Die ersten *n* Knoten enthalten keinerlei Information, die die in Knoten *n*+1 enthaltene Information übertrifft. Folglich sind die ersten *n* Knoten völlig belanglos für die in einer unendlichen Knotenfolge codierte Information. Das gilt für jede natürliche Zahl *n*. Eine unendliche Knotenfolge oder Ziffernfolge, für die keine endliche Definition bekannt ist, definiert keine reelle Zahl. Denn Definieren impliziert Wissen um das Definierte und die Möglichkeit, anderen dieses Wissen zu vermitteln. Das ist mit einer unendlichen Folge nicht möglich, weil sie niemals endet und damit die Information niemals vollständig sein kann.

BE: Ich versteh da so viel wie "jede Definition ist endlich".

WM: Damit erkennst Du (an), dass eine unendliche Ziffernfolge nichts, aber auch gar nichts bedeutet.

BE: Bloß weil sie nicht als Definitionen geeignet sind, sind sie bedeutungslos?
WM: Zumindest als Definitionen.
BE: Du bist mir zu radikal. Von 'nem Huhn kannst du ja auch nicht verlangen, dass es Milch gibt. Aber deswegen muss man ihm ja noch nicht den Nutzen (oder gar die Existenz) absprechen.
WM: Ein Huhn existiert auch dann, wenn niemand es kennt (und niemand es melken möchte). Eine Idee, die niemand kennt, oder ein Name, den niemand nennen kann, existieren nicht. Wo und wie sollten sie existieren?
Jedenfalls kann niemand eine reelle Zahl allein anhand ihrer unendlichen Ziffernfolge identifizieren. Mengen sind aber dadurch ausgezeichnet, dass man ihre Elemente identifizieren kann. Schon die Menge $\{r\}$, wo für r eine unendliche Ziffernfolge einzusetzen ist, existiert nur dann, wenn r identifizierbar und von allen anderen Zahlen, die außerhalb von $\{r\}$ sind, unterscheidbar ist. Das ist aber trotz allem Quantorgedöns bei einer unendlichen Folge nicht möglich, weil *immer* (d. h. zu jedem Anfangsabschnitt) noch unendlich viele Zahlen existieren, die für r in Betracht zu ziehen sind. Das Problem wäre erst nach der letzten Ziffer beseitigt.
So ist es nun einmal, wie bei nüchterner Betrachtung jeder zugeben muss. Und deshalb ist der ganze Überabzählbarkeitszauber ein fauler.
[Bastian Erdnuess, "Das Kalenderblatt 100624", de.sci.mathematik, 5. - 6. 7. 2010]

995 Das Kalenderblatt 120224 Der Binäre Baum (118)

Eine endliche Definition D kann eine unendliche Folge F bestimmen. Eine unendliche Folge bestimmt nichts (bevor sie beendet ist - doch dann wäre sie ja nicht unendlich). Die Aussage
$(D \Rightarrow F) \Leftrightarrow (F \Rightarrow D)$
ist im Allgemeinen falsch.
Deshalb ist alles Bestimmte abzählbar.
[WM,"Das Klenderblatt 100527", de.sci.mathematik, 26. 5. 2010]

WT: Ich glaube, hier ist "sinnvolle Aussage" der problematische Begriff. Es ist von einer Zeichenkette nicht immer leicht zu entscheiden, ob sie sinnvoll ist oder nicht.
WM: Das kann in einer Theorie, die mit Quantitäten umgeht, nicht der entscheidende Punkt sein. Alle Zeichenketten, die irgendeinen Sinn besitzen *können*, gehören zu einer abzählbaren Menge. Wenn es sinnlosen Zeichenketten überhaupt gibt - was bei der Menge der möglichen Sprachen und Sinngehalte gar nicht unbedingt der Fall sein muss - so gehören sie ebenfalls zur abzählbaren Menge. Aber das darf nicht als Alibi dafür dienen, diese Grenze von allem - Sinnhaltigem wie Sinnlosem - zu sprengen oder nicht akzeptieren zu müssen.
Alles irgendwie, in gewissem Sinne "potentiell" Sinnhaltige gehört zu einer abzählbaren Menge.
Und das wird ganz einfach bewiesen durch die Tatsache, dass eine unendliche Folge (von Zeichen und / oder Zahlen) nichts aussagt. In der Mathematik herrscht leider die Meinung vor, eine unendliche Folge definiere eine reelle Zahl. Diese Meinung hat sich irgendwie gebildet, weil eine endliche Definition wie "3, 6, 9, ..." eine unendliche Folge definiert. Der Umkehrschluss ist hier wie die Implikationsumkehr im Allgemeinen falsch.
WT: Es stellt sich die Frage, ob sie *sinnvoll abgezaehlt* werden koennen.
WM: Verzeih bitte, aber diese Frage stellt sich mir nicht. Mir stellt sich die Frage, ob die sinnhaltigen Aussagen abgeschätzt werden können. Und das ist nach Obigem der Fall.
Genau so kann ich die unendlichen Pfade im Binären Baum *nicht* abzählen. Aber ich kann beweisen, dass die Menge aller Pfade durch $\aleph_0$ nach oben abgeschätzt werden kann.
Die Frage ist also, ob eine Abschätzung zur Mathematik gehört oder nicht. In Anbetracht vieler Ergebnisse der Zahlentheorie (Irrationalitätsbeweise zum Beispiel), als deren Erweiterung

Cantor seine Theorie verstanden wissen wollte, muss diese Frage meines Erachtens bejaht werden.
[Wolfgang Thumser, "Das Kalenderblatt 100517", de.sci.mathematik, 17. 5. 2010]

PW: You cannot form a list of all computable Reals. If you could do this, then you could use a diagonal argument to construct a computable Real not in the list.
WM: Twice no. First, a number cannot be defined by an infinite sequence of digits, because of practical reasons. (To define means to let somebody know what is meant.) Second the list of all real definitions cannot have a diagonal because at least two lines have only one symbol. Here is a list that contains not only every computable real number but also every possible definition of every item that can be defined.

