

# Elastische Katenoide

April 2009

An der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplom-Mathematikers  
angefertigte

Diplomarbeit

vorgelegt von  
SEBASTIAN SCHOLTES

Betreut am Institut für Mathematik durch  
Prof. Dr. HEIKO VON DER MOSEL



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Notation</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Geometrische Grundlagen</b>	<b>11</b>
3.1	Geometrische Größen für Rotationsflächen . . . . .	11
3.2	Krümmung in RIEMMANSchen Mannigfaltigkeiten . . . . .	11
3.3	EUKLIDische Geometrie . . . . .	15
3.4	Hyperbolische Geometrie . . . . .	15
3.5	Rotationsflächen als elastische Kurven in $\mathbb{H}^2$ . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Rotationssymmetrische Minimalflächen</b>	<b>21</b>
4.1	Einführung . . . . .	21
4.2	Relative Minimierer . . . . .	23
4.3	Klassifikation der absoluten Minimierer . . . . .	25
4.3.1	Der Fall $r \geq \rho$ . . . . .	25
4.3.2	Der Fall $r < \rho$ . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Nichtexistenz von Minimierern von <math>\mathcal{A}</math> in <math>W_\alpha(I)</math></b>	<b>31</b>
5.1	Nichtexistenz I . . . . .	31
5.2	Nichtexistenz II . . . . .	35
A.5	Anhang zu Kapitel 5 . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Existenz und Regularität</b>	<b>41</b>
6.1	Umformulierung als eindimensionales Problem . . . . .	41
6.2	Skalierungsverhalten des NITSCHKE-Funktional . . . . .	43
6.3	Stetigkeit des NITSCHKE-Funktional . . . . .	45
6.4	Etwas Approximationstheorie . . . . .	48
6.5	Stückweise polynomiale Minimalfolge . . . . .	50
6.6	Die EULER-LAGRANGE-Gleichung . . . . .	51
6.7	Existenz . . . . .	56
6.8	Regularität . . . . .	61
A.6	Anhang zu Kapitel 6 . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Das WILLMORE-Funktional</b>	<b>71</b>
7.1	Geschichte des WILLMORE-Funktional und die WILLMORE-Vermutung . .	71
7.2	Eine obere Schranke für das Infimum . . . . .	72
7.3	Monotonie der optimalen WILLMORE-Energie . . . . .	74
7.4	A-priori Schranken an die Minimalfolge . . . . .	78

7.5	Existenz von Minimierern . . . . .	81
A.7	Anhang zu Kapitel 7 . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Das NITSCHKE-Funktional</b>	<b>83</b>
8.1	Triviale Minimierer . . . . .	83
8.2	Nichttriviale Minimierer . . . . .	85
8.3	A-priori Schranken an die Minimalfolge . . . . .	85
8.4	(K)Eine obere Schranke für das Infimum . . . . .	93
8.5	Monotonie der optimalen NITSCHKE-Energie . . . . .	94
8.6	Existenz von klassischen Minimierern . . . . .	96
8.7	Vergleichsfunktionen . . . . .	101
A.8	Anhang zu Kapitel 8 . . . . .	106
<b>B</b>	<b>Direkte Methode für parametrische Probleme</b>	<b>111</b>
B.1	Existenz quasinormaler Minimierer . . . . .	111
B.2	Anhang I . . . . .	123
B.3	Anhang II: Monotone reelle Funktionen . . . . .	124
<b>C</b>	<b>Der Hauptsatz über symmetrische Polynome</b>	<b>127</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>129</b>
	<b>Index</b>	<b>132</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

In der Modellierung von Lipid-Doppelschichten bei Biomembranen, Tensid-Filmen oder dünnen elastischen Platten<sup>1</sup> ist die freie Energie pro Flächeneinheit gegeben durch einen symmetrischen Integranden  $\hat{\Phi}(\kappa_1, \kappa_2)$  in den Hauptkrümmungen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  einer Fläche  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ . Unter milden Regularitätsannahmen läßt sich  $\hat{\Phi}$  umschreiben als  $\hat{\Phi}(\kappa_1, \kappa_2) = \Phi(H, K)$  mit der mittleren Krümmung  $H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$  und der GAUSS-Krümmung  $K = \kappa_1\kappa_2$  (im polynomialen Fall etwa ist dies eine Konsequenz des Hauptsatzes über symmetrische Polynome). Nun wollen wir als eine (erste) Näherung für allgemeine nicht-lineare Funktionale nur Terme bis zur zweiten Ordnung berücksichtigen. Dies liefert einen Integranden der Form

$$\Phi(H, K) = \mathbf{a} + \mathbf{b}(H - H_0)^2 - \mathbf{c}K,$$

für Materialkonstanten  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \geq 0$ , und eine Spontankrümmung  $H_0 \in \mathbb{R}$ . Die elastische Energie, welche wir auch als NITSCHKE-Funktional bezeichnen, ist damit gegeben durch

$$\mathcal{E}(\Sigma) = \int_{\Sigma} (\mathbf{a} + \mathbf{b}(H - H_0)^2 - \mathbf{c}K) \, dS, \quad (1.1)$$

mit dem Flächenelement  $dS$ . Dies schließt unter anderem folgende Spezialfälle mit ein:

- (i) das Flächenfunktional  $\mathcal{A}$  für  $\Phi(H, K) = 1$ ,
- (ii) das WILLMORE-Funktional  $\mathcal{W}$  für  $\Phi(H, K) = H^2$ ,
- (iii) das HELFRICH-Funktional für  $\Phi(H, K) = \mathbf{b}(H - H_0)^2 - \mathbf{c}K$ .

Das NITSCHKE-Funktional modelliert elastische Eigenschaften von Materialien und stellt eine Verallgemeinerung des Flächen- und des WILLMORE-Funktional dar. Da im rotationssymmetrischen Fall das Katenoid Minimierer dieser beiden Funktionale ist, wollen wir die Minimierer des NITSCHKE-Funktional (in den später genauer spezifizierten Klassen) in Anlehnung an eine nicht erschienene, aber in [Nit3] aufgeführte Publikation von JOHANNES C.C. NITSCHKE, als *elastische Katenoide* bezeichnen.

---

<sup>1</sup>Als Pionierarbeiten in der Modellierung sind [H],[C], [Ev1] zu nennen, die unter anderem an dem Zustandekommen der Gestalt der Erythrozyten (rote Blutkörperchen) interessiert waren. Für weitere Literaturverweise und die Details der Modellierung siehe [Goe], [Nit1] und [Nit2], [Nit3]. Eine kurze Einführung und numerische Experimente kann man [HSK] entnehmen, aktuelle Arbeiten aus verschiedenen Disziplinen wie Variationsrechnung, Numerik und Physik findet man in [PR], [BGN] und [TS].

In zwei aktuellen Arbeiten [D'Ac,D,G], [D'Ac,F,G,S] wurden Randwertprobleme für rotationssymmetrische Minimierer<sup>2</sup> des WILLMORE-Funktional in der Klasse von Profilkurven

$$N_{\alpha,\beta}([-a, a]) := \{u \in C^{1,1}([-a, a]) \mid u \text{ gerade}, u > 0, u(a) = \alpha, u'(a) = \beta\}$$

für  $a > 0$ ,  $\alpha > 0$  und  $\beta \in \mathbb{R}$  untersucht, und Existenz und klassische Regularität bewiesen.<sup>3</sup> Das Ziel dieser Arbeit ist es, unter anderem ähnliche Ergebnisse für das allgemeinere NITSCHKE-Funktional (1.1) in der Klasse

$$W_{\alpha,\beta}((-a, a)) := \{u \in W^{2,2}((-a, a)) \mid u \text{ gerade}, u > 0, u(a) = \alpha, u'(a) = \beta\}$$

zu erhalten. Nach Umschreiben sieht man, daß es für  $\mathfrak{b} \neq 0$  ausreicht, das Funktional

$$\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a,\alpha,\beta}(u) := \int_I \left[ \left( \gamma u (1 + u'^2)^{1/2} + \frac{1}{u(1 + u'^2)^{1/2}} \right) dx + (\kappa_e(u) + 2H_0)^2 dS \right],$$

mit der EUKLIDISCHEN-Krümmung  $\kappa_e(u)$  und  $\gamma > 0$  auf  $W_{\alpha,\beta}((-a, a))$  zu betrachten.

Zunächst werden wir in Kapitel 6 zeigen, daß klassische Minimierer des Funktional existieren, wenn wir gewisse a-priori Schranken an eine Minimalfolge voraussetzen können. Dazu werden wir die beiden folgenden Sätze beweisen:

### (6.7.1) Existenzsatz

Seien  $a, \alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$  sowie  $\beta, H_0 \in \mathbb{R}$ . Gibt es eine Minimalfolge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq W_{\alpha,\beta}(I)$  für  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a,\alpha,\beta}$  und Konstanten  $c_1, c_2, c_3 > 0$ , so daß

$$0 < c_1 \leq u_n \leq c_2 \quad \text{und} \quad |u'_n| \leq c_3 \quad \text{auf} \quad [-a, a] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{gilt,} \quad (1.2)$$

dann gibt es ein  $u \in W_{\alpha,\beta}(I)$  mit

$$0 < c_1 \leq u \leq c_2 \quad \text{und} \quad |u'| \leq c_3 \quad \text{sowie} \quad \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a,\alpha,\beta}(u) = \inf_{W_{\alpha,\beta}(I)} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a,\alpha,\beta}.$$

### (6.8.1) Regularitätssatz

Seien  $a, \alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$  sowie  $\beta, H_0 \in \mathbb{R}$ , dann ist der Minimierer  $u$  des Funktional  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a,\alpha,\beta}$  aus dem Existenzsatz (6.7.1) glatt, d.h.  $u \in C^\infty(\bar{I})$ .

Die verbleibende Schwierigkeit ist also, die Schranken aus (1.2) für eine Minimalfolge nachzuweisen. Dazu werden wir uns auf DIRICHLET-Nullranddaten für die Ableitung, d.h. auf die Klassen  $W_{\alpha,0}((-a, a))$ , beschränken. Für bestimmte Parameter  $a, \alpha, \gamma, H_0$  werden wir

<sup>2</sup>Der Grund warum man rotationssymmetrische Minimierer betrachtet, ist neben der deutlich vereinfachten Situation die Tatsachen, daß diese Minimierer nach dem „symmetric criticality principle“ (für eine allgemeine Betrachtung siehe z. B. [P]) ebenfalls Extremale des nichtrotationssymmetrischen Problems sind.

<sup>3</sup>Zu erwähnen ist ebenfalls die Arbeit [DG] in der das WILLMORE-Funktional für Rotationsflächen und die sogenannte NAVIER-Randbedingung  $u(\pm 1) = \alpha$  und  $H(\pm 1) = 0$  untersucht wurde, sowie die Arbeit [B,D'Ac,F], welche das Funktional  $\int_\Sigma H^2 dS - \gamma \int_\Sigma K dS$  für Rotationsflächen mit  $u(\pm 1) = \alpha$  und der zugehörigen natürlichen Randbedingung, welche im Fall  $\gamma = 0$  genau die zuvor erwähnte NAVIER-Bedingung ist, untersucht.

in Kapitel 8 die benötigten Schranken, und damit die Existenz von klassischen Minimierern nachweisen. Diese Einschränkungen an die Parameter bestehen im Wesentlichen darin, daß  $a$  durch die beiden Schranken  $F$  und  $G$ , gegeben durch

$$F(\alpha, \gamma, c, H_0) := \frac{\gamma\alpha c(\alpha - c)}{(\gamma + 4H_0^2)\alpha^2 + 1},$$

$$G(\alpha, \gamma, c, H_0) := \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c}(\gamma(\alpha - c) + (\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c}) + 4H_0^2\alpha) + 2|H_0|}}$$

für ein beliebiges  $c \in [1/\sqrt{\gamma}, \alpha)$  nach oben beschränkt sein muß. Konkret werden wir den folgenden Satz beweisen:

**(8.6.2) (Existenz von klassischen Minimierern für das NITSCHKE-Funktional mit  $\gamma > 0$ )**  
Seien  $\gamma > 0$ ,  $H_0 \in \mathbb{R}$  und  $\alpha > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ . Für

$$0 < a < \sup_{1/\sqrt{\gamma} \leq c < \alpha} \min\{F(\alpha, \gamma, c, H_0), G(\alpha, \gamma, c, H_0)\} =: A_{H_0}(\alpha, \gamma),$$

gibt es einen Minimierer  $u \in C^\infty(\bar{I}) \cap W_\alpha(I)$ . In diesem Fall gibt es ein  $c \in [1/\sqrt{\gamma}, \alpha)$ , so daß

$$a < \min\{F(\alpha, \gamma, c, H_0), G(\alpha, \gamma, c, H_0)\}, \quad (1.3)$$

und es gilt

$$0 < c \leq u \leq \frac{a}{\gamma\alpha} \left( \gamma\alpha + \frac{1}{\alpha} + 4H_0^2\alpha \right) + \alpha \quad (1.4)$$

$$|u'| \leq \frac{K}{\sqrt{1 - K^2}} \quad (1.5)$$

für

$$K := \frac{a}{\sqrt{c}} \left[ \gamma(\alpha - c) + \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c} \right) + 4H_0^2\alpha \right]^{1/2} + 2|H_0|a.$$

Zudem erfüllt  $u$  das (zur EULER-LAGRANGE-Gleichung gehörige) DIRICHLET-Problem

$$\begin{cases} \kappa_h(u)^3 \frac{1}{u^2} - 2\kappa_h(u) \frac{1}{u^2} + 2 \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{(1+u'^2)^{1/2}} \kappa_h(u)' \right) \\ + (4H_0^2 + \gamma) \left( \frac{2}{(1+u'^2)^{1/2}} - \kappa_h(u) \right) + 4H_0 \frac{2u''}{(1+u'^2)^2} = 0. & \text{in } (-a, a) \\ u(\pm a) = \alpha, \quad u'(\pm a) = 0. \end{cases}$$

Dabei ist  $\kappa_h(u)$  die Krümmung des Graphen im zweidimensionalen hyperbolischen Raum  $\mathbb{H}^2$ . Da  $F$  in  $c$  beschränkt ist, gibt es zu festem  $\alpha$  und  $\gamma$  ein  $a_0$ , so daß mit der in dieser Arbeit entwickelten Methode für  $a \geq a_0$  keine Existenz mehr gezeigt werden kann. Dies ist möglicherweise eine ähnliche Situation, wie bei rotations-symmetrischen Minimalflächen, wo das minimierende Katenoid für wachsendes  $a$  nicht mehr existiert (siehe Kapitel 4). Ob dieser Effekt hier ebenfalls vorliegt, wäre eine interessante weiterführende Frage. Offen ist weiterhin was passiert, wenn  $\alpha < 1/\gamma$ , oder ob Existenz auch für  $\beta \neq 0$  gezeigt werden kann.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

**Kapitel 2.** Im zweiten Kapitel wird die Notation fixiert.

**Kapitel 3.** In diesem Kapitel werden die Grundlagen, die zur Beschreibung des Problems notwendig sind, kurz zusammengefaßt. Dazu wird der Begriff der geodätischen Krümmung von Kurven in RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten eingeführt und diese speziell für den EUKLIDischen Raum  $\mathbb{E}^2$  und den hyperbolischen Raum  $\mathbb{H}^2$  berechnet. Danach werden wir zeigen, wie man in Anlehnung an eine Beobachtung von ROBERT BRYANT [BG] und ULRICH PINKALL, welche in [D'Ac,D,G] wesentlich benutzt wird, das WILLMORE-Funktional für Rotationsflächen als Elastica-Funktional in  $\mathbb{H}^2$  und damit Rotationsflächen als elastische Kurven in  $\mathbb{H}^2$  beschreiben kann.

**Kapitel 4.** Hier beschäftigen wir uns mit der Klassifikation aller rotationssymmetrischen Minimalflächen des  $\mathbb{R}^3$ . Dabei wird sich ergeben, daß die Profilkurven solcher rotationssymmetrischer Minimalflächen nur eine Katenoide oder die GOLDSCHMIDT-Kurve sein können. Dabei folgen wir der Darstellung in [GH2, Chapter 8, 4.3, S.263–270]. In diesem Kapitel benötigen wir die Ergebnisse aus Anhang B.

**Kapitel 5.** Kapitel fünf beschäftigt sich mit der Frage, ob Minimierer des Flächenfunctionals  $\mathcal{A}$  existieren, wenn man zusätzlich zu den Randwerten, welche in Kapitel 4 betrachtet wurden, noch DIRICHLET Nullrandwerte für die Ableitung vorschreibt, also die Klasse  $W_{\alpha,0}(I)$  betrachtet. Diese Frage wird negativ beantwortet, d.h. es existieren keine Minimierer von  $\mathcal{A}$  in den Klassen  $W_{\alpha,0}(I)$ .

**Kapitel 6.** Im sechsten Kapitel zeigen wir den oben bereits erwähnten Existenzsatz (6.7.1) und Regularitätssatz (6.8.1) für das NITSCHKE-Funktional mit nichtverschwindendem mittleren Krümmungsterm ( $\mathbf{b} \neq 0$ ). Zudem formulieren wir das Problem in einer für das weitere Vorgehen günstigen Form, betrachten das Skalierungsverhalten des NITSCHKE-Functionals und berechnen die EULER-LAGRANGE-Gleichung. Die meisten Beweise und Ergebnisse sind im Wesentlichen leichte Verallgemeinerungen von entsprechenden Ergebnissen in [D'Ac,D,G].

**Kapitel 7.** Nachdem ein kleiner Abriß der Geschichte des WILLMORE-Functionals gegeben wird, stellt das siebte Kapitel die Ergebnisse aus [D'Ac,D,G] vor. Neben dem Nachweis, der für den Existenzsatz benötigten a-priori Schranken über eine Konstruktion, welche die WILLMORE-Energie senkt, werden noch zusätzliche Eigenschaften der Minimierer wie Monotonieverhalten gezeigt. Ebenso wird die fallende Monotonie der optimalen WILLMORE-Energie in Abhängigkeit von den Randdaten  $\alpha$  bewiesen.

**Kapitel 8.** In diesem Kapitel versuchen wir, ähnliche Ergebnisse wie in Kapitel 7, nun für das allgemeinere NITSCHKE-Funktional, zu erhalten. Zunächst bemerken wir, daß für spezielle Randwerte  $\alpha = 1/\sqrt{\gamma}$  die eindeutigen Minimierer Zylinder sind und daß dies die einzigen Randwerte sind, für die es minimierende Zylinder gibt. Dann weisen wir die a-priori Schranken, welche wir für den Existenzsatz (6.7.1) benötigen, nach und zeigen, daß wir uns für verschwindende Spontankrümmung  $H_0 = 0$  bei einer Minimalfolge auf Funktionen, welche auf  $(-a, 0)$  monoton fallend sind, einschränken können. Nun beweisen wir, daß die optimale NITSCHKE-Energie ab einem bestimmten  $\bar{\alpha}$  monoton wachsend in  $\alpha$  und unbeschränkt ist. Für kleine  $\alpha$ , d.h.



$\alpha \in (0, a)$ , bleibt die optimale Energie jedoch beschränkt. Neben dem oben bereits erwähnten Satz (8.6.2) zeigen wir, daß es bei verschwindender Spontankrümmung  $H_0 = 0$  für beliebiges  $a > 0$  und festes  $\gamma > 0$  möglich ist, ein  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(a, \gamma)$  zu wählen, so daß für alle  $\alpha \geq \bar{\alpha}$  die Existenz eines Minimierers gesichert ist. Am Ende dieses Kapitels konstruieren wir Vergleichsfunktion, berechnen deren NITSCHKE-Energie und vergleichen diese numerisch mit der NITSCHKE-Energien der Zylinder.

**Anhang A.** Mit A gefolgt von der Kapitelnummer, werden Anhänge am Ende eines Kapitels gekennzeichnet, in welchen einfache Aussagen, die in einem der Beweise benötigt wurden, der Vollständigkeit halber separat als Lemma bewiesen werden. Der Leser, der diese Aussagen so schon kennt, möge diese Anhänge einfach ignorieren.

**Anhang B.** In Anhang B beschäftigen wir uns mit einer direkten Methode für das Hindernisproblem parametrischer Variationsprobleme, bei der wir quasinormale Minimierer erhalten. In der Darstellung folgen wir dabei [GH2, Chapter 8, 4.2, S.254–263].

**Anhang C.** In diesem Anhang stellen wir kurz den ganz am Anfang erwähnten Hauptsatz über symmetrische Polynome vor.

## Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich gerne ganz herzlich bei meinem Betreuer Prof. Dr. HEIKO VON DER MOSEL bedanken, für die gute Auswahl des Themas, seine ständige Ermutigung (auch wenn es einmal nicht so lief, wie ich es mir vorgestellt hatte) und besonders für seine hervorragende Betreuung. Ebenso gilt mein Dank Herrn PD. Dr. ALFRED WAGNER für einige hilfreiche Hinweise und Herrn Dr. MATHIAS BERGNER für einen Hinweis, der zu den Lemmata (8.1.2) und (8.2.1) führte. Mein ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern ANNE und MARTIN SCHOLTES für ihre vielfältige Unterstützung und dafür, daß sie es mir ermöglicht haben Mathematik zu studieren, sowie meiner Freundin NINA KLEISER für all die kleinen Dinge, Rechtschreibberatung, ihre Geduld wenn ich mal wieder nicht so viel Zeit hatte und nicht zuletzt für ihre Liebe und Ermutigung.



# Kapitel 2

## Notation

Mit  $\mathbb{N}$  bezeichnen wir die Menge der *natürlichen Zahlen*  $\{1, 2, \dots\}$ , und mit  $\mathbb{N}_0$  die Menge  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ . Die Menge der *reellen Zahlen* bezeichnen wir mit  $\mathbb{R}$ , sowie mit  $\mathbb{R}_+$  die Menge der *nichtnegativen reellen Zahlen* und mit  $\mathbb{R}_+^*$  die Menge der *positiven reellen Zahlen*. Die reellen Zahlen und der  $\mathbb{R}^n$  sind im gesamten Text stets mit der Standardtopologie ausgestattet. Für eine Menge  $A$  bezeichnen wir mit  $\#A$  die *Kardinalität von A*. Das *n-dimensionale LEBESGUE-Maß* einer Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{L}^n(A)$  oder  $|A|$ . Für einen normierten Vektorraum  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $x \in X$  und  $r > 0$  bezeichnen wir mit

$$B_r(x) := \{z \in X \mid \|x - z\| < r\}$$

die *offene Kugel um x mit Radius r*.

Für eine offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir für eine meßbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $p \in [1, \infty]$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}, & \text{falls } p \in [1, \infty), \\ \text{wes sup}_{\Omega} |f|, & \text{falls } p = \infty, \end{cases}$$

wobei wir Integrale stets als Integrale bezüglich des LEBESGUE-Maßes auffassen, ebenso wie alle anderen Begrifflichkeiten, wie etwa Meßbarkeit (wenn nicht explizit etwas anderes vereinbart wird). Dies definiert in bekannter Weise die *LEBESGUE-Räume*

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ meßbar, } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\} / \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ meßbar, } f = 0 \text{ f.ü.}\},$$

und die Norm für eine Restklasse  $[f] \in L^p(\Omega)$  durch  $\|[f]\|_{L^p(\Omega)} := \|f\|_{L^p(\Omega)}$ . Unter leichtem Mißbrauch der Notation werden wir wie üblich allerdings auch für Funktionen  $f \in L^p(\Omega)$  schreiben.

Die *SOBOLEV-Räume*  $W^{k,p}(\Omega)$  bezeichnen für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $p \in [1, \infty]$  die folgenden Funktionenräume

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \mid \text{für alle Multiindices } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq k \text{ gilt } \partial^\alpha f \in L^p(\Omega)\},$$

wobei wir die *schwache Ableitung* zum Multiindex  $\alpha$  mit  $\partial^\alpha f$  bezeichnen. Im Eindimensionalen schreiben wir für die schwache Ableitung von  $u$  auch  $u'$ , bzw. wenn das Argument

$t$  ist manchmal auch  $\dot{u}$ . Die Norm auf diesen Räumen ist definiert durch

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & \text{falls } p \in [1, \infty), \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Für  $k \in \mathbb{N}_0$  bezeichnen wir die Räume stetiger Funktionen mit

$$C^k(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha f \text{ ist stetig für } |\alpha| \leq k\},$$

$$C^k(\bar{\Omega}) := \{f \in C^k(\Omega) \mid D^\alpha f \text{ beschränkt und gleichmäßig stetig für } |\alpha| \leq k\},$$

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega),$$

$$C^\infty(\bar{\Omega}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\bar{\Omega}),$$

$$C(\Omega) := C^0(\Omega),$$

$$C(\bar{\Omega}) := C^0(\bar{\Omega}),$$

wobei  $D^\alpha u$  für die *klassische Ableitung* steht. Für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $f \in C^k(\bar{\Omega})$  definieren wir die zugehörige Norm als

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Die Menge der *kritischen Punkte* einer Funktion  $f \in C^1(\Omega)$  ist definiert durch

$$\text{Krit}(f) := \{x \in \Omega \mid f'(x) = 0\}.$$

Der *Träger* einer stetigen Funktion  $f \in C(\Omega)$  ist definiert als

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Wir sagen, daß  $f \in C(\Omega)$  kompakten Träger in  $\Omega$  hat, wenn  $\text{supp } f$  kompakt ist und  $\text{supp } f \subset \Omega$  gilt, in diesem Fall schreiben wir auch  $\text{supp } f \subset\subset \Omega$ . Für  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  bezeichnen wir

$$C_0^k(\Omega) := C_c^k(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) \mid \text{supp } f \subset\subset \Omega\}.$$

Wir sagen, daß eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  *HÖLDERstetig mit Exponent*  $0 < \gamma \leq 1$  ist (oder auch  $\gamma$ -*HÖLDERstetig*), wenn es eine Konstante  $C > 0$  gibt, so daß für alle  $x, y \in \Omega$  gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\gamma.$$

Ist  $\gamma = 1$ , so nennen wir  $f$  auch *LIPSCHITZstetig*. Als *HÖLDER-Räume* bezeichnen wir für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $0 < \gamma \leq 1$  die Räume

$$C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) := \{f \in C^k(\bar{\Omega}) \mid D^\alpha f \text{ ist } \gamma\text{-HÖLDERstetig für } |\alpha| \leq k\}.$$

Auf  $C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$  definieren wir die  $\gamma$ -*HÖLDER-Halbnorm*

$$[f]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma}.$$

Für  $f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  ist die zugehörige Norm gegeben durch

$$\|f\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} := \|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha f]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}.$$

Für eine LIPSCHITZSTETIGE Funktion  $f \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$  ist die LIPSCHITZ-Konstante definiert durch

$$\text{Lip}(f) := \inf\{C > 0 \mid |f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \text{ für alle } x, y \in \Omega\}.$$

In den weiteren Kapiteln verwenden wir die folgenden Funktionenklassen. Für ein  $a > 0$  bezeichnen wir mit  $I = (-a, a) \subset \mathbb{R}$  ein beschränktes offenes Intervall. Seien weiterhin  $\alpha > 0$  und  $\beta \in \mathbb{R}$ , dann setzen wir

$$\begin{aligned} N_{\alpha,\beta}(\bar{I}) &:= \{u \in C^{1,1}(\bar{I}) \mid u > 0, u \text{ symmetrisch}, u(+a) = \alpha, u'(+a) = \beta\}, \\ W_{\alpha,\beta}(I) &:= \{u \in W^{2,2}(I) \mid u > 0, u \text{ symmetrisch}, u(+a) = \alpha, u'(+a) = \beta\}, \\ W(I) &:= \{u \in W^{2,2}(I) \mid u > 0, u \text{ symmetrisch}\}, \end{aligned}$$

wenn wir  $\beta = 0$  setzen, bezeichnen wir die Klassen kurz mit  $N_\alpha(\bar{I})$  und  $W_\alpha(I)$ . Wenn wir eine Funktion  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  als *symmetrisch* oder *gerade* bezeichnen, meinen wir stets Achsensymmetrie bezüglich der  $y$ -Achse, d.h. die Eigenschaft  $u(x) = u(-x)$  für alle  $x \in I$ . Als *ungerade* bezeichnen wir ein  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ , welches punktsymmetrisch zum Ursprung ist, d.h. die Eigenschaft  $u(-x) = -u(x)$  für alle  $x \in I$  besitzt.



# Kapitel 3

## Geometrische Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir einige geometrische Grundlagen zusammenfassen, welche für die Beschreibung des Problems notwendig sind.

### 3.1 Geometrische Größen für Rotationsflächen

Seien  $a > 0$  und  $u : [-a, a] \rightarrow (0, \infty)$ . Eine (parametrisierte) Rotationsfläche  $\Sigma$  mit Profilkurve  $u$  ist gegeben durch die Abbildung

$$f : (-a, a) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, \varphi) \mapsto (u(x) \cos(\varphi), u(x) \sin(\varphi), x).$$

Die erste und zweite Fundamentalform sowie das Flächenelement sind gegeben durch (siehe [K, S. 78-81])

$$\begin{aligned} [g_{i,j}] &= \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + u'^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{bmatrix}, \\ [L_{i,j}] &= \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \frac{1}{(1 + u'(x)^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} -u''(x) & 0 \\ 0 & u(x) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

und

$$dS = \sqrt{\det(g)} = u(1 + u'^2)^{1/2}.$$

Damit sind mittlere und GAUSS-Krümmung gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left( -\frac{u''}{(1 + u'^2)^{3/2}} + \frac{1}{u(1 + u'^2)^{1/2}} \right) \\ K &= -\frac{u''}{u(1 + u'^2)^2}. \end{aligned}$$

### 3.2 Krümmung von Kurven in RIEMMANSchen Mannigfaltigkeiten

Seien  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $TM$  das Tangentialbündel von  $M$  und  $\nabla$  ein linearer Zusammenhang.

**(3.2.1) Definition (CHRISTOFFEL-Symbole).**

Sei  $\{E_i\}$  ein lokaler Rahmen für  $TM$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subset M$  einer Mannigfaltigkeit  $M$ , dann gilt

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$$

für  $n^3$  Abbildungen auf  $U$ . Diese  $\Gamma_{ij}^k$  nennen wir *CHRISTOFFEL-Symbole von  $\nabla$  bezüglich des Rahmens  $\{E_i\}$* .

**(3.2.2) Definition (Kurven).**

Sei  $I$  ein beliebiges beschränktes Intervall, dann nennen wir

- (i) eine stetige Abbildung  $\gamma : I \rightarrow M$  eine *Kurve*,
- (ii) falls  $I$  kompakt ist nennen wir  $\gamma$  auch *Kurvensegment* und
- (iii) eine glatte Kurve mit  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  bezeichnen wir als *reguläre Kurve*,
- (iv) anstatt von einem stückweise regulärem Kurvensegment sprechen wir auch von einer *zulässigen Kurve*.

**(3.2.3) Definition (Reparametrisierung).**

Eine *Reparametrisierung* eines Kurvensegmentes bzw. einer zulässigen Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  ist eine Kurvensegment bzw. eine zulässige Kurve  $\tilde{\gamma}$  von der Form  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : [c, d] \rightarrow M$  mit einem Homöomorphismus  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  der stückweise ein Diffeomorphismus ist, d.h. es gibt eine Unterteilung  $[c_i, c_{i+1}]$  von  $[c, d]$ , so daß

$$\varphi_i : [c_i, c_{i+1}] \rightarrow \varphi([c_i, c_{i+1}]), x \rightarrow \varphi(x)$$

für alle  $i$  ein Diffeomorphismus ist. Ist  $\varphi' > 0$ , so nennen wir  $\varphi$  *orientierungserhaltend* und  $\tilde{\gamma}$  *Vorwärtsreparametrisierung*.

Für eine Kurve  $\gamma : I \rightarrow M$  bezeichnen wir die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes  $V$  entlang  $\gamma$  bezüglich  $\nabla$  mit  $D_t$  (für Details siehe [L, Chapter 4, Lemma (4.9)]).

**(3.2.4) Definition (Geodäten).**

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit einem linearen Zusammenhang  $\nabla$ , und  $\gamma : I \rightarrow M$  eine Kurve in  $M$ , dann nennen wir  $\gamma$  eine *Geodäte bezüglich  $\nabla$* , wenn

$$D_t \dot{\gamma} \equiv 0.$$

**(3.2.5) Satz (Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten).**

*Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit einem linearen Zusammenhang. Für beliebiges  $p \in M$ , beliebiges  $V \in T_p M$  und  $t_0 \in \mathbb{R}$  gibt es ein offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  welches  $t_0$  enthält und eine Geodäte  $\gamma : I \rightarrow M$  mit  $\gamma(t_0) = p$  und  $\dot{\gamma}(t_0) = V$ . Zwei solche Geodäten stimmen auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein.*

*Beweis.* Wir verweisen hier auf [L, Chapter 4, Theorem 4.10, S.58]. □

Sei nun  $(M, g)$  eine RIEMANNSche Mannigfaltigkeit mit RIEMANNScher Metrik  $g$  und  $\nabla$  der RIEMANNSche-Zusammenhang (manchmal auch nach LEVI-CIVITA benannt).



**(3.2.6) Definition (Länge einer Kurve).**

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  ein Kurvensegment, dann definieren wir die *Länge von  $\gamma$*  als

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Für eine zulässige Kurve  $\gamma$  definieren wir die Länge als Summe der Längen der Teilstücke, auf denen  $\gamma$  regulär ist.

**(3.2.7) Definition (Integral bezüglich Bogenlänge).**

Für eine zulässige Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  und  $f \in C^\infty([a, b])$  definieren wir das *Integral über  $f$  bezüglich Bogenlänge* durch

$$\int_\gamma f ds := \int_a^b f(t) |\dot{\gamma}(t)| dt$$

mit dem *Bogenlängenelement*  $ds = |\dot{\gamma}(t)| dt$ .

**(3.2.8) Lemma (Reparametrisierungsinvarianz des Integrals).**

Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eine zulässige Kurve und  $f \in C^\infty([a, b])$ , so ist

$$\int_\gamma f ds$$

*invariant unter Reparametrisierungen.*

*Beweis.* [L, Chapter 6, Exercise 6.3 (i), S.93]. □

**(3.2.9) Lemma (Existenz von Bogenlängenparametrisierungen).**

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eine reguläre Kurve und  $l = \mathcal{L}(\gamma)$ , dann gibt es eine eindeutige *Vorwärtsreparametrisierung*

$$\tilde{\gamma} : [0, l] \rightarrow M,$$

so daß  $|\dot{\tilde{\gamma}}| \equiv 1$ .

*Beweis.* [L, Chapter 6, Exercise 6.2, S.93]. □

**(3.2.10) Definition (Geodätische Krümmung).**

Für eine reguläre Kurve  $\gamma : I \rightarrow M$  auf einem Intervall  $I := [a, b]$  sei  $\tilde{\gamma}$  die Bogenlängenparametrisierung und  $s$  die Bogenlängenfunktion, d.h.  $s(\tau) := \int_a^\tau |\dot{\gamma}|$ , dann definieren wir die *geodätische Krümmung* von  $\gamma$  als

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow \left| \tilde{D}_t \dot{\tilde{\gamma}}(s(t)) \right|,$$

wobei  $\tilde{D}_t$  die kovariante Ableitung entlang  $\tilde{\gamma}$  ist.

Nun wollen wir eine geeignete Darstellung für die geodätische Krümmung einer Kurve, die nicht notwendigerweise nach Bogenlänge parametrisiert ist, zeigen. Dieses Lemma ist eine Übungsaufgabe aus [L, Chapter 8, Exercise 8.2, S.137], allerdings liegt in der momentan aktuellen Ausgabe ein (auch im Errata noch nicht korrigierter) Tippfehler in der Darstellung vor.

**(3.2.11) Lemma (Geodätische Krümmung von Kurven).**

Sei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine reguläres Kurvenssegment, dann gilt

$$\kappa(t) = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|^3} (|D_t \dot{\gamma}(t)|^2 |\dot{\gamma}(t)|^2 - \langle D_t \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle^2)^{1/2}.$$

*Beweis.* Seien

$$\begin{aligned} s : I &\rightarrow [0, \mathcal{L}(\gamma)], \tau \mapsto \int_a^\tau |\dot{\gamma}(x)| dx, \\ \varphi &:= s^{-1} : [0, \mathcal{L}(\gamma)] \rightarrow I, \\ \tilde{\gamma} &:= \gamma \circ \varphi : [0, \mathcal{L}(\gamma)] \rightarrow M \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} s'(x) &= |\dot{\gamma}(x)| \quad \text{und} \\ \varphi'(t) &= \frac{1}{s'(\varphi(t))} = \frac{1}{|\dot{\gamma}(\varphi(t))|} = \langle (\dot{\gamma} \circ \varphi)(t), (\dot{\gamma} \circ \varphi)(t) \rangle^{-1/2} \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \tilde{D}_t(\dot{\gamma} \circ \varphi)(t) &= \left( \frac{d}{dt}(\dot{\gamma} \circ \varphi)^k + \Gamma_{ij}^k(\gamma \circ \varphi) \cdot (\dot{\gamma} \circ \varphi)^j \underbrace{\dot{\tilde{\gamma}}^i}_{=\varphi' \cdot (\dot{\gamma} \circ \varphi)^i} \right) \partial_k \\ &= \varphi'(t) (D_t \dot{\gamma})(\varphi(t)) \end{aligned}$$

ergibt sich, da  $\tilde{\nabla}$  kompatibel ist mit  $g$ , für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= -\frac{1}{2} \langle \dot{\gamma} \circ \varphi, \dot{\gamma} \circ \varphi \rangle^{-3/2} \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma} \circ \varphi, \dot{\gamma} \circ \varphi \rangle \\ &= -\langle \dot{\gamma} \circ \varphi, \dot{\gamma} \circ \varphi \rangle^{-3/2} \langle \tilde{D}_t(\dot{\gamma} \circ \varphi), \dot{\gamma} \circ \varphi \rangle \\ &= -\frac{1}{|\langle \dot{\gamma} \circ \varphi, \dot{\gamma} \circ \varphi \rangle(t)|^4} \langle (D_t \dot{\gamma})(\varphi(t)), (\dot{\gamma} \circ \varphi)(t) \rangle. \end{aligned}$$

Nun beachten wir

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}}^k(t) &= \varphi'(t) \dot{\gamma}^k(\varphi(t)) \\ \ddot{\tilde{\gamma}}^k(t) &= \varphi''(t) \dot{\gamma}^k(\varphi(t)) + \varphi'(t)^2 \ddot{\gamma}^k(\varphi(t)) \end{aligned}$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned} \tilde{D}_t \dot{\tilde{\gamma}}(t) &= \left( \frac{d}{dt} \dot{\tilde{\gamma}}^k + \Gamma_{ij}^k(\tilde{\gamma}) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}^i \dot{\tilde{\gamma}}^j \right) \partial_k \\ &= (\varphi''(\dot{\gamma}^k \circ \varphi) + \varphi'^2(\ddot{\gamma}^k \circ \varphi) + \varphi'^2 \Gamma_{ij}^k(\gamma \circ \varphi) \cdot (\dot{\gamma} \circ \varphi)^i (\dot{\gamma} \circ \varphi)^j) \partial_k \\ &= \varphi''(t) \dot{\gamma}(\varphi(t)) + D_t \dot{\gamma}(\varphi(t)) \varphi'(t)^2. \end{aligned}$$

Jetzt erhalten wir (wir unterdrücken das  $t$  bzw.  $\varphi(t)$  als Argument)

$$\begin{aligned} \langle \tilde{D}_t \dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{D}_t \dot{\tilde{\gamma}} \rangle &= \varphi'^4 \langle D_t \dot{\gamma}, D_t \dot{\gamma} \rangle + 2\varphi'^2 \varphi'' \langle D_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle + \varphi''^2 \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \\ &= \frac{1}{|\dot{\gamma}|^4} |D_t \dot{\gamma}|^2 - 2 \frac{1}{|\dot{\gamma}|^6} \langle D_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^2 + \frac{1}{|\dot{\gamma}|^8} \langle D_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^2 |\dot{\gamma}|^2 \\ &= \frac{1}{|\dot{\gamma}|^6} (|D_t \dot{\gamma}|^2 |\dot{\gamma}|^2 - 2 \langle D_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^2 + \langle D_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^2) \\ &= \frac{1}{|\dot{\gamma}|^6} (|D_t \dot{\gamma}|^2 |\dot{\gamma}|^2 - \langle D_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^2). \end{aligned}$$

Nun folgt die Behauptung mit  $|\tilde{D}_t \dot{\gamma}| = \langle \tilde{D}_t \dot{\gamma}, \tilde{D}_t \dot{\gamma} \rangle^{1/2}$ . □

### 3.3 EUKLIDISCHE GEOMETRIE

#### (3.3.1) Definition ( $n$ -dimensionaler EUKLIDISCHER RAUM $\mathbb{E}^n$ ).

Sei  $n \in \mathbb{N}$ , dann bezeichnen wir den  $\mathbb{R}^n$  versehen mit der EUKLIDISCHEN METRIK, in Standardkoordinaten  $(x_1, \dots, x_n)$  gegeben durch

$$g := \sum_{i=1}^n (dx_i)^2,$$

als  $n$ -dimensionalen EUKLIDISCHEN RAUM  $\mathbb{E}^n$ .

#### (3.3.2) Lemma (Geodätische Krümmung in $\mathbb{E}^2$ ).

Für die Krümmung  $\kappa$  des Graphen einer Funktion  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u > 0$ , aufgefasst als Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^2, t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (t, u(t))$  in  $\mathbb{E}^2$  gilt

$$\kappa = \frac{|u''|}{(1 + u'^2)^{3/2}}.$$

*Beweis.* Da für die metrischen Koeffizienten (in Standardkoordinaten)  $g_{ij} = \delta_{ij}$  gilt, sind die CHRISTOFFEL-Symbole alle 0, so daß

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \partial_1 + u' \partial_2, \\ D_t(\dot{\gamma}) &= \left( \frac{d}{dt} \dot{\gamma}^k \right) \partial_k = 0 + u'' \partial_2, \end{aligned}$$

und nach Lemma (3.2.11) gilt

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{1}{(1 + u'^2)^3} \left( (1 + u'^2) u''^2 - u'^2 u''^2 \right) \\ &= \frac{u''^2}{(1 + u'^2)^3}. \end{aligned}$$

□

Wir wollen nun eine Art vorzeichenbehaftete EUKLIDISCHE KRÜMMUNG  $\kappa_e(u)$  mit  $|\kappa_e(u)| = \kappa_{\mathbb{E}^2}$ , für welche wir auch  $u \in W^{2,2}(I)$  zulassen wollen, betrachten.

#### (3.3.3) Definition.

Für  $u \in W^{2,2}(I)$  setzen wir

$$\kappa_e(u) := \frac{u''}{(1 + u'^2)^{3/2}} = \left[ \frac{u'}{(1 + u'^2)^{1/2}} \right]'$$

### 3.4 Hyperbolische Geometrie

Es gibt verschiedene Möglichkeiten hyperbolische Räume zu definieren, wir werden das POINCARÉ HALBRAUM-MODELL benutzen, da dieses es uns später in Abschnitt 3.5 erlaubt Rotationsflächen als elastische Kurven in  $\mathbb{H}^2$  aufzufassen.

**(3.4.1) Definition ( $n$ -dimensionaler hyperbolischer Raum  $\mathbb{H}_R^n$  mit Radius  $R$ ).**

Sei  $R > 0$  und  $n \geq 2$ , dann ist der  $n$ -dimensionale hyperbolischer Raum  $\mathbb{H}_R^n$  mit Radius  $R$  die RIEMANNsche Mannigfaltigkeit bestehend aus dem oberen Halbraum von  $\mathbb{R}^n$ , in Koordinaten  $(x^1, \dots, x^{n-1}, y)$  definiert durch  $\{y > 0\}$  versehen mit der RIEMANNschen Metrik

$$g_R := R^2 \frac{1}{y^2} \left( \sum_{i=1}^{n-1} (dx_i)^2 + (dy)^2 \right).$$

Im Spezialfall  $R = 1$  sprechen wir nur vom *hyperbolischen Raum*  $\mathbb{H}^n$ .

**(3.4.2) Lemma (CHRISTOFFEL-Symbole von  $\mathbb{H}^2$ ).**

Die CHRISTOFFEL-Symbole von  $\mathbb{H}^2$  (in den gewählten Koordinaten) sind gegeben durch

$$[\Gamma_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{y} \\ -\frac{1}{y} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad [\Gamma_{ij}^2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y} \end{bmatrix}.$$

*Beweis.* Wir berechnen die CHRISTOFFEL-Symbole durch

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}),$$

wobei die metrischen Koeffizienten gegeben sind durch  $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ , also

$$[g_{ij}] = \frac{1}{y^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und damit} \quad [g^{ij}] = y^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,1}^1 &= \frac{1}{2} y^2 (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) + 0 = \frac{1}{2} y^2 (0 + 0 - 0) = 0 \\ \Gamma_{1,2}^1 &= \frac{1}{2} y^2 (\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) + 0 = \frac{1}{2} y^2 \left( 0 + (-2) \frac{1}{y^3} - 0 \right) = -\frac{1}{y} \\ \Gamma_{2,2}^1 &= \frac{1}{2} y^2 (\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) + 0 = \frac{1}{2} y^2 (0 + 0 - 0) = 0 \\ \Gamma_{1,1}^2 &= 0 + \frac{1}{2} y^2 (\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) = \frac{1}{2} y^2 \left( 0 + 0 - (-2) \frac{1}{y^3} \right) = \frac{1}{y} \\ \Gamma_{1,2}^2 &= 0 + \frac{1}{2} y^2 (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) = \frac{1}{2} y^2 (0 + 0 - 0) = 0 \\ \Gamma_{2,2}^2 &= 0 + \frac{1}{2} y^2 (\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = \frac{1}{2} y^2 \left( (-2) \frac{1}{y^2} + (-2) \frac{1}{y^2} - (-2) \frac{1}{y^2} \right) = -\frac{1}{y}. \end{aligned}$$

□

**(3.4.3) Lemma (Geodätische Krümmung in  $\mathbb{H}^2$ ).**

Für die Krümmung des Graphen einer Funktion  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u > 0$ , aufgefasst als Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2, t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (t, u(t))$  in  $\mathbb{H}^2$  gilt

$$\kappa = \frac{|(1 + u'^2) + uu''|}{(1 + u'^2)^{3/2}}.$$

*Beweis.* Wir berechnen nun die einzelnen Bestandteile in der Darstellung aus Lemma (3.2.11) unter Zuhilfenahme von Lemma (3.4.2)

$$\begin{aligned}
D_t(\dot{\gamma}) &= \left( \frac{d}{dt}(\dot{\gamma})^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^i \right) \partial_k \\
&= \left( \gamma_1'' - 2 \frac{\gamma_1' \gamma_2'}{\gamma_2} \right) \partial_1 + \left( \gamma_2'' + \frac{\gamma_1'^2 - \gamma_2'^2}{\gamma_2} \right) \partial_2 \\
&= \left( -2 \frac{u'}{u} \right) \partial_1 + \left( u'' + \frac{1}{u}(1 - u'^2) \right) \partial_2
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
|D_t \dot{\gamma}|^2 &= \langle D_t \dot{\gamma}, D_t \dot{\gamma} \rangle \\
&= \frac{1}{u^2} \left( 4 \frac{u'^2}{u^2} + u''^2 + 2 \frac{u''(1 - u'^2)}{u} + \frac{1}{u^2} (1 - u'^2)^2 \right) \\
&= \frac{1}{u^4} (4u'^2 + u^2 u''^2 + 2uu'' - 2uu''u'^2 + 1 - 2u'^2 + u'^4) \\
&= \frac{1}{u^4} ((1 + 2u'^2 + u'^4) + u^2 u''^2 + 2uu'' - 2uu''u'^2) \\
&= \frac{1}{u^4} ((1 + u'^2)^2 + uu''(uu'' + 2(1 - u'^2))).
\end{aligned}$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned}
|\dot{\gamma}|^2 &= \frac{1}{u^2} (1 + u'^2) \\
\langle D_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle &= \frac{1}{u^2} \left( -2 \frac{u'}{u} + u' u'' + \frac{1}{u} (1 - u'^2) u' \right) \\
&= \frac{1}{u^2} \left( u' u'' - \frac{u'}{u} (1 + u'^2) \right) \\
&= \frac{1}{u^3} (uu' u'' - u'(1 + u'^2))
\end{aligned}$$

Nun erhalten wir (Terme die wir zusammenfassen haben wir durch Über- bzw. Unterstreichen gekennzeichnet)

$$\begin{aligned}
&|D_t \dot{\gamma}|^2 |\dot{\gamma}|^2 - \langle D_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^2 \\
&= \frac{1}{u^6} \left( \overbrace{(1 + u'^2)^3} + \overbrace{u^2 u''^2 (1 + u'^2)} + 2(1 - u'^2)(1 + u'^2) \overbrace{uu'' - u^2 u'^2 u''^2} \right. \\
&\quad \left. + 2uu'^2 u''(1 + u'^2) - \overbrace{u'^2 (1 + u'^2)^2} \right) \\
&= \frac{1}{u^6} \left( (1 + u'^2)^2 + u^2 u''^2 + \overbrace{2(1 - u'^2)(1 + u'^2)uu'' + 2uu'^2 u''(1 + u'^2)} \right) \\
&= \frac{1}{u^6} \left( (1 + u'^2)^2 + u^2 u''^2 + 2(1 + u'^2) \overbrace{(uu'' - uu'^2 u'' + uu'^2 u'')} \right) \\
&= \frac{1}{u^6} \left( (1 + u'^2)^2 + 2uu''(1 + u'^2) + u^2 u''^2 \right) \\
&= \left( \frac{1}{u^3} ((1 + u'^2) + uu'') \right)^2.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Krümmung

$$\begin{aligned}\kappa &= \left[ \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|^6} (|D_t \dot{\gamma}(t)|^2 |\dot{\gamma}(t)|^2 - \langle D_t \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle^2) \right]^{1/2} \\ &= \left[ \frac{u^6}{(1+u^2)^3} \frac{1}{u^6} ((1+u^2) + uu'')^2 \right]^{1/2} \\ &= \frac{|(1+u^2) + uu''|}{(1+u^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

□

### (3.4.4) Lemma (Geodäten in $\mathbb{H}^2$ ).

Die Geodäten von  $\mathbb{H}^2$  sind die folgenden Kurven, versehen mit einer Parametrisierung mit konstanter Geschwindigkeit

- (i) die Halbgeraden parallel zur  $y$ -Achse  $\{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid x = c, y > 0\}$  für ein  $c \in \mathbb{R}$  und
- (ii) die (nichtabgeschlossenen) oberen Halbkreise mit Mittelpunkt auf der  $x$ -Achse.

*Beweis.* Hier verweisen wir auf [L, Chapter 5, Proposition 5.14, S.83].

□

## 3.5 Rotationsflächen als elastische Kurven in $\mathbb{H}^2$

Aus notationstechnischen Gründen benutzen wir eine Art vorzeichenbehaftete Variante  $\kappa_h$  der im vorigen Abschnitt berechneten Krümmung  $\kappa_{\mathbb{H}^2}$  für Graphen in der hyperbolischen Halbebene  $\mathbb{H}^2$ , für welche  $|\kappa_h| = \kappa_{\mathbb{H}^2}$ . Ebenso erweitern wir die geodätische Krümmung auch auf  $u \in W^{2,2}(I)$ .

### (3.5.1) Definition.

Für  $u \in W^{2,2}(I)$  setzen wir

$$\kappa_h(u) := \frac{uu''}{(1+u^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+u^2)^{1/2}}.$$

### (3.5.2) Lemma (andere Darstellung für $\kappa_h$ ).

Für  $u \in W^{2,2}(I)$  mit  $u > 0$  gilt

$$\kappa_h(u) = -\frac{u^2}{u'} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}} \right).$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}-\frac{u^2}{u'} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}} \right) &= -\frac{u^2}{u'} \left( \frac{-u'(1+u^2) - uu'u''}{u^2(1+u^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{(1+u^2) + uu''}{(1+u^2)^{3/2}} \\ &= \kappa_h(u).\end{aligned}$$

□

Die folgende Beobachtung wurde unabhängig von ROBERT BRYANT [BG] und ULRICH PINKALL gemacht.

**(3.5.3) Lemma.**

Für eine Rotationsfläche  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  mit Profilkurve  $u \in W_{\alpha,\beta}(I)$  läßt sich das WILLMORE-Funktional

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \int_{\Sigma} H^2 dS$$

schreiben als

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \mathcal{W}(u) = \frac{\pi}{2} \int_{\gamma} \kappa_{\mathbb{H}^2}^2 ds - 4\pi \frac{\beta}{(1 + \beta^2)^{1/2}},$$

wobei wir den Graph von  $u$  als Kurve in  $\mathbb{H}^2$  auffassen.

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\Sigma) &= 2\pi \int_I \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} + \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right) \right]^2 u(1+u'^2)^{1/2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_I \left[ \frac{u''^2}{(1+u'^2)^3} - 2 \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} + \frac{1}{u^2(1+u'^2)} \right] u(1+u'^2)^{1/2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_I \left[ \frac{u^2 u''^2}{(1+u'^2)^3} - 2 \frac{u u''}{(1+u'^2)^{3/2}} \frac{1}{(1+u'^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1+u'^2)} \right] \frac{(1+u'^2)^{1/2}}{u} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_I \underbrace{\left[ \frac{u^2 u''^2}{(1+u'^2)^3} + 2 \frac{u u''}{(1+u'^2)^{3/2}} \frac{1}{(1+u'^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1+u'^2)} \right]}_{=\kappa_h(u)^2} \underbrace{\frac{(1+u'^2)^{1/2}}{u}}_{=ds} dx \\ &\quad - 4\pi \underbrace{\int_I \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} dx}_{\substack{= \kappa_e(u) \\ 2 \int_{\gamma} K ds}} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\gamma} \kappa_{\mathbb{H}^2}^2 ds - 4\pi \frac{\beta}{(1 + \beta^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

□

**(3.5.4) Bemerkung (Elastica-Funktional).**

Das Funktional des Krümmungsquadrats einer Kurve

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int_{\gamma} \kappa^2 ds$$

wird auch als *Elastica-Funktional* bezeichnet und die zugehörigen minimierenden Kurven (in gewissen Funktionanklassen) heißen *Elastica*, oder *elastische Kurve*. Dies bedeutet, die Minimierer des WILLMORE-Funktional für Rotationsflächen mit entsprechenden Randwerten können auch als *Elastica* in  $\mathbb{H}^2$  (mit den zugehörigen Randwerten) aufgefaßt werden.

Das *Elastica-Funktional* für den EUKLIDISCHEN Raum modelliert die Biegenergie dünner

elastischer Drähte. Das Problem die Gleichungen für dieses Problem aufzustellen und zu lösen wurde 1691 von JAKOB BERNOULLI gestellt. Nachdem er in drei Jahren keine Lösung erhielt veröffentlichte er seine. Sein Neffe DANIEL BERNOULLI schlug einige Jahre später 1743 LEONHARD EULER vor, daß alle *Elastica* das oben genannte Variationsproblem erfüllen. Dieser stellte die zugehörigen EULER-LAGRANGE-Gleichungen auf und klassifizierte sämtliche Lösungen löste im Anhang seines Buches über Variationsrechnung [E]. Für genauere Angaben siehe [T]. Speziell für elastische Kurven in der hyperbolischen Ebene verweisen wir auf [LS1].



# Kapitel 4

## Die Klassifikation rotationssymmetrischer Minimalflächen

In diesem Kapitel wollen wir eine vollständige Beschreibung aller rotationssymmetrischen Minimalflächen des  $\mathbb{R}^3$  erreichen. Dabei wird sich herausstellen, daß die Profilkurven solcher Minimalflächen nur die Katenoide oder das GOLDSCHMIDT-Polygon sein können. Die dazu benötigte Technik, eine direkte Methode für das Hindernisproblem parametrischer Variationsprobleme wird vollständig in Anhang B entwickelt. Dabei folgen wir weitestgehend der Darstellung in [GH2, Chapter 8, 4.3, S.263–270].

### 4.1 Einführung

Zunächst wollen wir die Notation fixieren und das zu lösende Problem beschreiben.

#### (4.1.1) Bezeichnungen.

Seien  $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  und  $a_1 < a_2$  sowie  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ . Dann setzen wir

$$\begin{aligned} P_1 &:= (a_1, \alpha_1), & P_2 &:= (a_2, \alpha_2), \\ M_1 &:= (a_1, 0), & M_2 &:= (a_2, 0) \quad \text{und} \quad I := (0, 1). \end{aligned}$$

Mit  $\mathcal{C}$  bezeichnen wir die folgende Klasse von Kurven  $\gamma(t) = (x(t), z(t))$

$$\mathcal{C} := \{\gamma \in C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^2) \mid z \geq 0, \gamma(0) = P_1, \gamma(1) = P_2, \dot{\gamma}(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in \bar{I} \text{ für die } \dot{\gamma}(t) \text{ existiert}\}.$$

Sei  $\mathcal{A}$  das Flächenfunktional für Rotationsflächen (geteilt durch  $2\pi$ ) und  $\mathcal{L}$  das Längenfunktional für Kurven

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{C} &\rightarrow \mathbb{R}, \gamma \mapsto \int_I z(t) (\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)^{1/2} dt \quad \text{und} \\ \mathcal{L} : \mathcal{C} &\rightarrow \mathbb{R}, \gamma \mapsto \int_I (\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)^{1/2} dt = \int_I |\dot{\gamma}(t)| dt. \end{aligned}$$

#### (4.1.2) CAUCHY-Problem.

Wir suchen für fixierte Randdaten  $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$  alle Rotationsflächen, die Minimierer von  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{C}$  sind, d.h. Kurven  $\gamma \in \mathcal{C}$  mit

$$\mathcal{A}(\gamma) = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{A}.$$

**(4.1.3) Bezeichnungen (GOLDSCHMIDT-Kurve).**

Als GOLDSCHMIDT-Kurve  $\gamma_G$  bezeichnen wir die bijektive, stückweise  $C^1$ -Parametrisierung des Polygons  $P_1M_1M_2P_2$  über  $\bar{I}$  mit  $\gamma_G(0) = P_1, \gamma_G(1) = P_2$  und  $\dot{\gamma}_G \equiv \text{konst.}$  auf den entsprechenden Stücken.

Einige elementare Überlegungen ergeben das folgende

**(4.1.4) Lemma (GOLDSCHMIDT-Kurve wohldefiniert).**

Die GOLDSCHMIDT-Kurve ist wohldefiniert und von der Klasse  $\mathcal{C}$ .

*Beweis.*

- (i) Auf den vertikalen Stücken  $P_1M_1$  und  $M_2P_2$  gilt  $\dot{x} \equiv 0$  und auf dem horizontalen Stück  $M_1M_2$  ist  $\dot{z} \equiv 0$ . Indizieren wir die Kurvenabschnitte, deren Werte auf  $P_1M_1$  bzw.  $M_1M_2$  und  $M_2P_2$  liegen der Reihe nach mit 1, 2, 3, so ergibt sich  $c := |\dot{z}_1| = |\dot{x}_2| = |\dot{z}_3| > 0$  (sonst wäre  $\gamma \equiv \text{konst.}$ ). Aus der Injektivität folgt, daß die einzelnen Abschnitte „in einem durchlaufen“ werden, d.h.

$$\begin{aligned} x_1(t) &\equiv a_1, & z_1(t) &= \pm ct + \bar{z}_1, & t &\in [0, t_1), \\ x_2(t) &= \pm ct + \bar{x}_2, & z_2(t) &\equiv 0, & t &\in [t_1, t_2), \\ x_3(t) &\equiv a_2, & z_3(t) &= \pm ct + \bar{z}_3, & t &\in [t_2, 1], \end{aligned} \quad (4.1)$$

für  $0 < t_1 < t_2 < 1$  und  $\bar{z}_1, \bar{x}_2, \bar{z}_3 \in \mathbb{R}$  (wobei die  $\pm$  jeweils unabhängig voneinander sind).

Unter Beachtung der Randwerte an den Intervallenden erhält man

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \alpha_1, & \pm ct_1 + \bar{z}_1 &= 0, \\ \pm ct_1 + \bar{x}_2 &= a_1, & \pm ct_2 + \bar{x}_2 &= a_2, \\ \pm ct_2 + \bar{z}_3 &= 0, & \pm c + \bar{z}_3 &= \alpha_2, \end{aligned}$$

und  $\pm$  korrespondiert nur zeilenweise.

Eine kurze Überlegung (jeweils zeilenweise eine Gleichung in die andere einsetzen und  $a_1 < a_2$  sowie  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  beachten) ergibt für die variablen Vorzeichen  $\pm$  (zeilenweise) jeweils  $-++$ , so daß die ersten fünf Gleichungen ein inhomogenes lineares Gleichungssystem in  $(\bar{z}_1, t_1, \bar{x}_2, t_2, \bar{z}_3)$  bilden, und die letzte Gleichung  $c$  bestimmt:

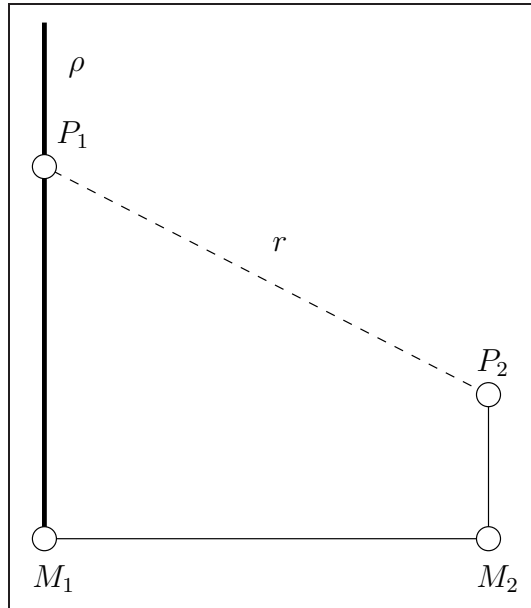
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & +c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ t_1 \\ \bar{x}_2 \\ t_2 \\ \bar{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad c = \alpha_2 - \bar{z}_3.$$

Wegen  $c > 0$  hat das System eine eindeutige Lösung und man erhält

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \alpha_1, & t_1 &= \frac{\alpha_1}{c}, & \bar{x}_2 &= a_1 - \alpha_1, \\ t_2 &= \frac{a_2 - a_1 + \alpha_1}{c}, & \bar{z}_3 &= -(a_2 - a_1 + \alpha_1), & c &= a_2 - a_1 + \alpha_1 + \alpha_2. \end{aligned}$$

- (ii) Aus der Parametrisierung (4.1) und den zugehörigen Randdaten erhält man sofort  $\gamma_G \in \mathcal{C}$ .

□

Abbildung 4.1: Die Größen  $r$  und  $\rho$ .**(4.1.5) Bezeichnungen.**

Wir setzen

$$r := \overline{P_1 P_2} = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} \quad \text{und} \\ \rho := \overline{P_1 M_1} + \overline{P_2 M_2} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

**4.2 Relative Minimierer**

Nun wollen wir ein im folgenden häufig verwendetes Lemma beweisen.

**(4.2.1) Lemma.**

Sei  $\gamma \in \mathcal{C}$  eine Kurve mit Länge  $\mathcal{L}(\gamma) \geq \rho$ , dann gilt

$$\mathcal{A}(\gamma_G) < \mathcal{A}(\gamma).$$

*Beweis.* Sei  $\gamma(t) := (x(t), z(t)) \in \mathcal{C}$  mit  $\mathcal{L}(\gamma) \geq \rho = \alpha_1 + \alpha_2$ , dann gibt es  $0 < t_1 \leq t_2 < 1$ , so daß

$$\alpha_1 = \int_0^{t_1} |\dot{\gamma}| \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \int_{t_2}^1 |\dot{\gamma}|.$$

(i) Es gilt fast überall auf  $I$

$$|\dot{\gamma}| = (\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} \geq |\dot{z}| \geq -\dot{z}, \quad (4.2)$$

so daß

$$z(t) - \underbrace{z(0)}_{=\alpha_1} = \int_0^t \dot{z} \geq - \int_0^t |\dot{\gamma}| =: -\sigma(t),$$

d.h. wegen der Stetigkeit  $z(t) \geq \alpha_1 - \sigma(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ .

Mit der Substitution  $s = \sigma(t)$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha_1^2 &= \alpha_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_1^2 = \int_0^{\sigma(t_1)=\alpha_1} (\alpha_1 - s) ds = \int_0^{t_1} \underbrace{(\alpha_1 - \sigma(t))}_{\leq z(t)} \underbrace{\dot{\sigma}(t)}_{=|\dot{\gamma}(t)|} dt \\ &\leq \int_0^{t_1} z(t) |\dot{\gamma}(t)| dt. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Falls  $\dot{x} \neq 0$  auf einer meßbaren Nichtnullmenge, die Teilmenge von  $[0, t_1]$  ist, so gilt „>“ in (4.2) auf dieser Teilmenge und damit auch in (4.3). Damit gilt „=“ in (4.3) nur falls  $\dot{x} = 0$  fast überall in  $[0, t_1]$ , d.h.  $x(t) = a_1$ .

(ii) Analog erhält man

$$\frac{1}{2} \alpha_2^2 \leq \int_{t_2}^1 z(t) |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

mit „=“ genau dann wenn  $x(t) = a_2$  für  $t \in [t_2, 1]$ .

(iii) Es gilt  $\mathcal{A}(\gamma_G) = \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$ , also

$$\mathcal{A}(\gamma_G) \leq \int_0^{t_1} z |\dot{\gamma}| + \int_{t_2}^1 z |\dot{\gamma}| = \mathcal{A}(\gamma) - \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} z |\dot{\gamma}|}_{\geq 0} \leq \mathcal{A}(\gamma),$$

und es gilt „=“ genau dann wenn

$$\begin{aligned} x \equiv a_1 \text{ auf } [0, t_1] \quad \text{und} \quad x \equiv a_2 \text{ auf } [t_2, 1] \quad \text{und} \quad \int_{t_1}^{t_2} z |\dot{\gamma}| &= 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{z |\dot{\gamma}|}_{\geq 0} &= 0 \text{ fast überall auf } [t_1, t_2] \\ \Leftrightarrow \underbrace{z |\dot{\gamma}|}_{\neq 0} &= 0 \text{ auf } [t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Also

$$\mathcal{A}(\gamma_G) = \mathcal{A}(\gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_G(\bar{I}) = \gamma(\bar{I}).$$

□

#### (4.2.2) Proposition (GOLDSCHMIDT-Kurve ist relativer Minimierer).

Sei  $U_\varepsilon(\gamma_G) := \{P = (x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \geq 0, \text{dist}(P, \gamma_G) \leq \varepsilon\}$  und  $\gamma \in \mathcal{C}$  eine Kurve mit  $\gamma(\bar{I}) \neq \gamma_G(\bar{I})$  und  $\gamma(\bar{I}) \subseteq U_\varepsilon$ , dann gilt für  $\varepsilon > 0$  klein genug

$$\mathcal{A}(\gamma_G) < \mathcal{A}(\gamma).$$

*Beweis.* Seien  $P' = (a_1 + \varepsilon, \varepsilon), P'' = (a_2 - \varepsilon, \varepsilon) \in \partial U_\varepsilon$  die „inneren Eckpunkte“ von  $U_\varepsilon$  und  $\gamma_\varepsilon$  das Polygon  $P_1 P' P'' P_2$ , dann gilt

$$\mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) = (\varepsilon^2 + (\alpha_1 - \varepsilon)^2)^{1/2} + (a_2 - a_1 - 2\varepsilon) + (\varepsilon^2 + (\alpha_2 - \varepsilon)^2)^{1/2}.$$

Wegen

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) = \alpha_1 + \alpha_2 + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{> 0}$$

gilt für kleines  $\varepsilon$  auch  $\mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) \geq \alpha_1 + \alpha_2 = \rho$ . Da  $\gamma_\varepsilon$  klarerweise die kürzeste Verbindung von  $P_1$  und  $P_2$  in  $U_\varepsilon$  ist folgt die Behauptung direkt mit Lemma (4.2.1). □

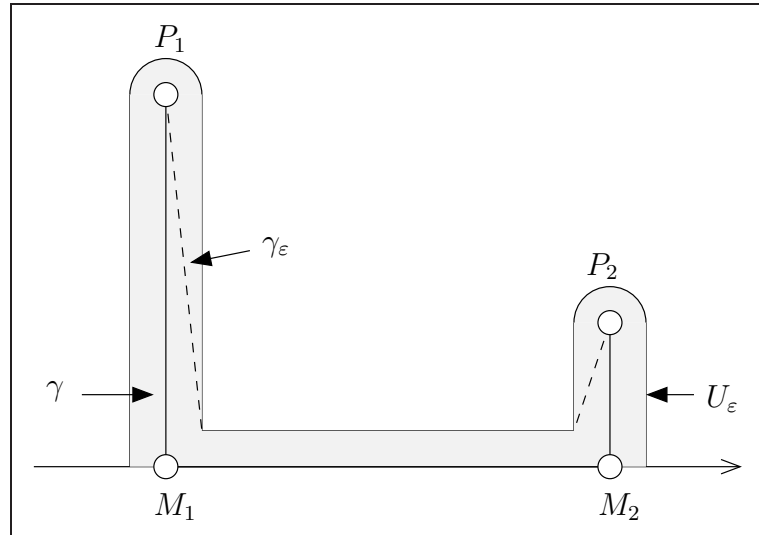


Abbildung 4.2: Die Umgebung  $U_\epsilon$  und die Kurve  $\gamma_\epsilon$ .

### 4.3 Klassifikation der absoluten Minimierer

Wir wollen nun die beiden Fälle  $r \geq \rho$  und  $r < \rho$  unterscheiden.

#### 4.3.1 Der Fall $r \geq \rho$

**(4.3.1) Proposition** ( $\gamma_G$  ist bis auf Reparametrisierung eindeutiger Minimierer für  $r \geq \rho$ ).

Falls  $r \geq \rho$  ist, gilt für alle Kurven  $\gamma \in \mathcal{C}$  mit  $\gamma(\bar{I}) \neq \gamma_G(\bar{I})$

$$\mathcal{A}(\gamma_G) < \mathcal{A}(\gamma).$$

*Beweis.* Es gilt stets  $\mathcal{L}(\gamma) \geq r$ , da im euklidischen Raum die kürzeste Verbindung zwischen zwei verschiedenen Punkten stets die Gerade durch diese beiden Punkte ist. Damit folgt die Behauptung direkt aus Lemma (4.2.1).  $\square$

#### 4.3.2 Der Fall $r < \rho$

**(4.3.2) Bezeichnungen (TODHUNTER-Ellipse).**

Wir betrachten die folgende Ellipse

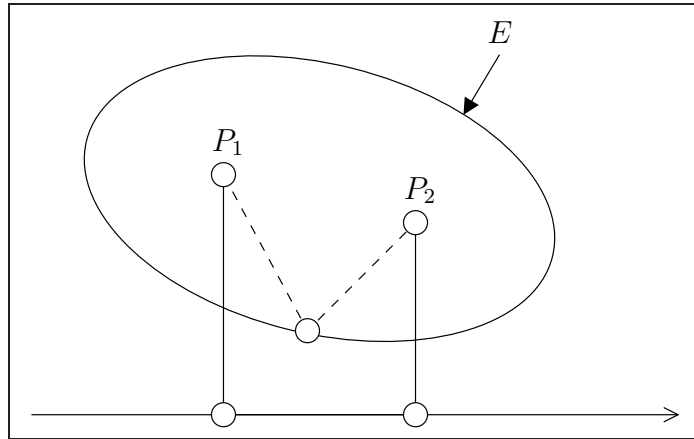
$$E = E_\rho := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |P - P_1| + |P - P_2| \leq \rho\}.$$

**(4.3.3) Lemma.**

Es gilt  $E \subseteq \mathbb{H}^2 := \{P = (x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z > 0\}$ .

*Beweis.* Angenommen  $E \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{H}^2) \neq \emptyset$ , dann gibt es ein  $P = (x, z) \in E$  mit  $z \leq 0$ , also

$$\begin{aligned} |P - P_1| + |P - P_2| &= \left( \underbrace{(x - a_1)^2}_{=0} + \underbrace{(z - \alpha_1)^2}_{\geq \alpha_1^2} \right)^{1/2} + \left( \underbrace{(x - \alpha_2)^2}_{=0} + \underbrace{(z - \alpha_2)^2}_{\geq \alpha_2^2} \right)^{1/2} \\ &> \alpha_1 + \alpha_2 = \rho, \end{aligned}$$

Abbildung 4.3: Die TODHUNTER-Ellipse  $E$ .

und damit  $P \notin E_\rho$ . □

Nach Satz (B.1.15) existiert eine quasinormale Kurve  $\eta \in \mathcal{C}$  mit  $\eta(\bar{I}) \subseteq E$  die  $\mathcal{A}$  unter allen Kurven  $\gamma \in \mathcal{C}$  mit  $\gamma(\bar{I}) \subseteq E$  minimiert.

Nun unterscheiden wir die beiden Fälle  $\eta(\bar{I}) \cap \partial E \neq \emptyset$  und  $\eta(\bar{I}) \cap \partial E = \emptyset$ .

**Der Fall  $\eta(\bar{I}) \cap \partial E \neq \emptyset$**

**(4.3.4) Korollar.**

Falls  $\eta(\bar{I}) \cap \partial E \neq \emptyset$  ist, gilt für alle Kurven  $\gamma \in \mathcal{C}$  mit  $\gamma(\bar{I}) \neq \gamma_G(\bar{I})$

$$\mathcal{A}(\gamma_G) < \mathcal{A}(\gamma).$$

*Beweis.*

- (i) Es gilt also  $\mathcal{L}(\eta) \geq \rho$ , da im EUKLIDISCHEN Raum die kürzeste Verbindung zwischen zwei verschiedenen Punkten die Gerade ist und für Punkte  $P \in \partial E$  gilt  $|P - P_1| + |P - P_2| = \rho$ . Damit folgt mit Lemma (4.2.1)

$$\mathcal{A}(\gamma_G) < \mathcal{A}(\eta) \leq \mathcal{A}(\gamma),$$

für alle  $\gamma \in \mathcal{C}$  mit  $\gamma(\bar{I}) \subseteq E$ .

- (ii) Für eine Kurve  $\gamma \in \mathcal{C}$  mit  $\gamma(\bar{I}) \not\subseteq E$  gilt ebenfalls  $\mathcal{L}(\gamma) \geq \rho$ , so daß sich mit Lemma (4.2.1) ergibt

$$\mathcal{A}(\gamma_G) < \mathcal{A}(\gamma).$$

□

**Der Fall  $\eta(\bar{I}) \cap \partial E = \emptyset$**

**(4.3.5) Lemma.**

Falls  $\eta(\bar{I}) \cap \partial E = \emptyset$  gilt, so ist  $\eta(t) = (x(t), z(t))$  ein  $\mathcal{A}$ -Extremal von der Klasse  $C^2(I, \mathbb{R}^N)$  mit  $\dot{\eta}(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  und erfüllt die EULER-LAGRANGE-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{z\dot{x}}{|\dot{\eta}|} \right] = 0, \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{z\dot{z}}{|\dot{\eta}|} \right] = |\dot{\eta}|.$$

*Beweis.* Die Bedingung  $\eta(\bar{I}) \cap \partial E = \emptyset$  zusammen mit  $\eta(\bar{I}) \subseteq E$  bedeutet also  $\eta(t) \subseteq \text{int } E$  und wir können die Propositionen (B.1.16) und (B.1.20) anwenden (Voraussetzung an die Linienelemente nach (B.1.18) erfüllt). Damit erhalten wir direkt die Behauptung. Das die EULER-LAGRANGE-Gleichungen stimmen sieht man sofort an

$$F(z_1, z_2, p_1, p_2) = z_2(p_1^2 + p_2^2)^{1/2}.$$

□

**(4.3.6) Satz.**

Sei  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine positive Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{u(x)u'(x)}{(1 + u'(x)^2)^{1/2}} \right] = (1 + u'(x)^2)^{1/2}, \quad (4.4)$$

dann ist  $u$  eine Katenoide, d.h.

$$u(x) = c \cdot \cosh \left( \frac{x - x_0}{c} \right),$$

für ein  $c > 0$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.*

- (i) Die Differentialgleichung (4.4) ist die EULER-LAGRANGE-Gleichung des Funktionals  $\mathcal{A}(u) = \int_I u(1 + u'^2)^{1/2}$ , d.h.

$$F(x, z, p) = F(z, p) = z(1 + p^2)^{1/2} \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Mit [vdM, Proposition (1.13)] und

$$\Phi(z, p) := pF_p(z, p) - F(z, p) = pz \frac{p}{(1 + p^2)^{1/2}} - z(1 + p^2)^{1/2} = -\frac{z}{(1 + p^2)^{1/2}}$$

gilt also

$$\Phi(u(x), u'(x)) = -\frac{u(x)}{(1 + u'(x)^2)^{1/2}} \equiv h = \text{konst. auf } I \quad (4.5)$$

und damit  $h < 0$ .

- (ii) Mit Hilfe der EUKLIDischen Krümmung

$$\kappa_e(u(x)) = \left[ \frac{u'(x)}{(1 + u'(x)^2)^{1/2}} \right]'$$

ergibt sich aus der EULER-LAGRANGE-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{u'(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^{1/2}} + u(x)\kappa_e(u(x)) &= (1 + u'(x)^2)^{1/2} \\ \Leftrightarrow u'(x)^2 + u(x)\kappa_e(u(x))(1 + u'(x)^2)^{1/2} &= 1 + u'(x)^2 \\ \Leftrightarrow u(x)\kappa_e(u(x))(1 + u'(x)^2)^{1/2} &= 1 \end{aligned}$$

d.h. also da nach Voraussetzung  $u > 0$  auch  $\kappa_e(u(x)) > 0$  auf  $I$ , so daß  $u$  strikt konvex ist.

(iii) Es ist

$$0 < -h \leq -h \underbrace{(1 + u^2)^{1/2}}_{\geq 1} \stackrel{(4.5)}{=} u$$

$$\Rightarrow 0 < -h \leq \inf_I u.$$

Setze  $c := -h > 0$ , dann gilt  $u \geq c$ .

(iv) Wegen  $\cosh(\mathbb{R}) = [1, \infty)$  ist

$$v(x) := \underbrace{\operatorname{arccosh}}_{\in C^1} \left( \underbrace{\frac{u(x)}{c}}_{\geq 1, \in C^2} \right) \in C^1$$

wohldefiniert und es gilt

$$u(x) = c \cosh(v(x)),$$

sowie

$$(4.5) \Leftrightarrow (cu')^2 = u^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow [c^2 \sinh(v)v']^2 = c^2 \underbrace{(\cosh^2(v) - 1)}_{=\sinh^2(v)}.$$

Also falls

$$v(x) \neq 0 \Leftrightarrow \sinh(v(x)) \neq 0 \Leftrightarrow u(x) \neq c$$

gilt  $[cv']^2 = 1$ .

Da  $u$  strikt konvex ist und  $c \leq u$  kann es höchstens ein  $x \in I$  geben mit  $v(x) = 0$ .  
Wegen  $v \in C^1$  gilt damit für alle  $x \in I$

$$[cv']^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow |v'| = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow v(x) = \pm \frac{1}{c}(x - x_0)$$

für ein  $x_0 \in \mathbb{R}$ , wegen der Symmetrie von  $\cosh$  ohne Einschränkung „+“.

Damit ergibt sich also

$$u(x) = c \cdot \cosh\left(\frac{x - x_0}{c}\right), \quad x \in I.$$

□

#### (4.3.7) Lemma.

Sei  $\eta(t) = (x(t), z(t)) \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$  mit  $z > 0$  eine Lösung der EULER-LAGRANGE-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{z\dot{x}}{|\dot{\eta}|} \right] = 0, \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{z\dot{z}}{|\dot{\eta}|} \right] = |\dot{\eta}|. \quad (4.6)$$

Dann gilt  $x \equiv \text{konst.}$ , oder  $\eta$  ist die Reparametrisierung einer Katenoiden.



*Beweis.* Die Kurven  $x \equiv \text{konst.}$  erfüllen die EULER-LAGRANGE-Gleichungen, sei also  $\eta$  nicht von dieser Form. Dann gibt es ein echtes (maximales) Intervall  $I'$ , auf dem  $\dot{x} \neq 0$ . Wir betrachten die Bogenlängenparametrisierung von  $x$  auf diesem Intervall mit der zugehörigen Parametertransformation  $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I'$ . Die reparametrisierte Kurve  $\tilde{\eta} := \eta \circ \varphi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt ebenfalls die zweite der EULER-LAGRANGE-Gleichungen aus (4.6)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{\tilde{z}\dot{\tilde{z}}}{|\dot{\tilde{\eta}}|} \right] &= \frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{z(\varphi)\dot{z}(\varphi)\dot{\varphi}}{((\dot{x}(\varphi)\dot{\varphi})^2 + (\dot{z}(\varphi)\dot{\varphi})^2)^{1/2}} \right] \\
&= \frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{z(\varphi)\dot{z}(\varphi)}{(\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{z}(\varphi)^2)^{1/2}} \right] \\
&= \frac{(\dot{z}(\varphi)^2\dot{\varphi} + z(\varphi)\ddot{z}(\varphi)\dot{\varphi})(\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{z}(\varphi)^2) - z(\varphi)\dot{z}(\varphi)(\dot{x}(\varphi)\ddot{x}(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{z}(\varphi)\ddot{z}(\varphi)\dot{\varphi})}{(\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{z}(\varphi)^2)^{3/2}} \\
&= \frac{(\dot{z}(\varphi)^2 + z(\varphi)\ddot{z}(\varphi))(\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{z}(\varphi)^2) - z(\varphi)\dot{z}(\varphi)(\dot{x}(\varphi)\ddot{x}(\varphi) + \dot{z}(\varphi)\ddot{z}(\varphi))}{(\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{z}(\varphi)^2)^{3/2}} \cdot \dot{\varphi} \\
&= \frac{d}{dt} \left[ \frac{z\dot{z}}{(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}} \right]_{t=\varphi(\tilde{t})} \cdot \dot{\varphi}(\tilde{t}) \\
&= (\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{z}(\varphi)^2)^{1/2} \cdot \dot{\varphi} \\
&= ((\dot{x}(\varphi)\dot{\varphi})^2 + (\dot{z}(\varphi)\dot{\varphi})^2)^{1/2} \\
&= |\dot{\tilde{\eta}}|.
\end{aligned}$$

Wegen  $\dot{\tilde{x}} \equiv 1$  gilt also

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{\tilde{z}\dot{\tilde{z}}}{(1 + \dot{\tilde{z}}^2)^{1/2}} \right] = (1 + \dot{\tilde{z}}^2)^{1/2},$$

so daß nach Satz (4.3.6)  $\tilde{z}(\tilde{t}) = c \cdot \cosh\left(\frac{\tilde{t}-\tilde{t}_0}{c}\right)$  und  $\tilde{x}(\tilde{t}) = \tilde{t} + b$  auf  $\tilde{I}$ . Mit der Parametertransformation  $\psi : \tilde{t} \mapsto \tilde{t} - b$  ist dann  $\bar{\eta} := \eta \circ \varphi \circ \psi$  auf  $\tilde{I} + b$  eine Katenoide

$$\bar{\eta}(t) = \left( \tilde{t}, c \cdot \cosh\left(\frac{\tilde{t} - (t_0 - b)}{c}\right) \right).$$

Falls  $I'$  nicht ganz  $I$  ist, ergibt sich ein Widerspruch, da dann auf einem an  $I'$  angrenzenden Intervall  $x \equiv \text{konst.}$  gelten muß, und eine horizontale Tangente am Rand von  $I'$  nicht damit verträglich ist, daß  $\eta$  Reparametrisierung einer Katenoiden auf  $I'$  ist und  $\eta \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ .  $\square$

#### (4.3.8) Proposition.

Im Fall  $\eta(\bar{I}) \cap \partial E = \emptyset$  gibt es bis auf Reparametrisierung genau zwei relative Minimierer von  $\mathcal{A}$  in der Klasse  $\mathcal{C}$ , nämlich die GOLDSCHMIDT-Kurve  $\gamma_G$  und eine Katenoide  $\eta$ . Dabei minimiert  $\gamma_G$  das Funktional  $\mathcal{A}$  in  $\{\gamma \in \mathcal{C} \mid \gamma(\bar{I}) \subseteq U_\varepsilon\}$  für kleines  $\varepsilon$  und  $\eta$  in  $\{\gamma \in \mathcal{C} \mid \gamma(\bar{I}) \subseteq E\}$ .

*Beweis.* Die Aussage über  $\gamma_G$  wurde schon in Proposition (4.2.2) gezeigt. Die Aussage über  $\eta$  ergibt sich aus dem nach Lemma (4.3.3) Bemerkten und den Lemmata (4.3.5) und (4.3.7).  $\square$

**(4.3.9) Satz.**

Das in (4.1.2) gestellte Variationsproblem

$$\mathcal{A} \rightarrow \min \quad \text{in} \quad \mathcal{C}$$

besitzt stets eine Lösung. Als Minimierer kommen nur die GOLDSCHMIDT-Kurve oder eine Katenoide welche  $P_1$  und  $P_2$  verbindet in Frage.

*Beweis.* Für Referenzen zu den einzelnen Sätzen siehe Zusammenfassung (4.3.10).  $\square$

**(4.3.10) Zusammenfassung.**

Insgesamt ergibt sich also das folgende Bild

immer			$\gamma_G$ ist relativer Minimierer	(4.2.2)
$r \geq \rho$			$\gamma_G$ ist bis auf Reparametrisierung eindeutiger absoluter Minimierer	(4.3.1)
$r < \rho$	$\eta(I) \cap \partial E \neq \emptyset$		$\gamma_G$ ist bis auf Reparametrisierung eindeutiger absoluter Minimierer	(4.3.4)
	$\eta(I) \cap \partial E = \emptyset$	immer	$\gamma_G$ und $\gamma_K$ sind bis auf Reparametrisierung alle relativen Minimierer	(4.3.8)
		$\mathcal{A}(\gamma_G) < \mathcal{A}(\gamma_K)$	$\gamma_G$ ist bis auf Reparametrisierung eindeutiger absoluter Minimierer	(4.3.8)
		$\mathcal{A}(\gamma_G) = \mathcal{A}(\gamma_K)$	$\gamma_G$ und $\gamma_K$ sind bis auf Reparametrisierung alle absoluten Minimierer	(4.3.8)
		$\mathcal{A}(\gamma_G) > \mathcal{A}(\gamma_K)$	$\gamma_K$ ist bis auf Reparametrisierung eindeutiger absoluter Minimierer	(4.3.8)

Eine präzisere Beschreibung der Situation, für die man allerdings noch Kenntnisse aus der JACOBI-Theorie benötigt, enthält der folgende

**(4.3.11) Satz.**

Wir fixieren eine Katenoide  $\gamma_K$  ausgehend von einem Punkt  $P_1$ . Sei  $P_2$  ein Punkt rechts von  $P_1$ , welcher auf der Katenoiden  $\gamma_K$  liegt. Für  $P_2$  nahe  $P_1$  liefert der entsprechende Teil von  $\gamma_K$ , der die beiden Punkte verbindet den absoluten Minimierer von  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{C}(P_1, P_2)$ . Wandert der Punkt  $P_2$  weiter nach rechts auf der Katenoide, so wird irgendwann der Punkt erreicht, wo der entsprechende Abschnitt von  $\gamma_K$  und die GOLDSCHMIDT-Kurve  $\gamma_G$  absolute Minimierer sind. Von diesem Punkt an ist  $\gamma_K$  nur noch ein relativer Minimierer, bis  $P_2$  den zu  $P_1$  konjugierten Punkt  $P_1^*$  auf der Einhüllenden  $\mathcal{E}^+$  erreicht. Ab diesem Punkt verliert die Katenoide ihre Minimumseigenschaft. Es kann auch vorkommen, daß es keinen zu  $P_1$  konjugierten Punkt rechts von  $P_1$  auf  $\gamma_K$  gibt.

Bezeichnen wir für festes  $P_1$  mit  $G = G(P_1)$  das Gebiet der Punkte  $P_2$ , die durch ein Katenoide in der oberen Halbebene mit  $P_1$  verbunden werden können. Die Menge  $G^*$  aller Punkte  $P_2 \in G$ , für welche die Katenoide der eindeutige Minimierer ist, ist ein Gebiet und wird zur Linken von dem Strahl  $\{(0, z) \in \mathbb{R}^N \mid z \geq 0\}$  und zur Rechten von einer parabelähnlichen Kurve  $\mathcal{M}^+$  von ähnlicher Gestalt wie  $\mathcal{E}^+$ , jedoch mit größerer Steigung begrenzt.

Für Punkte  $P_2 \in \{(x, z) \in \mathbb{R}^N \mid x > x_1, z > 0\} \setminus G$  ist die GOLDSCHMIDT-Kurve der eindeutige Minimierer von  $\mathcal{A}$  und es existiert kein echter relativer Minimierer.

*Beweis.* Hier ohne Beweis, siehe aber [GH1, Chapter 5, 4.2] und [GH2, Chapter 8, 4.3, Theorem 2, S.268f].  $\square$

# Kapitel 5

## Nichtexistenz von Minimierern des Flächenfunktionals in $W_\alpha(I)$

In diesem Kapitel zeigen wir die Nichtexistenz von Minimierern des Flächenfunktionals  $\mathcal{A}$  in der Klasse  $W_\alpha(I)$ . Dazu approximieren wir die GOLDSCHMIDT-Kurve und das Katenoid in  $W_\alpha(I)$  und zeigen unter Zuhilfenahme der Ergebnisse von Kapitel 4 daß keine Minimierer existieren.

Konkret beweisen wir den folgenden

**(5.0.12) Satz (Nichtexistenz von Minimierern von  $\mathcal{A}$  in  $W_\alpha(I)$ ).**

*Seien  $a, \alpha > 0$ , dann existiert kein Minimierer von  $\mathcal{A}$  in  $W_\alpha(I)$ .*

*Beweis.* Nach Satz (4.3.9) gibt es für das Setting aus Kapitel 4 nur die beiden Fälle, daß die Katenoide oder die GOLDSCHMIDT-Kurve Minimierer des Flächenfunktionals sind. Dies sind genau die in den folgenden Abschnitten untersuchten Fälle, so daß die Behauptung mit Satz (5.1.3) und Satz (5.2.3) folgt.  $\square$

Wie bereits erwähnt, wollen wir nun eine Fallunterscheidung nach der Gestalt der Minimierer des Flächenfunktionals (im Setting von Kapitel 4) vornehmen.

### 5.1 Nichtexistenz I

Wir nehmen an, daß  $a$  und  $\alpha$  so gewählt sind, daß die Katenoide absoluter Minimierer des Flächenfunktionals unter allen LIPSCHITZ-Kurven  $\gamma \in C^{0,1}([0, 1], \mathbb{R}^2)$  in der oberen Halbebene mit den Randwerten  $\gamma(0) = \gamma(1) = \alpha$  ist (vergleiche Kapitel 4).

Nun approximieren wir das Katenoid

$$f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tilde{a} \cosh(x/\tilde{a}), \text{ für ein } \tilde{a} > 0,$$

auf folgende Weise durch  $W_\alpha(I)$ -Funktionen. Für  $0 < \varepsilon < a$  setze

$$f_\varepsilon : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in (-(a - \varepsilon), a - \varepsilon), \\ p_\varepsilon(x), & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $p_\varepsilon$  auf  $[a - \varepsilon, a]$  das HERMITE-Interpolationspolynom (siehe auch (6.4.1)) zu den Randwerten

$$p_\varepsilon(a - \varepsilon) = f(a - \varepsilon), \quad p_\varepsilon(a) = f(a), \quad (5.1)$$

$$p'_\varepsilon(a - \varepsilon) = f'(a - \varepsilon), \quad p'_\varepsilon(a) = 0, \quad (5.2)$$

ist (auf  $[-a, -(a-\varepsilon)]$  zu den entsprechenden Randwerten, ohne Einschränkung betrachten wir aufgrund der Symmetrie die Situation nur rechts vom Ursprung).