0
1
00
01
10
11
000
...

H: Consider the list of increasing lengths of finite prefixes of π

3
31
314
3141
....

Everyone agrees that: this list contains every digit of π.
WM: There is no "every digit of π". If it were, this must be proved by showing the last digit.
H: As π is an infinite digit sequence, this means this list contains every digit of an infinite digit sequence
WM: If you write every digit in the same line, no set theorist will disagree. If you write the next digit always in the next line, they will diagree {{dass alle Ziffern in einer Zeile auftauchen, obwohl mittels Induktion beweisbar ist, dass niemals zwei oder mehr Zeilen benötigt werden, um zu enthalten, was eine Zeile enthält.}}
[Peter Webb, Hercules "Why can no one in sci.math understand my simple point?", sci.math, 15. 6. 2010]

WM: Die kanonische Konstruktion des Binären Baums erfolgt mit endlichen Pfaden. Zu jedem Knoten führt ein endlicher Pfad. Unendliche Pfade sind nur als Grenzwerte von Folgen endlicher Pfade definierbar.
JR: Das stimmt nicht: Die unendlichen Pfade sind Folgen von Knoten. Ein Grenzübergang wird nicht benötigt.
WM: *Wenn* der BB allein aus endlichen Pfaden konstruiert wird, so sind die unendlichen Pfade Grenzwerte.
JR: Sie sind Folgen von Knoten, nicht mehr und nicht weniger.
WM: Da nun jede Folge mindestens ein Element und höchstens einen Grenzwert besitzen kann ...
JR: Folgen können sehr wohl mehrere Grenzwerte haben.
WM: Potz tausend. Wenn ich in meinem Buch blättere, so finde ich auf S. 186 den Satz: "Besitzt eine beschränkte Folge nur einen Häufungspunkt, so heißt dieser Häufungspunkt Grenzwert der Folge." {{Der geneigte Leser wird gebeten, die Behauptung JRs nicht mit dem Titel dieses Threads in Verbindung bringen!}}

[Jürgen R., "Neue Erkenntnisse aus Augsburg: wesentliche Fortschritte?", de.sci. mathematik, 24. 9. 2010]

WM: Ich habe gezeigt, dass die Aussage $\cup A = U(A \backslash B_k)$ für jede natürliche Zahl gilt. Ich lasse keine einzige aus.

AM: Doch, Du lässt k+1 aus. B_k ist die Vereinigung aller natürlichen Zahlen von 1 bis k. Bei Dir fehlt immer eine, nämlich k+1.

WM: Die Vereinigungsmenge der B_k über alle $k \in \mathbb{N}$, für die mein Beweis gilt, ist $\mathbb{N}$. Da bleibt nichts übrig.

Hier ein Beispiel: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$.
Wenn wir aus der Menge der natürlichen Zahlen alle diejenigen entfernen, für die dieser Satz gilt, welche bleiben dann noch übrig? Keine.
[Andreas Most, "Beweis für Ueberabzaehlbarkeit von R?", de.sci.mathematik, 29. 3. 2011]

996 Das Kalenderblatt 120225 Der Binäre Baum (119)

{{Im Spiel "Wir erobern den Binären Baum" wird durch jeden Knoten ein unendlicher Pfad gelegt, insgesamt abzählbar unendlich viele. Obwohl kein weiterer Knoten mehr verfügbar ist, bezweifeln manche, dass der so konstruierte Binäre Baum vollständig ist.}}

WM: Somit müsstest Du nur noch sagen, was an einem Pfad fehlen kann, wenn alle seine Knoten da sind, oder wie es sein kann, dass ein Pfad fehlt, wenn alle seine Knoten da sind, oder was wir noch tun könnten, um einen Pfad in den Baum zu bringen, der noch nicht drin ist, obwohl alle seine Knoten drin sind.

RR: Die Pfade sind ja da, und es fehlt ihnen auch an nichts.

RB: Da der Baum in einer leicht ersichtlichen Weise aus abzählbar unendlich vielen Teilen besteht, kann man ihn auch in entsprechendem Sinne in abzählbar vielen Schritten, in denen jeweils ein Teil angefügt wird, "konstruieren". Die Pfade des Baums sind damit nicht "konstruiert".

WM: Also Baum konstruiert, Pfade nicht. Es scheint, dass sie irgendwie über den unendlichen Baum hinausragen, so wie jemand mit einem zu kurzen Bett die Füße herausstreckt. Das omegate Element, die dunkle Materie der Mathematik, die Seelen der Pfade. May we not call them the ghosts of departed quantities? (nach George Berkeley)

BE: Die Pfade sind da. Sie warten nur noch drauf abgezählt zu werden.

WM: Eine weitere Stimme für diese Position, die ich übrigens auch einnehme.

Nach Konstruktion sind sie da, vor Konstruktion war nichts da. Ergo sind sie in einem oder mehreren der abzählbar vielen Konstruktionsschritte konstruiert worden, das heißt, aus dem nur Sosein ins Dasein gerufen, erweckt worden.

In welchen Schritten wurden wohl mehr als ein unendlicher Pfad fertig?

BE: Gegenfrage: In welchem Schritt wurde wohl ein einziger unendlicher Pfad fertig?