**(5.1.1) Proposition ( $f_\varepsilon$  approximiert  $f$ ).**

Falls  $\varepsilon$  klein genug ist, gilt  $f_\varepsilon > 0$ , und es gilt

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{W^{1,2}(I)} f.$$

*Beweis.* Wir betrachten das HERMITE-Polynom in NEWTON-Darstellung

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^n [t_0, \dots, t_i] f \cdot \omega_i(t) \quad \text{mit}$$

$$\omega_i(t) = \prod_{j=0}^{i-1} (t - t_j).$$

Dies liefert für  $t_0 = t_1 = x_0 < t_2 = t_3 = x_1$  und die folgenden Daten

$$\begin{aligned} p(x_0) &= A, & p'(x_0) &= A', \\ p(x_1) &= B, & p'(x_1) &= B', \end{aligned}$$

die dividierten Differenzen

$$\begin{aligned} [t_0]p &= A, \\ [t_1]p &= A, & [t_0, t_1]p &= A', \\ [t_2]p &= B, & [t_1, t_2]p &= \frac{A-B}{x_0-x_1}, & [t_0, t_1, t_2]p &= \frac{A' - \frac{A-B}{x_0-x_1}}{x_0-x_1}, \\ [t_3]p &= B, & [t_2, t_3]p &= B', & [t_1, t_2, t_3]p &= \frac{\frac{A-B}{x_0-x_1} - B'}{x_0-x_1}, \end{aligned}$$

und

$$[t_0, t_1, t_2, t_3]p = \frac{A' - \frac{A-B}{x_0-x_1} - \frac{A-B}{x_0-x_1} + B'}{(x_0-x_1)^2} = \frac{A' + B'}{(x_0-x_1)^2} - 2 \frac{A-B}{(x_0-x_1)^3},$$

sowie

$$\omega_0(x) = 1, \quad \omega_1(x) = (x - x_0), \quad \omega_2(x) = (x - x_0)^2, \quad \omega_3(x) = (x - x_0)^2(x - x_1).$$

Setzen wir nun die ursprünglichen Daten aus (5.1) und (5.2) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} p_\varepsilon(x) &= \tilde{a} \cosh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) + \sinh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) (x - a + \varepsilon) \\ &+ \frac{\sinh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \tilde{a} \frac{\cosh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right)}{-\varepsilon}}{-\varepsilon} (x - a + \varepsilon)^2 \\ &+ \left[ \frac{\sinh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right)}{(-\varepsilon)^2} - 2\tilde{a} \frac{\cosh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right)}{(-\varepsilon)^3} \right] (x - a + \varepsilon)^2 (x - a) \end{aligned}$$

und damit für die Ableitung

$$\begin{aligned}
 p'_\varepsilon(x) &= \sinh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) \\
 &+ \frac{\sinh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \tilde{a} \frac{\cosh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right)}{-\varepsilon}}{-\varepsilon} 2(x-a+\varepsilon) \\
 &+ \left[ \frac{\sinh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right)}{(-\varepsilon)^2} - 2\tilde{a} \frac{\cosh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right)}{(-\varepsilon)^3} \right] [2(x-a+\varepsilon)(x-a) + (x-a+\varepsilon)^2].
 \end{aligned}$$

Nun betrachten wir für  $x \in [a-\varepsilon, a]$  die Differenz

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f_\varepsilon(x)| &\leq \tilde{a} \left| \cosh\left(\frac{x}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) \right| + \left| \sinh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) \right| \underbrace{|x-a+\varepsilon|}_{\leq \varepsilon} \\
 &+ \left| \sinh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \tilde{a} \frac{\cosh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right)}{-\varepsilon} \right| \underbrace{\left| \frac{(x-a+\varepsilon)^2}{-\varepsilon} \right|}_{\leq \varepsilon} \\
 &+ \left| \sinh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) \right| \underbrace{\left| \frac{(x-a+\varepsilon)^2(x-a)}{(-\varepsilon)^2} \right|}_{\leq \varepsilon} \\
 &+ 2\tilde{a} \left| \cosh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right) \right| \underbrace{\left| \frac{(x-a+\varepsilon)^2(x-a)}{(-\varepsilon)^3} \right|}_{\leq 1},
 \end{aligned}$$

so daß wegen  $f = f_\varepsilon$  auf  $(-(a-\varepsilon), a-\varepsilon)$  (und der Symmetrie) gilt

$$\begin{aligned}
 \|f - f_\varepsilon\|_{L^\infty(I)} &\leq \tilde{a} \left\| \cosh\left(\frac{\cdot}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) \right\|_{L^\infty((a-\varepsilon, a))} + \left| \sinh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) \right| \varepsilon \\
 &+ \left| \sinh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) \right| \varepsilon + \tilde{a} \left| \cosh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right) \right| \\
 &+ \left| \sinh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) \right| \varepsilon + 2\tilde{a} \left| \cosh\left(\frac{a-\varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right) \right| \\
 &\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0,
 \end{aligned}$$

wobei der Grenzwert aufgrund der Stetigkeit von  $\sinh$  und  $\cosh$  richtig ist.

Für  $x \in [a - \varepsilon, a]$  gilt für die Differenz der Ableitungen

$$\begin{aligned}
|f' - f'_\varepsilon| &\leq \left| \sinh\left(\frac{x}{\tilde{a}}\right) - \sinh\left(\frac{a - \varepsilon}{\tilde{a}}\right) \right| + 2 \underbrace{\left| \sinh\left(\frac{a - \varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \frac{\cosh\left(\frac{a - \varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right)}{-\frac{\varepsilon}{\tilde{a}}} \right|}_{\substack{\rightarrow \cosh'(a/\tilde{a}) = \sinh(a/\tilde{a}), \varepsilon \searrow 0 \\ \rightarrow 0, \varepsilon \searrow 0}} \underbrace{\left| \frac{x - a + \varepsilon}{-\varepsilon} \right|}_{\leq 1} \\
&+ \underbrace{\left| \sinh\left(\frac{a - \varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \frac{\cosh\left(\frac{a - \varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right)}{-\frac{\varepsilon}{\tilde{a}}} \right|}_{\rightarrow 0, \varepsilon \searrow 0, (\text{s.o.})} \underbrace{\left| \frac{2(x - a + \varepsilon)(x - a) + (x - a + \varepsilon)^2}{(-\varepsilon)^2} \right|}_{\leq 3} \\
&+ \underbrace{\left| \frac{\cosh\left(\frac{a - \varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right)}{-\frac{\varepsilon}{\tilde{a}}} \right|}_{\rightarrow \sinh(a/\tilde{a}), \varepsilon \searrow 0} \underbrace{\left| \frac{2(x - a + \varepsilon)(x - a) + (x - a + \varepsilon)^2}{(-\varepsilon)^2} \right|}_{\leq 3}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|f' - f'_\varepsilon\|_{L^\infty(I)} &\leq \left\| \sinh\left(\frac{\cdot}{\tilde{a}}\right) - \sinh\left(\frac{a - \varepsilon}{\tilde{a}}\right) \right\|_{L^\infty((a - \varepsilon, a))} \\
&+ 5 \left| \sinh\left(\frac{a - \varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \frac{\cosh\left(\frac{a - \varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right)}{-\frac{\varepsilon}{\tilde{a}}} \right| \\
&+ 3 \left| \frac{\cosh\left(\frac{a - \varepsilon}{\tilde{a}}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right)}{-\frac{\varepsilon}{\tilde{a}}} \right| \\
&\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 3 \left| \sinh\left(\frac{a}{\tilde{a}}\right) \right|.
\end{aligned}$$

Für die  $W^{1,2}(I)$ -Norm bedeutet dies wegen  $f_\varepsilon = f$  und  $f'_\varepsilon = f'$  auf  $[-(a - \varepsilon), (a - \varepsilon)]$ , daß

$$\|f - f_\varepsilon\|_{W^{1,2}(I)}^2 \leq 2 \left( \|f - f_\varepsilon\|_{L^\infty(I)}^2 + \|f' - f'_\varepsilon\|_{L^\infty(I)}^2 \right) |(a - \varepsilon, a)| \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0.$$

Aufgrund der stetigen Einbettung  $W^{1,2}(I) \hookrightarrow C^{0,1/2}(\bar{I})$  [vdM, Satz (2.14) (ii)] gilt auch  $f_\varepsilon \rightarrow f$  in  $C^0(\bar{I})$ , so daß für  $\varepsilon$  klein genug wegen  $f > 0$  auch  $f_\varepsilon > 0$  gilt.  $\square$

**(5.1.2) Proposition (Stetigkeit von  $\mathcal{A}$  auf  $W^{1,2}(I)$ ).**

*Das Flächenfunktional*

$$\mathcal{A} : W^{1,2}(I) \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \int_I u(x) (1 + u'(x)^2)^{1/2} dx$$

*ist stetig.*

*Beweis.* Die Rechnung in Proposition (6.3.1) (6.4) setzt nur  $u \in W^{1,2}(I)$  voraus und zeigt die Stetigkeit des Flächenfunktionals.  $\square$

**(5.1.3) Satz (Nichtexistenz).**

*Seien  $a$  und  $\alpha$  so gewählt, daß die Katenoide absoluter Minimierer des Flächenfunktionals ist, dann gibt es keinen Minimierer von  $\mathcal{A}$  in  $W_\alpha(I)$ .*

*Beweis.* Bezeichne  $f$  die minimierende Katenoide, dann gilt nach Proposition (5.1.1) und Proposition (5.1.2) auch  $\mathcal{A}(f_\varepsilon) \rightarrow \mathcal{A}(f)$  für  $\varepsilon \searrow 0$  und  $(f_\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} \subseteq W_\alpha(I)$ , für ein klein genug gewähltes  $\varepsilon_0 > 0$ . Damit ist also

$$\inf_{W_\alpha(I)} \mathcal{A} \leq \mathcal{A}(f).$$

Wegen  $W_\alpha(I) \subset \mathcal{C}$  aus Bezeichnung (4.1.1) gilt

$$\inf_{W_\alpha(I)} \mathcal{A} = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{A} = \mathcal{A}(f),$$

aber nach Satz (4.3.9), unter Beachtung von  $W_\alpha(I) \subset \mathcal{C}$ , kann ein potentieller Minimierer in  $W_\alpha(I)$  nur die Katenoide  $f$ , oder die GOLDSCHMIDT-Kurve sein. Da beide Kurven nicht in  $W_\alpha(I)$  liegen, die GOLDSCHMIDT-Kurve läßt sich nicht als Graph darstellen und das Katenoid erfüllt nicht  $f'(\pm a) = 0$ , folgt die Behauptung.  $\square$

## 5.2 Nichtexistenz II

Wir wollen zunächst zeigen, daß falls die GOLDSCHMIDT-Kurve Minimierer von  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{C}$  ist, das Infimum von  $\mathcal{A}$  über  $W_\alpha(I)$  ebenfalls gleich dem Wert von  $\mathcal{A}$  für die GOLDSCHMIDT-Kurve ist. Dazu berechnen wir zuerst den Flächeninhalt für eine erste Approximation der GOLDSCHMIDT-Kurve, die jedoch weder echt positiv ist, noch Null-Randwerte für die Ableitungen besitzt.

### (5.2.1) Lemma.

Für  $a > \varepsilon > 0$  und  $\alpha > 0$  definieren wir

$$f_\varepsilon : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in (-(a - \varepsilon), (a - \varepsilon)), \\ \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - a + \varepsilon), & x \in [a - \varepsilon, a], \\ \frac{\alpha}{\varepsilon}(x + \alpha - \varepsilon), & x \in [-a, -(a - \varepsilon)] \end{cases}$$

Dann gilt  $f_\varepsilon \in C^{0,1}(\bar{I}) \subset W^{1,2}(I)$  und

$$\mathcal{A}(f_\varepsilon) = \alpha(\varepsilon^2 + \alpha^2)^{1/2}, \quad \text{also insbesondere} \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{A}(f_\varepsilon) = \alpha^2.$$

*Beweis.* Es ist klar, daß  $f \in C^{0,1}(\bar{I})$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f_\varepsilon) &= 2 \int_{[a-\varepsilon, a]} \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - a + \varepsilon) \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^2\right)^{1/2} dx \\ &= 2 \frac{\alpha}{\varepsilon} \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^2\right)^{1/2} \left[\frac{1}{2}x^2 - (a - \varepsilon)x\right]_{a-\varepsilon}^a \\ &= 2 \frac{\alpha}{\varepsilon} \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^2\right)^{1/2} \left[\frac{1}{2}(a^2 - (a - \varepsilon)^2) - (a - \varepsilon)(a - (a - \varepsilon))\right] \\ &= 2 \frac{\alpha}{\varepsilon} \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^2\right)^{1/2} \left[\frac{1}{2}(2a\varepsilon - \varepsilon^2) - (a - \varepsilon)\varepsilon\right] \\ &= 2 \frac{\alpha}{\varepsilon} \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^2\right)^{1/2} \left[-\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \varepsilon^2\right] = \alpha \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^2\right)^{1/2} \varepsilon = \alpha(\varepsilon^2 + \alpha^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

$\square$

Nun wollen wir die oben angesprochenen Makel von  $f_\varepsilon$  beheben, indem wir jedes  $f_\varepsilon$  durch  $f_{\varepsilon'}^\varepsilon \in W_\alpha(I)$  approximieren.

**(5.2.2) Lemma.**

Für  $0 < \varepsilon' < \varepsilon < a$  definiere

$$f_{\varepsilon'}^\varepsilon : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \varepsilon', & x \in [0, (a - \varepsilon)), \\ p_1(x), & x \in [a - \varepsilon, a - \varepsilon + \varepsilon'], \\ \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - a + \varepsilon), & x \in (a - \varepsilon + \varepsilon', a - \varepsilon'), \\ p_2(x), & x \in [a - \varepsilon', a], \\ \text{symmetrisch fortgesetzt auf } [-a, 0), \end{cases}$$

wobei  $p_1 = p_{1,\varepsilon}$  und  $p_2 = p_{2,\varepsilon}$  gegeben sind durch die HERMITE-Interpolationspolynome zu den Daten

$$\begin{aligned} p_1(a - \varepsilon) &= \varepsilon', & p_1(a - \varepsilon + \varepsilon') &= \frac{\alpha}{\varepsilon}\varepsilon', \\ p_1'(a - \varepsilon) &= 0, & p_1'(a - \varepsilon + \varepsilon') &= \frac{\alpha}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p_2(a - \varepsilon') &= \alpha - \alpha\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}, & p_2(a) &= \alpha, \\ p_2'(a - \varepsilon') &= \frac{\alpha}{\varepsilon}, & p_2'(a) &= 0. \end{aligned}$$

Dann gilt  $f_{\varepsilon'}^\varepsilon \in W_\alpha(I)$  für  $\varepsilon$  klein genug und

$$f_{\varepsilon'}^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon' \searrow 0]{W^{1,2}(I)} f_\varepsilon.$$

*Beweis.* Wir erhalten auf  $[a - \varepsilon, a - \varepsilon + \varepsilon']$  wie in Proposition (5.1.1)

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon'}^\varepsilon(x) &= \varepsilon' + 0 + \frac{0 - \frac{\varepsilon' - \frac{\alpha}{\varepsilon}\varepsilon'}{-\varepsilon'}}{-\varepsilon'}(x - a + \varepsilon)^2 + \left[ \frac{0 + \frac{\alpha}{\varepsilon}}{(-\varepsilon')^2} \right. \\ &\quad \left. - 2\frac{\varepsilon'(1 - \frac{\alpha}{\varepsilon})}{(-\varepsilon')^3} \right] (x - a + \varepsilon)^2(x - a + \varepsilon - \varepsilon') \\ &= \varepsilon' + (x - a + \varepsilon)^2 \left[ \left( \frac{\alpha}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{1}{\varepsilon'} + \left( -\frac{\alpha}{\varepsilon} + 2 \right) \frac{x - a + \varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon'^2} \right] \\ &> 0, \end{aligned}$$

falls  $0 < \varepsilon' < \varepsilon < \frac{\alpha}{2}$  ist, und

$$\begin{aligned} (f_{\varepsilon'}^\varepsilon)'(x) &= \frac{\alpha}{\varepsilon} \left[ -\frac{1}{\varepsilon'^2}(x - a + \varepsilon)^2 + \left( \frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon'^2}(x - a + \varepsilon - \varepsilon') \right) 2(x - a + \varepsilon) \right] \\ &\quad + \frac{2}{\varepsilon'^2}(x - a + \varepsilon)^2 + \left( -\frac{1}{\varepsilon'} + \frac{2}{\varepsilon'^2}(x - a + \varepsilon - \varepsilon') \right) 2(x - a + \varepsilon). \end{aligned}$$



Für  $p_2$ , d.h.  $x \in [a - \varepsilon', a]$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
f_{\varepsilon'}^{\varepsilon}(x) &= \left(\alpha - \varepsilon' \frac{\alpha}{\varepsilon}\right) + \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - a + \varepsilon') + \underbrace{\frac{\frac{\alpha}{\varepsilon} - \frac{\alpha - \varepsilon' \frac{\alpha}{\varepsilon} - \alpha}{\varepsilon - \varepsilon' - \alpha}}{-\varepsilon'}}_{=0} (x - a + \varepsilon')^2 \\
&+ \underbrace{\left[\frac{\frac{\alpha}{\varepsilon} + 0}{(-\varepsilon')^2} - 2 \frac{\alpha - \alpha \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \alpha}{(-\varepsilon')^3}\right]}_{=-\frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon'^2}} (x - a + \varepsilon')^2 (x - a) \\
&= \alpha \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) + \frac{\alpha}{\varepsilon} \underbrace{(x - a + \varepsilon')}_{>0} + \underbrace{\left[-\frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon'^2}\right]}_{<0} (x - a + \varepsilon')^2 \underbrace{(x - a)}_{<0} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

und für die Ableitung

$$(f_{\varepsilon'}^{\varepsilon})'(x) = \frac{\alpha}{\varepsilon} + \left[-\frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon'^2}\right] \left[2(x - a + \varepsilon')(x - a) + (x - a + \varepsilon')^2\right].$$

Für  $x \in [a - \varepsilon, a - \varepsilon + \varepsilon']$  gilt damit für die Differenz

$$\begin{aligned}
|f_{\varepsilon'}^{\varepsilon}(x) - f_{\varepsilon}(x)| &= \left| \varepsilon' + \frac{\alpha}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon'^2}(x - a + \varepsilon - \varepsilon')\right) (x - a + \varepsilon)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{1}{\varepsilon'} + \frac{2}{\varepsilon'^2}(x - a + \varepsilon - \varepsilon')\right) (x - a + \varepsilon)^2 - \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - a + \varepsilon) \right| \\
&\leq \varepsilon' + \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon'} \varepsilon'^2 + \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon'^2} \varepsilon'^3 + \frac{1}{\varepsilon'} \varepsilon'^2 + \frac{2}{\varepsilon'^2} \varepsilon'^3 + \frac{\alpha}{\varepsilon} \varepsilon' \\
&\xrightarrow{\varepsilon' \searrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Für  $x \in [a - \varepsilon', a]$  ist

$$\begin{aligned}
|f_{\varepsilon'}^{\varepsilon}(x) - f_{\varepsilon}(x)| &= \left| \alpha \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) + \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - a + \varepsilon') + \left[-\frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon'^2}\right] (x - a + \varepsilon')^2 (x - a) - \frac{\alpha}{\varepsilon}(x - a + \varepsilon) \right| \\
&\leq \left| \alpha \left(-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{x - a}{\varepsilon}\right) \right| + \frac{\alpha}{\varepsilon} \varepsilon' + \frac{\alpha}{\varepsilon \varepsilon'^2} \varepsilon'^2 \varepsilon' \\
&\leq 2\alpha \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon} \varepsilon' + \frac{\alpha}{\varepsilon \varepsilon'^2} \varepsilon'^2 \varepsilon' \\
&\leq 4\alpha \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \\
&\xrightarrow{\varepsilon' \searrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Auf den übrigen Teilintervallen von  $[0, a]$  gilt  $|f_{\varepsilon'}^{\varepsilon}(x) - f_{\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon'$ , so daß

$$\|f_{\varepsilon'}^{\varepsilon} - f_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(I)} \xrightarrow{\varepsilon' \searrow 0} 0.$$

Für  $x \in [a - \varepsilon, a - \varepsilon + \varepsilon']$  erhalten wir

$$\begin{aligned} |(f_{\varepsilon'}^\varepsilon)'(x) - f'_\varepsilon(x)| &= \left| \frac{\alpha}{\varepsilon} \left[ -\frac{1}{\varepsilon'^2}(x - a + \varepsilon)^2 + \left( \frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon'^2}(x - a + \varepsilon - \varepsilon') \right) 2(x - a + \varepsilon) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\varepsilon'^2}(x - a + \varepsilon)^2 + \left( -\frac{1}{\varepsilon'} + \frac{2}{\varepsilon'^2}(x - a + \varepsilon - \varepsilon') \right) 2(x - a + \varepsilon) - \frac{\alpha}{\varepsilon} \right| \\ &\leq \frac{\alpha}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{\varepsilon'^2}\varepsilon'^2 + \left( \frac{1}{\varepsilon'} + \frac{1}{\varepsilon'^2}\varepsilon' \right) 2\varepsilon' \right] + \frac{2}{\varepsilon'^2}\varepsilon'^2 + \left( \frac{1}{\varepsilon'} + \frac{2}{\varepsilon'^2}\varepsilon' \right) 2\varepsilon' + \frac{\alpha}{\varepsilon} \\ &= 6\frac{\alpha}{\varepsilon} + 8. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich für  $x \in [a - \varepsilon', a]$

$$\begin{aligned} |(f_{\varepsilon'}^\varepsilon)'(x) - f'_\varepsilon(x)| &= \left| \frac{\alpha}{\varepsilon} + \left[ -\frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon'^2} \right] (2(x - a + \varepsilon')(x - a) + (x - a + \varepsilon'^2)^2) - \frac{\alpha}{\varepsilon} \right| \\ &\leq \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon'^2} 3\varepsilon'^2 \\ &\leq 3\frac{\alpha}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Auf den anderen Teilintervallen von  $[0, a]$  ist die Differenz gleich 0, so daß

$$\begin{aligned} \int_I |(f_{\varepsilon'}^\varepsilon)'(x) - f'_\varepsilon(x)|^2 dx &\leq 4 \int_{[a-\varepsilon, a-\varepsilon+\varepsilon']} |f_{\varepsilon'}^\varepsilon(x) - f'_\varepsilon(x)|^2 dx \\ &\leq 4 \left( 6\frac{\alpha}{\varepsilon} + 8 \right)^2 \varepsilon' \\ &\xrightarrow{\varepsilon' \searrow 0} 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt

$$f_{\varepsilon'}^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon' \searrow 0]{W^{1,2}(I)} f_\varepsilon.$$

Es ist  $f_{\varepsilon'}^\varepsilon > 0$ , falls  $\varepsilon$  klein genug ist, sagen wir  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , und  $f_{\varepsilon'}^\varepsilon$  erfüllt die Randbedingungen nach Konstruktion, so daß  $f_{\varepsilon'}^\varepsilon \in W_\alpha(I)$  für  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ .  $\square$

### (5.2.3) Satz (Nichtexistenz).

Seien  $a$  und  $\alpha$  so gewählt, daß die GOLDSCHMIDT-Kurve absoluter Minimierer des Flächenfunktionals ist, dann gibt es keinen Minimierer von  $\mathcal{A}$  in  $W_\alpha(I)$ .

*Beweis.* Nach den Lemmata (5.2.1) und (5.2.2) gelten für  $f_\varepsilon, f_{\varepsilon'}^\varepsilon \in W^{1,2}(I)$  die Bedingungen  $f_{\varepsilon'}^\varepsilon \in W_\alpha(I)$ , falls  $\varepsilon$  klein genug,  $\mathcal{A}(f_\varepsilon) \rightarrow \alpha^2$  für  $\varepsilon \searrow 0$  und  $f_{\varepsilon'}^\varepsilon \rightarrow f_\varepsilon$  in  $W^{1,2}(I)$  für  $\varepsilon' \searrow 0$ . Nach Lemma (5.1.2) ist  $\mathcal{A}$  stetig auf  $W^{1,2}(I)$ , so daß es nach Lemma (A.5.1) eine Teilfolge  $(n_k)$  (z.B. für die Wahl  $\varepsilon_n = 1/n$ ) gibt mit  $\mathcal{A}(f_{n_k}^k) \rightarrow \alpha^2$  für  $k \rightarrow \infty$ . Damit gilt also, da  $f_{1/n}^{1/n} \in W_\alpha(I)$  für  $k(< n)$  groß genug

$$\inf_{W_\alpha(I)} \mathcal{A} \leq \alpha^2.$$

Das Flächenfunktional ergibt, ausgewertet an der GOLDSCHMIDT-Kurve den Wert  $\alpha^2$  (siehe Kapitel 4), so daß die Nichtexistenz genauso wie in Satz (5.1.3) folgt.  $\square$

## A.5 Anhang zu Kapitel 5

**(A.5.1) Lemma (Teilfolgen-Konvergenz Prinzip).**

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiges Funktional und  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$  eine Folge, so daß

$$F(f_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} c$$

für ein  $c \in \mathbb{R}$ . Seien  $(f_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  weitere Folgen mit

$$f_n^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f_k,$$

dann existiert eine Teilfolge  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ , so daß

$$F(f_{n_k}^k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} c.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon^1 : |F(f_k) - c| < \varepsilon \forall k \geq N_\varepsilon^1 \quad \text{und} \quad (5.3)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon,k}^2 : \|f_k - f_n^k\|_X < \varepsilon \forall n \geq N_{\varepsilon,k}^2 \quad \text{und} \quad (5.4)$$

$$\forall f \forall g > 0 \exists \delta_{\varepsilon,f} > 0 : |F(f) - F(g)| < \varepsilon \forall \|f - g\|_X < \delta_{\varepsilon,f}. \quad (5.5)$$

Sei  $\varepsilon > 0$ , wähle

$$n_1 := N_{\delta_{\varepsilon/2, f_1}, 1}^2,$$

$$n_k := \max\{N_{\delta_{\varepsilon/2, f_k}, k}^2, n_{k-1} + 1\} \quad \text{für } k \geq 2,$$

dann gilt  $n_k \geq k$  und  $n_{k+1} > n_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und damit nach (5.4)

$$\|f_k - f_{n_k}^k\|_X < \delta_{\varepsilon/2, f_k} \xrightarrow{(5.5)} |F(f_k) - F(f_{n_k}^k)| < \varepsilon/2.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} |F(f_{n_k}^k) - c| &\leq \underbrace{|F(f_{n_k}^k) - F(f_k)|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|F(f_k) - c|}_{< \varepsilon/2 \forall k \geq N_{\varepsilon/2}^1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle  $k \geq N_{\varepsilon/2}^1$ . □



# Kapitel 6

## Existenz und Regularität

In diesem Kapitel wollen wir das in der Einleitung (1.1) bereits angesprochene NITSCHE-Funktional für Rotationsflächen genauer betrachten. Dabei wollen wir zunächst das Funktional in eine für das weitere Vorgehen günstige Weise umschreiben, um dieses dann auf Skalierungsverhalten zu überprüfen, die Stetigkeit in  $(W(I), \|\cdot\|_{W^{2,2}(I)})$  zu zeigen und die EULER-LAGRANGE-Gleichung herzuleiten. Danach beweisen wir, daß es klassische Minimierer des NITSCHKE-Funktional gibt, wenn wir gewisse Schranken an die Minimalfolge voraussetzen können.

### 6.1 Umformulierung als eindimensionales Problem

Wir betrachten das NITSCHKE-Funktional

$$\mathcal{E}(\Sigma) = \int_{\Sigma} (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}(H - H_0)^2 - \mathfrak{c}K) \, dS.$$

Für eine Rotationsfläche  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  mit Profilkurve  $u \in W_{\alpha,\beta}(I)$  für ein beschränktes offenes Intervall  $I := (-a, a)$ ,  $a > 0$  und  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  ergibt sich

$$\mathcal{E}(\Sigma) =: \mathcal{F}(u) = 2\pi \int_I (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}(H(u) - H_0)^2 - \mathfrak{c}K(u)) \, dS(u)$$

mit den Größen  $H, K$  und  $dS$  aus Abschnitt 3.1. Dabei ist

$$\begin{aligned} \int_I (H - H_0)^2 \, dS &= \int_I \left( -\frac{u''}{2(1+u'^2)^{3/2}} + \frac{1}{2u(1+u'^2)^{1/2}} - H_0 \right)^2 \, dS \\ &= \int_I \left[ \frac{1}{4} \left( -\frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} + \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2H_0 \left( -\frac{u''}{2(1+u'^2)^{3/2}} + \frac{1}{2u(1+u'^2)^{1/2}} \right) + H_0^2 \right] u(1+u'^2)^{1/2} \, dx \\ &= \int_I \left[ \frac{1}{4} \kappa_e^2 \, dS - \frac{1}{2} \kappa_e \, dx + \frac{1}{4u(1+u'^2)^{1/2}} \, dx \right. \\ &\quad \left. + H_0 \kappa_e \, dS - H_0 \, dx + H_0^2 \, dS \right]. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_I K \, dS &= \int_I -\frac{u''}{u(1+u^2)^2} u(1+u^2)^{1/2} \, dx = - \int_I \frac{u''}{(1+u^2)^{3/2}} \, dx = - \left[ \frac{u'}{(1+u^2)^{1/2}} \right]_{-a}^a \\ &= - \int_I \kappa_e(u) \, dx. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich also

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= 2\pi \int_I \left[ \mathbf{a} \, dS + \frac{\mathbf{b}}{4} \kappa_e^2 \, dS - \frac{\mathbf{b}}{2} \kappa_e \, dx + \frac{\mathbf{b}}{4u(1+u^2)^{1/2}} \, dx + \mathbf{b}H_0 \kappa_e \, dS \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{b}H_0 \, dx + \mathbf{b}H_0^2 \, dS + \mathbf{c} \kappa_e \, dx \right] \\ &= 2\pi \int_I \left[ \mathbf{a} \, dS + \frac{\mathbf{b}}{4} \frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}} \, dx + \frac{\mathbf{b}}{4} (\kappa_e^2 + 4H_0 \kappa_e + 4H_0^2) \, dS \right] \\ &\quad + 2\pi \int_I \left( \mathbf{c} - \frac{\mathbf{b}}{2} \right) \kappa_e \, dx - 2\pi \int_I \mathbf{b}H_0 \, dx. \end{aligned}$$

Für  $\mathbf{b} \neq 0$  setzen wir

$$\begin{aligned} C &:= C(\mathbf{b}, \mathbf{c}, H_0, a, \beta) := \frac{4}{\mathbf{b}} \left( \int_I \left( \mathbf{c} - \frac{\mathbf{b}}{2} \right) \kappa_e \, dx - \int_I \mathbf{b}H_0 \, dx \right) \\ &= \frac{4}{\mathbf{b}} \left( \left( \mathbf{c} - \frac{\mathbf{b}}{2} \right) \left[ \frac{u'}{(1+u^2)^{1/2}} \right]_{-a}^a - 2a\mathbf{b}H_0 \right) \\ &= \left( 4\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}} - 2 \right) \frac{2\beta}{(1+\beta^2)^{1/2}} - 8aH_0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= 2\pi \int_I \left[ \mathbf{a} \, dS + \frac{\mathbf{b}}{4} \frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}} \, dx + \frac{\mathbf{b}}{4} (\kappa_e^2 + 4H_0 \kappa_e + 4H_0^2) \, dS \right] + 2\pi \frac{\mathbf{b}}{4} C \\ &= 2\pi \frac{\mathbf{b}}{4} \left( \int_I \left[ 4\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \, dS + \frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}} \, dx + (\kappa_e + 2H_0)^2 \, dS \right] + C \right) \\ &= \frac{\pi \mathbf{b}}{2} \left( \int_I \left[ 4\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \, dS + \frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}} \, dx + (\kappa_e + 2H_0)^2 \, dS \right] + C \right). \end{aligned}$$

Die Konstante  $C$  hängt nur von den Parametern und den Randwerten der Ableitung ab, welche in den hier betrachteten Klassen zulässiger Funktionen fixiert sind. Für die Existenz von Minimierern und die EULER-LAGRANGE-Gleichung reicht es also im Fall  $\mathbf{b} \neq 0$  folgendes Funktional für einen Parameter  $\gamma := 4\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} > 0$  zu betrachten

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta} : W_{\alpha, \beta}(I) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ u &\mapsto \int_I \left[ \left( \gamma u(1+u^2)^{1/2} + \frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}} \right) \, dx + (\kappa_e(u) + 2H_0)^2 \, dS \right]. \end{aligned} \tag{6.2}$$

## 6.2 Skalierungsverhalten des NITSCHÉ-Funktional

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie sich das NITSCHÉ-Funktional unter Skalierung der Funktion verhält.

### (6.2.1) Lemma (Skalierungseigenschaft).

Seien  $a, \alpha > 0$  und  $\gamma \geq 0$ , sowie  $\beta, H_0 \in \mathbb{R}$  gegeben. Für  $r > 0$  setzen wir

$$a_r := \frac{a}{r}, \quad \alpha_r := \frac{\alpha}{r}, \quad \gamma_r := \gamma r^2 \quad \text{und} \quad H_{0,r} := H_0 r.$$

Dann gibt es zu jedem  $u \in W_{\alpha,\beta}((-a, a))$  ein  $u_r \in W_{\alpha_r,\beta}((-a_r, a_r))$ , nämlich

$$u_r : \left[-\frac{a}{r}, \frac{a}{r}\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{r}u(rx),$$

so daß gilt

$$\mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha,\beta}(u) = \mathcal{F}_{\gamma_r,H_{0,r}}^{a_r,\alpha_r,\beta}(u_r).$$

*Beweis.* Es gilt  $u_r \in W_{\alpha_r,\beta}((-a_r, a_r))$  und wir erhalten  $u'_r(x) = u'(rx)$  und  $u''_r(x) = ru''(rx)$ . Für die EUKLIDISCHE Krümmung ergibt sich

$$\begin{aligned} \kappa_e(u_r)(x) &= \frac{u''_r(x)}{(1 + u'_r(x)^2)^{3/2}} = \frac{ru''(rx)}{(1 + u'(rx)^2)^{3/2}} \\ &= r\kappa_e(u)(rx), \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\gamma_r,H_{0,r}}^{a_r,\alpha_r,\beta}(u_r) &= \int_{(-\frac{a}{r}, \frac{a}{r})} \left[ \left( \gamma r^2 \frac{1}{r} u(rx) (1 + u'(rx)^2)^{1/2} + \frac{r}{u(rx) (1 + u'(rx)^2)^{1/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (r\kappa_e(u)(rx) + 2H_0 r)^2 \frac{1}{r} u(rx) (1 + u'(rx)^2)^{1/2} \right] dx \\ &= \int_{(-\frac{a}{r}, \frac{a}{r})} \left[ \left( \gamma r u(rx) (1 + u'(rx)^2)^{1/2} + r \frac{1}{u(rx) (1 + u'(rx)^2)^{1/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + r(\kappa_e(u)(rx) + 2H_0)^2 u(rx) (1 + u'(rx)^2)^{1/2} \right] dx \\ &\stackrel{y=rx}{=} \int_{(-a, a)} r \left[ \left( \gamma u(y) (1 + u'(y)^2)^{1/2} + \frac{1}{u(y) (1 + u'(y)^2)^{1/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\kappa_e(u)(y) + 2H_0)^2 u(y) (1 + u'(y)^2)^{1/2} \right] \frac{1}{r} dy \\ &= \mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha,\beta}(u) \end{aligned}$$

□

### (6.2.2) Lemma ( $W_{\alpha,\beta}(I)$ nichtleer).

Für  $a, \alpha > 0$  und  $\beta \in \mathbb{R}$  gilt

$$W_{\alpha,\beta}(I) \neq \emptyset.$$

*Beweis.* Für  $\beta \leq 0$  und  $\beta > 0$ , so daß  $\alpha - \beta a/2 > 0$  gilt, ist

$$p(x) := \frac{\beta}{2a}x^2 + \alpha - \frac{\beta}{2}a \in W_{\alpha,\beta}(I),$$

denn die Randwerte und Symmetrie sind erfüllt, und im Falle  $\beta \leq 0$  gilt  $p \geq p(a) = \alpha$ , falls  $\beta > 0$  und  $\alpha - \beta a/2 > 0$  ist

$$p \geq p(0) = \alpha - \frac{\beta}{2}a > 0.$$

Für  $\beta > 0$  mit  $\alpha - \beta a/2 \leq 0$  setze  $x_0 := a - \alpha/\beta$ , dann gilt

$$\alpha - \beta a/2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{a}{2} - \frac{\alpha}{\beta} < a - \frac{\alpha}{\beta} = x_0 < a.$$

Nun definieren wir

$$p(x) := \begin{cases} \frac{\alpha}{2}, & x \in [-x_0, x_0] \\ \frac{\beta^2}{2\alpha}(|x| - x_0)^2 + \frac{\alpha}{2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann sind die Randwerte und Symmetrie ebenfalls erfüllt. Weiter gilt wegen  $\beta > 0$  auch  $p \geq \alpha/2$  und damit  $p \in W_{\alpha,\beta}(I)$ .  $\square$

### (6.2.3) Korollar (Optimale Energien und Skalierung).

Für  $a, \alpha > 0$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $\beta, H_0 \in \mathbb{R}$  und alle  $r > 0$  gilt

$$\inf_{W_{\alpha,\beta}((-a,a))} \mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha,\beta} = \inf_{W_{\alpha_r,\beta}((-a_r,a_r))} \mathcal{F}_{\gamma_r,H_{0,r}}^{a_r,\alpha_r,\beta},$$

wobei die Größen mit  $r$  als Index im vorigen Lemma (6.2.1) definiert sind.

Existiert ein Minimierer  $u \in W_{\alpha,\beta}((-a,a))$  von  $\mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha,\beta}$ , so ist für alle  $r > 0$  die skalierte Funktion  $u_r$  ein Minimierer von  $\mathcal{F}_{\gamma_r,H_{0,r}}^{a_r,\alpha_r,\beta}$  und die optimalen Energien sind gleichgroß.

*Beweis.* Die Klassen  $W_{\alpha,\beta}(I)$  sind nach Lemma (6.2.2) stets nichtleer. Nach Lemma (6.2.1) gibt es zu einer Minimalfolge  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W_{\alpha,\beta}((-a,a))$  eine Folge  $(u_{r,k})_{k \in \mathbb{N}} \subset W_{\frac{\alpha}{r},\beta}((-a/r,a/r))$ , mit  $\mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha,\beta}(u_k) = \mathcal{F}_{\gamma_r,H_{0,r}}^{a_r,\alpha_r,\beta}(u_{r,k})$  und vice versa. Daher gilt

$$\inf_{W_{\alpha,\beta}((-a,a))} \mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha,\beta}(u) = \inf_{W_{\frac{\alpha}{r},\beta}((-a/r,a/r))} \mathcal{F}_{\gamma_r,H_{0,r}}^{a_r,\alpha_r,\beta}.$$

Sei  $u$  der Minimierer von  $\mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha,\beta}(u)$ , dann gilt

$$\mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha,\beta}(u) = \mathcal{F}_{\gamma_r,H_{0,r}}^{a_r,\alpha_r,\beta}(u_r) = \inf_{W_{\alpha,\beta}((-a,a))} \mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha,\beta}(u) = \inf_{W_{\frac{\alpha}{r},\beta}((-a/r,a/r))} \mathcal{F}_{\gamma_r,H_{0,r}}^{a_r,\alpha_r,\beta}$$

so daß  $u_r$  ein Minimierer von  $\mathcal{F}_{\gamma_r,H_{0,r}}^{a_r,\alpha_r,\beta}$  ist.  $\square$



### 6.3 Stetigkeit des NITSCHKE-Funktional

In diesem Abschnitt zeigen wir die Stetigkeit des NITSCHKE-Funktional.

**(6.3.1) Proposition (Stetigkeit des NITSCHKE-Funktional).**

Sei  $a > 0$ , dann ist das Funktional

$$\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^a : W(I) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$u \mapsto \int_I \left[ \left( \gamma u(1 + u'^2)^{1/2} + \frac{1}{u(1 + u'^2)^{1/2}} \right) dx + (\kappa_e(u) + 2H_0)^2 dS \right]$$

$$+ \vartheta \frac{u'(a)}{(1 + u'(a)^2)^{1/2}} - 8aH_0$$

stetig bezüglich  $\|\cdot\|_{W^{2,2}(I)}$  für alle  $\gamma \geq 0$  und  $\vartheta, H_0 \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Seien  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W(I)$  und  $u \in W(I)$  mit  $u_n \rightarrow u$  in  $W^{2,2}(I)$ . Aufgrund der stetigen Einbettung  $W^{2,2}(I) \hookrightarrow C^{1,1/2}(\bar{I})$  [GT, Theorem 7.26, S.171] gilt also auch  $u_n \rightarrow u$  in  $C^1(\bar{I})$ . Falls also  $0 < \varepsilon \leq 1/2 \min u$  ist gibt es ein  $N = N(\varepsilon)$  und ein  $c > 0$ , so daß für alle  $n \geq N$  gilt

$$u_n \geq \frac{1}{2} \min u \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{(\min u)^2} \geq \frac{1}{uu_n} \quad \Rightarrow \quad c \geq \left\| \frac{1}{uu_n} \right\|_{L^\infty(I)}.$$

Nun betrachten wir die einzelnen Summanden des Funktional, beachte dabei die BINOMISCHE-Formel

$$A^{1/2} - B^{1/2} = \frac{A - B}{A^{1/2} + B^{1/2}} \quad \text{für } A, B > 0. \quad (6.3)$$

(i) Es gilt

$$\left| \int_I u(1 + u'^2)^{1/2} dx - \int_I u_n(1 + u_n'^2)^{1/2} dx \right|$$

$$\leq \int_I |u(1 + u'^2)^{1/2} - u_n(1 + u'^2)^{1/2} + u_n(1 + u'^2)^{1/2} - u_n(1 + u_n'^2)^{1/2}| dx$$

$$\leq \int_I |(u - u_n)(1 + u'^2)^{1/2}| dx + \int_I |u_n[(1 + u'^2)^{1/2} - (1 + u_n'^2)^{1/2}]| dx$$

$$\stackrel{(6.3)}{\leq} \|u - u_n\|_{L^2(I)} \underbrace{\|(1 + u'^2)^{1/2}\|_{L^2(I)}}_{\leq (|I| + \|u'\|_{L^2(I)}^2)^{1/2}}$$

$$+ \underbrace{\|u_n\|_{L^\infty(I)}}_{\text{O.E.} \leq 2\|u\|_{L^\infty(I)}} \int_I |u'^2 - u_n'^2| \underbrace{\frac{1}{(1 + u'^2)^{1/2} + (1 + u_n'^2)^{1/2}}}_{\leq 1/2} dx$$

$$\leq \|u - u_n\|_{L^2(I)} \left( |I| + \|u'\|_{L^2(I)}^2 \right)^{1/2} + \|u\|_{L^\infty} \int_I |u' - u_n'| |u' + u_n'| dx$$

$$\leq \|u - u_n\|_{L^2(I)} \left( |I| + \|u'\|_{L^2(I)}^2 \right)^{1/2} + \|u\|_{L^\infty(I)} \|u' - u_n'\|_{L^2(I)} \underbrace{\|u' + u_n'\|_{L^2(I)}}_{\text{O.E.} \leq 3\|u'\|_{L^2(I)}}$$

$$\leq \|u - u_n\|_{L^2(I)} \left( |I| + \|u'\|_{L^2(I)}^2 \right)^{1/2} + 3 \|u\|_{L^\infty(I)} \|u'\|_{L^2(I)} \|u' - u_n'\|_{L^2(I)}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(6.4)

(ii) Ebenso gilt nach Punkt (i)

$$\begin{aligned}
& \left| \int_I \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} dx - \int_I \frac{1}{u_n(1+u_n'^2)^{1/2}} dx \right| \\
& \leq \int_I \underbrace{\frac{1}{uu_n}}_{\text{s.o.} \leq c} \underbrace{\frac{1}{(1+u'^2)^{1/2}(1+u_n'^2)^{1/2}}}_{\leq 1} |u_n(1+u_n'^2)^{1/2} - u(1+u'^2)^{1/2}| dx \\
& \leq c \int_I |u_n(1+u_n'^2)^{1/2} - u(1+u'^2)^{1/2}| dx \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

(iii) Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
& \left| \int_I \frac{u''^2 u}{(1+u'^2)^{5/2}} dx - \int_I \frac{u_n''^2 u_n}{(1+u_n'^2)^{5/2}} dx \right| \\
& \leq \int_I \frac{1}{(1+u'^2)^{5/2}(1+u_n'^2)^{5/2}} |u''^2 u(1+u_n'^2)^{5/2} - u_n''^2 u_n(1+u'^2)^{5/2}| dx \\
& \leq \int_I \frac{1}{(1+u'^2)^{5/2}(1+u_n'^2)^{5/2}} |u''^2 u(1+u_n'^2)^{5/2} - u''^2 u(1+u'^2)^{5/2}| dx \\
& \quad + \int_I \underbrace{\frac{1}{(1+u_n'^2)^{5/2}}}_{\leq 1} |u''^2 u - u''^2 u_n| dx + \int_I \underbrace{\frac{1}{(1+u_n'^2)^{5/2}}}_{\leq 1} |u''^2 u_n - u_n''^2 u_n| dx.
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die einzelnen Summanden

$$\begin{aligned}
& \int_I \frac{1}{(1+u'^2)^{5/2}(1+u_n'^2)^{5/2}} |u''^2 u(1+u_n'^2)^{5/2} - u''^2 u(1+u'^2)^{5/2}| dx \\
& \leq \|u\|_{L^\infty(I)} \int_I |u''^2| \frac{1}{(1+u'^2)^{5/2}(1+u_n'^2)^{5/2}} [|(1+u_n'^2)^{5/2} - (1+u_n'^2)^{3/2}(1+u'^2)| \\
& \quad + |(1+u_n'^2)^{3/2}(1+u'^2) - (1+u_n'^2)(1+u'^2)^{3/2}| + |(1+u_n'^2)(1+u'^2)^{3/2} - (1+u'^2)^{5/2}|] dx \\
& \leq \|u\|_{L^\infty(I)} \int_I |u''^2| [|(1+u_n'^2) - (1+u'^2)| + |(1+u_n'^2)^{1/2} - (1+u'^2)^{1/2}| \\
& \quad + |(1+u_n'^2) - (1+u'^2)|] dx \\
& \stackrel{(6.3)}{\leq} \|u\|_{L^\infty(I)} \int_I |u''^2| \left[ 2|u_n'^2 - u'^2| + \underbrace{\frac{1}{(1+u_n'^2)^{1/2}(1+u'^2)^{1/2}}}_{\leq 1} |u_n'^2 - u'^2| \right] dx \\
& \leq \|u\|_{L^\infty(I)} \int_I 3|u''^2| \underbrace{|u_n'^2 - u'^2|}_{=|u_n' + u'| |u_n' - u'|} dx \\
& \leq 3 \|u\|_{L^\infty(I)} \underbrace{\|u_n' + u'\|_{L^\infty(I)}}_{\text{O.E.} \leq 3\|u'\|_{L^\infty(I)}} \|u_n' - u'\|_{L^\infty(I)} \|u''\|_{L^2(I)}^2 \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

sowie

$$\int_I |u''^2 u - u_n''^2 u_n| dx \leq \|u - u_n\|_{L^\infty(I)} \int_I u''^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und

$$\begin{aligned}
\int_I |u''^2 u_n - u_n''^2 u_n| \, dx &\leq \underbrace{\|u_n\|_{L^\infty(I)}}_{\text{O.E. } \leq 2\|u\|_{L^\infty(I)}} \int_I \underbrace{|u''^2 - u_n''^2|}_{|u''+u_n''||u''-u_n''|} \, dx \\
&\leq 2 \|u\|_{L^\infty(I)} \underbrace{\|u'' + u_n''\|_{L^2}}_{\text{O.E. } \leq 3\|u''\|_{L^2(I)}} \|u'' - u_n''\|_{L^2(I)} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

(iv) Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \int_I \frac{u'' u}{1 + u'^2} - \int_I \frac{u_n'' u_n}{1 + u_n'^2} \right| \, dx \\
&\leq \int_I |u'' u| \left| \frac{1}{1 + u'^2} - \frac{1}{1 + u_n'^2} \right| \, dx + \int_I \underbrace{\frac{1}{1 + u_n'^2}}_{\leq 1} |u'' u - u_n'' u_n| \, dx \\
&\quad + \int_I \underbrace{\frac{1}{1 + u_n'^2}}_{\leq 1} |u'' u_n - u_n'' u_n| \, dx \\
&\leq \|u\|_{L^\infty(I)} \int_I |u''| \underbrace{\frac{1}{(1 + u'^2)(1 + u_n'^2)}}_{\leq 1} |u_n'^2 - u'^2| \, dx + \|u''\|_{L^2(I)} \|u - u_n\|_{L^2(I)} \\
&\quad + \|u_n\|_{L^2(I)} \|u'' - u_n''\|_{L^2(I)} \\
&\leq \|u\|_{L^\infty(I)} \|u_n' - u'\|_{L^\infty(I)} \|u_n' + u'\|_{L^\infty(I)} |I|^{1/2} \|u''\|_{L^2(I)} + \|u''\|_{L^2(I)} \|u - u_n\|_{L^2(I)} \\
&\quad + 2 \|u\|_{L^2(I)} \|u'' - u_n''\|_{L^2(I)} \\
&\leq 3 |I|^{1/2} \|u\|_{L^\infty(I)} \|u'\|_{L^\infty(I)} \|u_n' - u'\|_{L^\infty(I)} \|u''\|_{L^2(I)} + \|u''\|_{L^2(I)} \|u - u_n\|_{L^2(I)} \\
&\quad + 2 \|u\|_{L^2(I)} \|u'' - u_n''\|_{L^2(I)} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

(v) Für  $u'(a) = \beta$  und  $u_n'(a) = \beta_n$  gilt aufgrund der Einbettung von  $W^{2,2}(I)$  in  $C^1(\bar{I})$  für ein  $c > 0$  die Ungleichung

$$|\beta - \beta_n| \leq \|u - u_n\|_{C^1(\bar{I})} \leq c \|u - u_n\|_{W^{2,2}(I)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Abbildung  $f : x \mapsto x/(1 + x^2)^{1/2}$  ist stetig, so daß

$$|f(\beta) - f(\beta_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit ist auch der letzte Summand des Funktionals stetig.

□

**(6.3.2) Korollar (Stetigkeit von  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta}$ ).**

Für  $\alpha > 0$ ,  $\gamma \geq 0$  und  $\beta, H_0 \in \mathbb{R}$  sind die Funktionale

$$\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta} : W_{\alpha, \beta}(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

aus (6.2) stetig.

*Beweis.* Siehe Proposition (6.3.1) für  $\vartheta = 0$ , mit  $W_{\alpha, \beta}(I) \subset W(I)$ .

□

## 6.4 Etwas Approximationstheorie

Um einige Dichtheitsbeziehungen zeigen zu können, müssen wir uns zunächst etwas mit Approximationstheorie beschäftigen.

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{P}$  die Menge der Polynomfunktionen von  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und mit  $\mathcal{P}_N$  die Polynomfunktionen vom Grad höchstens  $N$ . Unter leichtem Mißbrauch der Bezeichnung und Notation wollen wir auch von Polynomen anstatt Polynomfunktionen sprechen, und auch für Intervalle  $I$  für Restriktionen  $p = P|_I$  von Polynomen  $P \in \mathcal{P}$  die Schreibweise  $p \in \mathcal{P}$  benutzen.

### (6.4.1) Proposition (HERMITE-Interpolation).

Gegeben seien  $n + 1$  paarweise verschiedene Punkte  $(x_j)_{j=0}^n \subset \mathbb{R}$  und beliebige natürliche Zahlen  $(\alpha_j)_{j=0}^n \subset \mathbb{N}$ , sowie zu  $j = 0, \dots, n$  reelle Zahlen  $(y_j^{(\nu)})_{\nu=0}^{\alpha_j-1} \subset \mathbb{R}$ . Dann ist die eindeutige Lösung der HERMITE-Interpolations-Aufgabe

$$p_N \in \mathcal{P}_N, \quad N := \left( \sum_{j=0}^n \alpha_j \right) - 1 \quad \text{mit}$$

$$p_N^{(s_j)}(x_j) = y_j^{(s_j)}, \quad j = 0, \dots, n, \quad s_j = 0, \dots, \alpha_j - 1$$

gegeben durch

$$p_N(x) := \sum_{k=0}^n \sum_{\mu=0}^{\alpha_k-1} y_k^{(\mu)} l_{k,\mu}(x) \quad \text{mit}$$

$$l_{k,\mu}(x) := \omega_k(x) \frac{1}{\mu!} \sum_{\nu=\mu}^{\alpha_k-1} (x - x_k)^\nu \frac{1}{(\nu - \mu)!} \left[ \frac{1}{\omega_k(x)} \right]_{x=x_k}^{(\nu-\mu)} \quad \text{und}$$

$$\omega_k(x) := \prod_{\nu=0, \text{ und } \nu \neq k}^n (x - x_\nu)^{\alpha_\nu}.$$

*Beweis.* Einschlägige Literatur zur Numerischen Analysis oder Approximationstheorie.  $\square$

### (6.4.2) Lemma (Polynome dicht in $W^{k,p}(I)$ , $1 \leq p < \infty$ ).

Seien  $I$  ein beschränktes Intervall,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $1 \leq p < \infty$ , dann ist  $\mathcal{P}$  dicht in  $W^{k,p}(I)$ .

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  und  $f \in W^{k,p}(I)$ . Nach dem Satz über die globale Approximation von SOBOLEV-Funktionen [Ev2, 5.3.3 Theorem 3, S.252] gibt es ein  $g \in C^\infty(\bar{I})$  mit

$$\|f - g\|_{W^{k,p}(I)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach dem Approximationssatz von WEIERSTRASS [D, Theorem 6.3.2, S.113] gibt es zu jedem  $m \in \mathbb{N}_0$ , insbesondere also  $m = k$ , ein Polynom  $P = P_{(m)} \in \mathcal{P}$ , so daß

$$\|g - P\|_{C^m(\bar{I})} < \frac{\varepsilon^p}{2^p(k+1)|I|}$$

und damit

$$\|g - P_{(k)}\|_{W^{k,p}(I)} = \left( \sum_{i=0}^k \|g^{(i)} - P_{(k)}^{(i)}\|_{L^p(I)}^p \right)^{1/p} \leq (k+1)^{1/p} |I|^{1/p} \|g - P_{(k)}\|_{C^k(\bar{I})}^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Behauptung folgt also aus

$$\|f - P_{(k)}\|_{W^{k,p}(I)} \leq \|f - g\|_{W^{k,p}(I)} + \|g - P_{(k)}\|_{W^{k,p}(I)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

### (6.4.3) Lemma (Approximation von $W_{\alpha,\beta}(I)$ -Funktionen).

Seien  $a, \alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  dann ist

$$S_{\alpha,\beta} := \{u \in W_{\alpha,\beta}(I) \mid u|_{[0,a]} \in \mathcal{P}\}$$

dicht in  $(W_{\alpha,\beta}(I), \|\cdot\|_{W^{2,2}(I)})$ .

*Beweis.* Sei  $f \in W_{\alpha,\beta}(I)$  dann gilt für die Einschränkung von  $f$  auf  $I' := [0, a]$  (wieder mit  $f$  bezeichnet)  $f \in W^{2,2}(I')$ . Zu beliebigem  $\delta > 0$  existiert nach Lemma (6.4.2) ein Polynom  $p_1$  mit

$$\|f - p_1\|_{W^{2,2}(I')} \leq \delta,$$

und aufgrund der stetigen Einbettung in  $C^1(\bar{I}')$  gilt auch für eine Konstante  $C > 0$  die Ungleichung

$$\|f - p_1\|_{C^1(\bar{I}')} \leq C \|f - p_1\|_{W^{2,2}(I')} \leq C\delta.$$

Nun definieren wir  $p_2$  als das HERMITE-Interpolationspolynom zu den Daten

$$\begin{aligned} p_2(0) &= f(0) - p_1(0), & p_2'(0) &= f'(0) - p_1'(0), \\ p_2(a) &= f(a) - p_1(a), & p_2'(a) &= f'(a) - p_1'(a), \end{aligned}$$

dann gelten für das Polynom  $p = p_1 + p_2$  die Randbedingungen

$$p(0) = f(0), \quad p(a) = f(a), \quad p'(0) = f'(0) \quad \text{und} \quad p'(a) = f'(a).$$

Für eine Konstante  $c > 0$  und  $x_0 = 0, x_1 = a$  gilt

$$\begin{aligned} \|p_2\|_{W^{2,2}(I')} &\leq c \|p_2\|_{C^2(\bar{I}')} \\ &\leq c \left\| \sum_{k=0}^1 \sum_{\mu=0}^1 \left( f^{(\mu)}(x_k) - p_1^{(\mu)}(x_k) \right) l_{k,\mu} \right\|_{C^2(\bar{I}')} \\ &\leq c \sum_{k=0}^1 \sum_{\mu=0}^1 \left\| \left( f^{(\mu)}(x_k) - p_1^{(\mu)}(x_k) \right) l_{k,\mu} \right\|_{C^2(\bar{I}')} \\ &\leq c \sum_{k=0}^1 \sum_{\mu=0}^1 \left| f^{(\mu)}(x_k) - p_1^{(\mu)}(x_k) \right| \|l_{k,\mu}\|_{C^2(\bar{I}')} \\ &\leq c \sum_{k=0}^1 \sum_{\mu=0}^1 \underbrace{\|f - p_1\|_{C^1(\bar{I}')}}_{\leq C\delta} \|l_{k,\mu}\|_{C^2(\bar{I}')} \\ &< C\delta c \underbrace{\sum_{k=0}^1 \sum_{\mu=0}^1 \|l_{k,\mu}\|_{C^2(\bar{I}')}}_{:=M}. \end{aligned}$$

Da  $M$  insbesondere nicht von  $p_1$  (d.h. auch nicht von  $\delta$ ) abhängt, erhalten wir für beliebige  $\varepsilon > 0$  und die Wahl  $\delta := \varepsilon/(1 + cCM)$

$$\begin{aligned} \|f - p\|_{W^{2,2}(I')} &= \|f - p_1 - p_2\|_{W^{2,2}(I')} \\ &\leq \|f - p_1\|_{W^{2,2}(I')} + \|p_2\|_{W^{2,2}(I')} \\ &\leq \delta + cCM\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Nun setzen wir das Polynom  $p$  symmetrisch zu einer Spline-Funktion, ebenfalls bezeichnet mit  $p$ , auf  $I$  fort. Nach Konstruktion ist  $p$  symmetrisch und falls  $\varepsilon$  klein genug ist, gilt wegen  $f > 0$  und der Nähe in der  $C^1(\bar{I})$ -Topologie ebenfalls  $p > 0$ . Da die Randwerte mit denen von  $f$  übereinstimmen, gilt also  $p \in W_{\alpha,\beta}(I)$ .  $\square$

Später benötigen wir noch die folgende Aussage.

**(6.4.4) Satz ( $C_0^\infty(I)$  dicht in  $L^p(I)$  für  $1 \leq p < \infty$ ).**

Für ein beschränktes offenes Intervall  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  und  $1 \leq p < \infty$  ist  $C_0^\infty(I)$  eine dichte Teilmenge von  $L^p(I)$ .

*Beweis.* Wir verweisen hier auf [vdM, Proposition 2.4 (ii), S.38].  $\square$

## 6.5 Stückweise polynomiale Minimalfolge

Nun wollen wir zeigen, daß es ausreicht, stückweise polynomiale Minimalfolgen zu betrachten.

**(6.5.1) Lemma (Minimalfolge in dichter Teilmenge).**

Seien  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum,  $\emptyset \neq M \subseteq X$  und  $D \subseteq M$  eine dichte Teilmenge sowie  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  ein nach unten beschränktes stetiges Funktional, dann gibt es eine Minimalfolge für  $F$  in  $D$ , d.h. es existiert eine Folge  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(y_k) = \inf_M F.$$

*Beweis.* Da  $F$  nach unten beschränkt ist,  $M \neq \emptyset$  und  $\mathbb{R}$  DEDEKIND-vollständig ist, existiert  $\inf_M F \in \mathbb{R}$ . Seien  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  eine Minimalfolge für  $F$  und  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $\delta_k > 0$ , so daß  $|F(x_k) - F(y)| \leq \varepsilon/2$  für alle  $y \in M$  mit  $\|x_k - y\| < \delta_k$ , dies ist möglich wegen der Stetigkeit von  $F$ . Nun gibt es ein  $y_k \in D$  mit  $\|x_k - y_k\| < \delta_k$ . Sei  $N = N(\varepsilon)$ , so daß  $|\inf_M F - F(x_k)| \leq \varepsilon/2$  für alle  $k \geq N$ . Für  $k \geq N$  gilt dann

$$\left| \inf_M F - F(y_k) \right| \leq \left| \inf_M F - F(x_k) \right| + |F(x_k) - F(y_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit ist  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D$  eine Minimalfolge für  $F$  in  $D$ .  $\square$

**(6.5.2) Proposition (Einschränkung auf stückweise polynomiale Minimalfolge).**

Seien  $a, \alpha > 0$ ,  $\gamma \geq 0$  und  $\beta, H_0 \in \mathbb{R}$ , dann können wir eine Minimalfolge für

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta} : W_{\alpha, \beta}(I) &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{oder} \\ \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta} : N_{\alpha, \beta}(\bar{I}) &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

ohne Einschränkung in  $S_{\alpha, \beta} \subset N_{\alpha, \beta}(\bar{I})$  aus Lemma (6.4.3) wählen.

*Beweis.* Nach Proposition (6.3.1) sind beide Funktionale stetig bezüglich  $\|\cdot\|_{W^{2,2}(I)}$  und nach Korollar (6.4.3) ist  $S_{\alpha, \beta}$  dicht in  $W_{\alpha, \beta}(I)$  (und damit aufgrund der Teilmengenbeziehung auch in  $N_{\alpha, \beta}(\bar{I})$ ) bezüglich  $\|\cdot\|_{W^{2,2}(I)}$ , so daß die Behauptung direkt aus Lemma (6.5.1) folgt.  $\square$

## 6.6 Die EULER-LAGRANGE-Gleichung

In diesem Abschnitt leiten wir die EULER-LAGRANGE-Gleichung von  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta}$  her.

### (6.6.1) Lemma (EULER-LAGRANGE-Gleichung).

Sei  $u \in C^4(I)$ , so daß

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta}(u + t\varphi) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Dann erfüllt  $u$  auf  $(-a, a)$  die folgende EULER-LAGRANGE-Gleichung

$$\begin{aligned} & \kappa_h(u)^3 \frac{1}{u^2} - 2\kappa_h(u) \frac{1}{u^2} + 2 \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{(1+u'^2)^{1/2}} \kappa_h(u)' \right) \\ & + (4H_0^2 + \gamma) \left( \frac{2}{(1+u'^2)^{1/2}} - \kappa_h(u) \right) + 4H_0 \frac{2u''}{(1+u'^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

*Beweis.*

(i) Für  $\varphi \in C_0^\infty(I)$  gilt

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \kappa_h(u + t\varphi) \\ & \stackrel{\text{L.(3.5.2)}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[ - \frac{(u+t\varphi)^2}{(u+t\varphi)'} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{(u+t\varphi)(1+(u+t\varphi)')^2} \right) \right] \\ & = - \frac{2u\varphi}{u'} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right) + \frac{u^2\varphi'}{u'^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right) + \frac{u^2}{u'} \frac{d}{dx} \left( \frac{\varphi}{u^2(1+u'^2)^{1/2}} \right) \\ & \quad + \frac{u^2}{u'} \frac{d}{dx} \left( \frac{u'\varphi'}{u(1+u'^2)^{3/2}} \right) \\ & = 2 \frac{\varphi}{u} \kappa_h(u) - \frac{\varphi'}{u'} \kappa_h(u) - \frac{\varphi}{u} \kappa_h(u) + \frac{u}{u'(1+u'^2)^{1/2}} \left( \frac{\varphi}{u} \right)' - \frac{u'\varphi'}{1+u'^2} \kappa_h(u) \\ & \quad + \frac{u}{u'(1+u'^2)^{1/2}} \left( \frac{u'\varphi'}{1+u'^2} \right)' \\ & = \left( \frac{\varphi}{u} - \frac{\varphi'}{u'} - \frac{u'\varphi'}{1+u'^2} \right) \kappa_h(u) + \frac{u}{u'(1+u'^2)^{1/2}} \left( \frac{\varphi'}{u} - \frac{\varphi u'}{u^2} \right) \\ & \quad + \frac{u}{u'(1+u'^2)^{1/2}} \left( \frac{u''\varphi'}{1+u'^2} + \frac{u'\varphi''}{1+u'^2} + (-2) \frac{u'^2\varphi'u''}{(1+u'^2)^2} \right). \end{aligned}$$

(6.5)

Nun betrachten wir die Klammer im letzten Summanden genauer

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{u''\varphi'}{1+u'^2} + \frac{u'\varphi''}{1+u'^2} + (-2) \frac{u'^2\varphi'u''}{(1+u'^2)^2} \right) \\
&= \frac{u'\varphi''}{1+u'^2} - \frac{u''\varphi'}{1+u'^2} + 2 \frac{u''\varphi' + u'^2\varphi'u'' - u'^2\varphi'u''}{(1+u'^2)^2} \\
&= \frac{u'\varphi''}{1+u'^2} - \frac{u''\varphi'}{1+u'^2} + 2 \frac{u''\varphi'}{(1+u'^2)^2} \\
&= \frac{u'\varphi''}{1+u'^2} + \varphi'(1+u'^2)^{1/2} \left( -\frac{\kappa_h(u)}{u} + \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right) \\
&\quad - 2\varphi' \frac{1}{(1+u'^2)^{1/2}} \underbrace{\left( -\frac{\kappa_h(u)}{u} + \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right)}_{= -\frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}} \\
&= \frac{u'\varphi''}{1+u'^2} + \left( -\frac{\kappa_h(u)}{u} \right) \varphi' \left[ (1+u'^2)^{1/2} - 2 \frac{1}{(1+u'^2)^{1/2}} \right] + \frac{\varphi'}{u} - 2 \frac{\varphi'}{u(1+u'^2)}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
(6.5) &= \left( \frac{\varphi}{u} - \frac{\varphi'}{u'} - \frac{u'\varphi'}{1+u'^2} \right) \kappa_h(u) - \frac{\varphi}{u(1+u'^2)^{1/2}} \\
&\quad + \frac{u}{u'(1+u'^2)^{1/2}} \left( \frac{\varphi'}{u} + \frac{u'\varphi''}{1+u'^2} + \frac{\varphi'}{u} - 2 \frac{\varphi'}{u(1+u'^2)} \right) \\
&\quad + \frac{u}{u'(1+u'^2)^{1/2}} \varphi' \left( -\frac{\kappa_h(u)}{u} \right) \left[ (1+u'^2)^{1/2} - 2 \frac{1}{(1+u'^2)^{1/2}} \right] \\
&= \left( \frac{\varphi}{u} - \frac{\varphi'}{u'} - \frac{u'\varphi'}{1+u'^2} - \frac{\varphi'}{u'} + 2 \frac{\varphi'}{u'(1+u'^2)} \right) \kappa_h(u) - \frac{\varphi}{u(1+u'^2)^{1/2}} \\
&\quad + \frac{u}{u'(1+u'^2)^{1/2}} \left( \underbrace{\frac{2\varphi'}{u} + \frac{uu'\varphi'' - 2\varphi'}{u(1+u'^2)}}_{= \frac{2\varphi' + 2\varphi'u'^2}{u(1+u'^2)}} \right) \\
&= \left( \frac{\varphi}{u} - 2 \frac{\varphi'}{u'} + 2 \frac{\varphi'}{u'(1+u'^2)} - \frac{u'\varphi'}{1+u'^2} \right) \kappa_h(u) - \frac{\varphi}{u(1+u'^2)^{1/2}} \\
&\quad + \frac{u\varphi'' + 2\varphi'u'}{(1+u'^2)^{3/2}} \\
&= \left( \frac{\varphi}{u} + \frac{-2\varphi' - 2\varphi'u'^2 + 2\varphi' - u'^2\varphi'}{u'(1+u'^2)} \right) \kappa_h(u) - \frac{\varphi}{u(1+u'^2)^{1/2}} \\
&\quad + \frac{u\varphi'' + 2\varphi'u'}{(1+u'^2)^{3/2}} \\
&= \left( \frac{\varphi}{u} - \frac{3\varphi'u'}{(1+u'^2)} \right) \kappa_h(u) - \frac{\varphi}{u(1+u'^2)^{1/2}} + \frac{u\varphi'' + 2\varphi'u'}{(1+u'^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$



(ii) Für ein  $u \in C^4(I)$  wie in der Behauptung gilt also

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_I \kappa_h(u + t\varphi)^2 \frac{(1 + (u' + t\varphi')^2)^{1/2}}{u + t\varphi} dx \\
&= \int_I 2\kappa_h(u) \left[ \left( \frac{\varphi}{u} - \frac{3\varphi'u'}{(1+u'^2)} \right) \kappa_h(u) - \frac{\varphi}{u(1+u'^2)^{1/2}} + \frac{u\varphi'' + 2\varphi'u'}{(1+u'^2)^{3/2}} \right] \frac{(1+u'^2)^{1/2}}{u} dx \\
&\quad + \int_I \kappa_h(u)^2 \left( \frac{u'\varphi'}{u(1+u'^2)^{1/2}} - \frac{(1+u'^2)^{1/2}\varphi}{u^2} \right) dx \\
&= \int_I \left[ 2\kappa_h(u)^2 \frac{\varphi}{u^2} (1+u'^2)^{1/2} - 6\kappa_h(u)^2 \frac{\varphi'u'}{u(1+u'^2)^{1/2}} - 2\kappa_h(u) \frac{\varphi}{u^2} \right. \\
&\quad \left. + 2\kappa_h(u) \frac{\varphi''}{1+u'^2} + 4\kappa_h(u) \frac{\varphi'u'}{u(1+u'^2)} + \kappa_h(u)^2 \frac{u'\varphi'}{u(1+u'^2)^{1/2}} - \kappa_h(u)^2 \frac{\varphi}{u^2} (1+u'^2)^{1/2} \right] dx \\
&= \int_I \left[ \kappa_h(u)^2 \frac{\varphi}{u^2} (1+u'^2)^{1/2} - 5\kappa_h(u)^2 \frac{\varphi'u'}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right. \\
&\quad \left. - 2\kappa_h(u) \frac{\varphi}{u^2} + 2\kappa_h(u) \frac{\varphi''}{1+u'^2} + 4\kappa_h(u) \frac{\varphi'u'}{u(1+u'^2)} \right] dx.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Nun führen wir folgende partielle Integration durch

$$\begin{aligned}
& \int_I \kappa_h(u) \frac{1}{1+u'^2} \varphi'' dx \\
&= - \int_I \kappa_h(u)' \frac{1}{1+u'^2} \varphi' dx + \int_I \kappa_h(u) \frac{2u'u''}{(1+u'^2)^2} \varphi' dx + \underbrace{\left[ \kappa_h(u) \frac{1}{1+u'^2} \varphi \right]_{-a}^a}_{=0}
\end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
(6.6) &= \int_I \left[ \kappa_h(u)^2 \frac{\varphi}{u^2} (1+u'^2)^{1/2} - 5\kappa_h(u)^2 \frac{\varphi'u'}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right. \\
&\quad \left. - 2\kappa_h(u) \frac{\varphi}{u^2} - 2\kappa_h(u)' \frac{1}{1+u'^2} \varphi' + 4\kappa_h(u) \frac{u'u''}{(1+u'^2)^2} \varphi' + 4\kappa_h(u) \frac{\varphi'u'}{u(1+u'^2)} \right] dx \\
&\quad = \frac{u'}{u(1+u'^2)^{1/2}} \left( \kappa_h(u) - \frac{1}{(1+u'^2)^{1/2}} \right) \\
&= \int_I \left[ \kappa_h(u)^2 \frac{\varphi}{u^2} (1+u'^2)^{1/2} - \kappa_h(u)^2 \frac{\varphi'u'}{u(1+u'^2)^{1/2}} - 2\kappa_h(u) \frac{\varphi}{u^2} - 2\kappa_h(u)' \frac{1}{1+u'^2} \varphi' \right] dx.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Nach einer weiteren partiellen Integration

$$\begin{aligned}
& - \int_I \kappa_h(u)^2 u' \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \varphi' dx \\
&= \int_I \left[ 2\kappa_h(u) \kappa_h(u)' \frac{u'}{u(1+u'^2)^{1/2}} \varphi + \kappa_h(u)^2 u'' \frac{\varphi}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right. \\
&\quad \left. + \kappa_h(u)^2 u' \left( \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right)' \varphi \right] dx + \underbrace{\text{Randterme}}_{=0} \\
&= u' \left( - \frac{u'}{u^2(1+u'^2)^{1/2}} - \frac{u'u''}{u(1+u'^2)^{3/2}} \right)
\end{aligned}$$

ergibt sich

$$(6.7) = \int_I \left[ \kappa_h(u)^2 \varphi \left( \frac{(1+u^2)^{1/2}}{u^2} + \frac{u''}{u(1+u^2)^{1/2}} - \frac{u'^2}{u^2(1+u^2)^{1/2}} - \frac{u'^2 u''}{u(1+u^2)^{3/2}} \right) \right. \\ \left. + 2\kappa_h(u)\kappa_h(u)' \frac{u'}{u(1+u^2)^{1/2}} \varphi - 2\kappa_h(u) \frac{\varphi}{u^2} - 2\varphi' \frac{u}{(1+u^2)^{1/2}} \kappa_h(u)' \frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}} \right] dx. \quad (6.8)$$

Eine letzte partielle Integration

$$- \int_I \frac{u}{(1+u^2)^{1/2}} \kappa_h(u)' \frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}} \varphi' dx \\ = \int_I \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{(1+u^2)^{1/2}} \kappa_h(u)' \right) \frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}} \varphi \right. \\ \left. + \frac{u}{(1+u^2)^{1/2}} \kappa_h(u)' \left( -\frac{u'}{u^2(1+u^2)^{1/2}} - \frac{u' u''}{u(1+u^2)^{3/2}} \right) \varphi \right] dx + \underbrace{\text{Randterme}}_{=0} \\ = \kappa_h(u)' \frac{u'}{(1+u^2)^{1/2}} \frac{1}{u} \underbrace{\left( -\frac{1}{(1+u^2)^{1/2}} - \frac{u u''}{(1+u^2)^{3/2}} \right)}_{=-\kappa_h(u)}$$

liefert

$$(6.8) = \int_I \left[ \kappa_h(u)^2 \varphi \frac{1}{u^2} \left( (1+u^2)^{1/2} + \frac{u u''}{(1+u^2)^{1/2}} - \frac{u'^2}{(1+u^2)^{1/2}} - \frac{u u'^2 u''}{(1+u^2)^{3/2}} \right) \right. \\ \left. + 2 \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{(1+u^2)^{1/2}} \kappa_h(u)' \right) \frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}} \varphi - 2\kappa_h(u) \frac{\varphi}{u^2} \right] dx. \quad (6.9)$$

Nun bringen wir den Klammerterm im ersten Summanden auf den Hauptnenner

$$\left( (1+u^2)^{1/2} + \frac{u u''}{(1+u^2)^{1/2}} - \frac{u'^2}{(1+u^2)^{1/2}} - \frac{u u'^2 u''}{(1+u^2)^{3/2}} \right) \\ = \frac{(1+u^2)^2 + (u u'' + u u'^2 u'') - (u'^2 + u^4) - u u'^2 u''}{(1+u^2)^{3/2}} \\ = \frac{1 + 2u'^2 + u^4 + u u'' - u'^2 - u^4}{(1+u^2)^{3/2}} \\ = \frac{1}{(1+u^2)^{1/2}} + \frac{u u''}{(1+u^2)^{3/2}} \\ = \kappa_h(u),$$

und erhalten für alle  $\varphi \in C_0^\infty(I)$  nun

$$(6.9) = \int_I \left[ \kappa_h(u)^3 \frac{1}{u^2} + 2 \frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{(1+u^2)^{1/2}} \kappa_h(u)' \right) - 2\kappa_h(u) \frac{1}{u^2} \right] \varphi dx.$$

(iii) Nun betrachten wir den Beitrag des Flächenfunctionals, wobei wir die verschwin-

denden Randterme bei der partiellen Integration gar nicht mehr hinschreiben

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{A}(u+t\varphi) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_I (u+t\varphi)(1+(u+t\varphi)^2)^{1/2} dx \\
 &= \int_I \left[ \varphi(1+u^2)^{1/2} + u \frac{u'\varphi'}{(1+u^2)^{1/2}} \right] dx \\
 &= \int_I \left[ \frac{1+u^2}{(1+u^2)^{1/2}} \varphi - \underbrace{\left( \frac{u^2}{(1+u^2)^{1/2}} + u \left( \frac{u'}{(1+u^2)^{1/2}} \right)' \right)}_{=\kappa_e(u)} \varphi \right] dx \\
 &= \int_I \left( \frac{1}{(1+u^2)^{1/2}} - u\kappa_e(u) \right) \varphi dx.
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

(iv) Als letztes müssen wir noch den durch den Term  $\int_I \kappa_e(u) dS$  erzeugten Beitrag berücksichtigen

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_I \kappa_e(u+t\varphi) dS(u+t\varphi) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_I \frac{u''+t\varphi''}{(1+(u'+t\varphi')^2)^{3/2}} (u+t\varphi)(1+(u'+t\varphi')^2)^{1/2} dx \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_I \frac{(u''+t\varphi'')(u+t\varphi)}{1+(u'+t\varphi')^2} dx \\
 &= \int_I \left[ \frac{\varphi''u}{1+u^2} + \frac{u''\varphi}{1+u^2} - \frac{2uu'u''\varphi'}{(1+u^2)^2} \right] dx.
 \end{aligned}$$

Partielle Integration im ersten Summanden liefert

$$= \int_I \left[ - \left( \frac{u'}{1+u^2} - \frac{2uu'u''}{(1+u^2)^2} \right) \varphi' + \frac{u''\varphi}{1+u^2} - \frac{2uu'u''\varphi'}{(1+u^2)^2} \right] dx + \underbrace{\text{Randterme.}}_{=0}$$

Nach nochmaliger partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
 &= \int_I \left[ \left( \frac{u''}{1+u^2} - \frac{2u^2u''}{(1+u^2)^2} \right) \varphi + \frac{u''\varphi}{1+u^2} \right] dx + \underbrace{\text{Randterme}}_{=0} \\
 &= \int_I 2u'' \frac{1+u^2-u^2}{(1+u^2)^2} \varphi dx \\
 &= \int_I \frac{2u''}{(1+u^2)^2} \varphi dx.
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \kappa_h(u)^2 \frac{(1+u^2)^{1/2}}{u} &= \left( u\kappa_e(u) + \frac{1}{(1+u^2)^{1/2}} \right)^2 \frac{(1+u^2)^{1/2}}{u} \\
 &= \left( u^2\kappa_e^2 + 2\kappa_e(u) \frac{u}{(1+u^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1+u^2)} \right) \frac{(1+u^2)^{1/2}}{u} \\
 &= \kappa_e^2(u) dS + 2\kappa_e(u) + \frac{1}{u(1+u^2)^{1/2}}.
 \end{aligned}$$

Wir haben also in dem zu  $\kappa_h^2$  gehörigen Term im Vergleich zum Funktional  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta}$  in (6.6) einen Summand  $2\kappa_e$  zuviel berücksichtigt, dieser liefert

$$2 \int_I \kappa_e(u) \, dx = 2 \left[ \frac{u'}{(1+u'^2)^{1/2}} \right]_{-a}^a,$$

also für die Klasse, innerhalb der variiert wird, nur eine Konstante, so daß das um diese Konstante verschobene Funktional dieselbe erste Variation besitzt wie  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta}$ . Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta}(u + t\varphi) \\ &= \int_I \left[ \kappa_h(u)^3 \frac{1}{u^2} - 2\kappa_h(u) \frac{1}{u^2} + 2 \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{(1+u'^2)^{1/2}} \kappa_h(u)' \right) \right. \\ & \quad \left. + (4H_0^2 + \gamma) \left( \frac{1}{(1+u'^2)^{1/2}} - u\kappa_e(u) \right) + 4H_0 \frac{2u''}{(1+u'^2)^2} \right] \varphi \, dx \\ &= 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(I). \end{aligned}$$

Nach Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung ergibt sich die EULER-LAGRANGE-Gleichung

$$\begin{aligned} & \kappa_h(u)^3 \frac{1}{u^2} - 2\kappa_h(u) \frac{1}{u^2} + 2 \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{(1+u'^2)^{1/2}} \kappa_h(u)' \right) \\ & \quad + (4H_0^2 + \gamma) \underbrace{\left( \frac{1}{(1+u'^2)^{1/2}} - u\kappa_e(u) \right)}_{= \frac{2}{(1+u'^2)^{1/2}} - \kappa_h(u)} + 4H_0 \frac{2u''}{(1+u'^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

□

## 6.7 Existenz

In diesem Kapitel beweisen wir den anfangs bereits angekündigten

### (6.7.1) Satz (Existenzsatz).

Seien  $a, \alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$  sowie  $\beta, H_0 \in \mathbb{R}$ . Gibt es eine Minimalfolge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq W_{\alpha, \beta}(I)$  für  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta}$  und Konstanten  $c_1, c_2, c_3 > 0$ , so daß

$$0 < c_1 \leq u_n \leq c_2 \quad \text{und} \quad |u_n'| \leq c_3 \quad \text{auf } [-a, a] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{gilt,}$$

dann gibt es ein  $u \in W_{\alpha, \beta}(I)$  mit

$$0 < c_1 \leq u \leq c_2 \quad \text{und} \quad |u'| \leq c_3 \quad \text{sowie} \quad \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta}(u) = \inf_{W_{\alpha, \beta}(I)} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta}.$$

*Beweis.*

- (i) Zunächst zeigen wir  $W^{2,2}(I)$ -Schranken für die Minimalfolge. Wegen der vorausgesetzten punktwisen Schranken an die Minimalfolge gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta}(u_n) &\geq \int_I (\kappa_e(u_n) + 2H_0)^2 \, dS \\ &= \int_I \left( \frac{u_n''}{(1 + u_n'^2)^{3/2}} + 2H_0 \right)^2 u_n (1 + u_n'^2)^{1/2} \, dx \\ &= \int_I (u_n'' + 2H_0(1 + u_n'^2)^{3/2})^2 \frac{u_n}{(1 + u_n'^2)^{5/2}} \, dx \\ &\geq \frac{c_1}{(1 + c_3^2)^{5/2}} \left\| u_n'' + 2H_0(1 + u_n'^2)^{3/2} \right\|_{L^2(I)}^2. \end{aligned}$$

Die  $L^2$ -Norm von  $u_n'' + 2H_0(1 + u_n'^2)^{3/2}$  ist also beschränkt, und da  $L^2(I)$  ein reflexiver Banachraum ist gibt es ein  $v \in L^2(I)$ , so daß eine Teilfolge existiert (um die Notation im weiteren Verlauf nicht zu stark zu komplizieren wieder ebenso bezeichnet) mit

$$u_n'' + 2H_0(1 + u_n'^2)^{3/2} \rightharpoonup v \text{ in } L^2(I).$$

Wegen der Schranken an die Minimalfolge gilt

$$\left\| 2H_0(1 + u_n'^2)^{3/2} \right\|_{L^2(I)} \leq 2 |H_0| |I|^{1/2} (1 + c_3^2)^{3/2},$$

und mit der gleichen Begründung wie zuvor gibt es ein  $w \in L^2(I)$ , so daß für eine Teilfolge (der vorigen Teilfolge)

$$2H_0(1 + u_n'^2)^{3/2} \rightharpoonup w \text{ in } L^2(I).$$

Damit gilt

$$u_n'' = (u_n'' + 2H_0(1 + u_n'^2)^{3/2}) - 2H_0(1 + u_n'^2)^{3/2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(I)} v - w,$$

dies impliziert dann die starke Beschränktheit der Norm, d.h. für eine Konstante  $C_1 > 0$  gilt

$$\|u_n''\|_{L^2(I)} \leq C_1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned} \|u_n'\|_{L^2(I)}^2 &= \int_I u_n'^2 \, dx \leq |I| c_3^2, \\ \|u_n\|_{L^2(I)}^2 &= \int_I u_n^2 \, dx \leq |I| c_2^2, \end{aligned}$$

und für eine Konstante  $C_2 > 0$  ist damit

$$\|u_n\|_{W^{2,2}(I)} \leq C_2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- (ii) Da  $W^{2,2}(I)$  reflexiv ist existiert eine Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und ein  $u \in W^{2,2}(I)$ , so daß  $u_{n_k} \rightharpoonup u$  in  $W^{2,2}(I)$ . Aufgrund der kompakten Einbettung  $W^{2,2}(I) \hookrightarrow C^1(\bar{I})$  gilt, nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge, welche wir in der Notation unterdrücken wollen,  $u_{n_k} \rightarrow u$  in  $C^1(\bar{I})$ , für  $k \rightarrow \infty$ . Damit erfüllt  $u$  auch die Schranken an die Minimalfolge und ist ebenfalls symmetrisch.

(iii) Es gilt (wir haben  $u_{n_k}$  der Einfachheit wieder mit  $u_n$  bezeichnet)

$$\begin{aligned}
& \left| \int_I u(1+u'^2)^{1/2} dx - \int_I u_n(1+u_n'^2)^{1/2} dx \right| \\
& \leq \int_I |u(1+u'^2)^{1/2} - u_n(1+u'^2)^{1/2} + u_n(1+u'^2)^{1/2} - u_n(1+u_n'^2)^{1/2}| dx \\
& \leq \int_I |(u-u_n)(1+u'^2)^{1/2}| dx + \int_I |u_n((1+u'^2)^{1/2} - (1+u_n'^2)^{1/2})| dx \\
& \stackrel{(6.13)}{\leq} \|u-u_n\|_{L^\infty(I)} \int_I |(1+u'^2)^{1/2}| dx \\
& \quad + \underbrace{\|u_n\|_{L^\infty(I)}}_{\text{O.E.} \leq 2\|u\|_{L^\infty(I)}} \int_I |u'^2 - u_n'^2| \underbrace{\frac{1}{(1+u'^2)^{1/2} + (1+u_n'^2)^{1/2}}}_{\leq 1/2} dx \\
& \leq \|u-u_n\|_{L^\infty(I)} \|(1+u'^2)^{1/2}\|_{L^1(I)} + \|u\|_{L^\infty(I)} \int_I |u' - u_n'| |u' + u_n'| dx \\
& \leq \|u-u_n\|_{L^\infty(I)} \|(1+u'^2)^{1/2}\|_{L^1(I)} + \|u\|_{L^\infty(I)} \|u' - u_n'\|_{L^\infty(I)} |I|^{1/2} \underbrace{\|u' + u_n'\|_{L^2(I)}}_{\text{O.E.} \leq 3\|u'\|_{L^2(I)}} \\
& \leq \|u-u_n\|_{L^\infty(I)} \|(1+u'^2)^{1/2}\|_{L^1(I)} + 3|I|^{1/2} \|u\|_{L^\infty(I)} \|u'\|_{L^2(I)} \|u' - u_n'\|_{L^\infty(I)} \\
& \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Dabei beachten wir wieder

$$A^{1/2} - B^{1/2} = \frac{A - B}{A^{1/2} + B^{1/2}} \quad \text{für } A, B > 0. \tag{6.13}$$

(iv) Ebenso gilt nach Punkt (iii)

$$\begin{aligned}
& \left| \int_I \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} dx - \int_I \frac{1}{u_n(1+u_n'^2)^{1/2}} dx \right| \\
& \leq \int_I \frac{1}{\underbrace{uu_n}_{\leq 1/c_1^2}} \underbrace{\frac{1}{(1+u'^2)^{1/2}(1+u_n'^2)^{1/2}}}_{\text{O.E.} \leq 1} |u_n(1+u_n'^2)^{1/2} - u(1+u'^2)^{1/2}| dx \\
& \leq \frac{1}{c_1^2} \int_I |u_n(1+u_n'^2)^{1/2} - u(1+u'^2)^{1/2}| dx \\
& \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

(v) Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
& \left| \int_I \frac{u_n''^2 u}{(1+u'^2)^{5/2}} dx - \int_I \frac{u_n''^2 u_n}{(1+u_n'^2)^{5/2}} dx \right| \\
& \leq \int_I \frac{1}{\underbrace{(1+u'^2)^{5/2}(1+u_n'^2)^{5/2}}_{\leq 1}} |u_n''^2| |u(1+u'^2)^{5/2} - u_n(1+u_n'^2)^{5/2}| dx.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Es gibt Konstanten  $C, C' > 0$ , so daß nach Lemma (A.6.1) gilt

$$\begin{aligned}
& \|u\|_{L^\infty(I)} \left\| (1 + u_n'^2)^{5/2} - (1 + u'^2)^{5/2} \right\|_{L^\infty(I)} \\
& \stackrel{(6.13)}{\leq} \|u\|_{L^\infty(I)} \left\| \underbrace{\frac{1}{(1 + u_n'^2)^{5/2} + (1 + u'^2)^{5/2}}}_{\leq 1/2} \left[ (1 + u_n'^2)^5 - (1 + u'^2)^5 \right] \right\|_{L^\infty(I)} \\
& \leq \frac{1}{2} \|u\|_{L^\infty(I)} \underbrace{\|u_n'^2 - u'^2\|_{L^\infty(I)}}_{=\|u_n' - u'\|_{L^\infty(I)} \|u_n' + u'\|_{L^\infty(I)}} \underbrace{\sum_{j=0}^4 \|1 + u_n'^2\|_{L^\infty(I)}^j \|1 + u'^2\|_{L^\infty(I)}^{4-j}}_{\leq C'} \\
& \leq C \|u_n' - u'\|_{L^\infty(I)},
\end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned}
& \left\| u(1 + u_n'^2)^{5/2} - u_n(1 + u'^2)^{5/2} \right\|_{L^\infty(I)} \\
& \leq \|u\|_{L^\infty(I)} \left\| (1 + u_n'^2)^{5/2} - (1 + u'^2)^{5/2} \right\|_{L^\infty(I)} + \|(1 + u'^2)^{5/2}\|_{L^\infty(I)} \|u - u_n\|_{L^\infty(I)} \\
& \leq C \|u_n' - u'\|_{L^\infty(I)} + \|(1 + u'^2)^{5/2}\|_{L^\infty(I)} \|u - u_n\|_{L^\infty(I)} \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
(6.15) & \leq \left( C \|u_n' - u'\|_{L^\infty(I)} + \|(1 + u'^2)^{5/2}\|_{L^\infty(I)} \|u - u_n\|_{L^\infty(I)} \right) \underbrace{\int_I u_n''^2}_{\leq \|u_n\|_{W^{2,2}(I)}^2 \leq \text{konst.}} \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

(vi) Es ist

$$\begin{aligned}
& \left| \int_I \frac{uu_n''}{1 + u'^2} dx - \int_I \frac{u_n u_n''}{1 + u_n'^2} dx \right| \\
& \leq \int_I \underbrace{\frac{1}{(1 + u'^2)(1 + u_n'^2)}}_{\leq 1} |u(1 + u_n'^2) - u_n(1 + u'^2)| |u_n''| dx \\
& \leq \left( \|u(1 + u_n'^2) - u_n(1 + u'^2)\|_{L^\infty(I)} \right) \underbrace{\int_I |u_n''|}_{\leq |I|^{1/2} \|u_n''\|_{L^2(I)}} \\
& \leq |I|^{1/2} \left( \|u - u_n\|_{L^\infty(I)} + \|uu_n'^2 - u_n u'^2\|_{L^\infty(I)} \right) \|u_n\|_{W^{2,2}(I)} \\
& \leq |I|^{1/2} \left( \|u - u_n\|_{L^\infty(I)} + \underbrace{\|uu_n'^2 - uu^2\|_{L^\infty(I)}}_{=\|u\|_{L^\infty(I)} \|u' - u_n'\|_{L^\infty(I)} \|u' + u_n'\|_{L^\infty(I)}} \right) \\
& \quad + \underbrace{\|uu'^2 - u_n u'^2\|_{L^\infty(I)}}_{\leq \|u - u_n\|_{L^\infty(I)} \|u'^2\|_{L^\infty(I)}} \underbrace{\|u_n\|_{W^{2,2}(I)}}_{\leq \text{konst.}} \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

(vii) Nach (6.12), (6.14), (6.16) und (6.17) gilt also

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{\alpha, \alpha, \beta}(u_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \left[ (\gamma + 4H_0^2)u(1 + u'^2)^{1/2} + \frac{1}{u(1 + u'^2)^{1/2}} + \frac{u_n''^2 u}{(1 + u'^2)^{5/2}} + 4H_0 \frac{u_n'' u}{1 + u'^2} \right] dx. \end{aligned} \quad (6.18)$$

(viii) Für  $f \in L^2(I)$  ist das Funktional

$$F : W^{2,2}(I) \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \int_I f u'' dx$$

linear und stetig, so daß aufgrund der schwachen Konvergenz  $u_n \rightharpoonup u$  in  $W^{2,2}(I)$  auch

$$\int_I f u_n'' dx \rightarrow \int_I f u'' dx.$$

Mit der Wahl  $f = u/(1 + u'^2) \in L^2(I)$  erhalten wir also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \frac{u}{1 + u'^2} (u_n'' - u'') dx = 0,$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \frac{u u_n''}{1 + u'^2} dx = \int_I \frac{u u''}{1 + u'^2} dx. \quad (6.19)$$

(ix) Für  $f \in L^\infty(I)$  mit  $f \geq 0$  gilt

$$0 \leq \int_I f (u'' - u_n'')^2 dx = \int_I f u''^2 dx - 2 \int_I f u'' u_n'' dx + \int_I f u_n''^2 dx,$$

so daß aufgrund der schwachen Konvergenz und  $f u'' \in L^2(I)$  wie im vorigen Punkt

$$\int_I f u'' u'' dx \xleftarrow{n \rightarrow \infty} 2 \int_I f u'' u_n'' dx - \int_I f u''^2 dx \leq \int_I f u_n''^2 dx.$$

Mit der Wahl  $f = u/(1 + u'^2) \in L^\infty(I)$  erhalten wir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_I \frac{u u_n''^2}{1 + u'^2} dx \geq \int_I \frac{u u''^2}{1 + u'^2} dx. \quad (6.20)$$

(x) Die Behauptung folgt nun mit  $u \in W_{\alpha, \beta}(I)$  und

$$\begin{aligned} & \inf_{W_{\alpha, \beta}(I)} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{\alpha, \alpha, \beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{\alpha, \alpha, \beta}(u_n) \\ & \stackrel{(6.18)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \left[ (\gamma + 4H_0^2)u(1 + u'^2)^{1/2} + \frac{1}{u(1 + u'^2)^{1/2}} + \frac{u_n''^2 u}{(1 + u'^2)^{5/2}} + 4H_0 \frac{u_n'' u}{1 + u'^2} \right] dx \\ & \stackrel{(6.19)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \left[ (\gamma + 4H_0^2)u(1 + u'^2)^{1/2} + \frac{1}{u(1 + u'^2)^{1/2}} + \frac{u_n''^2 u}{(1 + u'^2)^{5/2}} + 4H_0 \frac{u'' u}{1 + u'^2} \right] dx \\ & \stackrel{(6.20)}{\geq} \int_I \left[ (\gamma + 4H_0^2)u(1 + u'^2)^{1/2} + \frac{1}{u(1 + u'^2)^{1/2}} + \frac{u''^2 u}{(1 + u'^2)^{5/2}} + 4H_0 \frac{u'' u}{1 + u'^2} \right] dx \\ & = \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{\alpha, \alpha, \beta}(u). \end{aligned}$$

□



## 6.8 Regularität

Nun zeigen wir noch, daß der Minimierer sogar aus  $C^\infty(\bar{I})$  ist.