WM: Diese Frage sollte derjenigen beantworten, der behauptet, es gäbe diese Pfade im fertig konstruierten Baum. Ich benutze diese Prämisse nur, um sie zum Widerspruch zu führen.

BE: Und zum Aufwärmen für die obige Aufgabe: Ab welchem n steht der Grenzwert einer Folge fest?

WM: Dieser Grenzwert steht niemals fest, also gibt es ihn nicht, es sei denn, die Folge wäre durch ein endliches Bildungsgesetz definiert, gehörte also zu einer abzählbaren Menge von Folgen.

Du behauptest, dass alle aktual unendlichen Pfade im fertigen, aktual unendlichen Baum seien. Zumindest Dein alter Ego behauptet das. Nun finde den Punkt, wo sie eingezogen sind. (Vielleicht wäre es hilfreich, die Meditation musikalisch mit dem Einzug der Götter aus Wagners Rheingold zu untermalen.)

BE: Ich muss den Baum nicht "konstruieren". Der Baum hat einen Wurzelknoten und jeder Knoten hat zwei Kinder. Für mich *ist* das der Baum.

WM: Wenn Du hier mal auf den Bildschirm schaust, dann ist da nichts.

.

.

.

Einverstanden?

Und jetzt wird der unendliche Binäre Baum hier konstruiert:

```
            0,
          /    \
        0        1
      /   \    /   \
     0     1  0     1
    /
   0 ...
```

Jetzt ist er hier entstanden. Jetzt ist er also hier da oder besser vorhanden.

In jedem Schritt kommt ein endlicher Pfad hinzu. In keinem Schritt kommt mehr als ein unendlicher Pfad hinzu, denn die unendlichen Pfade sind Grenzwerte von Folgen und eine Folge kann per Definition nicht mehr als einen Grenzwert besitzen, muss aber mindestens ein Folgenglied besitzen. Folglich ist die insgesamt im Baum vorhandene Menge von endlichen Pfaden abzählbar und die insgesamt im Baum vorhandene Menge von unendlichen Pfaden höchstens abzählbar.

BE: Aber wie "konstruierst" du eingentlich den Baum. Was soll es bedeuten, einen Pfad zu "konstruiert" haben?

WM: Siehe oben. Der Baum betsteht aus einer geordneten Knotenmenge. Einige Untermengen bilden endliche Anfangsabschnitte von Pfaden, andere bilden unendliche Pfade.

Man könnte den Baum auch anders konstruieren, so wie man Cantors Abzählung der rationalen Zahlen auf verschiedene Weisen anstellen kann. Aber ich finde, wenn von Anfang an eine geniale und einfache Idee vorhanden ist, dann sollte man sich möglichst an das Original halten.

BE: Ein ausgesprochen hübscher Fehlschluss.

Wie wärs damit: In jedem Schritt kommt ein endlicher Pfad hinzu. In keinem Schritt gibt es bereits einen unendlichen Pfad und es kommt auch in keinem Schritt einer dazu. Folglich ist die Menge von endlichen Pfaden abzählbar und die insgesamt im Baum vorhandene Menge von unendlichen Pfaden höchstens Null.

WM: Vollkommen richtig. Nichts Vorhandenes ist unendlich. Das Unendliche kann nur als nicht endender Prozess verstanden werden, der naturgemäß nie zu einem Ende gelangt. Im Baum wären selbstverständnlich nur dann aktual unendliche Pfade, wenn es denn solche irgendwo oder anderswo, zum Beispiel in Listendiagonalen, gäbe.

Genau das ist es, was zu beweisen war. Weshalb dauerte es so lange, bis der Groschen fiel?

1) $\mathbb{N}$ ist die Vereinigung aller natürlichen Zahlen.

2) Jede abzählbare Menge kann konstruiert werden (s. Cantors Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$) ohne aktual ins Unendliche vorzustoßen.

3) Der vollständige Binäre Baum besitzt nur abzählbar viele Knoten, kann also konstruiert werden.

4) Nach Konstruktion sind alle unendlichen Pfade da.

5) Wenn die Pfade nur durch Knoten definiert sind, dann sind auch alle Pfade da.

6) Jede Folge besitzt mindestens ein Glied.

7) Keine Folge besitzt mehr als einen Grenzwert.

MK: Ob im Endlichen oder Unendlichen, Dein Fehler ist der gleiche, nämlich dass Du in unzulässiger Weise von der Kardinalzahl einer Grundmenge auf die Kardinalzahl einer hieraus abgeleiteten Menge schließt.

WM: {{Ich beweise, dass niemand mit Hilfe von Knoten einen unendlichen Pfad identifizieren kann. Wenn es "unzulässig" ist, daraus auf die Kardinalzahl 0 der identifizierbaren unendlichen Pfade zu schließen, was ist dann "zulässig"?}} Denn es wird überhaupt kein einziger Pfad "fertig" und auch nicht die Diagonalzahl. - Das ist das ganze Geheimnis.
[Rainer Rosenthal, Ralf Bader, Bastian Erdnüß, Michael Klemm, "Das Kalenderblatt 100428", de.sci.mathematik, 12. 5. 2010]

997 Kalenderblatt 120226 Der Binäre Baum (120)

WM: Über den Unterschied der Beweise von Cantor und von mir.

Cantor teilt die Menge aller reellen Zahlen aus dem Intervall [0, 1] in eine abzählbare Menge *A* und den Rest *R*.

Die Menge *A* wird in Form einer Folge vulgo Liste angeordnet und eine Diagonalzahl erzeugt, so dass sich jede Ziffer der Diagonalzahl von der entsprechenden Ziffer der Zeilenzahl nterscheidet. Cantor zeigt also für jedes *n* in ℕ, dass der endliche Anfangsabschnitt der Diagonalzahl nicht mit dem endlichen Anfangsabschnitt einer der ersten *n* Zahlen aus *A* bereinstimmt, oder, was auf dasselbe hinausläuft: Cantor zeigt, dass jeder endliche Anfangsabschnitt der Diagonalzahl mit dem endlichen Anfangsabschnitt einer der Zahlen aus *R* (oder einer der noch folgenden Zahlen aus *A*) übereinstimmt.

Aus dem Beweis für alle endlichen Anfangsabschnitte wird geschlossen, dass alle in *A* noch folgenden Zahlen ausgeschlossen werden können und die ganze Diagonalzahl in *R* ist.

Ich stelle alle reellen Zahlen aus dem Intervall [0, 1] als Pfade im Binären Baum dar. Ich teile die Menge aller Pfade in eine abzählbare Menge *A* und den Rest *R*.

Die Menge *A* wird benutzt, um alle Knoten des Binären Baums zu überdecken. Mit jedem seiner Knoten wird zwangsläufig auch jeder endliche Anfangsabschnitt jedes Pfades überdeckt. Ich zeige also, dass jeder endliche Anfangsabschnitt jedes Pfades mit dem endlichen Anfangsabschnitt eines der Pfade aus *A* übereinstimmt.

Aus dem Beweis für alle endlichen Anfangsabschnitte jedes Pfades wird aber hier nicht geschlossen, dass jeder ganze Pfad in *A* (und damit die Menge *R* leer) ist.

KS: Das ist die kohärenteste Darstellung deines Standpunktes, die ich bisher gesehen habe. Ich habe aber Verbesserungsvorschläge:

Die Vergleichbarkeit beider Argumente kann man bereits deshalb anzweifeln, weil du die Rollen von *A* und *R* vertauscht. Die Annahmen an *A* und *R* sind aber nicht gleich: *A* ist abzählbar und *R* unterliegt keinerlei weiteren Einschränkungen. Das mag vielleicht rettbar sein, erfordert aber zumindest noch weitere Erklärung deinerseits.

WM: Meine Erklärung ist die folgende: Wenn über die Untersuchung aller endlich indizierten Stellen einer Zahl *festgestellt werden kann*, dass sie zu einer Zahlenmenge gehört (oder nicht gehört), dann muss dieses Kriterium unabhängig davon sein, welche Kardinalzahl die betreffende Menge besitzt.

KS: Entscheidender ist aber, dass du Cantor's Argument noch einmal negierst, um die Analogie mit deinem Argument hervorzustellen, etwas, was meines Wissens von Cantor (oder späteren Verbesserungen) nicht gemacht wurde.

WM: Du meinst, dass ich nicht das Fehlen der Diagonalzahl *d* in der Liste betone, sondern die Zugehörigkeit der Diagonalzahl zum Rest? Ja, das habe ich auch noch nirgendwo gesehen, aber es schien mir nötig, um, wie Du sagst, die Analogie herzustellen. Wenn ℝ existiert und *d* nicht in der Liste ist, dann ist das Komplement der Liste ℝ*A* = *R* der einzig mögliche und gleichzeitig der notwendige Aufenthaltsort der Diagonalzahl *d*.

Dass die Diagonalzahl auch im bei Zeile *n* noch ungeprüften Ende der Liste stecken könnte, ist eher ein Nachteil von Cantors Argument und beschädigt die Parallelität mit meinem etwas. Doch das benutze ich gar nicht. Ich akzeptiere die gleichzeitige Prüfung aller Stellen.

Wollte ich es benutzen, dann würde ich darauf hinweisen, dass die Knoten für Knoten durchgeführte schrittweise Konstruktion des binären Baums bis zu jedem endlichen Schritt n keinen einzigen unendlichen Pfad liefert, schließlich aber doch alle unendlichen Pfade da sind.
KS: Die Negation ist zwar lokal korrekt von dir durchgeführt worden, aber die Folgerung, die du dann ziehst, gilt nur unter weiteren Voraussetzungen, die bei Cantor gelten, von dir in deinem Argument aber komplett ignoriert werden {{eine nähere Erläuterung dieser ominösen Voraussetzungen und warum sie bei Cantor "gelten" erfolgte nicht}} - und das ist genau der Grund, warum es hier so ausschweifende Diskussionen über deine Argumentation gibt.
WM: Welche weiteren Voraussetzungen meinst Du? Ich kenne nur die Eine: Die Diagonalzahl unterscheidet sich von jeder Zeilenzahl mit endlichem Index n an einer Stelle (a_{nn}) und daraus schließen wir, dass sie sich von allen unendlich viele Zeilenzahlen unterscheidet, also an allen Stellen mit einer in R vorhandenen Zahl übereinstimmen muss.
Dieser Schluss von jedem endlichen Abschnitt auf die unendliche Menge ist der Stolperstein. Aber ich möchte nicht allein darüber stolpern. Deshalb weise ich immer wieder darauf hin, dass der Pfad 0,111... nichts weiter ist als die Vereinigung aller endlichen Pfade, und deswegen auch nicht mehr Einsen enthalten kann, als jeder der endlichen Pfade (denn die Vereinigung endlicher Pfade ist ein endlicher Pfad).
KS: Versuch's doch mal umgekehrt: formulier mal dein Argument über Gleichheit der Anfangsabschnitte in A als Ungleichheit der Anfangsabschnitte im Rest R.
WM: Wie das? Mein Argument zeigt, dass der Rest leer ist. Der Rest, das sind Zahlen wie 0,111..., die überhaupt nicht anders darstellbar sind, als durch die Folge ihrer Anfangsabschnitte. Deswegen können sich die Anfangsabschnitte nicht alle von der Zahl 0,111... unterscheiden. Sie *sind* die Zahl. Das Problem ist ja, dass diese Zahl als von der Folge aller endlichen Anfangsabschnitte verschieden *vorausgesetzt* wird, aber in vollendeter Inkonsequenz kein Beleg für diese Verschiedenheit existiert (außer dem "fehlenden Ende").
Ich bin aber nicht in der Lage, klarzumachen, dass die aktual unendliche Vereinigung endlicher Abschnitte eine contradictio in adiecto darstellt. Deshalb muss ich das Problem anders umschiffen. Und deshalb habe ich schon von Anfang an unendliche Pfade eingesetzt.
[Kruno Sever, "Das Kalenderblatt 100328", de.sci.mathematik, 27. 3. 2010]