### (6.8.1) Satz (Regularitätssatz).

Seien  $a, \alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$  sowie  $\beta, H_0 \in \mathbb{R}$ , dann ist der Minimierer  $u$  des Funktionals  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta}$  aus dem Existenzsatz (6.7.1) glatt, d.h.  $u \in C^\infty(\bar{I})$ .

*Beweis.*

- (i) Sei  $\varphi \in C^2(\bar{I})$  gerade mit  $\varphi(\pm a) = \varphi'(\pm a) = 0$ . Dann gilt nach Satz (6.7.1) wegen  $u + t\varphi \in W_{\alpha, \beta}(I)$  für  $|t| \leq \min(u)/(2\|\varphi\|_{C^0(\bar{I})})$  also

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha, \beta}(u + t\varphi) = 0.$$

Die gesamte Rechnung aus dem Beweis von Lemma (6.6.1) lässt sich für solche  $u$  und  $\varphi$  bis (6.6) bzw. (6.10) und (6.11) durchführen (beachte, daß bis zu diesen Punkten keine höheren als zweite Ableitungen gebildet wurden), so daß gilt

$$\begin{aligned} 0 = & \int_I \left[ \kappa_h(u)^2 \frac{\varphi}{u^2} (1 + u'^2)^{1/2} - 5\kappa_h(u)^2 \frac{\varphi' u'}{u(1 + u'^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. - 2\kappa_h(u) \frac{\varphi}{u^2} + 2\kappa_h(u) \frac{\varphi''}{1 + u'^2} + 4\kappa_h(u) \frac{\varphi' u'}{u(1 + u'^2)} \right] dx \\ & + (4H_0^2 + \gamma) \int_I \left( \frac{1}{(1 + u'^2)^{1/2}} - u\kappa_e(u) \right) \varphi dx + 4H_0 \int_I \frac{2u''}{(1 + u'^2)^2} \varphi dx. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Sei nun  $\varphi \in C^2(\bar{I})$  beliebig mit  $\varphi(\pm a) = \varphi'(\pm a) = 0$ . Dann setzen wir

$$\bar{\varphi}(x) := \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(-x)) \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}(x) := \frac{1}{2}(\varphi(x) - \varphi(-x))$$

für den geraden, bzw. ungeraden Anteil von  $\varphi$ . Für diese gilt

$$\bar{\varphi}(\pm a) = 0, \quad \bar{\varphi}'(\pm a) = 0, \quad \tilde{\varphi}(\pm a) = 0, \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}'(\pm a) = 0,$$

so daß (6.21) auch für  $\bar{\varphi}$  gilt. Für  $\tilde{\varphi}$  gilt (6.21) aber ohnehin, da Integrale über ungerade Funktionen nach Lemma (A.6.2) verschwinden. Daß in diesem Fall im Integranden nur ungerade Funktionen stehen, sieht man direkt, wenn man für die einzelnen Funktionen und ihre Ableitungen beachtet:  $\tilde{\varphi}$  ungerade,  $\tilde{\varphi}'$  gerade,  $\tilde{\varphi}''$  ungerade,  $u$  gerade,  $u'$  ungerade,  $u'^2$  gerade,  $u''$  gerade,  $\kappa_h(u)$  gerade,  $\kappa_e(u)$  gerade. Damit gilt also (6.21) auch für beliebiges  $\varphi \in C^2(\bar{I})$  mit  $\varphi(\pm a) = \varphi'(\pm a) = 0$ .

- (ii) Sei  $\eta \in C_0^\infty((-1, 1))$ , dann setzen wir

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= \int_{-1}^{x/a} \int_{-1}^y \eta(s) ds dy - B \left( \frac{x}{a} + 1 \right)^2 - \Gamma \left( \frac{x}{a} + 1 \right)^3, \\ B &:= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \eta(s) ds + \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^y \eta(s) ds dy, \\ \Gamma &:= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \eta(s) ds - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^y \eta(s) ds dy. \end{aligned}$$

Die so definierte Testfunktion  $\varphi \in C^2(\bar{I})$  ist zulässig, denn

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^y \eta(s) \, ds \, dy - \left( -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds + \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^y \eta(s) \, ds \, dy \right) 4 \\ &\quad - \left( \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^y \eta(s) \, ds \, dy \right) 8 \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^y \eta(s) \, ds \, dy + 2 \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds - 3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^y \eta(s) \, ds \, dy \\ &\quad - 2 \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds + 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^y \eta(s) \, ds \, dy \\ &= 0, \\ \varphi(-a) &= 0,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi'(a) &= \frac{1}{a} \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds \, dy - \left( -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds + \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^y \eta(s) \, ds \, dy \right) 2(2) \frac{1}{a} \\ &\quad - \left( \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^y \eta(s) \, ds \, dy \right) 3(2)^2 \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{a} \left[ \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds + 2 \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds - 3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^y \eta(s) \, ds \, dy \right. \\ &\quad \left. - 3 \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds + 3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^y \eta(s) \, ds \, dy \right] \\ &= 0, \\ \varphi'(-a) &= 0.\end{aligned}$$

Für eine Konstante  $c > 0$  gilt

$$\begin{aligned}B &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |\eta(s)| \, ds + \frac{3}{4} \underbrace{\int_{-1}^1 \int_{-1}^y |\eta(s)| \, ds \, dy}_{\leq \|\eta\|_{L^1((-1,1))}} \leq c \|\eta\|_{L^1((-1,1))}, \\ \Gamma &\leq \frac{1}{4} \int_{-1}^1 |\eta(s)| \, ds + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^y |\eta(s)| \, ds \, dy \leq c \|\eta\|_{L^1((-1,1))},\end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned}\|\varphi(x)\|_{C^1([-a,a])} &\leq \left\| \int_{-1}^{x/a} \int_{-1}^y \eta(s) \, ds \, dy \right\|_{C^1([-a,a])} + B \left\| \left( \frac{x}{a} + 1 \right)^2 \right\|_{C^1([-a,a])} + \Gamma \left\| \left( \frac{x}{a} + 1 \right)^3 \right\|_{C^1([-a,a])} \\ &\leq c \|\eta\|_{L^1((-1,1))}.\end{aligned}$$

Nun beachten wir

$$\varphi''(x) = \frac{1}{a^2} \left[ \eta\left(\frac{x}{a}\right) - 2B - 6\Gamma \left(\frac{x}{a} + 1\right) \right]$$

und erhalten aus Gleichung (6.21) für  $\eta \in C_0^\infty((-1, 1))$  beliebig und von  $u$  und  $a$  abhängige Konstanten  $C_1, C_2 > 0$ , die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left| - \int_I 2\kappa_h(u) \frac{\eta(\frac{x}{a})}{a^2(1+u'^2)} dx \right| \leq \left| \int_I \left[ \kappa_h(u)^2 \frac{\varphi}{u^2} (1+u'^2)^{1/2} - 5\kappa_h(u)^2 \frac{\varphi' u'}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2\kappa_h(u) \frac{\varphi}{u^2} + 4\kappa_h(u) \frac{\varphi' u'}{u(1+u'^2)} \right] dx \right. \\ & \quad \left. + (4H_0^2 + \gamma) \int_I \left( \frac{1}{(1+u'^2)^{1/2}} - u\kappa_e(u) \right) \varphi dx + 4H_0 \int_I \frac{2u''}{(1+u'^2)^2} \varphi dx \right| \\ & \quad + \left| \int_I 2\kappa_h(u) \frac{-2B - 6\Gamma(\frac{x}{a} + 1)}{a^2(1+u'^2)} dx \right| \\ & \leq C_1(u, a) \left[ \|\varphi\|_{C^1([-a, a])} + \|\eta\|_{L^1((-1, 1))} \right] \\ & \leq C_2(u, a) \|\eta\|_{L^1((-1, 1))}. \end{aligned}$$

Nach Lemma (A.6.3) ist die Abbildung

$$J : (C_0^\infty((-1, 1)), \|\cdot\|_{L^1((-1, 1))}) \rightarrow (C_0^\infty((-a, a)), \|\cdot\|_{L^1((-a, a))}), \eta \mapsto \frac{1}{a} \eta \left( \frac{\cdot}{a} \right)$$

ein isometrischer Isomorphismus, so daß wir für alle  $\eta \in C_0^\infty((-1, 1))$  die Beziehung

$$\left| - \int_I 2\kappa_h(u) \frac{J\eta}{a(1+u'^2)} dx \right| \leq C_2(u, a) \|J\eta\|_{L^1((-a, a))}$$

erhalten. Aufgrund der Surjektivität von  $J$  gilt also auch

$$\left| - \int_I 2\kappa_h(u) \frac{\psi}{a(1+u'^2)} dx \right| \leq C_2(u, a) \|\psi\|_{L^1((-a, a))} \quad (6.22)$$

für alle  $\psi \in C_0^\infty((-a, a))$ .

- (iii) Die linke Seite von (6.22) definiert also ein beschränktes, lineares und damit stetiges Funktional

$$F : (C_0^\infty(I), \|\cdot\|_{L^1(I)}) \rightarrow \mathbb{R}, \psi \mapsto - \int_I 2\kappa_h(u) \frac{\psi}{a(1+u'^2)} dx.$$

Nach Satz (6.4.4) ist  $C_0^\infty(I)$  dicht in  $L^1(I)$ , so daß das Funktional nach Satz (A.6.4) eine eindeutige stetige Fortsetzung  $\tilde{F}$  auf  $L^1(I)$  hat. Damit ist also  $\tilde{F} \in [L^1(I)]^*$ , so daß es nach dem Darstellungssatz für  $L^p$ -Räume [Y, Chapter IV, 9. Example 3, S.115] ein  $\tilde{f} \in L^\infty(I)$  gibt mit

$$\tilde{F}(\varphi) = \int_I \tilde{f} \varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in L^1(I).$$

Für die Abbildung

$$f = -2 \frac{\kappa_h(u)}{a(1+u'^2)}$$

folgt nun  $f \in L^\infty(I)$ , denn es gilt

$$F(\psi) = \int_I f \psi \, dx = \int_I \tilde{f} \psi \, dx \quad \text{für alle } \psi \in C_0^\infty(I),$$

so daß mit dem erweiterten Fundamentalsatz der Variationsrechnung [GH1, Chapter 1, 2.3, Lemma 3, S.32]  $f = \tilde{f}$  fast überall auf  $I$  gilt. Wegen

$$0 < \frac{2}{a(1+c_3^2)} \leq \frac{2}{a(1+u'^2)} \leq \frac{2}{a}$$

ist auch  $\kappa_h(u) \in L^\infty(I)$  und somit wegen

$$|u''| = \left| \kappa_h(u) \frac{(1+u'^2)^{3/2}}{u} - \frac{1}{(1+u'^2)^{1/2}} \right| \leq |\kappa_h(u)| \frac{(1+c_3^2)^{3/2}}{c_1} + 1$$

auch  $u'' \in L^\infty(I)$ , und damit  $u \in W^{2,\infty}(I)$ .

(iv) Für  $\eta \in C_0^\infty((-1, 1))$  setzen wir nun

$$\varphi(x) := \int_{-1}^{x/a} \eta(s) \, ds - \frac{3}{4} \left( \frac{x}{a} + 1 \right)^2 \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds + \frac{1}{4} \left( \frac{x}{a} + 1 \right)^3 \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds.$$

Dann ist  $\varphi$  wieder zulässig, denn

$$\varphi(+a) = \left( 1 - \frac{3}{4}2^2 + \frac{1}{4}2^3 \right) \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds = 0,$$

$$\varphi(-a) = 0,$$

$$\varphi'(+a) = \frac{1}{a} \eta(+1) - \frac{3}{4}2(2) \frac{1}{a} \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds + \frac{1}{4}3(2)^2 \frac{1}{a} \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds = 0,$$

$$\varphi'(-a) = \frac{1}{a} \eta(-1) = 0,$$

und

$$\|\varphi\|_{C^0([-a,a])} \leq 6 \|\eta\|_{L^1((-1,1))},$$

$$\|\varphi'\|_{L^1((-a,a))} \leq \underbrace{\frac{1}{a} \int_{-a}^a \left| \eta\left(\frac{x}{a}\right) \right| \, dx}_{=\|\eta\|_{L^1((-1,1))}} + \frac{3}{4} \frac{2}{a} \int_{-a}^a \left| \frac{x}{a} + 1 \right| \, dx \int_{-1}^1 |\eta(s)| \, ds$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{3}{a} \int_{-a}^a \left| \frac{x}{a} + 1 \right|^2 \, dx \int_{-1}^1 |\eta(s)| \, ds$$

$$\leq c \|\eta\|_{L^1((-1,1))}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \frac{1}{a^2} \eta' \left( \frac{x}{a} \right) - \frac{6}{4a^2} \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds + \frac{6}{4a^2} \left( \frac{x}{a} + 1 \right) \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds \\ &= \frac{1}{a^2} \eta' \left( \frac{x}{a} \right) + \frac{6}{4a^2} \frac{x}{a} \int_{-1}^1 \eta(s) \, ds. \end{aligned}$$

Damit gilt nach (6.21), da wir bereits  $u \in W^{2,\infty}(I)$  wissen

$$\begin{aligned}
& \left| - \int_I 2\kappa_h(u) \frac{1}{1+u^2} \frac{1}{a^2} \eta' \left( \frac{x}{a} \right) dx \right| \leq \left| \int_I \left[ \kappa_h(u)^2 \frac{\varphi}{u^2} (1+u^2)^{1/2} - 5\kappa_h(u)^2 \frac{\varphi' u'}{u(1+u^2)^{1/2}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2\kappa_h(u) \frac{\varphi}{u^2} + 4\kappa_h(u) \frac{\varphi' u'}{u(1+u^2)} \right] dx \right. \\
& \quad \left. + (4H_0^2 + \gamma) \int_I \left( \frac{1}{(1+u^2)^{1/2}} - u\kappa_e(u) \right) \varphi dx + 4H_0 \int_I \frac{2u''}{(1+u^2)^2} \varphi dx \right| \\
& \quad + \frac{6}{4a^2} \int_{-1}^1 |\eta(s)| ds \left| \int_I 2\kappa_h(u) \frac{x}{1+u^2} \frac{1}{a^3} dx \right| \\
& \leq C_3(u, a) \left( \|\varphi\|_{C^0([-a,a])} + \|\varphi'\|_{L^1((-a,a))} + \|\eta\|_{L^1((-1,1))} \right) \\
& \leq C_4(u, a) \|\eta\|_{L^1((-1,1))},
\end{aligned}$$

für von  $u$  und  $a$  abhängige Konstanten  $C_3, C_4 > 0$ . Wiederum mit Lemma (A.6.3) und der Beobachtung  $(J\eta)' = [\eta(\cdot/a)/a]' = \eta'(\cdot/a)/a^2$  erhält man

$$\left| - \int_I 2\kappa_h(u) \frac{1}{1+u^2} \psi' dx \right| \leq C_4(u, a) \|\psi\|_{L^1(I)}$$

für alle  $\psi \in C_0^\infty((-a, a))$ . Wegen  $u \in W^{2,\infty}(I)$  wissen wir bereits

$$-2 \frac{\kappa_h(u)}{(1+u^2)} \in L^\infty(I),$$

so daß nun für

$$C_5 := \max \left\{ \left\| \frac{2\kappa_h(u)}{1+u^2} \right\|_{L^\infty(I)}, C_4 \right\}$$

gilt

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-a}^a 2\kappa_h(u) \frac{1}{1+u^2} \psi dx \right| \leq C_5(u) \|\psi\|_{L^1(I)}, \\
& \left| \int_{-a}^a 2\kappa_h(u) \frac{1}{1+u^2} \psi' dx \right| \leq C_5(u) \|\psi\|_{L^1(I)}
\end{aligned}$$

für alle  $\psi \in C_0^\infty(I)$ . Mit [A, U4.7, S.198] folgt nun

$$\kappa_h(u) \frac{1}{1+u^2} \in W^{1,\infty}(I).$$

Nach der Produktregel für SOBOLEV-Funktionen [A, 2.24, S.123] ist wegen  $u \in W^{2,\infty}(I)$  auch  $1+u^2 \in W^{1,\infty}(I)$  und damit

$$\kappa_h(u) \frac{1}{1+u^2} (1+u^2) = \kappa_h(u) \in W^{1,\infty}(I).$$

Nach den Lemmata (A.6.6) und (A.6.7) sind  $(1+u^2)^{1/2}$  und  $1/u$  in  $W^{1,\infty}(I)$ , so daß

$$u'' = [\kappa_h(u)(1+u^2) - (1+u^2)^{1/2}] (1+u^2)^{1/2} \frac{1}{u} \in W^{1,\infty}(I).$$

Dies bedeutet aber  $u \in W^{3,\infty}(I) = C^{2,1}(\bar{I})$ .

- (v) Für  $u \in W^{3,\infty}(I)$  können wir die Rechnung aus Lemma (6.6.1) für die einzelnen Summanden jeweils bis (6.7), (6.10) und (6.11) durchführen und erhalten für beliebiges  $d \in I$  nach partieller Integration

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{\alpha, \beta}(u + t\varphi) \\
&= \int_I \left[ \kappa_h(u)^2 \frac{\varphi}{u^2} (1 + u'^2)^{1/2} - \kappa_h(u)^2 \frac{\varphi' u'}{u(1 + u'^2)^{1/2}} - 2\kappa_h(u) \frac{\varphi}{u^2} - 2\kappa_h(u)' \frac{1}{1 + u'^2} \varphi' \right] dx \\
&+ \int_I \left[ (4H_0^2 + \gamma) \left( \frac{1}{(1 + u'^2)^{1/2}} - u\kappa_e(u) \right) + 4H_0 \frac{2u''}{(1 + u'^2)^2} \right] \varphi dx \\
&= \int_I \left[ \int_d^x -\kappa_h(u)^2 \frac{1}{u^2} (1 + u'^2)^{1/2} dy - \kappa_h(u)^2 \frac{u'}{u(1 + u'^2)^{1/2}} \right. \\
&+ 2 \int_d^x \kappa_h(u) \frac{1}{u^2} dy - 2\kappa_h(u)' \frac{1}{1 + u'^2} \left. \right] \varphi' dx \\
&- \int_I \int_d^x \left[ (4H_0^2 + \gamma) \left( \frac{1}{(1 + u'^2)^{1/2}} - u\kappa_e(u) \right) + 4H_0 \frac{2u''}{(1 + u'^2)^2} \right] dy \varphi' dx \\
&= 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(I).
\end{aligned}$$

Nach dem Fundamentallemma von DUBOIS-REYMOND gibt es also ein  $c = c(d) \in \mathbb{R}$ , so daß

$$\begin{aligned}
& \left[ \int_d^x -\kappa_h(u)^2 \frac{1}{u^2} (1 + u'^2)^{1/2} dy - \kappa_h(u)^2 \frac{u'}{u(1 + u'^2)^{1/2}} + 2 \int_d^x \kappa_h(u) \frac{1}{u^2} dy - 2\kappa_h(u)' \frac{1}{1 + u'^2} \right] \\
&- \int_d^x \left[ (4H_0^2 + \gamma) \left( \frac{1}{(1 + u'^2)^{1/2}} - u\kappa_e(u) \right) + 4H_0 \frac{2u''}{(1 + u'^2)^2} \right] dy \\
&= c \quad \text{fast überall auf } I.
\end{aligned}$$

Damit gilt dann fast überall auf  $I$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
\kappa_h(u)' &= \frac{1 + u'^2}{2} \left[ \int_d^x -\kappa_h(u)^2 \frac{1}{u^2} (1 + u'^2)^{1/2} dy - \kappa_h(u)^2 \frac{u'}{u(1 + u'^2)^{1/2}} + 2 \int_d^x \kappa_h(u) \frac{1}{u^2} dy \right] \\
&- \frac{1 + u'^2}{2} \int_d^x \left[ (4H_0^2 + \gamma) \left( \frac{1}{(1 + u'^2)^{1/2}} - u\kappa_e(u) \right) + 4H_0 \frac{2u''}{(1 + u'^2)^2} \right] dy - \frac{1 + u'^2}{2} c.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Da die rechte Seite von (6.23) in  $C^0(\bar{I})$  ist, gilt dies auch für die linke Seite und die Gleichung gilt damit auf ganz  $\bar{I}$ . Also ist  $\kappa_h(u) \in C^1(\bar{I})$ . Aufgrund der Darstellung

$$u'' = [\kappa_h(u)(1 + u'^2) - (1 + u'^2)^{1/2}] (1 + u'^2)^{1/2} \frac{1}{u} \tag{6.24}$$

ist  $u \in C^3(\bar{I})$ . Im Induktionsschritt zeigt man nun wie zuvor

$$\begin{aligned}
u \in C^k(\bar{I}) &\stackrel{(6.23)}{\implies} \kappa_h(u)' \in C^{k-2}(\bar{I}) \implies \kappa_h(u) \in C^{k-1}(\bar{I}) \\
&\stackrel{(6.24)}{\implies} u'' \in C^{k-1}(\bar{I}) \implies u \in C^{k+1}(\bar{I}).
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

## A.6 Anhang zu Kapitel 6

### (A.6.1) Lemma.

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$|a^n - b^n| \leq |a - b| \sum_{j=0}^{n-1} |a|^j |b|^{(n-1)-j}.$$

*Beweis.* Durch Induktion nach  $n$ .

Für  $n = 1$  ist die Aussage klar, da die leere Summe gleich 1 ist. Nun gilt

$$\begin{aligned} |a^{n+1} - b^{n+1}| &= |a^{n+1} - a^n b + b a^n - b^{n+1}| \\ &\leq |a^n| |a - b| + |b| |a^n - b^n| \\ &\leq |a^n| |a - b| + |b| |a - b| \sum_{j=0}^{n-1} |a|^j |b|^{(n-1)-j} \\ &\leq |a - b| \left[ |a|^n + |b| \sum_{j=0}^{n-1} |a|^j |b|^{(n-1)-j} \right] \\ &= |a - b| \sum_{j=0}^n |a|^j |b|^{n-j}. \end{aligned}$$

□

### (A.6.2) Lemma (Ungerade Funktionen haben Mittelwert 0).

Sei  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und integrierbar, dann gilt

$$\int_{[-a, a]} f \, dx = 0.$$

*Beweis.* Mit  $\varphi : [-a, 0] \rightarrow [0, a], x \mapsto -x$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x) \, dx &= - \int_{-a}^0 f(-x) \, dx = \int_{\varphi(-a)}^{\varphi(0)} f(t) \, dt = \int_a^0 f(t) \, dt \\ &= - \int_0^a f(t) \, dt. \end{aligned}$$

□

### (A.6.3) Lemma (Isometrischer Isomorphismus $C_0^\infty((-1, 1)) \rightarrow C_0^\infty((-a, a))$ ).

Für beliebiges aber festes  $a > 0$  ist die Abbildung

$$J : (C_0^\infty((-1, 1)), \|\cdot\|_{L^1((-1, 1))}) \rightarrow (C_0^\infty((-a, a)), \|\cdot\|_{L^1((-a, a))}), \eta \mapsto \frac{1}{a} \eta \left( \frac{\cdot}{a} \right)$$

ein isometrischer Isomorphismus.

*Beweis.* Sei  $\eta \in C_0^\infty((-1, 1))$ , dann ist  $J\eta \in C_0^\infty((-a, a))$  mit

$$\|J\eta\|_{L^1((-a, a))} = \int_{-a}^a \frac{1}{a} \left| \eta \left( \frac{x}{a} \right) \right| \, dx = \int_{-1}^1 |\eta(y)| \, dy = \|\eta\|_{L^1((-1, 1))}.$$

Die Abbildung  $J$  ist linear mit Umkehrabbildung

$$J^{-1}\psi = a\psi(a \cdot).$$

□

**(A.6.4) Satz (Fortsetzung gleichmäßig stetiger Abbildungen).**

Seien  $(X, \rho_X)$  ein metrischer Raum und  $(Y, \rho_Y)$  ein vollständiger metrischer Raum, sowie  $A$  eine dichte Teilmenge von  $X$ . Ist  $T : (A, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$  eine gleichmäßig stetige Abbildung, dann existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung  $\tilde{T}$  auf ganz  $X$ .

*Beweis.* Zu  $x \in X$  wählen wir eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  mit  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ . Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , so daß für alle  $a, b \in X$  mit  $\rho_X(a, b) < \delta(\varepsilon)$  gilt  $\rho_Y(Ta, Tb) < \varepsilon$ . Damit ist die Bildfolge  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  ebenfalls eine CAUCHY-Folge, denn zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N(\delta(\varepsilon)) > 0$ , so daß  $\rho_X(x_j, x_k) < \delta(\varepsilon)$  und damit  $\rho_Y(Tx_j, Tx_k) < \varepsilon$  für alle  $j, k \geq N$ . Da  $(Y, \rho_Y)$  vollständig ist konvergiert die Bildfolge zudem. Nun definieren wir die Abbildung  $\tilde{T}$  durch  $\tilde{T}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} T(x_k)$ .

Für jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Grenzwert  $x$  folgt aus  $\rho_X(x_j, x_k) < \varepsilon$  für alle  $j, k > N$  die Aussage  $\rho_X(x_n, x) \leq \varepsilon$  für alle  $n > N$ , denn zu  $\varepsilon' > 0$  gibt es ein  $M > 0$ , so daß  $\rho_X(x_k, x) < \varepsilon'$  für alle  $k > M$ . Damit gilt also

$$\rho_X(x_n, x) \leq \rho_X(x_n, x_k) + \rho_X(x_k, x) < \varepsilon + \varepsilon'$$

für alle  $n, k > N$  und  $k > M$ . Die Behauptung folgt also mit  $\varepsilon' \rightarrow 0$ .

Für alle  $x, x' \in X$  mit  $\rho_X(x, x') < \delta(\varepsilon/3)/3$  gibt es  $a, a' \in A$  (aus der Konstruktion von  $\tilde{T}(x)$  bzw.  $\tilde{T}(x')$ ), so daß  $\rho_X(x, a) < \delta(\varepsilon/3)/3$ ,  $\rho_X(x', a') < \delta(\varepsilon/3)/3$  und  $\rho_Y(\tilde{T}x, a) < \varepsilon/3$ ,  $\rho_Y(\tilde{T}x', a') < \varepsilon/3$ . Damit gilt auch  $\rho_X(a, a') < \delta(\varepsilon/3)$  und damit  $\rho_Y(Ta, Ta') < \varepsilon/3$ , so daß

$$\rho_Y(\tilde{T}x, \tilde{T}x') \leq \rho_Y(\tilde{T}x, Ta) + \rho_Y(Ta, Ta') + \rho_Y(Ta', \tilde{T}x') < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Die Abbildung  $\tilde{T}$  ist also gleichmäßig stetig.

Seien  $T_1$  und  $T_2$  stetige Fortsetzungen von  $T$  auf  $X$ , dann gibt es zu jedem  $x \in X$  eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  mit  $a_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ . Aufgrund der Stetigkeit gilt

$$T_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_1(a_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_2(a_j) = T_2(x).$$

Damit ist  $\tilde{T}$  eindeutig bestimmt. □

**(A.6.5) Lemma (Kettenregel für  $W^{k, \infty}$ -Funktionen).**

Seien  $I$  ein beschränktes offenes Intervall,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $g \in W^{k, \infty}(I)$  und  $f \in C^{k-1, 1}(g(\bar{I}))$ , dann ist  $f \circ g \in W^{k, \infty}(I)$ .

*Beweis.* Zunächst bemerken wir, daß  $W^{k, \infty}(I) = C^{k-1, 1}(\bar{I})$  gilt, wir müssen also  $f \circ g \in C^{k-1, 1}(\bar{I})$  nachweisen.

- (i) Wir zeigen zunächst, daß das Produkt von  $n$  LIPSCHITZ-Funktionen wieder LIPSCHITZstetig ist. Für  $n = 1$  ist die Behauptung klar. Seien  $f_1, \dots, f_{n+1}$  LIPSCHITZstetig, dann ist nach Induktionsannahme  $f := \prod_{i=1}^n f_i \in C^{0, 1}(\bar{I})$  und es gilt

$$\begin{aligned} \left| \left( \prod_{i=1}^{n+1} f_i \right) (x) - \left( \prod_{i=1}^{n+1} f_i \right) (y) \right| &= |f(x)f_{n+1}(x) - f(y)f_{n+1}(y)| \\ &\leq |f(x)f_{n+1}(x) - f(x)f_{n+1}(y)| + |f(x)f_{n+1}(y) - f(y)f_{n+1}(y)| \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(I)} |f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)| + \|f_{n+1}\|_{L^\infty(I)} |f(x) - f(y)| \\ &\leq 2 \max(\|f\|_{L^\infty(I)}, \|f_{n+1}\|_{L^\infty(I)}) \max(\text{Lip}_f, \text{Lip}_{f_{n+1}}) |x - y|. \end{aligned}$$

Beachte  $I$  beschränkt, so daß die  $L^\infty$ -Norm von  $C^{0, 1}(\bar{I})$ -Funktionen existiert.



(ii) Nach der Formel von FAÀ DI BRUNO [Rom], [J] gilt für die  $(k-1)$ -te Ableitung

$$D^{k-1}(f \circ g) = \sum_{(l_1, \dots, l_{k-1}) \in T_{k-1}} \frac{(k-1)!}{l_1! \cdots l_{k-1}!} (D^{l_1 + \dots + l_{k-1}} f)(g) \prod_{\substack{m=1 \\ l_m \geq 1}}^{k-1} \left( \frac{D^m g}{m!} \right)^{l_m},$$

wobei  $T_{k-1}$  gleich der Menge alle  $(k-1)$ -Tupel  $(l_1, \dots, l_{k-1}) \in \mathbb{N}_0^{k-1}$  ist für die  $1l_1 + 2l_2 + \dots + (k-1)l_{k-1} = k-1$  gilt. Nach der Standardversion der Kettenregel für  $W^{1,p}$ -Funktionen [vdM, Propostion (2.11) (ii)] ist

$$(D^{l_1 + \dots + l_{k-1}} f)(g) \in C^{0,1}(\bar{I})$$

und nach dem vorigen Punkt

$$\prod_{\substack{m=1 \\ l_m \geq 1}}^{k-1} \left( \frac{D^m g}{m!} \right)^{l_m} \in C^{0,1}(\bar{I}),$$

so daß wiederum nach Punkt (i)

$$D^{k-1}(f \circ g) \in C^{0,1}(\bar{I}) \quad \text{und damit} \quad f \circ g \in C^{k-1,\infty}(\bar{I}) = W^{k,\infty}(I).$$

□

**(A.6.6) Lemma (Kehrwerte von SOBOLEV-FUNKTIONEN in  $W^{k,\infty}(I)$ ).**

Sei  $I$  ein beschränktes, offenes Intervall,  $k \in \mathbb{N}$  und  $u \in W^{k,\infty}(I)$  und  $u \geq c > 0$  f.ü., dann ist  $1/u \in W^{k,\infty}(I)$ .

*Beweis.* Nach dem Einbettungssatz für  $n = 1$  [vdM, Satz (2.14)] könne wir einen stetigen Vertreter von  $u$  wählen und setzen  $m := \max_{\bar{I}} u \geq c > 0$ . Es gilt (man beachte, daß  $u(\bar{I})$  wieder kompakt ist und von Null weg beschränkt)

$$f : u(\bar{I}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} \in C^\infty(u(\bar{I})) \subset C^{k,1}(u(\bar{I})) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

so daß nach Lemma (A.6.5) die Behauptung folgt. □

**(A.6.7) Lemma  $((1 + u'^2)^l \in W^{k,\infty}(I))$ .**

Sei  $I$  ein beschränktes offenes Intervall und  $u \in W^{k,\infty}(I)$  für  $k \geq 2$ , dann ist  $(1 + u'^2)^l \in W^{k-1,\infty}(I)$  für alle  $l \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Es ist  $u' \in W^{k-1,\infty}(I)$  und die Abbildung  $f : u'(\bar{I}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (1 + x^2)^l$  ist in  $C^\infty(u'(\bar{I})) \subseteq C^{k-2,1}(u'(\bar{I}))$  (beachte  $u'(\bar{I})$  ist kompakt), so daß die Behauptung mit Lemma (A.6.5) folgt. □



# Kapitel 7

## Das WILLMORE-Funktional

In diesem Kapitel wollen wir nach einer kurzen historischen Einführung die Ergebnisse aus [D'Ac,D,G] darstellen, genauer wollen wir zeigen wie dort die für den Existenzsatz (6.7.1) benötigten Schranken an die Minimalfolge gewonnen werden, sowie einige andere interessante Aussagen über Eigenschaften der Minimierer.

Zunächst geben wir das zu lösende Variationsproblem noch einmal an (vgl. Abschnitte 3.5 und 6.1)

Wir betrachten für die Parameter  $a, \alpha > 0$  mit  $I := (-a, a)$  das Funktional

$$\hat{\mathcal{W}} : W_\alpha(I) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$u \mapsto \int_I \left[ \left( \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right) dx + \kappa_e(u)^2 dS \right]$$

mit dem folgenden Variationsproblem

$$\hat{\mathcal{W}} \rightarrow \min! \quad \text{in } W_\alpha(I). \quad (7.1)$$

Wir betrachten also das NITSCHÉ-Funktional in der Darstellung (6.2) für  $\gamma = 0$  und  $H_0 = 0$ .

### (7.0.8) Bemerkung (Einschränkung auf $a = 1$ ).

Nach Korollar (6.2.3), bzw. der Skalierungseigenschaft Lemma (6.2.1) reicht es aus Aussagen über das Infimum, bzw. Minimierer von  $\hat{\mathcal{W}}$  auf  $W_\alpha(I)$ , das bedeutet  $\mathcal{F}_{0,0}^{a,\alpha}$ , für festes  $a > 0$  (im Folgenden  $a = 1$ ) und alle  $\alpha > 0$  zu zeigen um die Gültigkeit der Aussage auch für alle  $a > 0$  und alle  $\alpha > 0$  zu erhalten.

## 7.1 Geschichte des WILLMORE-Funktional und die WILLMORE-Vermutung

Ein Kapitel über das WILLMORE-Funktional läßt sich nicht schreiben, ohne einige kurze Anmerkungen zu dessen Ursprüngen zu machen.

Ist  $M$  eine zweidimensionale kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow \mathbb{E}^3$  eine isometrische Immersion in den dreidimensionalen EUKLIDISCHEN Raum, dann ist das WILLMORE-Funktional definiert als

$$\mathcal{W}(f) = \int_M H^2 \, dA,$$

mit der mittleren Krümmung  $H$  (die halbe Spur der WEINGARTENabbildung) und dem von  $\mathbb{E}^3$  induzierten Flächenelement  $dA$ .

Das WILLMORE-Funktional wurde schon Anfang des 19. Jahrhunderts von SIMÉON DENIS POISSON [Po], SOPHIE GERMAIN [G] und anderen (für weitere Referenzen siehe [Nit1]) als idealisiertes Modell für elastische Oberflächen betrachtet. Anfang des 20. Jahrhunderts findet man WILLMORE-Flächen etwa in [Th] und [Bl]. In den Focus der Aufmerksamkeit rückte das Funktional aber Mitte der 1960er Jahre, als THOMAS JAMES WILLMORE in [Wil] das Funktional in der oben angegebene Form für die 2-Sphäre  $S^2$  betrachtete und zeigte

$$\mathcal{W}(S^2) := \inf_{\substack{f: S^2 \rightarrow \mathbb{E}^3 \\ \text{isom. Immersion}}} \mathcal{W}(f) = 4\pi,$$

wobei das Infimum ausschließlich von runden Sphären angenommen wird. Das entsprechende Problem wurde auch für die reell projektive Ebene  $\mathbb{R}P^2$  vollständig gelöst (für weitere Referenzen und eine Übersicht über den damaligen Forschungsstand siehe den Übersichtsartikel [PS]). Für den Torus  $T^2$  regt seit längerer Zeit die WILLMORE-Vermutung

$$\mathcal{W}(T^2) = 2\pi^2$$

eine große Menge fruchtbarer Forschung an. Es ist bekannt [ST] und [Wi2], daß der Wert von einem bestimmten Torus angenommen wird. In [LS2] konnte die Vermutung damit für Rotationstori bewiesen werden und in [S] wurde die Existenz minimierender Tori gezeigt.

## 7.2 Eine obere Schranke für das Infimum

Zunächst zeigen wir, daß die optimale WILLMORE-Energie für beliebige  $a, \alpha > 0$  durch  $\frac{8}{\sqrt{3}}\pi$  beschränkt ist. Beachte dazu Bemerkung (7.0.8).

### (7.2.1) Lemma (Obere Schranken für das Infimum).

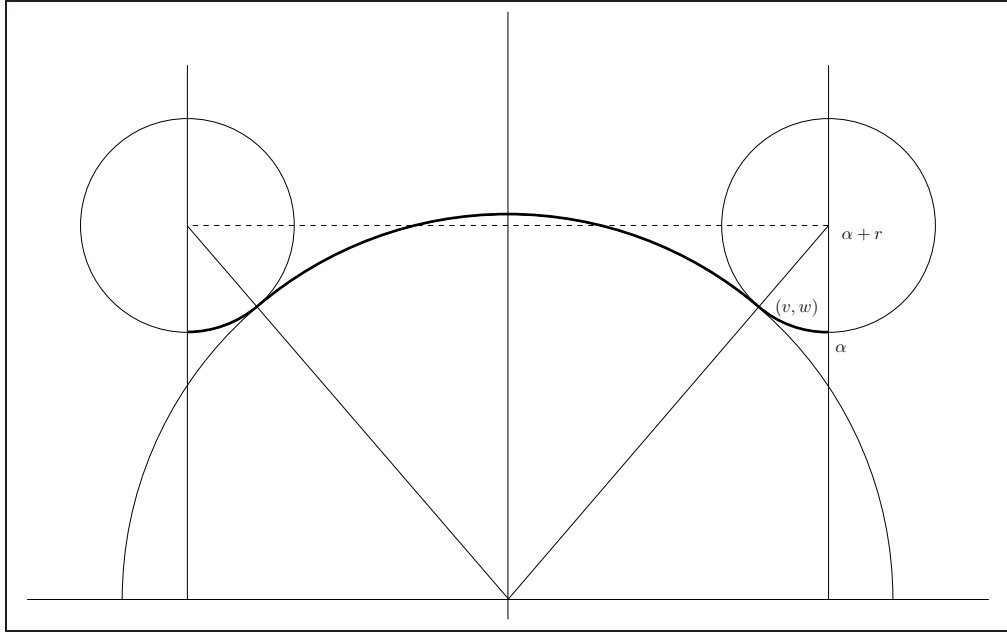
*Es gilt*

$$\inf_{\mathcal{W}_\alpha(I)} \hat{\mathcal{W}} \leq 8 \int_0^{\arctan(1/(2\alpha))} \frac{1}{2 - \cos(\varphi)} \, d\varphi \leq \frac{8}{\sqrt{3}}\pi.$$

*Beweis.* Wir betrachten die Vergleichsfunktion (siehe Abbildung 7.1)

$$u_{\alpha,r}(x) := \begin{cases} \left( \left( (1 + (\alpha + r)^2)^{1/2} - r \right)^2 - |x|^2 \right)^{1/2}, & 0 \leq |x| \leq 1 - \frac{r}{(1 + (\alpha + r)^2)^{1/2}}, \\ \alpha + r - (r^2 - (|x| - 1)^2)^{1/2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion beschreibt also (von rechts nach links betrachtet) einen Kreisbogen von  $(1, \alpha)$  ausgehend, auf dem Kreis mit Radius  $r$  um  $(1, \alpha + r)$ , bis zum Schnittpunkt  $(v, w)$

Abbildung 7.1: Die Testfunktionen  $u_{\alpha,r}$ .

der Ursprungsgeraden durch den Mittelpunkt des Kreises und danach einen weiteren Kreisbogen mit dem Ursprung als Mittelpunkt und Radius  $\|(v, w)\|_2$ , wobei diese Funktion dann symmetrisch auf  $[-1, 1]$  fortgesetzt wird. Nach Lemma (A.7.1) ist  $u_{\alpha,r}$  wieder in  $C^{1,1}(\bar{I})$ , besitzt die Randwerte  $u_{\alpha,r}(1) = \alpha$  und  $u'_{\alpha,r}(1) = 0$  und ist symmetrisch mit  $u_{\alpha,r} > 0$ , so daß  $u \in W_\alpha(I)$ . Der mittlere Kreisbogen mit Mittelpunkt auf der  $x$ -Achse (bzw. die Bogenlängenparametrisierung davon) ist nach Lemma (3.4.4) eine Geodäte von  $\mathbb{H}^2$  und ebenfalls ein reguläres Kurvensegment, so daß mit der Reparametrisierungsinvarianz des Integrals bezüglich Bogenlänge Lemma (3.2.8)

$$\int_{-1+\frac{r}{(1+(\alpha+r)^2)^{1/2}}}^{1-\frac{r}{(1+(\alpha+r)^2)^{1/2}}} \kappa_h(u_{\alpha,r})^2 ds = 0.$$

Für den rechten äußeren Teil wählen wir folgende Parametrisierung

$$\gamma_1 : \left[ 0, \arctan\left(\frac{1}{\alpha+r}\right) \right] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (1 - r \sin(t), \alpha + r - r \sin(t)).$$

Nach Lemma (A.7.2) gilt für die hyperbolische Krümmung

$$\kappa_h(u_{\alpha,r}) = \frac{\alpha+r}{r}, \text{ falls } |x| \geq 1 - \frac{r}{(1+(\alpha+r)^2)^{1/2}}.$$

Das zugehörige Bogenlängenelement ist gegeben durch

$$ds = \frac{r}{\alpha+r(1-\cos(\varphi))} d\varphi.$$

Damit gilt dann

$$\hat{W}(u_{\alpha,r}) = 2 \frac{(\alpha+r)^2}{r} \int_0^{\arctan(1/(\alpha+r))} \frac{1}{\alpha+r(1-\cos(\varphi))} d\varphi.$$

Nun wählen wir  $r = \alpha$  und erhalten

$$2\frac{4\alpha^2}{\alpha} \int_0^{\arctan(1/(2\alpha))} \frac{1}{\alpha + \alpha(1 - \cos(\varphi))} d\varphi = 8 \int_0^{\arctan(1/(2\alpha))} \frac{1}{2 - \cos(\varphi)} d\varphi.$$

Nach [B, Integral 347, S.1071] gilt

$$\int_a^b \frac{1}{2 - \cos(\varphi)} d\varphi = \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left( \sqrt{3} \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right]_a^b,$$

so daß mit  $\arctan(0) = 0$  und  $\arctan \leq \pi/2$  die Behauptung folgt.  $\square$

### 7.3 Monotonie der optimalen WILLMORE-Energie

Nun wollen wir durch die Modifikation beliebiger  $u \in N_\alpha(I)$  Funktionen mit niedrigerer WILLMORE-Energie erzeugen.

#### (7.3.1) Lemma (Senken der WILLMORE-Energie).

Seien  $a > 0$  und  $u \in N_\alpha([-a, a])$  für ein  $\alpha > 0$ , so daß die Menge der kritischen Punkte  $\text{Krit}(u)$  endlich ist und  $u' \leq 0$  auf  $[0, a]$ . Dann existiert zu  $\rho \in (0, a]$  ein  $u_\rho \in N_\alpha([- \rho, \rho])$  mit  $\#\text{Krit}(u_\rho) \leq \#\text{Krit}(u)$ , so daß

$$u'_\rho \leq 0 \text{ auf } [0, \rho] \quad \text{und} \quad \hat{W}(u_\rho) \leq \hat{W}(u).$$

*Beweis.* Sei  $r \in (0, a)$ . Dann existiert die Normale  $(-u'(r), 1)$  an den Graphen von  $u$  im Punkt  $(r, u(r))$ . Da  $u$  auf  $[0, a]$  monoton fallend ist, besitzt die Normale (als Gerade betrachtet) nichtnegative Steigung und schneidet die  $x$ -Achse in einem Punkt  $(c(r), 0)$  mit  $c(r) \leq r$  gegeben durch

$$\begin{bmatrix} r \\ u(r) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -u'(r) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(r) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow t = -u(r) \Rightarrow c(r) = r + u(r)u'(r).$$

Nun betrachten wir den geodätischen Kreis in  $\mathbb{H}^2$  (siehe Lemma (3.4.4)) um  $(c(r), 0)$  mit Radius

$$\begin{aligned} R(r) &= \left\| \begin{bmatrix} c(r) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ u(r) \end{bmatrix} \right\|_2 = \left( (c(r) - r)^2 + u(r)^2 \right)^{1/2} \\ &= (u(r)^2 u'(r)^2 + u(r)^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Dieser Kreis läßt sich wie folgt als Graph einer Funktion darstellen

$$K_r : (c(r) - R(r), c(r) + R(r)) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \left( R(r)^2 - (t - c(r))^2 \right)^{1/2},$$

damit gilt

$$K'_r(t) = \frac{c(r) - t}{\left( R(r)^2 - (t - c(r))^2 \right)^{1/2}},$$

also

$$K'_r(r) = \frac{r + u(r)u'(r) - r}{\left(u(r)^2 u'(r)^2 + u(r)^2 - (r - r - u(r)u'(r))^2\right)^{1/2}} = u'(r),$$

so daß

$$\tilde{u} : (c(r), a) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} K_r(x), & x \in [c(r), r), \\ u(x), & x \in [r, a] \end{cases}$$

nach Lemma (A.7.1) in  $C^{1,1}([c(r), a])$  ist. Verschieben wir  $\tilde{u}$  nun um  $-c(r)$  in  $x$ -Richtung und ergänzen symmetrisch, so erhalten wir eine positive, symmetrische  $C^{1,1}([-a+c(r), a-c(r)])$ -Funktion  $\bar{u}$ , mit denselben Randwerten wie  $u$ . Ebenso ist klar, daß  $\bar{u}$  nach Konstruktion auf  $[0, a-c(r)]$  monoton fallend ist und  $\#\text{Krit}(\bar{u}) \leq \#\text{Krit}(u)$ , da wir keinen kritischen Punkt hinzugefügt haben (der Anschluß ist  $C^1$  und jede symmetrische  $C^1$  Funktion besitzt im Ursprung einen kritischen Punkt). Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\bar{u}) &= 2 \int_{[0, r-c(r)]} \kappa_h(\bar{u})^2 ds + 2 \underbrace{\int_{[r-c(r), a-c(r)]} \kappa_h(\bar{u})^2 ds}_{=\int_\gamma \kappa_{\frac{\#}{2}}^2 ds=0} \\ &= 2 \int_{[r, a]} \kappa_h(u)^2 ds \leq \mathcal{W}(u), \end{aligned}$$

wobei  $\gamma$  eine Reparametrisierung des Graphen von  $\bar{u}$  auf  $[0, r-c(r)]$  (d.h. des geodätischen Anteils) als Kurve mit Einheitsgeschwindigkeit ist (deren Krümmung ist dann als Geodäte 0). Bei der Gleichheit der Integrale haben wir die Reparametrisierungsinvarianz des Integrals bezüglich Bogenlänge Lemma (3.2.8) benutzt.