MK: Der unendliche Pfad unterscheidet sich also von allen endlichen nicht durch eine bestimmte endliche Pfadmenge, sondern dadurch, dass er unendlich ist.
WM: Betrachte einen Binären Baum, der alle unendlichen Pfade außer dem Pfad 0,000... enthält. Es ist nicht möglich, diesen Pfad mit Hilfe von Knoten einzufügen, denn die sind schon alle da. Folglich kann dieser Pfad nur durch eine endliche Definition (also einen matheologischen Zauberspruch) eingefügt werden. Deren gibt es bekanntlich nur abzählbar viele.
[Micheal Klemm, "Das Kalenderblatt 120226", de.sci.mathematik, 27. - 28. 2. 2012]

JR: Unter Voraussetzung des Auswahlaxioms ist card(2^M) > card(M) beweisbar.
[Jürgen R., "Neue Erkenntnisse aus Augsburg: wesentliche Fortschritte?", de.sci. mathematik, 23. 9. 2010]

SN: Da Du aber erstens Dich immer wieder an Cantor aufhängst, statt Dir die Mühe zu machen, moderne, sauber prädikatenlogisch hergeleitete Beweise zu analysieren und dort ebenso sauber formal-logische Fehler aufzuzeigen [...]
[Stefan Nobis, "Definition der Reellen Zahlen?", de.sci.mathematik, 11. 5. 2011]

Antwort zu beiden: Ich will mit dem Binären Baum keinen Fehler in den vorliegenden Beweisen der Mengenlehre aufzeigen, sondern, sofern sie als Grundlage der Mathematik angesehen wird, auf deren Inkonsistenz hinweisen. Dazu genügt es, im Rahmen der Mathematik das Gegenteil einer mengentheoretischen Aussage zu beweisen.

998 Das Kalenderblatt 120227 Der Binäre Baum (121)

WM: Mit der gesamten Knotenmenge wird auch jede unendliche Untermenge konstruiert.
BE: Ist damit auch die Menge aller unendlichen Untermengen konstruiert? Um deren Mächtigkeit geht es, oder?
RF: Es geht um die Menge aller Untermengen, die mindestens eine das Cauchykriterium erfüllende Folge enthalten.
WM: Interessant, wie viele verschiedene Widerlegungen kommen. Nein, es geht zunächst einmal gar nicht um das Cauchy-Kriterium erfüllende Folgen. Zu den Pfaden gehört auch der Pfad 0,1,0,1,0,1,0,..., der überhaupt nicht konvergiert, also keinen Grenzwert besitzt. Erst wenn man ihn mit den zugehörigen Zweierpotenzen versieht, wird eine konvergente Folge daraus.
[...] Entweder unterscheiden sich die Konfigurationen B_0 und B_ω um höchstens abzählbar viele unendliche Pfade, oder die Konfiguration B_ω besitzt viel mehr Pfade als jede Konfiguration B_n mit einem endlichen *n*.
Wäre dies der Fall, dann kann auch eine unendliche Liste viel mehr enthalten, als sich jeder Untersucher von endlichen Zeilen träumen lässt.
BE: Jedenfalls wird das nicht durch den obigen Gedankengang ausgeschlossen.
WM: Das nenne ich ein Understatement! Der obige Gedankengang in Verbindung mit dem Cantorschen Überabzählbarkeitsbeweis für unendliche Pfade zeigt positiv: Zwischen jedem Element B_k der Folge aller unvollständigen Konfigurationen und dem vollständigen Binären Baum B_ω müssen übervorstellbare Dinge passieren. Denn jede Konfiguration B_k unterscheidet sich durch überabzählbar viele Pfade von B_ω.
Die B_k bilden eine Liste. Die Absenz einer Konfiguration in allen Zeilen *k* der Liste zeigt nicht die Absenz im Grenzwert B_ω. Dem Cantorschen Überabzählbarkeitsbeweis ist damit die Grundlage entzogen.
Oder eine etwas andere Lesart: Das Diagonalargument kann auch auf die Folge der B_k angewandt werden. Keine Konfiguration B_k enthält den Pfad P_n = 0.000... Das ergibt einen Widerspruch: Wenn P_n in B_ω enthalten ist, so ist er in einem B_k vorhanden, auf das noch viele Konfigurationen B_{k+1}, B_{k+2}, ... folgen müssen, die noch nicht alle unendlichen Pfade enthalten, denn es ist nicht möglich, dass mit einem einzigen Knoten der Pfad P_n und einer oder mehrere weitere unendliche Pfade P_{n+1}, P_{n+2}, ... fertig werden. Jeder Knoten gehört aber zu einer endlich nummerierten Konfiguration B_k.
BE: Er {{Cantor}} zeigt, dass die AD {{Antidiagonalzahl}} in keiner endlich indizierten Zeile der Liste enthalten ist.
WM: Und ich zeige ebenfalls, dass der unendliche Pfad *X* in keinem endlich indizierten Element der Liste (B_k) enthalten ist.
BE: Das ist ja auch in Ordnung so.
WM: Da sind wir einer einzigen Meinung. Die Frage, die für Matheologen nun noch zu erledigen ist, lautet: Wie kommen die unendlichen Pfade in den unendlichen Binären Baum {{und warum soll ein Beweis bis zu irgendeiner endlich indizierten Zeile etwas über die gesamte Cantor-Liste aussagen}}?
[Bastian Erdnuess, Roland Franzius, "Das Kalenderblatt 100624", de.sci.mathematik, 23. - 30. 6. 2010]

WM: In meiner bescheidenen Konstruktion kommt leider nur die Abschätzung vor, dass Card($\mathbb{N}$) $\geq$ Card($\mathbb{R}$).
JR: Vorkommen schon - aber bewiesen wird sie nicht.

WM: Wenn es möglich ist, den Binären Baum vollständig zu konstruieren, so gibt es drei Möglichkeiten bei der Vervollständigung des Binären Baums:

Pro Knoten werden weniger als ein unendlicher Pfad fertig.

Pro Knoten wird genau ein unendlicher Pfad fertig.

Pro Knoten werden mehr als ein unendlicher Pfad fertig.

Wenn wir die Annahme machen, dass jeder Knoten eine reelle Zahl vervollständigt, dann ist Card($\mathbb{N}$) = Card($\mathbb{R}$). Dann haben wir eine Bijektion.

JR: Wieso denn? Wenn das so wäre, dann könntest du mühelos einen expliziten Algorithmus für die Beziehung $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{N}$ angeben.

WM: Selbstverständlich könnte ich das, wenn es vollständige Pfade gäbe. Nur ist diese Auffassung offenbar falsch. Aber Du kannst doch nicht fordern, dass ich hier Unsinn um des Unsinns willen reproduziere.

Wenn alle unendlichen Pfade existieren, dann werden alle bei der Konstruktion in abzählbar vielen Schritten vervollständigt. Kein Knoten kann mehr als einen Pfad vervollständigen.

Weil wir aber die Annahme machen müssen, dass jeder Knoten *höchstens* eine reelle Zahl vervollständigt, ist Card($\mathbb{N}$) > Card($\mathbb{R}$). Und das genügt Dir nicht als Beweis. Gleich oder gar nicht meinst Du? Auch nicht, dass man anderenfalls die Annahme machen muss, dass jeder Knoten oder zumindest eine nichtleere Menge von Knoten überabzählbar viele reelle Zahlen vervollständigen muss? Tja.

JR: Deine Behauptung ist deshalb unbewiesen - und bekanntlich unbeweisbar, weil falsch. [...] Es geht hier um Themen, die jedem Mathematikstudenten im zweiten Semester geläufig sind.

WM: Da bin ich ganz gegenteilig informiert. Kein Student im zweiten Semester wird über undefinierbare Zahlen informiert.

[Jürgen R., "Das Kalenderblatt 100625", de.sci.mathematik, 24. 6. 2010]

WM: "Nicht nur innerhalb der Mengenlehre, sondern in der ganzen Mathematik läßt sich, wie es scheint, auf rein konstruktivem Wege - namentlich ohne Heranziehung nicht-prädikativer Prozesse - das überabzählbar Unendliche nicht erfassen." [Adolf Fraenkel: "Einleitung in die Mengenlehre" Springer, Berlin (1928) 326]

Es gibt demnach das Problem, dass zwar alle natürlichen Zahlen konstruiertbar sind, nicht aber alle reellen Zahlen (weil nur abzählbar viele kommunizierbare Bezeichnungen, aber überabzählbar viele reelle Zahlen existieren). Konstruierbar ist zwar ein reelles Intervall, nicht aber alle seine einzelnen Punkte.

Damit stellt sich sogleich ein schönes neues Paradoxon zum Binären Baum ein - sicher zur Freude der Freunde des kontraintuitiven Denkens: Der Binäre Baum ist konstruierbar, denn er besteht aus abzählbar vielen Knoten und Kanten. Der Binäre Baum ist nicht konstruierbar, denn er besteht aus überabzählbar vielen Pfaden.

JR: Das Problem liegt woanders: "konstruierbar" ist nicht sauber definiert.

WM: Würdest Du bitte einmal sauber definierten, was Du unter "sauber definiert" verstehst?

Etwas ist konstruiert, wenn es kommunizierbar ist. Jeder Knoten im Baum ist konstruiert. Und wenn Du an der Unendlichkeit der Pfade zweifelst, dann frage Dich doch einfach, wo sie denn enden. Wenn Du kein Ende finden kannst, dann sind sie unendlich.

[Jürgen R, "Das Kalenderblatt 100613", de.sci.mathematik,12. 6. 2010]

999 Das Kalenderblatt 120228 Der Binäre Baum (122)

JH: What did you mean, if not that ZFC proves $\mathbb{N} \subset S_k = \{1, 2, 3, ..., k\}$ for some $k \in \mathbb{N}$?

WM: Read carefully. Did I specify a certain k? Did I say that I could do so? My proof shows that there must be such an S_k. Why do you think I could name it? My proof is not a constructive proof.

Have you ever heard about Zermelo's proof that every set can be well-ordered? Have you ever seen such a well-ordering, of ℝ, say?