Die Abbildung  $l : r \mapsto a - c(r)$  ist stetig und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{r \searrow 0} l(r) &= a - 0 - \underbrace{u(0)u'(0)}_{=0 \text{ (Symmetrie)}} = a \\ \lim_{r \nearrow a} l(r) &= a - a - \underbrace{u(a)u'(a)}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

so daß nach dem Zwischenwertsatz  $(0, a) \subseteq l((0, a))$  gilt, und damit die Behauptung für  $\rho \in (0, a)$  folgt. Für  $\rho = a$  wähle  $u_\rho = u$ .  $\square$

**(7.3.2) Lemma (Senken der WILLMORE-Energie II).**

Seien  $a, \alpha > 0$ ,  $u \in N_\alpha(\bar{I})$  mit  $\#\text{Krit}(u) < \infty$  und  $u' \geq 0$  auf  $[0, a]$ . Dann gibt es ein  $v \in N_\alpha(\bar{I})$  mit  $\#\text{Krit}(v) \leq \#\text{Krit}(u)$ , so daß

$$v' \leq 0 \text{ auf } [0, a] \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{W}}(v) \leq \hat{\mathcal{W}}(u).$$

*Beweis.* Wegen  $\#\text{Krit}(u) < \infty$  gilt  $u \not\equiv \alpha$ , und mit  $u' \geq 0$  auf  $[0, a]$  folgt  $u(0) < u(a)$ . Nun definieren wir

$$\tilde{u} : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} u(x+a), & x \in [-a, 0], \\ u(x-a), & x \in [0, a]. \end{cases}$$

Da die Ableitungen von  $u$  für  $x \in \{-a, 0, a\}$  gleich 0 sind erhalten wir mit Lemma (A.7.1) wieder eine  $C^{1,1}([-a, a])$ -Funktion. Ebenso ist klar, daß wir eine Funktion in  $N_{u(0)}([-a, a])$  mit  $\#\text{Krit}(u) = \#\text{Krit}(\tilde{u})$  und  $\tilde{u}' \leq 0$  auf  $[0, a]$  erhalten. Durch Substitution sieht man sofort, daß solch eine Konstruktion die WILLMORE-Energie nicht ändert, so daß  $\hat{\mathcal{W}}(u) = \hat{\mathcal{W}}(\tilde{u})$ . Nach Lemma (7.3.1) gibt es zu  $\rho \in (0, a]$  ein  $\tilde{u}_\rho \in N_{u(0)}([- \rho, \rho])$  mit  $\#\text{Krit}(\tilde{u}_\rho) \leq \#\text{Krit}(\tilde{u})$ , so daß

$$\tilde{u}'_\rho \leq 0 \text{ auf } [0, \rho] \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{W}}(\tilde{u}_\rho) \leq \hat{\mathcal{W}}(\tilde{u}).$$

Es gilt  $\tilde{u}(a) = u(0) = cu(a)$  für ein  $c > 0$  und

$$u(0) < u(a) \quad \Rightarrow \quad c < 1 \quad \Rightarrow \quad \rho_0 := ca < a \quad \Rightarrow \quad \rho_0 \in (0, a].$$

Nach der Skalierungseigenschaft Lemma (6.2.1) gilt für die auf  $[-a, a]$  hochskalierte Version  $v \in N_{(a/\rho_0)\tilde{u}_{\rho_0}}([-a, a])$  von  $\tilde{u}_{\rho_0}$  gegeben durch

$$v : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\frac{\rho_0}{a}} \tilde{u}_{\rho_0} \left( \frac{\rho_0}{a} x \right)$$

sowohl

$$v(a) = \frac{a}{\rho_0} \tilde{u}_{\rho_0}(\rho_0) = \frac{a}{\rho_0} \tilde{u}(a) = \frac{a}{\rho_0} u(0) = \frac{a}{ca} u(0) = \frac{u(0)}{c} = u(a) = \alpha,$$

als auch

$$\hat{\mathcal{W}}(v) = \hat{\mathcal{W}}(\tilde{u}_{\rho_0}) \leq \hat{\mathcal{W}}(\tilde{u}) = \hat{\mathcal{W}}(u).$$

□

### (7.3.3) Lemma (Senken der WILLMORE-Energie III).

Seien  $a, \alpha > 0$  und  $u \in N_\alpha([-a, a])$  mit  $\#\text{Krit}(u) < \infty$ . Dann gibt es zu  $\rho \in (0, a]$  ein  $u_\rho \in N_\alpha([- \rho, \rho])$  mit  $\#\text{Krit}(u_\rho) \leq \#\text{Krit}(u)$ , so daß

$$\hat{\mathcal{W}}(u_\rho) \leq \hat{\mathcal{W}}(u).$$

Gilt  $u' < 0$  in einer punktierten Umgebung von  $a$ , so läßt sich auch  $u'_\rho < 0$  in einer punktierten Umgebung von  $\rho$  erreichen.

*Beweis.* Wegen  $\#\text{Krit}(u) < \infty$  gilt  $u \not\equiv \alpha$ . Sei  $x_0 := \min[\text{Krit}(u) \cap \mathbb{R}_+^*]$  der erste positive kritische Punkt (der nach Voraussetzung  $u'(a) = 0$  existiert). Nun wollten wir zwei Fälle unterscheiden

(i)  $u' \geq 0$  in  $[0, x_0]$

Nach Lemma (7.3.2) gibt es ein  $v \in N_{u(x_0)}([-x_0, x_0])$  mit geringerer WILLMORE-Energie (auf dem Intervall  $[-x_0, x_0]$ ), so daß  $v' \leq 0$  auf  $[0, x_0]$ . Nach Ersetzen von  $u$  durch  $v$  auf  $[-x_0, x_0]$  brauchen wir nur noch den anderen Fall zu betrachten.

(ii)  $u' \leq 0$  in  $[0, x_0]$

Nach Lemma (7.3.1) gibt es für alle  $r \in (0, x_0]$  ein  $v_r \in N_{u(x_0)}([-r, r])$  mit niedrigerer



WILLMORE-Energie, so daß  $v'_r \leq 0$  auf  $[0, r]$ . Definiere für  $0 < r < x_0 \leq a$  die Abbildung

$$u_r : [-a + (x_0 - r), a - (x_0 - r)] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \begin{cases} u(x + x_0 - r), & x \in (r, r + (a - x_0)], \\ v_r(x), & x \in [-r, r], \\ u(x - x_0 + r), & x \in [-r - (a - x_0), -r]. \end{cases}$$

Dann ist  $u_r \in N_\alpha([-a + (x_0 - r), a - (x_0 - r)])$ , mit

$$\hat{W}(u_r) \leq \hat{W}(u).$$

Da  $r \in (0, x_0)$  beliebig ist, haben wir die Behauptung also für  $\rho \in (a - x_0, a]$  gezeigt (für  $\rho = a$  wähle  $u_\rho = u$ ).

Ist  $(\text{Krit}(u) \cap \mathbb{R}_+^*) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$  setzen wir  $x_1 := \min[(\text{Krit}(u) \cap \mathbb{R}_+^*) \setminus \{x_0\}]$  und verkürzen die Funktion  $u$  zu einer Funktion  $v \in N_\alpha([-a + x_0, a - x_0])$ , in dem wir „ $-x_0$  an  $x_0$  kleben“, dies soll bedeuten

$$v : [-a + x_0, a - x_0] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} u(x + x_0), & x \in [0, a - x_0], \\ u(x - x_0), & x \in [-a + x_0, 0]. \end{cases}$$

Nach Wiederholung des vorigen Argumentes haben wir nun die Behauptung für  $\rho \geq a - x_0 - (x_1 - x_0) = a - x_1$  (da  $x_1 - x_0$  der nächste kritische Punkt von  $v$  ist) gezeigt. Durch Iterieren des Arguments erhalten wir schließlich die Behauptung. Der Prozeß terminiert, da  $u$  nur endlich viele kritische Punkte besitzt, deren größter  $a$  ist und wir durch die Konstruktion von  $v$  stets zwei kritische Punkte (davon einen positiven) entfernen.

Die Funktion wurde bei der Konstruktion immer im Inneren und nicht an den Intervallenden geändert, das heißt falls  $u' < 0$  in einer punktierten Umgebung von  $a$ , so haben wir in jedem Konstruktionsschritt Funktionen mit derselben Eigenschaft am rechten Randpunkt des Definitionsintervalls vorliegen, so daß damit auch der letzte Teil der Behauptung bewiesen ist.  $\square$

**(7.3.4) Korollar (Senken der WILLMORE-Energie IV, verschiedene Randwerte).**

Seien  $a > 0$  und  $\alpha' \geq \alpha > 0$ . Zu  $u \in N_\alpha(\bar{I})$  mit  $\#\text{Krit}(u) < \infty$  gibt es ein  $v \in N_{\alpha'}(\bar{I})$  mit  $\#\text{Krit}(v) \leq \#\text{Krit}(u)$ , so daß

$$\hat{W}(v) \leq \hat{W}(u).$$

Gilt  $u' < 0$  in einer punktierten Umgebung von  $a$ , so läßt sich dies auch für  $v$  erreichen.

*Beweis.* Nach Lemma (7.3.3) gibt es zu  $\rho \in (0, a]$  ein  $u_\rho \in N_\alpha([- \rho, \rho])$  mit  $\#\text{Krit}(u_\rho) \leq \#\text{Krit}(u)$ , so daß

$$\hat{W}(u_\rho) \leq \hat{W}(u).$$

Wähle

$$\rho_0 := a \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha'}}_{\leq 1} \leq a \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_0}{a} = \frac{\alpha}{\alpha'} \leq 1.$$

Nach der Skalierungseigenschaft Lemma (6.2.1) gilt für die auf  $[-a, a]$  hochskalierte Version

$$v : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{a}{\rho_0} u_{\rho_0} \left( \frac{\rho_0}{a} x \right)$$

ebenfalls

$$\hat{\mathcal{W}}(v) = \hat{\mathcal{W}}(u_{\rho_0}) \leq \hat{\mathcal{W}}(u).$$

Weiterhin ist  $u \in N_{(a/\rho_0)u_{\rho_0}(\rho_0)}([-a, a])$ , und wegen

$$\frac{a}{\rho_0} u_{\rho_0}(\rho_0) = \frac{a}{\rho_0} \alpha = \frac{a}{a \frac{\alpha}{\rho_0}} \alpha = \alpha'$$

folgt die Behauptung. Der Nachsatz ergibt sich aus dem Nachsatz zu Lemma (7.3.3).  $\square$

**(7.3.5) Satz (Monotonie der optimalen WILLMORE-Energie).**

Seien  $a > 0$  und  $0 < \alpha \leq \alpha'$ , dann gilt

$$\inf_{W_{\alpha'}(I)} \hat{\mathcal{W}} \leq \inf_{W_{\alpha}(I)} \hat{\mathcal{W}}.$$

*Beweis.* Nach Proposition (6.5.2) können wir uns bei einer Minimalfolge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_{\alpha}(I)$  für  $\inf_{W_{\alpha}(I)} \hat{\mathcal{W}}$  auf Polynome in  $N_{\alpha}(\bar{I})$  beschränken, die insbesondere endlich viele kritische Punkte haben, so daß Korollar (7.3.4) anwendbar ist. Damit finden wir zu jedem Minimalfolgeglied  $u_n$  ein  $v_n \in N_{\alpha'}(\bar{I})$  mit niedrigerer WILLMORE-Energie, so daß direkt die Behauptung folgt.  $\square$

## 7.4 A-priori Schranken an die Minimalfolge

In diesem Abschnitt wollen wir die für den Existenzsatz (6.7.1) benötigten a-priori Schranken an eine Minimalfolge nachweisen. Dafür zeigen wir zunächst, daß wir uns auf Funktionen, die auf  $[0, a]$  monoton fallend sind beschränken können.

**(7.4.1) Satz (Einschränkung auf in  $(0, a)$  fallende Funktionen).**

Seien  $a, \alpha > 0$ . Zu  $u \in N_{\alpha}(\bar{I})$  mit  $\#Krit(u) < \infty$  existiert ein  $v \in N_{\alpha}(\bar{I})$  mit  $\#Krit(v) \leq \#Krit(u)$ , so daß

$$v' \leq 0 \text{ auf } [0, a] \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{W}}(v) \leq \hat{\mathcal{W}}(u).$$

*Beweis.* Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß  $u$  die gewünschte Eigenschaft  $u' \leq 0$  auf  $[0, a]$  noch nicht besitzt, denn ansonsten folgt die Behauptung mit der Wahl  $v = u$ . Dann gibt es ein letztes Intervall  $[x_0, x_1]$ , auf dem  $u$  monoton wachsend ist, d.h. es existieren  $x_0, x_1 \in [0, a]$ ,  $x_0 < x_1$  mit

$$u' > 0 \text{ in } (x_0, x_1), u' \leq 0 \text{ auf } [x_1, a] \text{ und } u'(x_0) = u'(x_1) = 0.$$

Damit gilt also auch  $u(x_0) < u(x_1)$ . Nun führen wir folgende Konstruktion durch, falls  $x_0 = 0$  überspringe den ersten Schritt

(i) 1. Schritt

Definiere  $\alpha_1 := u(x_1) > u(x_0) =: \alpha_0$ . Nach Korollar (7.3.4) existiert ein  $w_1 \in N_{\alpha_1}([-x_0, x_0])$  mit  $\#\text{Krit}(w_1) < \#\text{Krit}(u|_{[-x_0, x_0]})$ , so daß

$$\hat{\mathcal{W}}(w_1) \leq \hat{\mathcal{W}}(u|_{[-x_0, x_0]}).$$

(ii) 2. Schritt

Definiere

$$\tilde{v}_1 : [-x_1, x_1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} u(x + (x_1 + x_0)), & x \in [-x_1, -x_0], \\ w_1(x), & x \in (-x_0, x_0), \\ u(x - (x_1 + x_0)), & x \in [x_0, x_1]. \end{cases}$$

Nach Lemma (A.7.1) erhalten wir eine Funktion in  $N_{u(x_0)}([-x_1, x_1])$  mit  $\tilde{v}'_1 \leq 0$  auf  $[x_0, x_1]$  und  $\#\text{Krit}(\tilde{v}_1) \leq \#\text{Krit}(u|_{[-x_1, x_1]})$ , da jeder einzelne Abschnitt höchstens so viele kritische Punkte besitzt, wie der entsprechende Abschnitt von  $u$ . Es gilt

$$\hat{\mathcal{W}}(\tilde{v}_1) \leq \hat{\mathcal{W}}(u|_{[-x_1, x_1]}).$$

Nach Korollar (7.3.4) gibt es ein  $v_1 \in N_{u(x_1)}([-x_1, x_1])$  mit niedrigerer WILLMORE-Energie und  $\#\text{Krit}(v_1) \leq \#\text{Krit}(\tilde{v}_1)$ . In der Konstruktion im Beweis von Lemma (7.3.3), welche im Beweis von Korollar (7.3.4) verwendet wird, wird die Funktion nicht auf dem letzten Intervall  $I'$ , auf dem  $v'$  festes Vorzeichen besitzt, geändert, sofern  $\rho > |I'|$  gilt. Das heißt wegen  $\tilde{v}'_1 \leq 0$  auf  $I' := [x_0, x_1]$  gilt für  $v_1 = \tilde{v}_{1\rho_0}$  (mit  $\rho_0$  aus der Konstruktion in Korollar (7.3.4))

$$v'_1 \leq 0 \text{ auf } [x_0, x_1],$$

denn falls

(a)  $\rho_0 > x_1 - x_0$ 

ist dies nach Konstruktion (s.o.) ohnehin klar.

(b)  $\rho_0 \leq x_1 - x_0$ 

befinden wir uns bei der Konstruktion von  $\tilde{v}_{1\rho_0}$  im letzten Schritt der Iteration bei Lemma (7.3.3) im zweiten Fall, d.h. es gibt nur noch einen positiven kritischen Punkt  $y$  und auf dem Intervall  $[0, y]$  besitzt die Funktion Ableitung  $\leq 0$ , so daß wir durch die Konstruktion von Korollar (7.3.3) ebenfalls eine Funktion  $v_1$  mit der gewünschten Eigenschaft erhalten.

Setze

$$u_1 : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} v_1(x), & x \in [-x_1, x_1], \\ u(x), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt  $u_1 \in N_{\alpha}(\bar{I})$ ,  $\#\text{Krit}(u_1) \leq \#\text{Krit}(u)$  und

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}(u_1) &= \hat{\mathcal{W}}(v_1) + 2\hat{\mathcal{W}}(u|_{[x_1, a]}) \leq \hat{\mathcal{W}}(\tilde{v}_1) + 2\hat{\mathcal{W}}(u|_{[x_1, a]}) \\ &\leq \hat{\mathcal{W}}(u|_{[-x_1, x_1]}) + 2\hat{\mathcal{W}}(u|_{[x_1, a]}) = \hat{\mathcal{W}}(u). \end{aligned}$$

Damit haben wir das Vorzeichen von  $u'$  auf dem letzten „falschen“ Intervall korrigiert und die WILLMORE-Energie nicht vergrößert. Durch sukzessive Anwendung dieses Argumentes erhalten wir die Behauptung. Die Anzahl der „schlechten“ Intervalle, auf denen  $u' > 0$  bzw.  $u'_i > 0$  ist, wird in jedem Schritt  $u \rightarrow u_1$  bzw.  $u_i \rightarrow u_{i+1}$  um Eins reduziert und es gibt weniger als  $\#\text{Krit}(u)$ , bzw.  $\#\text{Krit}(u_i)$  solcher Intervalle. Damit terminiert der Prozeß, wegen

$$\#\text{Krit}(u_1) \leq \#\text{Krit}(u) \quad \text{bzw.} \quad \#\text{Krit}(u_{i+1}) \leq \#\text{Krit}(u_i).$$

□

Nun sind wir in der Lage die anfangs angekündigten Schranken an eine Minimalfolge nachzuweisen.

**(7.4.2) Korollar (A-priori Schranken an die Minimalfolge).**

Für  $a, \alpha > 0$  können wir eine Minimalfolge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset N_\alpha(\bar{I})$  für das Variationsproblem (7.1) mit folgenden Eigenschaften wählen

$$u'_n(x) \leq 0 \quad \text{und} \quad 0 \leq x + u_n(x)u'_n(x) \quad \text{für alle } x \in [0, a] \quad \text{und alle } n \in \mathbb{N}, \quad (7.2)$$

was insbesondere bedeutet, daß

$$\alpha \leq u_n(x) \leq (\alpha^2 + a^2 - x^2)^{1/2} \leq \alpha + a \quad \text{und} \quad (7.3)$$

$$|u'_n(x)| \leq \frac{|x|}{\alpha} \quad (7.4)$$

für alle  $x \in [-a, a]$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Nach Proposition (6.5.2) und Satz (7.4.1) können wir uns bei einer Minimalfolge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für  $\inf_{W_\alpha(I)} \hat{\mathcal{W}}$  auf Funktionen einschränken, für welche  $u'_n \leq 0$  auf  $[0, a]$  gilt. Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig aber fest gewählt. Für  $x \in \{0, a\}$  ist die Ungleichung in (7.2) klar. Angenommen es gibt ein  $x \in (0, a)$ , für welches die Ungleichung nicht erfüllt ist. Sei

$$x_0 := \sup\{x \in [0, a] \mid x + u_n(x)u'_n(x) < 0\},$$

dann gilt aufgrund der Stetigkeit von  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + u_n(x)u'_n(x)$  und  $f(a) = a > 0$ , daß  $x_0 \in (0, a)$  und  $0 = x_0 + u_n(x_0)u'_n(x_0)$ . Nun läßt sich dieselbe Konstruktion wie in Lemma (7.3.1) durchführen; die Normale an den Graphen in  $x_0$  ist eine Ursprungsgerade, so daß wir mittels Ersetzen durch den entsprechenden geodätischen Kreisbogen auf  $[-x_0, x_0]$  eine Funktion  $\tilde{u}$  mit  $\hat{\mathcal{W}}(\tilde{u}) \leq \hat{\mathcal{W}}(u)$  erhalten, die auf  $[x_0, a]$  die Ungleichung erfüllt und für welche auf  $[0, x_0]$  wegen

$$x + (R^2 - x^2)^{1/2} \frac{-x}{(R^2 - x^2)^{1/2}} = 0$$

(wobei  $R$  der Radius des Kreises ist) die Ungleichung ebenfalls erfüllt ist. Damit können wir für den weiteren Beweis von Ungleichung (7.3), die Gültigkeit von (7.2) annehmen. Wegen  $u'_n \leq 0$  auf  $[0, a]$  und  $u_n(a) = \alpha$  folgt  $\alpha \leq u_n$  auf  $[-a, a]$ . Weiter gilt

$$-x \leq u_n(x)u'_n(x) \quad \xrightarrow{u_n > 0} \quad -\frac{x}{u_n(x)} \leq u'_n(x) \leq 0 \quad \text{auf } [0, a].$$

Für  $x \in \bar{I}$  erhalten wir also aufgrund der Symmetrie

$$|u'_n(x)| \leq \frac{|x|}{u_n(x)} \leq \frac{|x|}{\alpha}.$$

Es gilt also

$$-\left(\frac{1}{2}u_n(x)^2\right)' = -u_n(x)u'_n(x) \leq x$$

und damit

$$-\frac{1}{2}\underbrace{u_n(a)^2}_{=\alpha^2} + \frac{1}{2}u_n(x)^2 = -\int_x^a \left(\frac{1}{2}u_n(y)^2\right)' dy \leq \int_x^a y dy = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x^2,$$

und damit auch  $u_n(x)^2 \leq a^2 - x^2 + \alpha^2$  für  $x \in \bar{I}$ . □

## 7.5 Existenz von Minimierern

Nun fassen wir die Hauptergebnisse dieses Kapitels zusammen in folgendem

### (7.5.1) Satz (Existenz von klassischen Minimierern).

Seien  $a, \alpha > 0$ , dann gibt es einen Minimierer  $u$  von  $\hat{\mathcal{W}}$  in  $W_\alpha(I) \cap C^\infty(\bar{I})$  mit

$$u'(x) \leq 0 \quad \text{und} \quad 0 \leq x + u(x)u'(x) \quad \text{für alle } x \in [0, a]$$

und

$$\alpha \leq u_n(x) \leq (\alpha^2 + a^2 - x^2)^{1/2} \leq \alpha + a \quad \text{sowie}$$

$$|u'_n(x)| \leq \frac{|x|}{\alpha} \quad \text{für alle } x \in [-a, a].$$

Zudem erfüllt  $u$  das (zur EULER-LAGRANGE-Gleichung und Funktionenklasse gehörige) DIRICHLET-Problem

$$\begin{cases} \kappa_h(u)^3 \frac{1}{u^2} - 2\kappa_h(u) \frac{1}{u^2} + 2 \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{(1+u'^2)^{1/2}} \kappa_h(u)' \right) = 0 & \text{in } (-a, a) \\ u(\pm a) = \alpha, \quad u'(\pm a) = 0. \end{cases}$$

Damit gibt es auch einen Minimierer  $\bar{u} = \frac{\pi}{2}u$  von  $\mathcal{W}$  in  $W_{\pi\alpha/2}(I)$ .

*Beweis.* Die a-priori Schranken aus Korollar (7.4.2) zusammen mit dem Existenzsatz (6.7.1) und dem Regularitätssatz (6.8.1) liefern die Existenz und Regularität eines Minimierers  $u \in W_\alpha(I) \cap C^\infty(\bar{I})$  von  $\hat{\mathcal{W}}$  in  $W_\alpha(I)$ . Die Ungleichungen ziehen sich aufgrund der  $C^1(\bar{I})$ -Konvergenz durch. Die Tatsache, daß  $u$  das DIRICHLET-Problem löst ergibt sich aus Lemma (6.6.1). □

## A.7 Anhang zu Kapitel 7

### (A.7.1) Lemma (Klebelemma).

Seien  $a < b < c$  und  $u_1 \in C^{0,1}([a, b])$ ,  $u_2 \in C^{0,1}([b, c])$  mit  $u_1(b) = u_2(b)$ , dann ist

$$u : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} u_1(x), & x \in [a, b] \\ u_2(x), & x \in (b, c] \end{cases}$$

in  $C^{0,1}([a, c])$  und  $Lip(u) \leq Lip(u_1) + Lip(u_2)$ .

*Beweis.* Seien  $x_1, x_2 \in [a, c]$  und ohne Einschränkung  $x_1 \in [a, b]$  und  $x_1 \neq x_2 \in [b, c]$  (falls umgekehrt, dann Bezeichnungen tauschen, ansonsten ist das Folgende ohnehin klar), dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|} &\leq \frac{|u(x_1) - u(b)|}{|x_1 - x_2|} + \frac{|u(b) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \\ &\leq \frac{|u(x_1) - u(b)|}{|x_1 - b|} + \frac{|u(b) - u(x_2)|}{|b - x_2|} \\ &\leq Lip(u_1) + Lip(u_2). \end{aligned}$$

□

### (A.7.2) Lemma (Hyperbolische Krümmung von Kreisen).

Für einen Kreisbogen mit Mittelpunkt  $(X, Y)$  und Radius  $r$  in der oberen Halbebene gilt (für jede beliebige reguläre Parametrisierung)

$$\kappa_h \equiv \frac{Y}{r}.$$

*Beweis.* Der Kreis wird als Graph beschrieben durch  $u(x) = Y - \sqrt{r^2 - (x - X)^2}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{x - X}{\sqrt{r^2 - (x - X)^2}} \quad \text{und} \quad u''(x) = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - (x - X)^2}^3}, \quad \text{also} \\ 1 + u'^2(x) &= 1 + \frac{(x - X)^2}{r^2 - (x - X)^2} = \frac{r^2}{r^2 - (x - X)^2}. \end{aligned}$$

Für die Krümmung gilt

$$\begin{aligned} \kappa_h(u) &= \frac{uu'' + 1 + u'^2}{(1 + u'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{Y \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - (x - X)^2}^3} - \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - (x - X)^2}^2} + \frac{r^2}{r^2 - (x - X)^2}}{\left(\frac{r^2}{r^2 - (x - X)^2}\right)^{3/2}} \\ &= \frac{Y}{r}. \end{aligned}$$

Aus der Definition der geodätischen Krümmung ist klar, daß wenn die Krümmung für eine Parametrisierung konstant ist dies auch für alle anderen gilt. □

# Kapitel 8

## Das NITSCHKE-Funktional

In diesem Kapitel zeigen wir die für den Existenzsatz (6.7.1) benötigten Schranken für eine Minimalfolge des NITSCHKE-Funktional, sowie einige weitere interessante Eigenschaften der Minimierer. Da wir im vorigen Abschnitt bereits ausführlich das WILLMORE-Funktional betrachtet haben, wollen wir von nun an nur noch den Fall  $\gamma > 0$  betrachten. In dem ganzen Kapitel bezeichnen wir mit  $u_0 \equiv \alpha \in W_\alpha(I)$  den Zylinder zu den gegebenen Randwerten  $\alpha > 0$ .

Zunächst wollten wir das Problem aus dem vorigen Abschnitt noch einmal angeben

Wir betrachten für die Parameter  $a, \alpha > 0, \gamma > 0$  und  $H_0 \in \mathbb{R}$  mit  $I := (-a, a)$  das Funktional

$$\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha} : W_\alpha(I) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$u \mapsto \int_I \left[ \left( \gamma u (1 + u'^2)^{1/2} + \frac{1}{u(1 + u'^2)^{1/2}} \right) dx + (\kappa_\epsilon(u) + 2H_0)^2 dS \right]$$

mit dem folgenden Variationsproblem

$$\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha} \rightarrow \min! \quad \text{in } W_\alpha(I).$$

### 8.1 Triviale Minimierer

Zunächst betrachten wir eine bestimmte Wahl von  $\alpha$ , für welche die Minimierer immer Zylinder sind.

**(8.1.1) Lemma (Existenz trivialer Minimierer für  $\alpha = 1/\sqrt{\gamma}$ ).**

Für  $\alpha^* = 1/\sqrt{\gamma}$ ,  $H_0 = 0$  und beliebiges  $a > 0$  ist der Zylinder  $u_0 \equiv \alpha^*$  der eindeutige Minimierer von  $\mathcal{F}_{\gamma, 0}^{a, \alpha^*}$  in  $W_{\alpha^*}(I)$ , und für alle  $\alpha > 0$  gilt

$$\mathcal{F}_{\gamma, 0}^{a, \alpha^*}(u_0) < \mathcal{F}_{\gamma, 0}^{a, \alpha}(u) \quad \text{für alle } u \in W_\alpha(I), u \neq u_0,$$

und damit insbesondere

$$\mathcal{F}_{\gamma, 0}^{a, \alpha^*}(u_0) = \inf_{W_{\alpha^*}(I)} \mathcal{F}_{\gamma, 0}^{a, \alpha^*} \leq \inf_{W_\alpha(I)} \mathcal{F}_{\gamma, 0}^{a, \alpha}.$$

*Beweis.* Es gilt

$$0 = \kappa_e(u_0)^2 \leq \kappa_e(u)^2 \quad \text{für alle } u \text{ in } W_\alpha(I).$$

Die Abbildung

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \gamma x + \frac{1}{x}$$

ist streng monoton fallend auf  $(0, 1/\sqrt{\gamma})$ , streng monoton wachsend auf  $(1/\sqrt{\gamma}, \infty)$  und besitzt genau ein Minimum, nämlich an der Stelle  $x = 1/\sqrt{\gamma}$ , denn

$$f'(x) = \gamma - \frac{1}{x^2}.$$

Für alle  $\alpha > 0$  und alle  $u \in W_\alpha(I)$  gilt also

$$\mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha}(u) = \int_I \left[ \underbrace{\left( \gamma u(1+u'^2)^{1/2} + \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right)}_{\geq f(1/\sqrt{\gamma})=2\sqrt{\gamma}} dx + \underbrace{\kappa_e(u)^2}_{\geq 0} \underbrace{dS}_{\geq 0} \right] \geq 2\sqrt{\gamma}|I| = \mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha^*}(u_0).$$

Ist  $u \in W_\alpha(I)$  für ein  $\alpha > 0$  und  $u \neq u_0$ , dann gibt es, falls  $\alpha \neq \alpha^*$ , aufgrund der Stetigkeit von  $u$ ,  $u'$  und der Randdaten ein  $\varepsilon \in (0, a)$  und  $J = (a - \varepsilon, a]$ , so daß

$$u(x)(1+u'(x)^2)^{1/2} \neq \alpha^* \quad \text{für alle } x \in (a - \varepsilon, a].$$

Falls  $\alpha = \alpha^*$ , gibt es wegen  $u \neq u_0$  ein  $x \in I$  mit  $u(x) \neq \alpha$  und  $u'(x) = 0$ . Mit derselben Begründung wie zuvor gibt es eine Umgebung  $U \subset I$  von  $x$  mit

$$u(x)(1+u'(x)^2)^{1/2} \neq \alpha^* \quad \text{für alle } x \in U.$$

In beiden Fällen gilt also

$$\mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha^*}(u_0) < \mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha}(u).$$

□

Nun zeigen wir, daß es für beliebiges  $H_0$  Zylinder gibt, die zumindest Extremale sind.

**(8.1.2) Lemma (Zylinder  $u_0 \equiv 1/\sqrt{4H_0^2 + \gamma}$  sind Extremale).**

Für  $\gamma > 0$ ,  $H_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha = 1/\sqrt{4H_0^2 + \gamma}$  und beliebiges  $a > 0$  lösen die Zylinder

$$u_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{4H_0^2 + \gamma}} \in W_\alpha(I)$$

die EULER-LAGRANGE-Gleichung aus Lemma (6.6.1).

*Beweis.* Einsetzen einer konstanten Funktion  $u_0 \equiv \alpha$  in die EULER-LAGRANGE-Gleichung ergibt

$$\frac{1}{\alpha^2} - 2\frac{1}{\alpha^2} + 0 + (4H_0^2 + \gamma)(2 - 1) + 0 = -\frac{1}{\alpha^2} + (4H_0^2 + \gamma) = 0.$$

Dies gilt also genau dann (beachte  $\alpha > 0$ ), wenn

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{4H_0^2 + \gamma}}.$$

□



## 8.2 Nichttriviale Minimierer

In Abschnitt 8.1 haben wir gezeigt, daß für  $H_0 = 0$  und  $\alpha = 1/\sqrt{\gamma}$  die Zylinder  $u_0 \equiv \alpha$  die eindeutigen absoluten Minimierer von  $\mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha}$  in  $W_\alpha((-a, a))$  sind. Nun stellt sich die Frage, ob alle Minimierer von dieser Gestalt sind. Wir wollen jetzt also zeigen, daß es für  $H_0 = 0$  außer den Zylindern aus Lemma (8.1.1), keine weiteren Zylinder gibt, die Minimierer sind.

### (8.2.1) Lemma (Nichttriviale Minimierer).

Seien  $\gamma > 0$ ,  $H_0 = 0$ ,  $a > 0$  und  $\alpha \neq 1/\sqrt{\gamma}$ . Ist  $u \in W_\alpha(I)$  ein Minimierer von  $\mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha}$  in  $W_\alpha(I)$ , so gilt  $u \equiv u_0 \equiv \alpha$ .

*Beweis.* Angenommen  $u = u_0$ , dann ist  $u \in C^\infty(\bar{I})$  und erfüllt die EULER-LAGRANGE-Gleichung. Dies kann aber nach der Rechnung im Beweis von Lemma (8.1.2) für eine konstante Funktion nur dann der Fall sein, wenn  $\alpha = 1/\sqrt{\gamma}$ .  $\square$

## 8.3 A-priori Schranken an die Minimalfolge

In diesem Abschnitt zeigen wir die für den Existenzsatz (6.7.1) benötigten Schranken an die Minimalfolge.

Es zeigt sich, daß für Funktionen  $u$  mit zu großem Maximum oder zu kleinem Minimum für bestimmte Parameterkonstellationen der Flächenterm  $\int_I u(1+u'^2)^{1/2} dx$  zusammen mit den fixierten Randwerten  $\alpha$  dafür sorgt, daß die NITSCHKE-Energie  $\mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha}(u)$  größer als die des Zylinders  $u_0$  wird.

### (8.3.1) Lemma (Obere Schranken an $u$ ).

Seien  $\alpha, \gamma > 0$ , ein  $H_0 \in \mathbb{R}$  und  $a > 0$  gegeben. Gilt

$$\max_{\bar{I}} u := M \geq \frac{a}{\gamma\alpha} \left( \gamma\alpha + \frac{1}{\alpha} + 4H_0^2\alpha \right) + \alpha,$$

für ein  $u \in W_\alpha(I)$ , so ist

$$\mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha}(u_0 \equiv \alpha) < \mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha}(u).$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha}(u) &= \int_I \gamma u(1+u'^2)^{1/2} dx + \underbrace{\int_I \left[ \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} dx + (\kappa_e(u) + 2H_0)^2 dS \right]}_{>0} \\ &> \int_I \gamma u(1+u'^2)^{1/2} dx \\ &\geq \alpha\gamma \underbrace{\int_{\{u \geq \alpha\}} (1+u'^2)^{1/2} dx}_{\text{Länge der Kurve oberhalb } \alpha} \\ &> \alpha\gamma 2(M - \alpha) \\ &\stackrel{\text{Bed. an } a}{\geq} 2a\left(\gamma\alpha + \frac{1}{\alpha} + 4H_0^2\alpha\right) \\ &= \mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha}(u_0 \equiv \alpha). \end{aligned}$$

Beachte  $\{x \in I \mid u(x) \geq \alpha\} \neq \emptyset$  aufgrund der Randwerte und der Voraussetzung an das Maximum.  $\square$

**(8.3.2) Lemma (Untere Schranken für  $u$ ).**

Seien  $\alpha, \gamma > 0$ , ein  $H_0 \in \mathbb{R}$  und  $0 < c < \alpha$  gegeben. Gilt

$$\frac{\gamma\alpha c(\alpha - c)}{(\gamma + 4H_0^2)\alpha^2 + 1} \geq a > 0 \quad (8.1)$$

und ist für ein  $u \in W_\alpha(I)$  die Bedingung  $\min_{\bar{I}} u \leq c$  erfüllt, so gilt

$$\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u_0 \equiv \alpha) < \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u).$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u) &= \int_I \gamma u(1 + u^2)^{1/2} dx + \underbrace{\int_I \left[ \frac{1}{u(1 + u^2)^{1/2}} dx + (\kappa_e(u) + 2H_0)^2 dS \right]}_{>0} \\ &> \int_I \gamma u(1 + u^2)^{1/2} dx \\ &\geq c\gamma \underbrace{\int_{\{u \geq c\}} (1 + u^2)^{1/2} dx}_{\text{Länge der Kurve oberhalb } c} \\ &\stackrel{\min u \leq c}{>} c\gamma 2(\alpha - c) \\ &\stackrel{\text{Bed. an } a}{\geq} 2a\left(\gamma\alpha + \frac{1}{\alpha} + 4H_0^2\alpha\right) \\ &= \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u_0 \equiv \alpha). \end{aligned}$$

Beachte  $\{x \in I \mid u(x) \geq c\} \neq \emptyset$  aufgrund der Randwerte und der Voraussetzung an das Minimum.  $\square$

**(8.3.3) Bemerkung (Minimalfolge gleichmäßig nach unten beschränkt).**

Sind die Voraussetzungen aus dem vorigen Lemma erfüllt, so können wir eine Minimalfolge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}$  in  $W_\alpha(I)$  wählen mit

$$u_n \geq c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Sei  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_\alpha(I)$  eine Minimalfolge für  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}$ . Sei

$$n \in J := \{n \in \mathbb{N} \mid \min_{\bar{I}} \tilde{u}_n < c\},$$

dann gilt nach Lemma (8.3.2)

$$\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u_0 \equiv \alpha) \leq \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(\tilde{u}_n). \quad (8.2)$$

Nun setzen wir

$$u_n := \begin{cases} u_0, & n \in J, \\ \tilde{u}_n, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt  $u_n \geq c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und wegen (8.2) bleibt  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Minimalfolge.  $\square$

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{L}(u) := \int_I (1 + u^2)^{1/2} dx$  die Länge von  $u \in W_\alpha(I)$ .

**(8.3.4) Korollar.**

Seien  $\alpha, \gamma > 0$ , ein  $H_0 \in \mathbb{R}$  und  $0 < c < \alpha$  gegeben. Gilt

$$\frac{\gamma\alpha c(\alpha - c)}{(\gamma + 4H_0^2)\alpha^2 + 1} \geq a > 0,$$

und sind für ein  $u \in W_\alpha(I)$  die Bedingung  $u \geq c$  und  $\mathcal{L}(u) \geq 2(\alpha - c)$  erfüllt, so gilt

$$\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u_0 \equiv \alpha) < \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u).$$

*Beweis.* Vollkommen analog zu Lemma (8.3.2) mit

$$\int_I u(1 + u'^2)^{1/2} dx \geq c\mathcal{L}(u) \geq c2(\alpha - c).$$

□

**(8.3.5) Bemerkung.**

Falls  $a$  die Bedingung (8.1) aus Lemma (8.3.2) und Korollar (8.3.4) erfüllt und  $0 < c < \alpha$  ist, gilt stets  $a < (\alpha - c)$ , denn

$$\frac{\gamma\alpha c}{(\gamma + 4H_0^2)\alpha^2 + 1} = \frac{c}{\alpha + \underbrace{\frac{4H_0^2\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}}_{\geq 0}} < 1, \text{ da } c < \alpha.$$

Bei verschwindender Spontankrümmung  $H_0 = 0$  kann man sich für bestimmte Parameterkonstellationen bei einer Minimalfolge für  $\mathcal{F}_{\gamma, 0}^{a, \alpha}$  auf Funktionen beschränken, die auf dem Teilintervall  $(-a, 0)$  monoton fallend sind. Wir möchten den Leser daran erinnern, daß wir mit  $\text{Krit}(u)$  die Menge der kritischen Punkte von  $u$  bezeichnen.

**(8.3.6) Lemma (Einschränkung auf monoton fallende Funktionen auf  $(-a, 0)$ ).**

Seien  $\gamma > 0$ ,  $H_0 = 0$  und  $\alpha > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ , sowie

$$\frac{\gamma\alpha c(\alpha - c)}{\gamma\alpha^2 + 1} \geq a > 0 \text{ für ein } \alpha > c > \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ gegeben.}$$

Dann existiert zu einem Element  $u \in W_\alpha(I)$  einer Minimalfolge für  $\mathcal{F}_{\gamma, 0}^{a, \alpha}$  in  $W_\alpha(I)$  mit  $\#\text{Krit}(u) < \infty$  ein  $\tilde{u} \in W_\alpha(I)$  mit

- $\tilde{u} = u_0(\equiv \alpha)$ , oder
- $\#\text{Krit}(\tilde{u}) \leq \#\text{Krit}(u)$

und  $\tilde{u}' \leq 0$  auf  $[-a, 0]$ , so daß

$$\mathcal{F}_{\gamma, 0}^{a, \alpha}(\tilde{u}) \leq \mathcal{F}_{\gamma, 0}^{a, \alpha}(u).$$

*Beweis.*

- (i) Wir konstruieren vom linken Rand aus zum Nullpunkt einen ersten Kandidaten  $\bar{u}$  induktiv wie folgt:

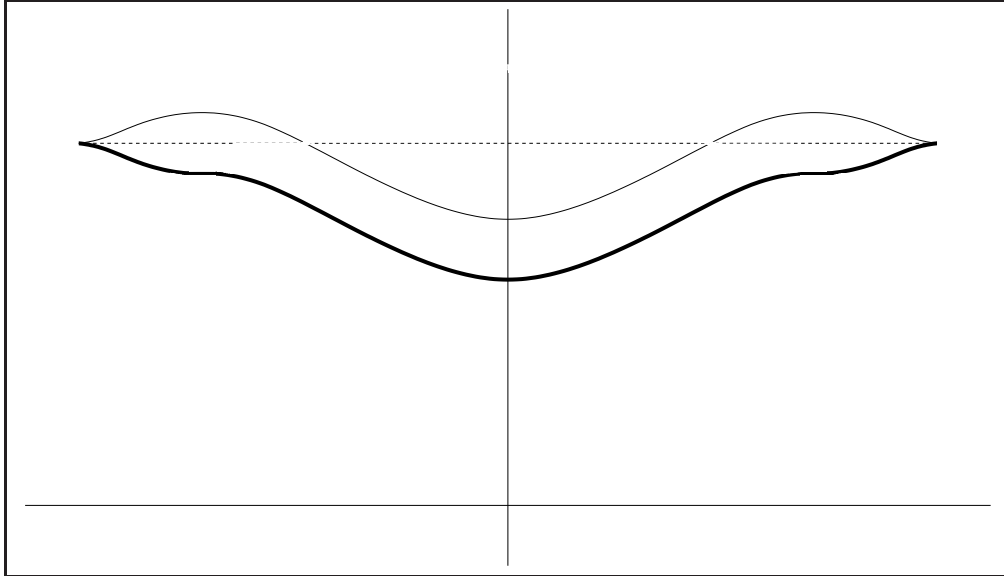


Abbildung 8.1: Konstruktion aus Lemma (8.3.6), die dünn gezeichnete Funktion wird zur dick gezeichneten „umgebaut“.

- (a) Wir unterteilen das Intervall  $[-a, 0]$  in (endlich viele, vom linken Rand aus durchnummerierte) Teilintervalle  $I_i = [a_i, b_i]$ ,  $i \geq 1$  (d.h.  $a_i = b_{i-1}$ ) und  $I_0 = [a_0, b_0] = \{-a\}$ , wobei die Intervallgrenzen kritische Punkte sind, und im Inneren dieser Intervalle keine weiteren kritischen Punkte liegen (dies geht nach der Voraussetzung  $\#\text{Krit}(u) < \infty$ ). Die Ableitung  $u'$  besitzt dann auf dem Inneren dieser Teilintervalle jeweils festes Vorzeichen.
- (b) Setze  $\bar{u}|_{I_0} = u|_{I_0}$ , d.h.  $\bar{u}(-a) = u(-a) = \alpha$ .
- (c) Seien  $\bar{u}|_{I_0}, \dots, \bar{u}|_{I_{i-1}}$  schon konstruiert.
- (d) Ist  $u$  auf  $I_i = [a_i, b_i]$  monoton wachsend, so spiegeln wir  $u|_{I_i}$  an der Parallelen zur  $x$ -Achse durch  $u(a_i)$  (der entsprechende Abschnitt wird „nach unten geklappt“) und verschieben die so erhaltene Funktion  $u_i^*$  um
- $$-u_i^*(a_i) + \bar{u}(b_{i-1}) = -u(b_{i-1}) + \bar{u}(b_{i-1}) = -u(a_i) + \bar{u}(a_i)$$
- in  $y$ -Richtung („schieben den geklappten Abschnitt soweit in  $y$ -Richtung, daß wir  $C^{1,1}$ -Anschluß an den zuvor konstruierten Abschnitt bekommen“).
- (e) Ist  $u$  auf  $I_i = [a_i, b_i]$  monoton fallend, so verschieben wir den entsprechenden Abschnitt um  $-u(a_i) + \bar{u}(b_{i-1})$  in  $y$ -Richtung.
- (f) Die so erhaltene Funktion  $\bar{u}$  auf  $[-a, 0]$  spiegeln wir an der  $y$ -Achse um  $\bar{u} \in W_\alpha(I)$  zu erhalten.
- (ii) Diese Konstruktion liefert ein  $\bar{u} \in C^{1,1}(\bar{I})$  mit denselben Randwerten wie  $u$  sowie  $|\bar{u}'| = |u'|$  auf  $I$  und  $|\bar{u}''| = |u''|$  fast überall auf  $I$ . Weiter gilt  $\bar{u} \leq u$ . Dies zeigen wir durch Induktion. Für  $i = 0$  ist trivialerweise  $\bar{u}|_{I_i} \leq u|_{I_i}$ . Die Verschiebung

$$v_i := -u(b_{i-1}) + \bar{u}(b_{i-1}),$$

welche vorgenommen werden muß, um  $\bar{u}|_{I_i}$  aus  $u_i^* \leq u|_{I_i}$  zu erhalten, erfüllt daher wegen der Induktionsvoraussetzung  $\bar{u}|_{I_{i-1}} \leq u|_{I_{i-1}}$  die Ungleichung  $v_i \leq 0$ . Damit gilt auch  $\bar{u}|_{I_i} \leq u|_{I_i}$ .

- (iii) Nach Bemerkung (8.3.3) (beachte Bedingung an  $a$ ) können wir uns bei einer Minimalfolge auf  $u \geq c$  einschränken. Angenommen es gibt einen Punkt  $x_0 \in I$ , so daß  $\bar{u}(x_0) < c$ , dann folgt direkt aus den oben bemerkten Eigenschaften

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(\bar{u}) > 2(\alpha - c),$$

so daß nach Korollar (8.3.4) für  $H_0 = 0$ , wegen  $u \geq c$ , auch

$$\mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha}(u_0 \equiv \alpha) \leq \mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha}(u).$$

In diesem Fall setzen wir  $\tilde{u} \equiv \alpha$ , welches die geforderten Eigenschaften besitzt.