JH: I do not believe that ZFC proves all natural numbers are elements of one of the S_n.

WM: Then there must be a way to distribute them among the sets S_k, no? Then there must be at least two numbers that require two sets S_n and S_m?

JH: No idea what this question means.

WM: You do not believe that all natural numbers are in one S_k. Which S_k are required to contain all natural numbers? Is it the first one? Obviously not. Is it the n^{th} one? No. But if not the n^{th} one, then obviously the $n+1^{th}$ one neither. So by induction (that concerns all natural numbers, not the set of them though) we can prove that no finite number k denotes an S_k that is necessary or even useful to belong to the union of S_k that contains all natural numbers.

JH: Well, then why did you write that there was?

WM: I wrote there is an S_k, but that does not mean I could construct the k. Look at my induction argument above. Do you believe that a correct proof by induction holds for every natural number?

JH: I don't require a constructive proof. Any valid proof of your claim will do.

WM: Fine. But you asked for that k.

JH: It strikes me that you've given an argument that ℕ is *not* a subset of any S_k.

WM: That is not what I proved! I proved that no subset S_k of ℕ is required to have all natural numbers, iff they make up an actually infinite set.

JH: But this wasn't what I asked you to prove. You said that ZFC proves ℕ *is* a subset of some S_k.

WM: My argument shows that ℕ is not a subset of any S_k iff there is no largest S_k. When you look closely at the induction step "But if not the n^{th} one [is necessary], then obviously the $n+1^{th}$ one neither." You will see that it fails if there is a last n as in potential infinity (mind that it is not fixed and cannot be constructed!).

JH: Each element n of the set ℕ is in S_k for $k \geq n$, but the whole set ℕ is not a subset of any S_k.

WM: And how many S_k are required to accomodate all natural numbers?

JH: I don't see how my answer to this question advances the point at issue here. According to you, ZFC proves only one S_k is required, but I surely don't believe this.

WM: ZFC proves: Nothing is required. Every S_k is *not* required. (And more is not available.)

JH: Please, show I am wrong.

WM: If you accept that a proof by induction holds for every natural number and, hence, for every S_k, then you have seen that above.

JH: Remember, you're trying to *prove* ZFC inconsistent, not challenge us to refute your claim.

WM: You are right, but your conclusion is in a slight error here. I claim: *Iff* ZFC is the basis of current mathematics, in particular if is proves that induction can be used, *then* I prove ZFC is contradictory. I do this by using that ZFC has the axiom card(ℕ) = $\aleph_0$ and proving by induction that all elements of ℕ are in a set of cardinality less than $\aleph_0$. And, yes, I use the permitted quantifier-exchange that is immanent in ZFC:

There exists $\aleph_0$ such that for all n: $n < \aleph_0$

instead of the correct property of infinity:

For all n, there exists m such that $n < m$.

That's what I do. My proof is so simple that I cannot believe you wouldn't understand it. And I cannot accept that excusion. For that purpose we defined what "S_k is necessary" means.

The proof shows S_1 is not necessary and if S_n is not necessary, then S_{k+1} is not necessary. That implies there is no S_k necessary, in particular there are not two or infinitely many S_k necessary. This is important to know because many set theorists claim that infinitely many S_k would be necessary. They seem to think: If I cannot find a single one, then I claim infinitely many.

This is in short words my proof. Whether it can be translated into ZFC + FOPL is not of interest for me. It shows that ZFC is inconsistent, if induction is a result of ZFC.

And I claim: If somebody is unable to understand that proof or mimicks to be unable, then he is challenged to find a counter example as has been good custom in mathematics since it has been existing.
[Jesse F. Hughes, "Who is able to answer these simple questions in ZF-set theory coherently?", sci.math, 17. - 20. 11. 2011]

Jede endliche Definition *D* einer Folge *F* definiert jedes endlich indizierte Glied. $D \Rightarrow F$. Und damit kann man alles über die Folge ausrechnen, wie Häufungspunkte oder Grenzwert, wenn solche vorhanden sind.

Aber es ist unmöglich, aus einer unendlichen Folge, also allein aus den vorhandenen Termen, eine endliche Definition, z. B. einen dazu passenden Grenzwert zu finden. $F \Rightarrow D$ ist falsch. Und deswegen gibt ES keine unendlichen Definitionen. Und deswegen gibt ES nur abzählbar viele Zahlen - eine jede endlich definiert.
[WM,"Das Kalenderblatt 100428", de.sci.mathematik, 13. 5. 2010]

1000 Das Kalenderblatt 120229 Der Binäre Baum (123)

Here, I think, is your problem. {{Es ist zwar nicht *mein* Problem, aber ganz sicher ist es *das* Problem der transfiniten Mengenlehre.}} You are not noticing that when you add a single path, you are actually adding many paths. {{Diese Aussage ist beweisbar falsch. Doch gäbe es aktual unendliche Pfade im Binären Baum, so müsste sie richtig sein.}} The net result in the end is that after all your paths have been added, there are many other paths that exist, because of the edges that have been added to make the paths, which you have not noticed.

The limit tree is a union of all the edges in the sequence of trees. That is indeed true. If there is an edge in the limit tree, that edge must exist in some tree in the sequence. *However*, the same is not true about paths. Paths exist in the limit tree that do *not* exist in any tree in the sequence. This is because the paths "interact" with one another in the way edges do not. {{Nein, es liegt daran, dass Pfade wie $1/\pi$ zwar endliche Definitionen besitzen, aber nicht durch Knoten definiert sind und also im Binären Baum gar nicht vorkommen.}}

Every path you add is of the form of a finite sequence of 0's and 1's, followed by an infinite sequence of 0's. {{Das ist durchaus nicht erforderlich. Ich kann ebenso jeden anderen der abzählbar vielen beschreibbaren unendlichen Tails verwenden, und wenn ich will, sogar alle auf einmal. An jeden Knoten kann ich $\aleph_0$ Tails anhängen - und mehr kann keiner.}} However, there are paths in the final tree that are not like this. That is because the paths interact with one another. You must look at the individual edges and how they can be made into paths in the final tree. You do not add paths, you add edges. Paths come *for free*. You cannot pick and choose the paths you add. They sneak in as sets of joined edges and there is nothing you can do about it.
[Calvin Ostrum, "The complete infinite binary tree has only countably many infinite paths", sci.logic, 25. 3. 2009]
http://groups.google.com/group/sci.logic/msg/52c1b3a5e2fbde58?hl=de&dmode=source

Calvin Ostrum, der bereits in KB120126 zu Wort kam, liefert einen würdigen Abschlussbeitrag der Kalenderblatt-Serie zum Binären Baum; er ist einer der wenigen, die das Problem erkannt haben *und* beim Namen zu nennen wagen: "Paths come for free" - aber nur wenn sie matheologisch geglaubt, nicht wenn sie mathematisch konstruiert werden. Sofern die Zifferndarstellungen der reellen Zahlen nur aus allen (potentiell) unendlich vielen endlichen Anfangsabschnitten bestehen, sind die reellen Zahlen nicht mächtiger als die abzählbare Menge der Knoten. Wenn jemand behauptet, dass die Zifferndarstellungen von reellen Zahlen aus "mehr" als ihren endlichen Anfangsabschnitten bestehen, dann sollte er angeben, was man sich unter diesem "Mehr" vorzustellen hat. Doch jede bisher bekannte Erklärung versinkt im Meer der Quantorenvertauschung.

So viel zu den Argumenten für und gegen den Binären Baum. Es tut mir wirklich leid, dass ich kein einziges (für mich) nachvollziehbares Gegenargument bringen konnte. Ich habe noch keines gesehen, würde mich aber freuen, wenn eines käme.

Das Hauptargument, das alle Mengenlehrer überzeugt, "es gibt überabzählbar viele Pfade, weil das aus Cantors Beweis folgt", ist nicht stichhaltig, weil 1) Cantors Beweis keiner ist, wenn man zwischen potentiell und aktual unendlich unterscheiden kann, und weil 2) selbst wenn Cantors Argument richtig wäre, die am Endlichen ausgebildete Logik auf unendlichen Mengen (offenbar) versagt.

Die Ergebnisse der Diskussion lassen sich mit wenigen Worten zusammenfassen: Wenn das aktual Unendliche existiert, so enthält die Vereinigung der folgenden Anfangsabschnitte von ℕ

{1}
{2, 1}
{3, 2, 1}
...

in der ersten (und allen weiteren) Spalte(n) eine Menge, die größer ist, als jeder der vereinigten Anfangsabschnitte. Aufgrund der Inklusionsmonotonie sind aber alle Zahlen der vereinigten Anfangsabschnitte in weniger als zwei der Anfangsabschnitte enthalten. Mit Hilfe von vollständiger Induktion kann man nämlich für jeden Anfangsabschnitt ausschließen, dass seine Vereinigung mit einem darauf folgenden Anfangsabschnitt von letzterem verschieden ist.

Gäbe es also eine Menge ℕ, die größer als *jeder* der Anfangsabschnitte ist, so wäre sie in einem Anfangsabschnitt enthalten. Das ist ausgeschlossen.

Folglich kann das aktual Unendliche nicht widerspruchsfrei existieren.

Folglich versagt das Cantorsche Diagonalverfahren an Beispielen wie der folgenden Liste (und damit grundsätzlich):

0,0
0,1
0,11
0,111
...

Ersetzt man in der Diagonale 0 durch 1, so wird keine von allen Listenzahlen verschiedene Zahl gebildet, sondern lediglich die in der jeweils nächsten Zeile stehende.

Damit enthält auch der Binäre Baum keine aktual unendlich langen Pfade, sondern lediglich alle endlich langen Pfade. Deren Menge ist abzählbar.

Und wer noch immer an unendlich lange Pfade glaubt, der folge dem Beispiel der Botaniker und benutze ein Mikroskop: Er konstruiere den Binären Bonsai, dessen Knoten zwar auf jeder Ebene den Abstand 1 cm besitzen, dessen Schichtdicke zwischen den Niveaus n-1 und n aber

$h(n) = 1/2^n$ cm

ist. Die gesamte Höhe des Binären Baums beträgt dann 1 cm, und jeder *vollendet unendliche* Pfad "endet" auf der Unendlichkeitslinie ω, wo er einen Punkt definiert, der den Abstand 1 cm von seinen Nachbarn besitzt (wobei erstaunlicherweise auch das Nachbarschaftsverhältnis definiert wird - sogar zwischen zwei Pfaden wie 0,0111... und 0,1000..., die doch beide dieselbe reelle Zahl darstellen - ja das aktual Unendliche besitzt ungeahnte Konsequenzen). Die Menge der diskreten Punkte auf einer noch so vollendet unendlich langen Geraden ist abzählbar.

Der Mini-Bonsai (eine Sonderzüchtung derselben Breite, deren Gesamthöhe aber bei der Schichtdicke $h(n) = 1/4^n$ cm nur 1/3 cm beträgt) kommt sogar mit einer überdeckten Fläche von gerade einmal 5/12 cm^2 aus und ist deswegen als Zimmerpflanze für Puppenstuben geeignet.