- (iv) Wenn es kein solches  $x_0$  wie in Punkt (iii) gibt, setzen wir  $\tilde{u} := \bar{u}$ . Dann gilt also  $\tilde{u} \geq c > 0$  und damit  $\tilde{u} \in W_\alpha(I)$  (dazu war nur noch  $\tilde{u} > 0$  zu zeigen). Weiter gilt (falls  $\tilde{u} \not\equiv \alpha$ )

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \leq c \leq \tilde{u}(1 + \tilde{u}'^2)^{1/2} = dS(\tilde{u}) \leq u(1 + u'^2)^{1/2} = dS(u),$$

und aufgrund der wachsenden Monotonie von  $g(x) = \gamma x + 1/x$  für  $x \geq 1/\sqrt{\gamma}$  folgt

$$\gamma \tilde{u}(1 + \tilde{u}'^2)^{1/2} + \frac{1}{\tilde{u}(1 + \tilde{u}'^2)^{1/2}} \leq \gamma u(1 + u'^2)^{1/2} + \frac{1}{u(1 + u'^2)^{1/2}}$$

und

$$\kappa_e(\tilde{u})^2 = \frac{\tilde{u}''^2}{(1 + \tilde{u}'^2)^3} = \frac{u''^2}{(1 + u'^2)^3} = \kappa_e(u)^2.$$

Insgesamt gilt also

$$\mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha}(\tilde{u}) \leq \mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha}(u).$$

□

**(8.3.7) Korollar (Zusammenfassung verbesserte Minimalfolge).**

Seien  $\gamma > 0$ ,  $H_0 = 0$  und  $\alpha > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ , sowie

$$\frac{\gamma\alpha c(\alpha - c)}{\gamma\alpha^2 + 1} \geq a > 0 \text{ für ein } \alpha > c > \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ gegeben.}$$

Dann können wir für eine Minimalfolge  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W_\alpha(I)$  für  $\mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha}$  ohne Einschränkung annehmen, daß  $u_k$  monoton fallend auf  $[-a, 0]$  ist und

$$c \leq u_k \leq \alpha \text{ sowie } \mathcal{L}(u_k) < 2(\alpha - c) \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

*Beweis.* Proposition (6.5.2), Lemma (8.3.2), Bemerkung (8.3.3), Korollar (8.3.4) und Lemma (8.3.6). □

Um den Existenzsatz (6.7.1) anwenden zu können, müssen wir nun noch eine gleichmäßige Schranke für die Ableitungen der Minimalfolge nachweisen.

**(8.3.8) Proposition (Schranken an  $u'$ ).**

Seien  $\alpha, \gamma > 0$ , ein  $H_0 \in \mathbb{R}$  und  $\alpha > c \geq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  gegeben. Gilt

$$0 < a < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c}(\gamma(\alpha - c) + (\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c}) + 4H_0^2\alpha) + 2|H_0|}} \quad (8.3)$$

und ist für ein Element  $u \in W_\alpha(I)$  einer Minimalfolge für  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}$  mit

$$\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u) \leq \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u_0 \equiv \alpha)$$

die Bedingung  $u(1 + u'^2)^{1/2} \geq c$  erfüllt, so gilt

$$|u'| \leq \frac{K}{\sqrt{1 - K^2}}$$

mit

$$K := \frac{a}{\sqrt{c}} \left[ \gamma(\alpha - c) + \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c} \right) + 4H_0^2\alpha \right]^{1/2} + 2|H_0|a.$$

*Beweis.*

(i) Die obere Schranke an  $a$  in (8.3) ist wohldefiniert. Für  $H_0 \neq 0$  ist dies klar. Es ist

$$\gamma(\alpha - c) + \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c} \right) = \frac{\gamma\alpha c(\alpha - c)}{\alpha c} + \frac{c - \alpha}{\alpha c} \stackrel{!}{>} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma\alpha c - 1 \stackrel{!}{>} 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$c > \frac{1}{\gamma\alpha},$$

es gilt

$$\alpha > \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad \Rightarrow \quad 1 > \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}} \quad \Rightarrow \quad c \geq \frac{1}{\sqrt{\gamma}} > \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{\alpha\gamma}.$$

(ii) Es gilt für alle  $x, y \in I$  mit  $x < y$  nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung (beachte dessen Gültigkeit für Sobolev-Funktionen im eindimensionalen Setting [A, U.1.6, S.67f.]

$$\begin{aligned} \frac{u'(y)}{(1 + u'(y)^2)^{1/2}} + 2H_0y - \frac{u'(x)}{(1 + u'(x)^2)^{1/2}} - 2H_0x &= \int_x^y \left( \left[ \frac{u'(z)}{(1 + u'(z)^2)^{1/2}} \right]' + 2H_0 \right) dz \\ &= \int_x^y (\kappa_e + 2H_0) dz. \end{aligned}$$

Damit gilt also

$$\begin{aligned}
\left| \frac{u'(y)}{(1+u'(y)^2)^{1/2}} + 2H_0y - \frac{u'(x)}{(1+u'(x)^2)^{1/2}} - 2H_0x \right| &= \left| \int_x^y (\kappa_e + 2H_0) dz \right| \\
&\leq \int_x^y |\kappa_e + 2H_0| dz \\
&\leq \int_I |\kappa_e + 2H_0| dx \\
&\leq |I|^{1/2} \left[ \int_I |\kappa_e + 2H_0|^2 dx \right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Wir betrachten nun  $x = -y$ , wegen  $x < y$  ist dann  $y \geq 0$ . Aufgrund der Symmetrie von  $u$  gilt

$$\left| \frac{u'(y)}{(1+u'(y)^2)^{1/2}} + 2H_0y - \frac{u'(x)}{(1+u'(x)^2)^{1/2}} - 2H_0x \right| = 2 \left| \frac{u'(y)}{(1+u'(y)^2)^{1/2}} + 2H_0y \right|. \tag{8.5}$$

Für  $z \in \bar{I}$  setze

$$f(z) := f_u(z) := \frac{u'(z)}{(1+u'(z)^2)^{1/2}}.$$

Nun wählen wir  $y$ , so daß (einer der beiden Fälle tritt ein)

$$f(y) = \pm \max_{z \in I} \frac{u'(z)}{(1+u'(z)^2)^{1/2}}. \tag{8.6}$$

Jetzt lösen wir den Betrag in  $|\pm \max f(y) + 2H_0y|$  auf.

(a) Im Fall  $H_0 > 0$  gilt (beachte  $\max f \geq 0$ )

i. „+“  $\dots = \max f + 2H_0y$

ii. „-“

A.  $\dots = 2H_0y - \max f$ , falls  $2H_0y \geq \max f$ , dann sind die Ableitungen von  $u$  beschränkt, wenn (siehe Punkt (vi))  $\max f < 1$  ist. Dies ist aber der Fall, da nach Voraussetzung  $\frac{1}{2H_0} > a$ , also

$$1 > 2H_0a \geq 2H_0y \geq \max f.$$

B.  $\dots = \max f - 2H_0y$  sonst.

(b) Im Fall  $H_0 < 0$  gilt

i. „+“

A.  $\dots = -2H_0y - \max f$ , falls  $-2H_0y \geq \max f$ , dann sind die Ableitungen von  $u$  beschränkt, wenn (siehe Punkt (vi))  $\max f < 1$  ist. Dies ist aber der Fall, da nach Voraussetzung  $\frac{1}{2|H_0|} > a$ , also

$$1 > 2|H_0|a \geq 2|H_0|y \geq \max f.$$

- B. ... =  $\max f + 2H_0y$  sonst.  
 ii. „-“ ... =  $\max f - 2H_0y$   
 (c) Im Fall  $H_0 = 0$  gilt einfach ... =  $\max f$ .

Dies bedeutet, wir können für den weiteren Beweis  $|\pm \max f + 2H_0y| = \max f \pm 2H_0y$  annehmen, da wir ansonsten schon Schranken für  $u'$  gefunden haben (beachte  $\pm$  korrespondiert hier nicht mit den entsprechenden Symbolen in (8.6), sondern wird nur verwendet, um beide Fälle gleichzeitig zu betrachten).

- (iii) Wir haben also nach (8.4) und (8.5)

$$\frac{4(\max f \pm 2H_0y)^2}{|I|} \leq \int_I |\kappa_e + 2H_0|^2 dx$$

und erhalten damit wegen  $u(1+u'^2)^{1/2} \geq c$  die Abschätzung

$$\frac{4c(\max f \pm 2H_0y)^2}{|I|} \leq \int_I |\kappa_e + 2H_0|^2 dS. \quad (8.7)$$

- (iv) Da die Funktion  $g(z) = \gamma z + \frac{1}{z}$  für  $z \geq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  streng monoton wachsend ist und nach Voraussetzung  $u(1+u'^2)^{1/2} \geq c \geq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  ist, gilt

$$|I| \left( \gamma c + \frac{1}{c} \right) \leq \int_I \left( \gamma u(1+u'^2)^{1/2} + \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right) dx. \quad (8.8)$$

Zusammensetzen der Ungleichungen (8.7) und (8.8) liefert

$$\begin{aligned} & |I| \left( \gamma c + \frac{1}{c} \right) + \frac{4c(\max f \pm 2H_0y)^2}{|I|} \\ & \leq \int_I \left( \gamma u(1+u'^2)^{1/2} + \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \right) dx + \int_I |\kappa_e + 2H_0|^2 dS \\ & = \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u) \\ & \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u_0 \equiv \alpha) \\ & = |I| \left( \gamma \alpha + \frac{1}{\alpha} + 4H_0^2 \alpha \right). \end{aligned}$$

- (v) Damit ergibt sich (die Fallunterscheidung ist so gemacht, daß in beiden Fällen  $\max f \pm 2H_0y \geq 0$  ist)

$$\max f \pm 2H_0y \leq \frac{|I|}{2\sqrt{c}} \left[ \gamma(\alpha - c) + \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c} \right) + 4H_0^2 \alpha \right]^{1/2}$$

also

$$\begin{aligned} \max f & \leq \frac{|I|}{2\sqrt{c}} \left[ \gamma(\alpha - c) + \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c} \right) + 4H_0^2 \alpha \right]^{1/2} \mp 2H_0y \\ & \leq \frac{|I|}{2\sqrt{c}} \left[ \gamma(\alpha - c) + \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c} \right) + 4H_0^2 \alpha \right]^{1/2} + 2|H_0|a \end{aligned}$$

Beachte, daß diese Ungleichung insbesondere auch in den Fällen (a) ii. A und (b) i. A in Punkt (ii) gilt, da dort die obere Schranke an  $\max f$  durch  $2|H_0|a$  gegeben war.



(vi) Gilt

$$\max_{z \in I} f_u(z) = \max_{z \in I} \frac{u'(z)}{(1 + u'(z)^2)^{1/2}} \leq K < 1,$$

so folgt für alle  $z \in I$  auch

$$\begin{aligned} u'(z) &\leq K(1 + u'(z)^2)^{1/2} \\ \Rightarrow (1 - K^2)u'(z)^2 &\leq K^2 \\ \stackrel{K \leq 1}{\Rightarrow} |u'(z)| &\leq \frac{K}{\sqrt{1 - K^2}}. \end{aligned}$$

(Beachte, wegen  $u'$  stetig,  $\bar{I}$  kompakt und  $u'(\pm a) = 0$  wird das Maximum im Inneren von  $I$  angenommen, daher rechtfertigt sich die obige Schreibweise.)

(vii) Die Behauptung folgt nun direkt, da

$$\frac{2a}{2\sqrt{c}} \left[ \gamma(\alpha - c) + \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c} \right) + 4H_0^2\alpha \right]^{1/2} + 2|H_0|a \stackrel{!}{<} 1$$

die für  $a$  vorausgesetzte Bedingung liefert.

□

## 8.4 (K)Eine obere Schranke für das Infimum

Wir zeigen zuerst, daß das Infimum  $\inf_{W_\alpha(I)} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}$  in  $\alpha$  unbeschränkt ist. Dieses Verhalten wird durch das Flächenfunktional verursacht.

**(8.4.1) Lemma (Infimum ist unbeschränkt in  $\alpha$ ).**

Seien  $a > 0$ ,  $\gamma > 0$  und  $H_0 \in \mathbb{R}$  fest, dann gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \inf_{W_\alpha(I)} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha} = \infty.$$

*Beweis.* Wähle  $\alpha_0(a, \gamma, H_0)$ , so daß die Bedingung (8.1) aus Lemma (8.3.2) für alle  $\alpha \geq \alpha_0$  und  $c := \alpha/2$  erfüllt ist. Nach Lemma (A.8.1) ist dies stets möglich. Für  $\alpha \geq \alpha_0$  läßt sich also nach Bemerkung (8.3.3) eine Minimalfolge  $u_n \geq \alpha/2$  wählen. Damit gilt

$$\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u_n) \geq \int_I \gamma u_n \underbrace{(1 + u_n'^2)^{1/2}}_{\geq 1} dx \geq \frac{\alpha}{2} \gamma |I|.$$

Die Behauptung folgt dann aus

$$\inf_{W_\alpha(I)} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha} \geq \frac{\alpha}{2} \gamma |I| \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \infty.$$

□

Nun beweisen wir noch, daß das Infimum zumindest für kleine  $\alpha$  nach oben beschränkt ist.

**(8.4.2) Lemma (Obere Schranke an das Infimum für kleine  $\alpha$ ).**

Für alle  $a > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $H_0 = 0$  und  $\alpha \leq a$  gilt

$$\inf_{W_\alpha(I)} \mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha} \leq \frac{8}{\sqrt{3}}\pi + 10\pi + 4\gamma a^2 \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2}.$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung zunächst nur für  $a = 1$  und benutzen die Testfunktionen aus Lemma (7.2.1). Da dort bereits die optimale WILLMORE-Energie abgeschätzt wurde, müssen wir uns nur noch um den vom Flächenfunktional erzeugten Anteil kümmern. Der Flächeninhalt des mittleren Kugelabschnitts  $u_2$  ist beschränkt durch die Hälfte der Oberfläche der Kugel mit demselben Radius  $R = (1 + 4\alpha^2)^{1/2} - \alpha$ , d.h.

$$\mathcal{A}(u_2) \leq \frac{1}{2}4\pi R^2 = 2\pi((1 + 4\alpha^2)^{1/2} - \alpha)^2 \leq 10\pi.$$

Für die beiden äußeren Stücke  $u_1$  gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u_1) &= \int_{1-\frac{\alpha}{(1+4\alpha^2)^{1/2}}}^1 \underbrace{(2\alpha - (4\alpha^2 - (|x| - 1)^2)^{1/2})}_{\leq 2\alpha} \left(1 + \frac{(|x| - 1)^2}{4\alpha^2 - (|x| - 1)^2}\right)^{1/2} dx \\ &\leq 2\alpha \int_{1-\frac{\alpha}{(1+4\alpha^2)^{1/2}}}^1 \left(1 + \frac{\alpha^2}{(1 + 4\alpha^2)(4\alpha^2 - (|x| - 1)^2)}\right)^{1/2} dx \\ &\leq 2\alpha \frac{\alpha}{(1 + 4\alpha^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{(1 + 4\alpha^2)(4\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{(1+4\alpha^2)})}\right)^{1/2} \\ &= 2\alpha \frac{\alpha}{(1 + 4\alpha^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{4 + 4^2\alpha^2 - 1}\right)^{1/2} \\ &\leq 2 \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Seien nun  $a > 0$  beliebig,  $\gamma > 0$  und  $\alpha \leq a$ . Für diese Parameter folgt die Behauptung nun aus der Skalierungseigenschaft Lemma (6.2.1) unter Beachtung von Korollar (6.2.3), indem man die Parameter  $\tilde{a} = 1$ ,  $\tilde{\alpha} = \alpha/a \leq 1$ ,  $\tilde{\gamma} = a^2\gamma$  und  $\tilde{H}_0 = 0$  mit  $r = 1/a$  skaliert.  $\square$

## 8.5 Monotonie der optimalen NITSCHKE-Energie

**(8.5.1) Proposition (Wachsende Monotonie für  $\alpha \geq \hat{\alpha}$ ).**

Seien  $a > 0$ ,  $\gamma > 0$  und  $H_0 \in \mathbb{R}$  fest und  $\bar{\alpha}$  durch

$$a = \frac{\frac{1}{4}\gamma\bar{\alpha}^3}{(\gamma + 4H_0^2)\bar{\alpha}^2 + 1},$$

(d.h. die rechte Seite ist (8.1) aus Lemma (8.3.2) für  $c = \bar{\alpha}/2$ ) nach Lemma (A.8.1) eindeutig bestimmt. Setze  $\hat{\alpha} := \max\{\bar{\alpha}, 2/\sqrt{\gamma}\}$ , dann ist

$$\alpha \mapsto \inf_{W_\alpha(I)} \mathcal{F}_{\gamma,H_0}^{a,\alpha}$$

monoton wachsend auf  $(\hat{\alpha}, \infty)$ .

Sind  $\hat{\alpha} < \tilde{\alpha} < \alpha$  und existiert für den Wert  $\alpha$  ein Minimierer, so gilt sogar

$$\inf_{W_{\tilde{\alpha}}(I)} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \tilde{\alpha}} < \inf_{W_{\alpha}(I)} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}.$$

*Beweis.* Seien  $\alpha, \tilde{\alpha} \in (\hat{\alpha}, \infty)$  mit  $\tilde{\alpha} < \alpha$  und  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_{\alpha}(I)$  eine Minimalfolge für  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}$ . Definiere  $\tilde{u}_n = u_n - (\alpha - \tilde{\alpha})$ , dann gilt  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_{\tilde{\alpha}}(I)$ .

- (i) Wir betrachten zunächst den Fall  $\tilde{\alpha} \geq \alpha/2 + 1/\sqrt{\gamma}$ . Nach Bemerkung (8.3.3) gilt dann ohne Einschränkung  $u_k \geq \alpha/2$  (wir werden den Index  $k$  in der Folge zunächst unterdrücken, da es nur um ein einzelnes Folgenglied geht) und damit

$$\tilde{u} = u - (\alpha - \tilde{\alpha}) \geq \frac{\alpha}{2} - (\alpha - \tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}.$$

Weiter gilt

$$\tilde{u} < u, \quad u' = \tilde{u}' \quad \text{und} \quad u'' = \tilde{u}'' ,$$

so dass

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \leq \tilde{u}(1 + \tilde{u}'^2)^{1/2} < u(1 + u'^2)^{1/2}$$

und damit aufgrund der strengen wachsenden Monotonie von  $x \mapsto \gamma x + 1/x$  für  $x \geq 1/\sqrt{\gamma}$  auch

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u) &= \int_I \left[ \underbrace{\left( \gamma u(1 + u'^2)^{1/2} + \frac{1}{u(1 + u'^2)^{1/2}} \right)}_{> \gamma \tilde{u}(1 + \tilde{u}'^2)^{1/2} + \frac{1}{\tilde{u}(1 + \tilde{u}'^2)^{1/2}}} dx + \underbrace{(\kappa_{\epsilon}(u) + 2H_0)^2}_{= \kappa_{\epsilon}(\tilde{u})} \underbrace{dS}_{> d\tilde{S}} \right] \\ &> \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(\tilde{u}). \end{aligned}$$

- (ii) Für beliebige  $\alpha, \tilde{\alpha} \in (\hat{\alpha}, \infty)$  mit  $\tilde{\alpha} < \alpha$  definieren wir die rekursive Folge  $(\alpha_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$  durch

$$\alpha_0 := \alpha \quad \text{und} \quad \alpha_{n+1} := \frac{\alpha_n}{2} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}.$$

Wegen  $\alpha > \tilde{\alpha} > \hat{\alpha} \geq 2/\sqrt{\gamma}$  erfüllen  $\alpha_n$  und  $\alpha_{n+1}$  nach Lemma (A.8.2) stets die Bedingung aus Punkt (i) (insbesondere auch  $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ ), und es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$ , so daß  $\tilde{\alpha} \geq \alpha_n/2 + 1/\sqrt{\gamma}$ . Damit gilt (die im ersten Punkt konstruierte Funktion zu den beiden Randwerten  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  bezeichnen wir mit  $v_1$  usw.)

$$\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u) > \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha_1}(v_1) > \dots > \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha_n}(v_n) > \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \tilde{\alpha}}(\tilde{u}).$$

- (iii) Nach dem vorigen Punkt gilt also

$$\inf_{W_{\alpha}(I)} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}(u_k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \tilde{\alpha}}(\tilde{u}_k) \geq \inf_{W_{\tilde{\alpha}}(I)} \mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \tilde{\alpha}}.$$

- (iv) Wenn die Existenz eines Minimierer  $u$  für  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}$  in  $W_{\alpha}(I)$  nachgewiesen ist, gilt nach dem zweiten Punkt sogar die echte Ungleichung.

□

## 8.6 Existenz von klassischen Minimierern

Zunächst wollen wir die Notation etwas vereinfachen.

### (8.6.1) Bezeichnungen.

Wir bezeichnen die beiden oberen Schranken an  $a$  in den Voraussetzungen von Lemma (8.3.2) und Proposition (8.3.8) mit  $F$  und  $G$ , d.h.

$$F(\alpha, \gamma, c, H_0) := \frac{\gamma\alpha c(\alpha - c)}{(\gamma + 4H_0^2)\alpha^2 + 1},$$

$$G(\alpha, \gamma, c, H_0) := \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c}(\gamma(\alpha - c) + (\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c}) + 4H_0^2\alpha) + 2|H_0|}}.$$

Nun fassen wir die Hauptergebnisse dieses Abschnitts zusammen in folgendem

### (8.6.2) Satz (Existenz von klassischen Minimierern für das NITSCHKE-Funktional mit $\gamma > 0$ ).

Seien  $\gamma > 0$ ,  $H_0 \in \mathbb{R}$  und  $\alpha > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ . Für

$$0 < a < \sup_{1/\sqrt{\gamma} \leq c < \alpha} \min\{F(\alpha, \gamma, c, H_0), G(\alpha, \gamma, c, H_0)\} =: A_{H_0}(\alpha, \gamma)$$

gibt es einen Minimierer  $u \in C^\infty(\bar{I}) \cap W_\alpha(I)$  von  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}$  in  $W_\alpha(I)$ . In diesem Fall gibt es ein  $c \in [1/\sqrt{\gamma}, \alpha)$ , so daß

$$a < \min\{F(\alpha, \gamma, c, H_0), G(\alpha, \gamma, c, H_0)\}, \quad (8.9)$$

und es gilt

$$0 < c \leq u \leq \frac{a}{\gamma\alpha} \left( \gamma\alpha + \frac{1}{\alpha} + 4H_0^2\alpha \right) + \alpha \quad (8.10)$$

$$|u'| \leq \frac{K}{\sqrt{1 - K^2}} \quad (8.11)$$

für

$$K := \frac{a}{\sqrt{c}} \left[ \gamma(\alpha - c) + \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c} \right) + 4H_0^2\alpha \right]^{1/2} + 2|H_0|a.$$

Zudem erfüllt  $u$  das (zur EULER-LAGRANGE-Gleichung und Funktionenklasse gehörige) DIRICHLET-Problem

$$\begin{cases} \kappa_h(u)^3 \frac{1}{u^2} - 2\kappa_h(u) \frac{1}{u^2} + 2 \frac{1}{u(1+u'^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{(1+u'^2)^{1/2}} \kappa_h(u)' \right) \\ + (4H_0^2 + \gamma) \left( \frac{2}{(1+u'^2)^{1/2}} - \kappa_h(u) \right) + 4H_0 \frac{2u''}{(1+u'^2)^2} = 0. & \text{in } (-a, a) \\ u(\pm a) = \alpha, \quad u'(\pm a) = 0. \end{cases}$$

*Beweis.* Die Abbildung

$$c \mapsto \min\{F(\alpha, \gamma, c, H_0), G(\alpha, \gamma, c, H_0)\}$$

ist als Minimum stetiger Funktionen wieder stetig und nimmt daher auf  $[1/\sqrt{\gamma}, \alpha]$  das Supremum an. Wegen  $F, G \geq 0$  und  $F(\alpha, \gamma, \alpha, H_0) = 0$  gibt es also ein  $c_0 \in [1/\sqrt{\gamma}, \alpha)$ , so daß

$$\min\{F(\alpha, \gamma, c_0, H_0), G(\alpha, \gamma, c_0, H_0)\} = \sup_{1/\sqrt{\gamma} \leq c < \alpha} \min\{F(\alpha, \gamma, c, H_0), G(\alpha, \gamma, c, H_0)\}.$$

Sei nun  $c \in [1/\sqrt{\gamma}, \alpha)$ , so daß (8.9) gilt. Nach den Lemmata (8.3.1) und (8.3.2) können wir für eine Minimalfolge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_\alpha(I)$  die Schranken in (8.10) annehmen, denn wenn  $\min u_n \leq c$  für ein Folgeglied gilt, können wir es durch  $\tilde{u}_n \equiv \alpha$  mit niedrigerer Energie ersetzen. Damit gilt dann  $u_n(1 + u_n^2)^{1/2} \geq c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so daß nach Proposition (8.3.8) auch die Schranken aus (8.11) gültig sind. Damit sind die Voraussetzungen des Existenzsatzes (6.7.1) erfüllt, es existiert also ein Minimierer  $u \in W_\alpha(I)$  von  $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a, \alpha}$  in  $W_\alpha(I)$ . Nach anschließender Anwendung des Regularitätssatzes (6.8.1) erhalten wir die Behauptung. Die Tatsache, daß  $u$  das DIRICHLET-Problem löst, ergibt sich aus Lemma (6.6.1).  $\square$

### (8.6.3) Bemerkung.

Da  $F$  in  $c$  beschränkt ist, gibt es zu festem  $\alpha$  und  $\gamma$  ein  $a_0$ , so daß mit der in diesem Kapitel entwickelten Methode für  $a \geq a_0$  keine Existenz mehr gezeigt werden kann. Dies ist möglicherweise eine ähnliche Situation, wie bei rotations-symmetrischen Minimalflächen, wo das minimierende Katenoid für wachsendes  $a$  nicht mehr existiert (siehe Kapitel 4).

Nun wollen wir zeigen, daß es bei verschwindender Spontankrümmung  $H_0 = 0$  für beliebiges  $a > 0$  und festes  $\gamma > 0$  möglich ist, ein  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(a, \gamma)$  zu finden, so daß es für alle  $\alpha \geq \bar{\alpha}$  die Existenz eines Minimierers gesichert ist. Für  $H_0 \neq 0$  ist diese Argumentation nicht haltbar, da dann  $G$  und damit auch  $\min\{F, G\}$  durch  $1/(2|H_0|)$  beschränkt ist.

### (8.6.4) Proposition.

Sei  $\gamma > 0$  fest gewählt, dann gibt es eine Abbildung  $c_\gamma : (\frac{1}{\sqrt{\gamma}}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} < c_\gamma(\alpha) < \alpha$ , so daß

$$F(\alpha, \gamma, c_\gamma(\alpha), 0) = G(\alpha, \gamma, c_\gamma(\alpha), 0)$$

und

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \min\{F(\alpha, \gamma, c_\gamma(\alpha), 0), G(\alpha, \gamma, c_\gamma(\alpha), 0)\} = \infty.$$

*Beweis.*

(i) Wir suchen zunächst  $1/\sqrt{\gamma} < c = c(\alpha) < \alpha$  für welche gilt

$$\begin{aligned} F(\alpha, \gamma, c, 0) &= \frac{\gamma \alpha c (\alpha - c)}{\gamma \alpha^2 + 1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c}(\gamma(\alpha - c) + (\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c}))}} = G(\alpha, \gamma, c, 0) \\ &= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\frac{\gamma \alpha c (\alpha - c)}{\alpha c} + \frac{c - \alpha}{\alpha c}}} = \frac{c \sqrt{\alpha}}{\sqrt{(\alpha - c)(\gamma \alpha c - 1)}}, \end{aligned}$$

dies liefert

$$(\gamma \alpha c - 1) \gamma^2 \alpha (\alpha - c)^3 \stackrel{!}{=} (\gamma \alpha^2 + 1)^2.$$

Wir suchen also Nullstellen von

$$f(\alpha, c) = -(\gamma \alpha c - 1) \gamma^2 \alpha (\alpha - c)^3 + (\gamma \alpha^2 + 1)^2$$

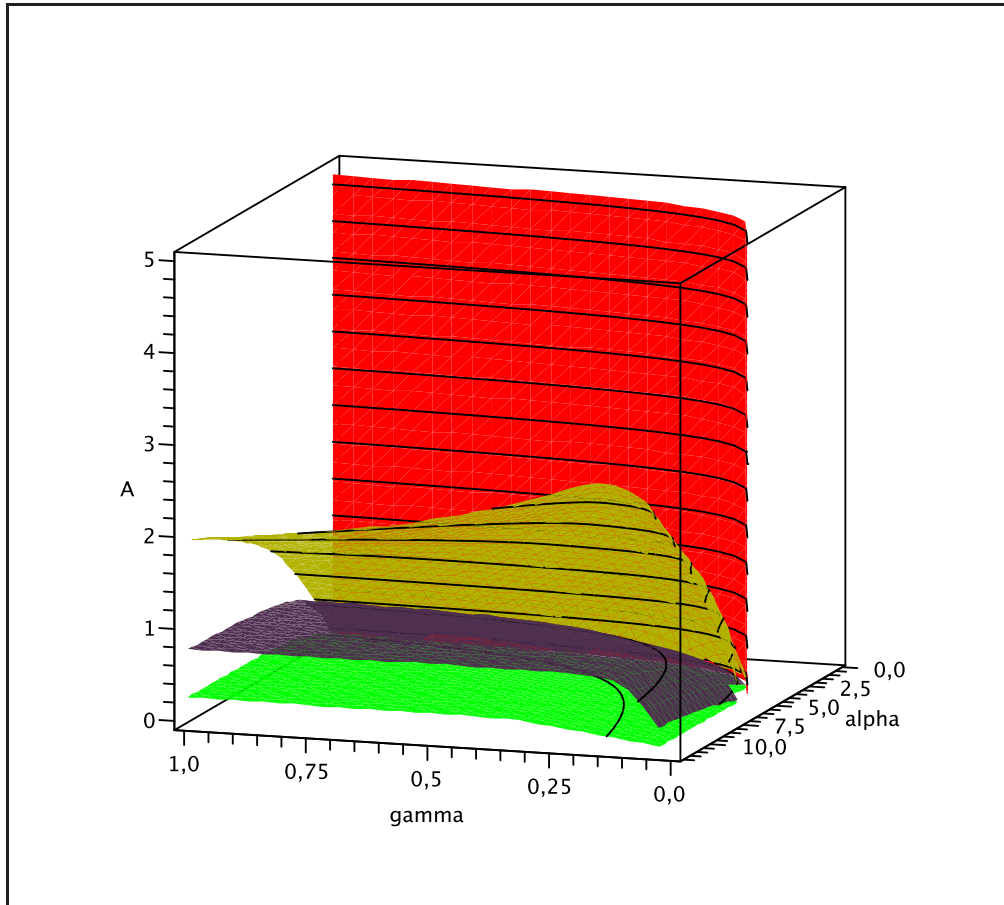


Abbildung 8.2: Der gelbe ( $H_0 = 0$ ), violette ( $H_0 = 0.3$ ) und grüne ( $H_0 = 1$ ) Plot zeigt, jeweils für festes  $H_0$ , die Abbildung  $A = A_{H_0}(\alpha, \gamma)$  auf dem Parameterbereich  $(0, 1) \times (0, 12)$ . Der rote Plot beschreibt  $\alpha = 1/\sqrt{\gamma}$ ,  $a > 0$  (eingeschränkt auf den Bereich  $0 < a < 5$ ) und korrespondiert für  $H_0 = 0$  mit den trivialen Minimierern aus Abschnitt 8.1.

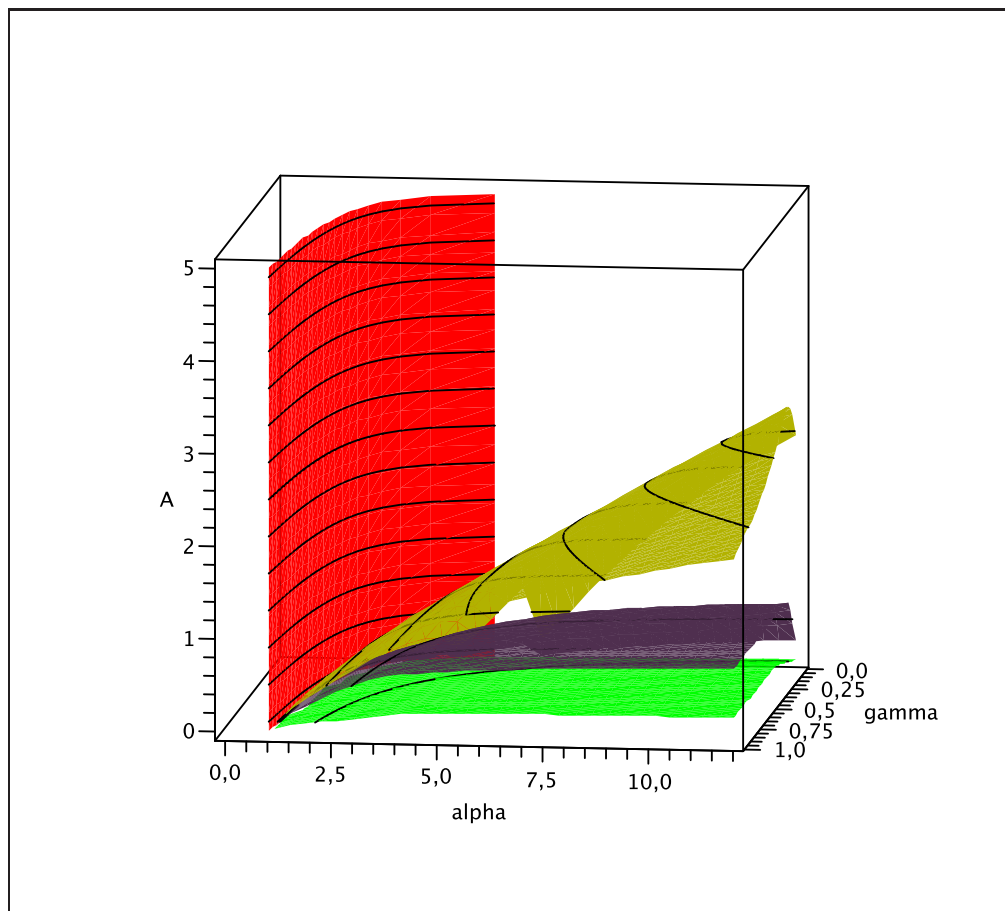


Abbildung 8.3: Dieselbe Situation wie in Abbildung 8.2 unter einem anderen Winkel betrachtet.

(ii) Es gilt

$$\lim_{c \nearrow \alpha} f(\alpha, c) = (\gamma\alpha^2 + 1)^2 > 0.$$

(iii) Für festes  $2 > \delta > 0$  und  $\alpha \gg 1$  gilt  $d(\alpha) := \alpha - \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{(1+\delta)/3} > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ , und es ist

$$\begin{aligned} f(\alpha, d(\alpha)) &= -\gamma^2\alpha(\alpha - d(\alpha))^3(\gamma\alpha d(\alpha) - 1) + (\gamma\alpha^2 + 1)^2 \\ &= -\gamma^2\alpha \underbrace{\left(\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{(1+\delta)/3}\right)^3}_{=\gamma^{1-\delta}\alpha^{2+\delta}} \left(\gamma\alpha^2 - \gamma\alpha \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{(1+\delta)/3} - 1\right) + (\gamma\alpha^2 + 1)^2 \\ &= -\gamma^{2-\delta}\alpha^{4+\delta} + \gamma^{2-\delta-1/3-\delta/3}\alpha^{3+\delta+1/3+\delta/3} + \gamma^{1-\delta}\alpha^{2+\delta} + \gamma^2\alpha^4 + 2\gamma\alpha^2 + 1 \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -\infty, \end{aligned}$$

da dann der Faktor vor  $\alpha^{4+\delta}$ , der höchsten vorkommenden Potenz von  $\alpha$ , negatives Vorzeichen hat.

(iv) Nach den Punkten (ii) und (iii) hat  $f(\alpha, \cdot)$  also für großes  $\alpha$ , sagen wir  $\alpha \geq \alpha_0(\gamma)$ , eine Nullstelle, d.h. es gibt für alle  $\alpha \geq \alpha_0(\gamma)$  ein  $c_\gamma(\alpha) \in (1/\sqrt{\gamma}, \alpha)$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} < \alpha - \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{(1+\delta)/3} < c_\gamma(\alpha) < \alpha$$

mit

$$F(\alpha, \gamma, c_\gamma(\alpha), 0) = G(\alpha, \gamma, c_\gamma(\alpha), 0).$$

(v) Wir zeigen nun, daß  $G$  streng monoton wachsend in  $c$  ist (für beliebiges  $H_0$ ). In der Darstellung in Definition (8.6.1) ist also nur der Nennerterm und von diesem nur

$$N(c) := \frac{1}{c} \left[ \gamma(\alpha - c) + \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c} \right) \right]$$

relevant. Es gilt

$$\begin{aligned} N'(c) &= -\frac{1}{c^2} \left[ \gamma(\alpha - c) + \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{c} \right) \right] + \frac{1}{c} \left[ -\gamma + \frac{1}{c^2} \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \left[ -\gamma\alpha + \gamma c - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{c} - \gamma c + \frac{1}{c} \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \left[ -\gamma\alpha - \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{c} \right] \\ &\stackrel{!}{<} 0, \end{aligned}$$

genau dann wenn

$$c > \frac{2\alpha}{1 + \gamma\alpha^2}.$$

Dies ist jedoch stets der Fall für  $c > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ , wegen

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} > \frac{2\alpha}{1 + \gamma\alpha^2} \Leftrightarrow 1 + \gamma\alpha^2 > 2\alpha\sqrt{\gamma} \Leftrightarrow \gamma\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{\gamma} + 1 = (\alpha\sqrt{\gamma} - 1)^2 > 0,$$

da nach Voraussetzung  $\alpha > 1/\sqrt{\gamma}$ .

Damit ist  $G(\alpha, \gamma, c, H_0)$  streng monoton wachsend in  $c$ .



(vi) Es gilt also

$$\begin{aligned} F(\alpha, \gamma, c_\gamma(\alpha), 0) = G(\alpha, \gamma, c_\gamma(\alpha), 0) &\geq G\left(\alpha, \gamma, \alpha - \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{(1+\delta)/3}, 0\right) \\ &= \frac{\left(\alpha - \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{(1+\delta)/3}\right) \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{(1+\delta)/3} \left(\gamma \alpha \left(\alpha - \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{(1+\delta)/3}\right) - 1\right)}} \\ &\xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \infty, \end{aligned}$$

denn der Zähler verhält sich für große  $\alpha$ , wegen  $0 < \delta < 2$ , wie  $\alpha^{3/2}$  und der Nenner wie  $\alpha^{((1+\delta)/3+2)(1/2)} = \alpha^{(7+\delta)/6}$ . Damit verhält sich der ganze Bruch also wie

$$\alpha^{1/3-\delta/6} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \infty.$$

□

## 8.7 Vergleichsfunktionen

In diesem Abschnitt konstruieren wir Vergleichsfunktionen, bestehend aus einer Katenoide<sup>1</sup> und zwei Kreisbögen. Für diese Vergleichsfunktionen berechnen wir die NITSCHKE-Energie und vergleichen sie mit der NITSCHKE-Energie der Zylinder. Da die Katenoide  $C^1$ -Anschluß an die beiden Kreisbögen hat, nennen wir die Vergleichsfunktionen *bitangential Katenoide*. Eine analoge Konstruktion wurde auch in [D'Ac,F,G,S, Abschnitt 4.2.1] durchgeführt. Diese Vergleichsfunktionen könnten in weiterführenden Arbeiten zu diesem Thema möglicherweise verwendet werden, um die Ergebnisse aus Abschnitt 8.3 zu verbessern, da dort stets Zylinder als Vergleichsfunktionen verwendet wurden. Ebenso ist es interessant zu sehen, wie Flächen aussehen, die geringere NITSCHKE-Energie als die Zylinder besitzen.

Wir setzen

$$f(\bar{a}, r) := (\alpha - r) + \sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2} - \frac{\bar{a}r}{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a - \bar{a}}{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2}}\right)}.$$

**(8.7.1) Lemma (Bedingung für Existenz von bitangential Katenoiden).**

Falls für  $r > a$  und  $0 < \bar{a} < a$  die Bedingung

$$f(\bar{a}, r) = 0$$

erfüllt ist, gibt es eine Funktion  $u_{\text{vergleich}} \in W_\alpha(I)$  bestehend aus zwei Kreisbögen um  $(\pm a, \alpha - r)$  mit Radius  $r$  auf  $[-a, -\bar{a}]$ , bzw.  $[\bar{a}, a]$  und einer Katenoiden  $u(x) = c \cosh(x/c)$  auf  $(-\bar{a}, \bar{a})$  mit

$$c := \bar{a} \frac{1}{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a - \bar{a}}{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2}}\right)}.$$

<sup>1</sup>Katenoide sind unter gewissen Randbedingungen (vgl. Kapitel 4) Minimierer des Flächenfunktionals und bringen wegen  $H \equiv 0$  das WILLMORE-Funktional zum Verschwinden

*Beweis.* Aufgrund der Symmetrie des Problems betrachten wir das Problem nur auf der rechten Seite des Ursprungs. Wegen  $r > a$  und  $0 < \bar{a} < a$  ist  $\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2}$  wohldefiniert und positiv.

Wir bezeichnen den Kreis mit  $K$  und das Katenoid mit  $u$ , dann ist

$$K(x) := (\alpha - r) + \sqrt{r^2 - (a - x)^2}, \quad u(x) := c \cosh\left(\frac{x}{c}\right), \quad (8.12)$$

$$K'(x) = \frac{a - x}{\sqrt{r^2 - (a - x)^2}}, \quad u'(x) = \sinh\left(\frac{x}{c}\right). \quad (8.13)$$

Gilt

$$K(\bar{a}) = u(\bar{a}) \quad \text{und} \quad K'(\bar{a}) = u'(\bar{a}), \quad (8.14)$$

so existiert die Funktion aus der Behauptung.

Die zweite Bedingung in (8.14) liefert

$$\frac{a - \bar{a}}{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2}} = \sinh\left(\frac{\bar{a}}{c}\right) \quad \Leftrightarrow \quad c = \bar{a} \frac{1}{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a - \bar{a}}{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2}}\right)}.$$

Für diese Wahl von  $c$  ist die zweite Bedingung also stets erfüllt.

Die erste Bedingung liefert

$$\begin{aligned} (\alpha - r) + \sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2} &= c \cosh(\bar{a}/c) \\ &= \bar{a} \frac{1}{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a - \bar{a}}{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2}}\right)} \underbrace{\cosh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a - \bar{a}}{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2}}\right)\right)}_{\substack{= \operatorname{sign}(a - \bar{a}) \sqrt{\left(\frac{a - \bar{a}}{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2}\right)^2 + 1} \\ = 1}} \\ &= \bar{a} \frac{\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - (a - \bar{a})^2}}}{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a - \bar{a}}{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2}}\right)} \\ &= \frac{\bar{a}r}{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a - \bar{a}}{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2}}\right)}. \end{aligned}$$

□

In Abbildung 8.4 sind die Vergleichsfunktionen für  $a = 4$  und verschiedene  $r = \alpha$  dargestellt.

### (8.7.2) Lemma (Existenz von bitangential Katenoiden).

Seien  $a > 0$  und  $\alpha > a$  gegeben.

Dann gibt es zu jedem  $a < r \leq \alpha$  ein  $\bar{a}(r)$  mit  $0 < \bar{a}(r) < a$ , so daß

$$f(\bar{a}(r), r) = 0.$$

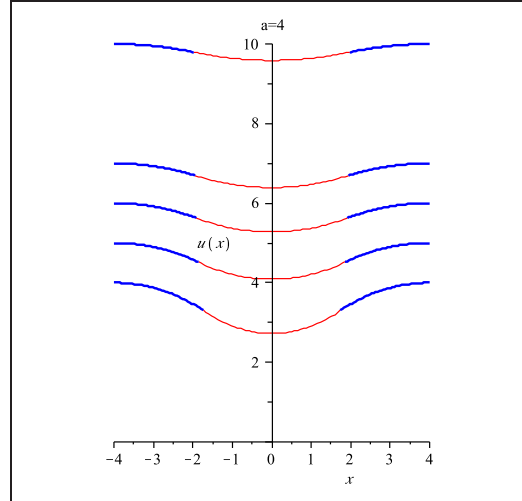


Abbildung 8.4: Vergleichsfunktionen für  $a = 4$  von unten nach oben für  $r = \alpha = 4, 5, 6, 7, 10$ . Dabei ergeben sich für  $\bar{a}$  die folgenden Werte  $\bar{a} = 1.74, 1.87, 1.91, 1.94, 1.97$ .

*Beweis.* Die Abbildung  $f$  ist auf dem Parameterbereich  $(0, a) \times (a, \alpha]$  stetig und es gilt für festes  $r$

$$\begin{aligned} & \lim_{\bar{a} \searrow 0} f(\bar{a}, r) \\ &= \lim_{\bar{a} \searrow 0} \left( \underbrace{(\alpha - r)}_{\geq 0} + \underbrace{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2}}_{\xrightarrow{\bar{a} \searrow 0} \sqrt{r^2 - a^2}} - \bar{a} \underbrace{\frac{r}{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a - \bar{a}}{\sqrt{r^2 - (a - \bar{a})^2}}\right)}}_{\xrightarrow{\bar{a} \searrow 0} \text{konst.} < \infty} \right) \\ &= c > 0. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\lim_{\bar{a} \nearrow a} f(\bar{a}, r) = (\alpha - r) + r - \lim_{x \searrow 0} a \frac{r}{r \operatorname{arcsinh}(x)} = -\infty,$$

so daß die Behauptung mit dem Zwischenwertsatz folgt.  $\square$

Nun betrachten wir den Fall  $r = \alpha$  und berechnen den Wert des NITSCHÉ-Funktional mit  $H_0 = 0$  für die Vergleichsfunktionen  $u_{\text{vergleich}}$  aus Lemma (8.7.1).

**(8.7.3) Lemma** ( $\mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha}(u_{\text{vergleich}})$ ).

Für die Vergleichsfunktionen aus Lemma (8.7.1) gilt

$$\mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha}(u_{\text{vergleich}}) = 2\gamma\alpha(a - \bar{a}) + \gamma\bar{a} \frac{a}{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a - \bar{a}}{\sqrt{\alpha^2 - (a - \bar{a})^2}}\right)} + 8 \frac{a - \bar{a}}{\alpha}.$$

*Beweis.*

- (i) Flächeninhalt eines Kugelabschnitts  
Wir wählen folgende Parametrisierung des Kreises

$$\gamma_{\text{Kreis}} : \left[ 0, \arcsin \left( \frac{a - \bar{a}}{\alpha} \right) \right] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto (a - \alpha \sin(t), \alpha \cos(t)) = (\gamma_{\text{Kreis},1}(t), \gamma_{\text{Kreis},2}(t)).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\gamma_{\text{Kreis}}) &= \int_0^{\arcsin\left(\frac{a-\bar{a}}{\alpha}\right)} \gamma_{\text{Kreis},2} (\dot{\gamma}_{\text{Kreis},1}^2 + \dot{\gamma}_{\text{Kreis},2}^2)^{1/2} dt \\ &= \int_0^{\arcsin\left(\frac{a-\bar{a}}{\alpha}\right)} \alpha \cos(t) (\alpha^2 \cos^2(t) + \alpha^2 \sin^2(t))^{1/2} dt \\ &= \int_0^{\arcsin\left(\frac{a-\bar{a}}{\alpha}\right)} \alpha^2 \cos(t) dt \\ &= \alpha^2 [\sin(t)]_0^{\arcsin\left(\frac{a-\bar{a}}{\alpha}\right)} \\ &= \alpha^2 \sin \left( \arcsin \left( \frac{a - \bar{a}}{\alpha} \right) \right) \\ &= \alpha^2 \frac{a - \bar{a}}{\alpha} \\ &= \alpha(a - \bar{a}). \end{aligned}$$

- (ii) Flächeninhalt des Katenoids  
Es ist mit [B, Integral Nr. 429, S. 1076]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u_{\text{Katenoid}}) &= \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} u_{\text{Katenoid}} (1 + u_{\text{Katenoid}}'^2)^{1/2} dx \\ &= \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} c \cosh \left( \frac{x}{c} \right) \underbrace{\left( 1 + \sinh^2 \left( \frac{x}{c} \right) \right)^{1/2}}_{=\cosh\left(\frac{x}{c}\right)} dx \\ &= \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} c \cosh^2 \left( \frac{x}{c} \right) dx \\ &= c \left[ \frac{c}{2} \sinh \left( \frac{x}{c} \right) \cosh \left( \frac{x}{c} \right) + \frac{1}{2} x \right]_{-\bar{a}}^{\bar{a}} \\ &= c \left[ \sinh \left( \frac{\bar{a}}{c} \right) \underbrace{c \cosh \left( \frac{\bar{a}}{c} \right)}_{=u_{\text{Katenoid}}(\bar{a})=K(\bar{a})=\sqrt{\alpha^2 - (a-\bar{a})^2}} + \bar{a} \right] \\ &= c \left[ \sinh \left( \operatorname{arcsinh} \left( \frac{a - \bar{a}}{\sqrt{\alpha^2 - (a - \bar{a})^2}} \right) \right) \sqrt{\alpha^2 - (a - \bar{a})^2} + \bar{a} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c \left[ (a - \bar{a}) \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - (a - \bar{a})^2}} \sqrt{\alpha^2 - (a - \bar{a})^2} + \bar{a} \right] \\
&= \bar{a} \frac{1}{\operatorname{arcsinh} \left( \frac{a - \bar{a}}{\sqrt{\alpha^2 - (a - \bar{a})^2}} \right)} [(a - \bar{a}) + \bar{a}] \\
&= \bar{a} \frac{a}{\operatorname{arcsinh} \left( \frac{a - \bar{a}}{\sqrt{\alpha^2 - (a - \bar{a})^2}} \right)}.
\end{aligned}$$

(iii) WILLMORE-Energie der Kugelabschnitte

Es ist (wir erinnern an (8.12), (8.13) und  $\alpha = r$ )

$$\begin{aligned}
K(x)(1 + K'(x)^2)^{1/2} &= \sqrt{\alpha^2 - (x - a)^2} \left( 1 + \frac{(x - a)^2}{\alpha^2 - (x - a)^2} \right)^{1/2} = \alpha \\
\kappa_e(K) &= -\frac{1}{r} = -\frac{1}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Man beachte, daß nach der Rechnung in Abschnitt 6.1

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(u_{\text{vergleich}}) &= 2\mathcal{W}(K) + \mathcal{W}(u_{\text{Katenoide}}) \\
&= \int_I \left( \frac{1}{u_{\text{vergleich}}(1 + u'_{\text{vergleich}})^2)^{1/2}} dx + \kappa_e(u_{\text{vergleich}})^2 dS \right),
\end{aligned}$$

da für die Konstante  $C$  aus Formel (6.1)  $C = 0$  gilt. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(K) &= \int_{\bar{a}}^a \left[ \frac{1}{K(x)(1 + K'(x))^{1/2}} - \kappa_e(K) \right]^2 K(x)(1 + K'(x))^{1/2} dx \\
&= \int_{\bar{a}}^a \left[ \frac{1}{\alpha} + \left( \frac{1}{\alpha} \right) \right]^2 \alpha dx \\
&= (a - \bar{a}) \frac{4}{\alpha^2} \alpha \\
&= 4 \frac{a - \bar{a}}{\alpha}.
\end{aligned}$$

(iv) WILLMORE-Energie des Katenoids

Da das Katenoid eine Minimalfläche ist, besitzt es mittlere Krümmung  $H = 0$ , so daß

$$\mathcal{W}(u_{\text{Katenoid}}) = \int_{\Sigma_{\text{Katenoid}}} H^2 dS = 0.$$

(v) Nun gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{\gamma,0}^{a,\alpha}(u_{\text{vergleich}}) &= \gamma \mathcal{A}(u_{\text{vergleich}}) + \mathcal{W}(u_{\text{vergleich}}) \\
 &= 2\gamma \mathcal{A}(\gamma_{\text{Kreis}}) + \gamma \mathcal{A}(u_{\text{Katenoid}}) + 2\mathcal{W}(K) + \mathcal{W}(u_{\text{Katenoid}}) \\
 &= 2\gamma\alpha(a - \bar{a}) + \gamma\bar{a} \frac{a}{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a-\bar{a}}{\sqrt{\alpha^2 - (a-\bar{a})^2}}\right)} + 2 \cdot 4 \frac{a - \bar{a}}{\alpha} + 0 \\
 &= 2\gamma\alpha(a - \bar{a}) + \gamma\bar{a} \frac{a}{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a-\bar{a}}{\sqrt{\alpha^2 - (a-\bar{a})^2}}\right)} + 8 \frac{a - \bar{a}}{\alpha}.
 \end{aligned}$$

□

Nun implementieren wir die Vergleichsfunktionen in Maple und berechnen die Differenz

$$d(a, \alpha) = \mathcal{F}_{1,0}^{a,\alpha}(u_0) - \mathcal{F}_{1,0}^{a,\alpha}(u_{\text{vergleich}}),$$

d.h. wenn  $d > 0$  gilt, besitzt die Vergleichsfunktion kleinere Energie als der Zylinder.

```

restart :
d:=proc(a, alpha)
  local A, Zylinder, Vergleich, D;
  A:=fsolve(sqrt(alpha^2-(a-A)^2)-A*alpha/sqrt(alpha^2-(a-A)^2)*1/
    arcsinh((a-A)/sqrt(alpha^2-(a-A)^2))=0,A):
  Zylinder:=evalf(2*a*(alpha+1/alpha)):
  Vergleich:=2*alpha*(a-A)+a*A/arcsinh((a-A)/sqrt(alpha^2-(a-A)^2))
    +8(a-A)/alpha:
  D:=Zylinder-Vergleich:
end proc:

```

Nun plotten wir für verschiedene  $a$  die Abbildung  $(a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \mapsto d(a, \alpha)$ , siehe Abbildung 8.5. Für  $\gamma = 2$  ergibt sich dasselbe Bild, nur spielt sich der Vorzeichenwechsel jetzt etwa um den Wert  $a = 2.8$  ab. Man sieht also, daß für bestimmte Parameterkonstellationen, die Vergleichsfunktion niedrigere NITSCHKE-Energie, als der Zylinder besitzt. Es scheint so zu sein, daß für  $a$  groß genug, die Energie unserer Vergleichsfunktion stets niedriger als die Energie des entsprechenden Zylinders ist.

## A.8 Anhang zu Kapitel 8

### (A.8.1) Lemma.

Die Abbildung

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \alpha \mapsto \frac{\alpha^3}{A\alpha^2 + 1}$$

ist bijektiv, für  $A > 0$ .

*Beweis.* Für die Ableitung gilt

$$f'(\alpha) = \frac{3\alpha^2(A\alpha^2 + 1) - 2\alpha^3 A\alpha}{(A\alpha^2 + 1)^2} = \frac{\alpha^2 A\alpha^2 + 3\alpha^2}{(A\alpha^2 + 1)^2} > 0,$$

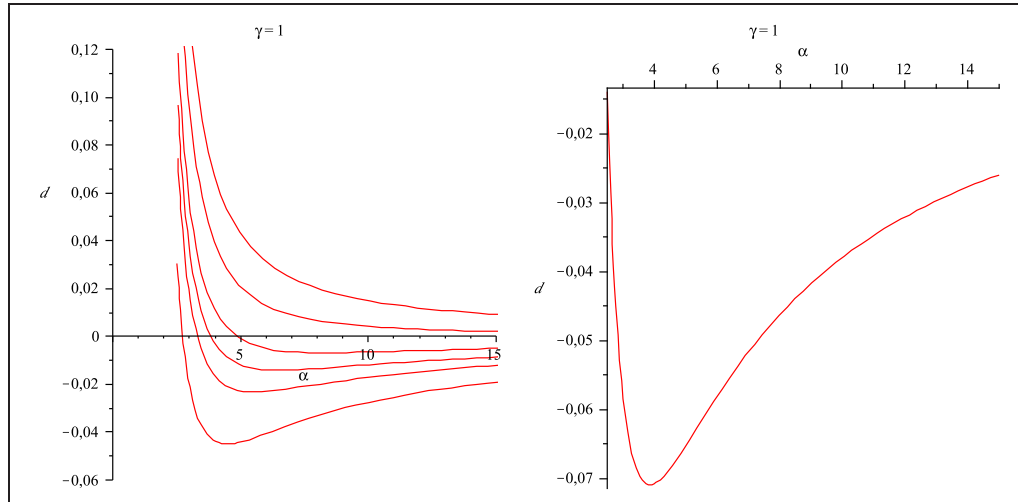


Abbildung 8.5: Für  $\gamma = 1$  von oben nach unten  $a = 2.6, 2.58, 2.56, 2.55, 2.54, 2.52$ , daneben für  $a = 2.50$ . (Beachte den Definitionsbereich  $\alpha > a$ ).

für  $\alpha > 0$  und es ist

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(\alpha) = \infty.$$

Mit der Stetigkeit von  $f$  folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz. □

**(A.8.2) Lemma (Rekursive Folge).**

Sei für  $\gamma > 0$  und  $\alpha > 2/\sqrt{\gamma}$  eine rekursive Folge  $(\alpha_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\alpha_0 := \alpha \quad \text{und} \quad \alpha_{n+1} := \frac{\alpha_n}{2} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}.$$

Dann gilt die Darstellung

$$\alpha_n = \frac{\alpha}{2^n} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{-1} \frac{1}{2^i} := 0$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{2}{\sqrt{\gamma}},$$

sowie

$$\alpha_n > \alpha_{n+1}.$$

*Beweis.* Für  $n = 0$  ist die Aussage klar. Für  $n + 1$  gilt

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{\alpha_n}{2} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha}{2^n} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \right] + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \\ &= \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i}. \end{aligned}$$

Mit der geometrischen Reihe ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \alpha_n - \alpha_{n+1} &= \frac{\alpha}{2^n} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} - \frac{\alpha}{2^{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{\alpha}{2^{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{\alpha\sqrt{\gamma} - 2}{2^{n+1}\sqrt{\gamma}} \\ &> 0, \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung  $\alpha > 2/\sqrt{\gamma}$ . □

**(A.8.3) Lemma (Regel von BERNOULLI-L'HOSPITAL mit Konvergenzrichtung).**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  oder  $b = \infty$  mit  $a < b$  und zwei differenzierbare Funktionen  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$  gegeben. Gilt

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = 0 \quad \text{und existiert} \quad L := \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

so gilt

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Gilt zudem

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > L \quad \text{für alle } x \in (a, b), \quad \text{so gilt ebenfalls} \quad \frac{f(x)}{g(x)} > L \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Eine analoge Aussage gilt für rechtsseitige Limiten.

*Beweis.* Für  $a < \alpha < \beta < b$  gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} = g'(x_0) \quad \text{für ein } x_0 \in (a, b),$$

so daß, wegen  $g'(x) \neq 0$  nach Voraussetzung, auch  $g(\alpha) \neq g(\beta)$  ist, d.h.  $g$  ist injektiv.

(i)  $b \in \mathbb{R}$

Setze  $f(b) := g(b) := 0$ , dann sind  $f, g : [x, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein  $\bar{x} \in (x, b)$ , so daß

$$f'(\bar{x}) \underbrace{(g(b) - g(x))}_{=0} = g'(\bar{x}) \underbrace{(f(b) - f(x))}_{=0} \Rightarrow \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[\text{damit } \bar{x} \nearrow b]{x \nearrow b} L.$$

Die Zusatzbemerkung über die Konvergenzrichtung sieht man direkt an der vorigen Gleichung.



(ii)  $b = \infty$ Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $a > 0$ . Betrachte

$$\bar{f} : (-1/a, 0) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto f(-1/y),$$

analog  $\bar{g}$ , dann gilt nach dem ersten Fall

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{\bar{f}(y)}{\bar{g}(y)} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{\bar{f}'(y)}{\bar{g}'(y)} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{-f'(-\frac{1}{y})\frac{1}{y^2}}{-g'(-\frac{1}{y})\frac{1}{y^2}} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{f'(-\frac{1}{y})}{g'(-\frac{1}{y})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Die Gültigkeit der Zusatzbemerkung sieht man an

$$\frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{y:=-1/x}{=} \frac{f(-\frac{1}{y})}{g(-\frac{1}{y})} = \frac{\bar{f}(y)}{\bar{g}(y)} \stackrel{\text{MWS}}{=} \frac{\bar{f}'(\bar{y})}{\bar{g}'(\bar{y})} = \frac{f'(-\frac{1}{\bar{y}})}{g'(-\frac{1}{\bar{y}})} \stackrel{\bar{x}:=-1/\bar{y}}{=} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}.$$

□



# Anhang B

## Eine direkte Methode für parametrische Variationsprobleme

### B.1 Eine direkte Methode zur Existenz quasinormal- er Minimierer des Hindernis-Problems parame- trischer Variationsprobleme

In diesem Kapitel wollen wir eine direkte Methode entwickeln, welche unter gewissen Voraussetzungen die Existenz quasinormaler Minimierer parametrischer Variationsprobleme liefert. Im Folgenden sei  $I := (0, 1) \subset \mathbb{R}$  und  $N \in \mathbb{N}$ . Wir formulieren zunächst zwei Voraussetzungen, die wir in den meisten der folgenden Lemmata und Sätze verwenden werden.

**(B.1.1) Voraussetzung.**

Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^N$  eine abgeschlossene, zusammenhängende Menge mit nichtleerem Inneren und  $F \in C^0(K \times \mathbb{R}^N)$  mit

$$m_1|p| \leq F(z, p) \leq m_2|p|$$

für feste Konstanten  $0 < m_1 \leq m_2$ .

**(B.1.2) Definition (Parametrisches Variationsproblem).**

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^N$  ein nichtleeres Gebiet. Eine LAGRANGE-Funktion

$$F \in C^0(G \times \mathbb{R}^N) \cap C^2(G \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}))$$

(bzw. das dazugehörige Variationsintegral, -problem) heißt *parametrisch*, falls  $F(z, \cdot)$  für alle  $z \in G$  positiv homogen vom Grad 1 ist, d.h.

$$F(z, \lambda p) = \lambda F(z, p) \quad \text{für alle } \lambda > 0 \text{ und alle } p \in \mathbb{R}^N.$$

**(B.1.3) Voraussetzung (Parametrische LAGRANGE-Funktion).**

Sei  $K$  die Menge aus Voraussetzung (B.1.1) und  $F \in C^0(G \times \mathbb{R}^N) \cap C^2(G \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}))$  mit  $G := \text{int}(K)$  eine parametrische LAGRANGE-Funktion.

**(B.1.4) Definition (Die Funktionale  $\mathcal{F}, \mathcal{L}, \mathcal{Q}, \mathcal{G}$ ).**

Wir definieren die folgenden Funktionale

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &: \{\gamma \in C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N) \mid \gamma(I) \subseteq K\} \rightarrow \mathbb{R}, \gamma \mapsto \int_I F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt, \\ \mathcal{L} &: \{\gamma \in C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N) \mid \gamma(I) \subseteq K\} \rightarrow \mathbb{R}, \gamma \mapsto \int_I |\dot{\gamma}(t)| dt, \\ \mathcal{Q} &: \{\gamma \in C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N) \mid \gamma(I) \subseteq K\} \rightarrow \mathbb{R}, \gamma \mapsto \int_I \frac{1}{2} F^2(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt, \\ \mathcal{G} &: \{\gamma \in C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N) \mid \gamma(I) \subseteq K\} \rightarrow \mathbb{R}, \gamma \mapsto (2\mathcal{Q}(\gamma))^{1/2}.\end{aligned}$$

**(B.1.5) Lemma (Eigenschaften parametrischer Variationsprobleme).**

Sei  $F$  eine parametrische LAGRANGE-Funktion gemäß Voraussetzung (B.1.3).

- (i) Das Funktional  $\mathcal{F}$  ist parameterinvariant, d.h. für alle Kurven  $\gamma \in C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$  und alle orientierungserhaltende Parameterwechsel  $\varphi : I \rightarrow I'$  (d.h.  $\varphi$  ist ein  $C^1$ -Diffeomorphismus mit  $\frac{d}{d\tau}\varphi > 0$ ) gilt

$$\mathcal{F}(\gamma) = \mathcal{F}(\gamma \circ \varphi).$$

- (ii) Für alle  $z \in G$  gilt

$$F(z, 0) = 0.$$

*Beweis.*

- (i) Seien  $\gamma$  und  $\varphi$  wie in der Behauptung, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\gamma) &= \int_I F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \\ &= \int_{I'} F(\gamma(\varphi(\tau)), \dot{\gamma}(\varphi(\tau))) \cdot \underbrace{\dot{\varphi}(\tau)}_{>0} d\tau \\ &= \int_{I'} F(\gamma(\varphi(\tau)), \underbrace{\dot{\gamma}(\varphi(\tau))\dot{\varphi}(\tau)}_{=\frac{d}{d\tau}(\gamma \circ \varphi)(\tau)}) d\tau \\ &= \mathcal{F}(\gamma \circ \varphi).\end{aligned}$$

- (ii) Da  $F$  stetig in  $(z, 0)$  und positiv homogen vom Grad 1 ist folgt die Behauptung sofort. □

**(B.1.6) Definition (quasinormale Kurve).**

Eine Kurve  $\gamma \in C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$  heißt bezüglich des Variationsintegrals  $\mathcal{F}$  *quasinormal*, falls es ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $c > 0$  gibt, so daß

$$F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = c \quad \text{für fast alle } t \in I.$$

**(B.1.7) Lemma.**

Sei  $\gamma$  eine quasinormale Kurve bezüglich eines parametrischen Variationsintegrals  $\mathcal{F}$ . Dann gilt

$$\dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \text{für fast alle } t \in I.$$

*Beweis.* Angenommen  $\dot{\gamma}(t) = 0$  auf einer (messbaren) Nichtnullmenge  $M \subseteq I$ , dann gilt

$$F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0 \quad \text{auf } M,$$

so daß die Konstante  $c$  aus Definition (B.1.6) Null sein muß. Dann kann  $\gamma$  aber nach Definition nicht quasinormal sein.  $\square$

**(B.1.8) Lemma ( $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ ).**

Für alle  $\gamma \in C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$  mit  $\gamma(\bar{I}) \subseteq K$  gilt

$$\mathcal{F}(\gamma) \leq \mathcal{G}(\gamma),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn

$$F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \text{konst.} \quad \text{für fast alle } t \in I.$$

*Beweis.* Nach der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\gamma) &= \int_I F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \, dt \\ &\leq \left( \int_I 1^2 \, dt \right)^{1/2} \left( \int_I F^2(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \, dt \right)^{1/2} \\ &= (2\mathcal{Q}(\gamma))^{1/2} \\ &= \mathcal{G}(\gamma), \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn 1 und  $F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$  linear abhängig (als  $L^2$ -Funktionen) sind, was genau die behauptete Konstanz fast überall bedeutet.  $\square$

Wir sehen also, daß  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  genau für quasinormale Kurven übereinstimmen.

**(B.1.9) Definition (Die Klasse  $\mathcal{C}(P_1, P_2, K)$ ).**

Seien  $P_1, P_2 \in K$  zwei verschiedene Punkte, so daß eine LIPSCHITZ-Kurve von  $P_1$  nach  $P_2$  in  $K$  existiert. Dann definieren wir

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(P_1, P_2, K) := \{\gamma \in C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N) \mid \gamma(\bar{I}) \subseteq K, \gamma(0) = P_1, \gamma(1) = P_2\}.$$

Nun wollen wir zeigen, daß es zu jeder Kurve  $\gamma \in \mathcal{C}$  eine quasinormale Reparametrisierung gibt.

**(B.1.10) Lemma (Existenz quasinormaler Reparametrisierungen).**

Seien  $F$  und  $K$  wie in den Voraussetzungen (B.1.1) und (B.1.3). Dann gibt es zu jeder Kurve  $\gamma \in \mathcal{C}$  eine quasinormale Kurve  $\eta \in \mathcal{C}$ , so daß

$$\mathcal{F}(\eta) = \mathcal{F}(\gamma).$$

*Beweis.*

(i) Wir wollen uns auf Kurven  $\gamma$  einschränken, die auf keinem Intervall konstant sind.

(a) Die Abbildung  $\sigma(t) := \int_0^t |\dot{\gamma}|$  ist wegen  $\gamma \in C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ , also  $|\dot{\gamma}| \in L^\infty(I)$  LIPSCHITZ-stetig, denn

$$|\sigma(t) - \sigma(t')| = \left| \int_{t'}^t |\dot{\gamma}| \right| \leq \| |\dot{\gamma}| \|_{L^\infty(I)} \cdot |t - t'|.$$

(b) Die Abbildung  $\sigma$  ist monoton wachsend, so daß  $\sigma$  nach Korollar (B.3.5) höchstens abzählbar viele Intervalle besitzt, auf denen es konstant ist. Solche Intervalle sind genau diejenigen Intervalle, auf denen  $|\dot{\gamma}| = 0$ , also  $\gamma = \text{konst.}$  Wenn wir nun das Innere dieser Intervalle entfernen und „die Lücken zusammenziehen“ erhalten wir eine Kurve  $\gamma^* : I^* \rightarrow \mathbb{R}^N$  auf einem Intervall  $I^* = [a, b]$  mit denselben Randwerten wie  $\gamma$ , welche auf keinem Intervall konstant ist. Wegen  $P_1 \neq P_2$  ist  $I^* \subseteq I$  nicht-degeneriert und es gilt  $\gamma^*(I^*) \subseteq K$ . Nach Voraussetzung (B.1.1) folgt aus  $\dot{\gamma}(t) = 0$  auch  $F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ , so daß

$$\mathcal{F}(\gamma^*) = \mathcal{F}(\gamma).$$

(c) Durch die Parametertransformation  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b], t \mapsto t \cdot (b - a) + a$  erhält man nun eine Kurve  $\bar{\gamma} = \gamma^* \circ \varphi \in \mathcal{C}$  mit der gewünschten Eigenschaft und

$$\mathcal{F}(\bar{\gamma}) = \mathcal{F}(\gamma^*) = \mathcal{F}(\gamma).$$

(ii) Da wir nun ohne Einschränkung  $\gamma$  auf keinem Intervall konstant annehmen dürfen, ist  $\sigma$  streng monoton wachsend, und daher eine bijektive Abbildung auf  $[0, \ell]$ , wobei  $\ell := \sigma(1) = \mathcal{L}(\gamma) > 0$  die Länge von  $\gamma$  ist. Aufgrund der strengen Monotonie ist auch die Umkehrfunktion  $\tau := \sigma^{-1}$  streng monoton wachsend. Wir betrachten nun die Bogenlängen-Parametrisierung  $\eta := \gamma \circ \tau$  von  $\gamma$ .

Da die totale Variation einer Kurve nicht von der gewählten Parametrisierung abhängt, gilt für  $t_1 < t_2$  mit  $s_1 := \sigma(t_1)$  und  $s_2 := \sigma(t_2)$ , d.h.  $s_1 < s_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} |d\gamma(t)| = \int_{s_1}^{s_2} |d\eta(s)|.$$

Wegen der LIPSCHITZ-Stetigkeit von  $\gamma$  gilt

$$\sigma(t_2) - \sigma(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} |d\gamma(t)|.$$

Damit erhalten wir

$$s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} |d\eta(s)|,$$

also

$$|\eta(s_2) - \eta(s_1)| \leq \text{Var}_{[s_1, s_2]}(\eta) = \int_{s_1}^{s_2} |d\eta(s)| = |s_2 - s_1|,$$

so daß  $\eta$  ebenfalls LIPSCHITZ-stetig ist. Es ist also

$$s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} |d\eta(t)| = \int_{s_1}^{s_2} |\dot{\eta}(t)| dt.$$

Dies impliziert  $|\dot{\eta}| = 1$  fast überall auf  $[0, \ell]$ . Zusätzlich gilt  $\mathcal{F}(\eta) = \mathcal{F}(\gamma \circ \tau) = \mathcal{F}(\gamma)$ . Damit können wir also (auf  $[0, 1]$  rückparametrisieren) für die ursprüngliche Kurve  $\gamma \in \mathcal{C}$  ohne Einschränkung  $|\dot{\gamma}| = \ell$  fast überall auf  $[0, 1]$  annehmen.

(iii) Setze

$$0 < m_1 \ell = \int_0^1 m_1 |\dot{\gamma}| \leq c := \int_0^1 F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \leq m_2 \ell = \int_0^1 m_2 |\dot{\gamma}|$$

und

$$\varphi(t) := \frac{1}{c} \int_0^t F(\gamma(t'), \dot{\gamma}(t')) dt'.$$

Dann ist  $\varphi$  eine streng monoton wachsende Abbildung (s.u.) von  $\bar{I}$  in sich und wegen  $F \in C^0(K \times \mathbb{R}^N)$  (wobei  $K \times \mathbb{R}^N$  abgeschlossen, d.h.  $F$  beschränkt) LIPSCHITZ-stetig. Weiterhin erfüllt  $\varphi$  für fast alle  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} \frac{F(\gamma(t'), \dot{\gamma}(t'))}{c} dt' \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{B_h(t)} \frac{F(\gamma(t'), \dot{\gamma}(t'))}{c} dt' \\ &= \frac{F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{c} \\ &> \frac{m_1}{c} |\dot{\gamma}| \\ &= \frac{m_1}{c} \ell \\ &> 0, \end{aligned} \tag{B.1}$$

da für  $F(\gamma(\cdot), \dot{\gamma}(\cdot)) \in L^\infty(I)$  fast alle Punkte LEBESGUE-Punkte sind.

Damit gilt

$$\frac{m_1}{m_2} \leq \dot{\varphi}(t) \leq \frac{m_2}{m_1} \quad \text{fast überall auf } I.$$

Nach Lemma (B.2.3) ist auch die Umkehrfunktion  $\psi := \varphi^{-1}$  LIPSCHITZ-stetig auf  $I$ , so daß die reparametrisierte Kurve  $\eta := \gamma \circ \psi$  ebenfalls von der Klasse  $\mathcal{C}$  ist. Zudem gilt für fast alle  $s \in I$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(s) &= \dot{\gamma}(\psi(s)) \cdot \dot{\psi}(s) \\ &\stackrel{\text{(B.2.1)}}{=} \dot{\gamma}(\psi(s)) \cdot \frac{1}{\dot{\varphi}(\psi(s))} \\ &\stackrel{\text{(B.1)}}{=} \dot{\gamma}(\psi(s)) \cdot \frac{c}{F(\gamma(\psi(s)), \dot{\gamma}(\psi(s)))}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich für fast alle  $s \in I$ , da  $F$  positiv homogen vom Grad 1 ist

$$\begin{aligned} F(\eta(s), \dot{\eta}(s)) &= F\left(\eta(s), \dot{\gamma}(\psi(s)) \cdot \underbrace{\frac{c}{F(\gamma(\psi(s)), \dot{\gamma}(\psi(s)))}}_{>0}\right) \\ &= \frac{c}{F(\gamma(\psi(s)), \dot{\gamma}(\psi(s)))} \cdot F(\gamma(\psi(s)), \dot{\gamma}(\psi(s))) \\ &= c. \end{aligned}$$

Die Kurve  $\eta$  ist also eine quasinormale Reparametrisierung von  $\gamma$ .  
Aus der Parameterinvarianz von  $\mathcal{F}$  ergibt sich

$$\mathcal{F}(\eta) = \mathcal{F}(\gamma).$$

□

Damit erhalten wir das folgende

**(B.1.11) Lemma** ( $\inf \mathcal{F} = \inf \mathcal{G}$ ).

Seien  $F$  und  $K$  wie in den Voraussetzungen (B.1.1) und (B.1.3). Dann gilt

$$\inf_c \mathcal{F} = \inf_c \mathcal{G}.$$

*Beweis.* Nach Lemma (B.1.8) gilt

$$\inf_c \mathcal{F} \leq \inf_c \mathcal{G}. \quad (\text{B.2})$$

Sei  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  eine Minimalfolge für  $\mathcal{F}$ , dann gibt es nach Lemma (B.1.10) eine Folge quasinormaler Kurven  $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  mit

$$\mathcal{F}(\gamma_k) = \mathcal{F}(\eta_k) \stackrel{\text{(B.1.8)}}{=} \mathcal{G}(\eta_k), \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Es gilt also auch die umgekehrte Ungleichung in (B.2) und damit die Gleichheit. □

Nun wollen wir die Existenz spezieller für  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  simultaner, quasinormaler Minimalfolgen, deren  $C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^n)$ -Norm gleichmäßig beschränkt ist und die gegen ein  $\gamma \in \mathcal{C}$  konvergieren, beweisen.

**(B.1.12) Lemma (Existenz spezieller Minimalfolgen).**

Sind  $F$  und  $K$  entsprechend den Voraussetzungen (B.1.1) und (B.1.3), so existiert eine Folge  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  mit folgenden Eigenschaften

- (i) Die Folge  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist Minimalfolge für  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ .
- (ii) Alle  $\gamma_k$  sind quasinormal.
- (iii) Es existieren von  $k$  unabhängige Konstanten  $L, L_0$ , so daß für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $t, t' \in I$  gilt

$$\begin{aligned} |\gamma_k(t) - \gamma_k(t')| &\leq L|t - t'| \\ |\gamma_k(t)| &\leq L_0, \end{aligned}$$

d.h.

$$\|\gamma_k\|_{C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^n)} \leq L_0 + L \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$



(iv) Es existiert ein  $\gamma \in \mathcal{C}$ , so daß

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\bar{I}} |\gamma - \gamma_k| = 0.$$

*Beweis.*

- (i) Sei  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  eine Minimalfolge für  $\mathcal{F}$ . Nach Lemma (B.1.10) können wir annehmen, daß alle  $\gamma_k$  quasinormal sind und damit nach Lemma (B.1.8)  $\mathcal{F}(\gamma_k) = \mathcal{G}(\gamma_k)$ , so daß  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  nach Lemma (B.1.11) auch Minimalfolge für  $\mathcal{G}$  ist.
- (ii) Da  $\mathcal{F}(\gamma_k)$  konvergiert, gibt es eine Konstante  $M > 0$ , so daß  $\mathcal{F}(\gamma_k) \leq M$ . Daraus folgt mit der Quasinormalität der Kurven und  $|I| = 1$  direkt  $F(\gamma_k(t), \dot{\gamma}_k(t)) \leq M$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und fast alle  $t \in I$ . Aus Voraussetzung (B.1.1) ergibt sich mit  $L := \frac{M}{m_1}$

$$|\dot{\gamma}(t)| \leq L \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und fast alle } t \in I.$$

Die Komponentenfunktionen von  $\gamma_k$  sind ebenfalls in  $C^{0,1}(\bar{I})$  und nach [vdM, Satz (2.6)] gilt hier  $C^{0,1}(\bar{I}) = W^{1,\infty}((0, 1))$ , so daß nach [vdM, Aufgabe 28, Übung 7]

$$\gamma_k(t) - \gamma_k(t') = \int_{t'}^t \dot{\gamma}_k(\tau) d\tau \quad \text{für fast alle } t, t' \in (0, 1).$$

Für alle  $t, t' \in I$  ergibt sich aus Stetigkeitsgründen

$$|\gamma_k(t) - \gamma_k(t')| \leq L|t - t'|.$$

- (iii) Die gleichmäßige Beschränktheit erhält man wie folgt

$$\begin{aligned} |\gamma_k(t)| &\leq |\gamma_k(t) - \gamma_k(0)| + |\gamma_k(0)| \\ &\leq L|t - 0| + |P_1| \\ &\leq L + |P_1| =: L_0. \end{aligned}$$

- (iv) Aufgrund der gleichmäßigen Schranke an die  $C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ -Norm der Minimalfolge, sind die Voraussetzungen des Satzes von ARZELÀ-ASCOLI erfüllt. Nach dessen Anwendung erhalten wir eine Teilfolge  $(\gamma_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ , die gleichmäßig gegen ein  $\gamma \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$  konvergiert. Damit haben wir also

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \int_{\bar{I}} |\gamma - \gamma_{k_l}| = 0.$$

Für alle  $t, t' \in I$  erhalten wir

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - \gamma(t')| &\leq \underbrace{|\gamma(t) - \gamma_{k_l}(t)|}_{\xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{|\gamma_{k_l}(t) - \gamma_{k_l}(t')|}_{\leq L \cdot |t - t'|} + \underbrace{|\gamma_{k_l}(t') - \gamma(t')|}_{\xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0} \\ &\leq L \cdot |t - t'|. \end{aligned}$$

Es gilt also sogar  $\gamma \in C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ . Da  $\gamma$  insbesondere auch punktweiser Limes ist, folgt  $\gamma(0) = P_1$  und  $\gamma(1) = P_2$ , so daß  $\gamma \in \mathcal{C}$ .

□

**(B.1.13) Bemerkung.**

Für eine Abbildung  $F(z, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  ist die Konvexität von  $F(x, \cdot)$  äquivalent dazu, daß die Funktion

$$\mathcal{E}_F(z, p, q) := F(z, q) - F(z, p) - (q - p)F_p(z, p)$$

die folgende Ungleichung erfüllt

$$\mathcal{E}_F(z, p, q) \geq 0 \quad \text{für alle } p, q \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

**(B.1.14) Lemma (Unterhalbstetigkeit von  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{G}$ ).**

Sei  $K$  eine Menge wie in Voraussetzung (B.1.1) und  $F$  zusätzlich zu Voraussetzung (B.1.3) (die andere Voraussetzung an  $F$  ist nicht notwendig) konvex im zweiten Argument und

$$F(z, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}).$$

Sei  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  eine Folge von Kurven mit den Eigenschaften (ii), (iii), (iv) aus Lemma (B.1.12) und  $\gamma$  wie in (iv). Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\gamma) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\gamma_k) \quad \text{und} \\ \mathcal{Q}(\gamma) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Q}(\gamma_k) \quad \text{sowie} \\ \mathcal{G}(\gamma) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{G}(\gamma_k). \end{aligned}$$

*Beweis.*

Wir wollen die Aussage nur für  $\mathcal{F}$  zeigen, die Aussagen für  $\mathcal{Q}$  und  $\mathcal{G}$  beweist man analog.

- (i) Aus den Eigenschaften (iii) und (iv) in Lemma (B.1.12) ergibt sich, daß auch die Grenzfunktion  $\gamma$  die Bedingungen aus (iii) mit denselben Konstanten erfüllt, so daß

$$(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)), (\gamma_k(t), \dot{\gamma}_k(t)) \in [K \cap \overline{B}_{L_0}(0)] \times \overline{B}_L(0) =: S$$

für fast alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $t \in I$ , wobei  $S \subseteq K \times \mathbb{R}^N$  kompakt ist. Da  $F$  stetig auf  $K \times \mathbb{R}^N$  ist, ist  $F$  gleichmäßig stetig auf  $S$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ , dann existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $(z, p), (z', p') \in S$  mit

$$|(z, p) - (z', p')| < \delta \quad \text{auch} \quad |F(z, p) - F(z', p')| < \varepsilon.$$

Für beliebiges  $\delta > 0$  und  $k = k(\delta)$  groß genug gilt nach (iv) aber

$$\sup_{\bar{I}} |\gamma(t) - \gamma_k(t)| = \text{wes sup}_{\bar{I}} |(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - (\gamma_k(t), \dot{\gamma}_k(t))| < \delta,$$

so daß

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{wes sup}_{\bar{I}} |F(\gamma(t), \dot{\gamma}_k(t)) - F(\gamma_k(t), \dot{\gamma}_k(t))| = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \mathcal{F}(\gamma_k) - \int_0^1 F(\gamma(t), \dot{\gamma}_k(t)) dt \right| = 0. \quad (\text{B.3})$$

- (ii) Nun führen wir (für  $\gamma$  aus Punkt (iv) in Lemma (B.1.12) fest) die (nichtparametrische) LAGRANGE-Funktion

$$H(t, p) := F(\gamma(t), p) \quad \text{für } (t, p) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N$$

und das dazugehörige Funktional

$$\mathcal{H} : C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}, \eta \mapsto \int_0^1 H(t, \dot{\eta}(t)) dt$$

ein. Die Aussage (B.3) läßt sich damit umschreiben, als

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathcal{F}(\gamma_k) - \mathcal{H}(\gamma_k)| = 0.$$

Wegen  $\mathcal{F}(\gamma) = \mathcal{H}(\gamma)$  läßt sich die gewünschte Unterhalbstetigkeitseigenschaft von  $\mathcal{F}$  äquivalent umformulieren als

$$\mathcal{H}(\gamma) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}(\gamma_k).$$

- (iii) Setze  $I_0 := \{t \in \bar{I} \mid \dot{\gamma}(t) = 0\}$  und  $I' := I \setminus I_0$ , dann gilt wegen  $H \geq 0$  und  $H(t, 0) = 0$  auch für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{I_0} H(t, \dot{\gamma}(t)) dt \leq \int_{I_0} H(t, \dot{\gamma}_k(t)) dt. \quad (\text{B.4})$$

Es gilt also  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  fast überall auf  $I'$  und wegen Lemma (B.1.7) ebenfalls  $\dot{\gamma}_k(t) \neq 0$  fast überall auf  $I'$ . Nach Voraussetzung ist  $F(\gamma(t), \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  konvex, so daß nach Bemerkung (B.1.13) fast überall auf  $I'$  gilt

$$F(\gamma(t), \dot{\gamma}_k(t)) \geq F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + (\dot{\gamma}_k(t) - \dot{\gamma}(t)) F_p(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)). \quad (\text{B.5})$$

Wir setzen

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} F_p(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)), & t \in I' \text{ und } \dot{\gamma}(t) \text{ definiert,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist  $\psi$  meßbar und beschränkt. Damit können wir nun (B.5) umschreiben als

$$H(t, \dot{\gamma}_k(t)) \geq H(t, \dot{\gamma}(t)) + \left[ \frac{d}{dt}(\gamma_k(t) - \gamma(t)) \right] \cdot \psi(t)$$

für fast alle  $t \in I'$ . Wenn wir dies nun mit (B.4) zusammenfügen ergibt sich

$$\mathcal{H}(\gamma) \leq \mathcal{H}(\gamma_k) - \int_0^1 \psi(t) \cdot \left[ \frac{d}{dt}(\gamma_k(t) - \gamma(t)) \right] dt. \quad (\text{B.6})$$

- (iv) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Funktion  $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ , so daß

$$\|\psi - \varphi\|_{L^1(I)} < \varepsilon.$$

Es gilt

$$\left| \int_0^1 |\psi(t) - \varphi(t)| \frac{d}{dt}(\gamma_k(t) - \gamma(t)) dt \right| \leq (\|\dot{\gamma}_k\|_{L^\infty(I)} + \|\dot{\gamma}\|_{L^\infty(I)}) \cdot \|\psi - \varphi\|_{L^1(I)} \leq 2L\varepsilon,$$

sowie (partielle Integration, wegen  $\text{supp } \varphi \subset\subset I$  fallen die Randterme weg)

$$\int_0^1 \varphi(t) \cdot \frac{d}{dt}(\gamma_k(t) - \gamma(t)) dt = - \int_0^1 \left[ \frac{d}{dt} \varphi(t) \right] \cdot (\gamma_k(t) - \gamma(t)) dt.$$

Mit

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \psi(t) \cdot \frac{d}{dt}(\gamma_k(t) - \gamma(t)) dt &\leq \left| \int_0^1 \psi(t) \cdot \frac{d}{dt}(\gamma_k(t) - \gamma(t)) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 (\psi(t) - \varphi(t)) \cdot \frac{d}{dt}(\gamma_k(t) - \gamma(t)) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_0^1 \varphi(t) \cdot \frac{d}{dt}(\gamma_k(t) - \gamma(t)) dt \right| \\ &\leq 2L\varepsilon + \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi(t) \cdot (\gamma_k(t) - \gamma(t)) dt \right| \\ &\leq 2L\varepsilon + \|\gamma_k - \gamma\|_{L^\infty(I)} \underbrace{\int_0^1 \left| \frac{d}{dt} \varphi(t) \right| dt}_{< \infty, \text{ da } \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)} \\ &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 2L\varepsilon \end{aligned}$$

ergibt sich aus (B.6)

$$\mathcal{H}(\gamma) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}(\gamma_k) + 2L\varepsilon$$

für beliebiges  $\varepsilon > 0$ , also

$$\mathcal{H}(\gamma) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}(\gamma_k).$$

Damit haben wir die Behauptung für  $\mathcal{F}$  gezeigt. □

Damit können wir nun den folgenden Existenzsatz zeigen:

**(B.1.15) Satz (Existenz quasinormaler Minimierer).**

Sei  $K$  eine abgeschlossene, zusammenhängende Teilmenge des  $\mathbb{R}^N$  mit nichtleerem Inneren und  $F : K \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  eine parametrische LAGRANGE-Funktion welche die Voraussetzungen (B.1.1) und (B.1.3) erfüllt. Zudem sei  $F$  konvex im zweiten Argument und  $F(z, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ . Seien  $P_1, P_2 \in K$  mit  $P_1 \neq P_2$  zwei verschiedene Punkte, so daß die Klasse  $\mathcal{C}(P_1, P_2, K)$  der zulässigen Kurven  $\gamma \in C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ , die  $P_1$  und  $P_2$  in  $K$  verbinden nichtleer ist.

Dann gibt es eine quasinormale Kurve  $\gamma \in \mathcal{C}(P_1, P_2, K)$ , die sowohl  $\mathcal{F}$ , als auch  $\mathcal{Q}$  in der Klasse  $\mathcal{C}$  minimiert, d.h.

$$\mathcal{F}(\gamma) = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \mathcal{Q}(\gamma) = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{Q}.$$

*Beweis.* Da  $\mathcal{C}$  nichtleer ist gibt es eine Minimalfolge  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  mit den Eigenschaften aus Lemma (B.1.12). Nach Lemma (B.1.14) gilt für den Grenzwert  $\gamma \in \mathcal{C}$

$$\inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \leq \mathcal{F}(\gamma) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\gamma_k) = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \quad \text{und} \\ \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{G} \leq \mathcal{G}(\gamma) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{G}(\gamma_k) = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{G}.$$

Anwendung von Lemma (B.1.11) ergibt

$$\mathcal{F}(\gamma) = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F} = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{G} = \mathcal{G}(\gamma),$$

und wir erhalten mit Lemma (B.1.8), daß  $\gamma$  quasinormal ist. Die Behauptung für  $\mathcal{Q}$  ergibt sich aus  $\mathcal{G} = \sqrt{2\mathcal{Q}}$ .  $\square$

Falls  $\gamma(\bar{I}) \subset K$  können wir in beliebige Richtungen variieren, und erhalten damit, daß  $\gamma$  schwaches LIPSCHITZ-Extremal von  $\mathcal{F}$  ist.

**(B.1.16) Proposition ( $\gamma$  ist schwaches LIPSCHITZ-Extremal von  $\mathcal{F}$ ).**

Seien  $F \in C^1(K \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  und  $\gamma \in \mathcal{C}$  ein quasinormaler Minimierer von  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{C}$  mit  $\gamma(\bar{I}) \subseteq \text{int } K$ . Dann ist  $\gamma$  schwaches LIPSCHITZ-Extremal von  $\mathcal{F}$ .

*Beweis.* Sei  $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ , dann betrachten wir die folgende einparametrische Familie von Kurven

$$\eta(t, \varepsilon) := \gamma(t) + \varepsilon\varphi(t), \quad t \in \bar{I} \text{ und } |\varepsilon| < \varepsilon_0.$$

Für genügend kleines  $\varepsilon_0$  und  $\delta > 0$  gilt für alle  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$

$$\eta(t, \varepsilon) \in K \text{ für } t \in \bar{I} \quad \text{und} \quad |\dot{\eta}(t, \varepsilon)| \geq \delta \text{ für fast alle } t \in \bar{I}.$$

Es ist also  $f(\varepsilon) := \mathcal{F}(\eta(\cdot, \varepsilon))$  in  $\varepsilon = 0$  differenzierbar und wegen  $f(\varepsilon) \geq f(0)$  für  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  gilt

$$f'(0) = \delta \mathcal{F}(\gamma, \varphi) = \int_0^1 [F_z(\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \varphi + F_p(\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \dot{\varphi}] dt = 0.$$

Damit ist  $\gamma$  schwaches LIPSCHITZ-Extremal von  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**(B.1.17) Definition (elliptische Linienelemente).**

Ein Paar  $\ell = (z, p)$  bestehend aus einem Punkt  $z \in \mathbb{R}^N$  und einem Richtungsvektor  $0 \neq p \in \mathbb{R}^N$  heißt *Linienelement* in  $\mathbb{R}^N$ .

Wir nennen ein Linienelement  $\ell = (z, p)$  *elliptisch*, wenn die Matrix

$$g_{ij}(z, p) := F_{p^i}(z, p)F_{p^j}(z, p) + F(z, p)F_{p^i p^j}(z, p)$$

strikt elliptisch ist, d.h.

$$g_{ij}(z, p)\xi^i \xi^j > 0 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ mit } \xi \neq 0.$$

**(B.1.18) Lemma.**

Für das Flächenfunktional rotationssymmetrischer Flächen (4.1.1) sind alle Linienelemente  $(z, p) \in G \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  elliptisch.

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} F(z, p) &= z_2(p_1^2 + p_2^2)^{1/2} \\ F_{p^i}(z, p) &= z_2 \frac{p_i}{(p_1^2 + p_2^2)^{1/2}} \\ F_{p^i p^k}(z, p) &= z_2 \frac{\delta_{ik}(p_1^2 + p_2^2) - p_i p_k}{(p_1^2 + p_2^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

so daß wegen  $z_2 > 0$  die Matrix

$$g(z, p) = \begin{bmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}$$

elliptisch ist. □

**(B.1.19) Bemerkung.**

Die genaue Bedeutung der Bedingung, daß alle Linienelemente elliptisch seien, in der folgenden Proposition soll uns nicht weiter interessieren. Sie stellt jedoch sicher, daß ein modifizierter kanonischer Formalismus für parametrische Variationsprobleme funktioniert (problematisch: wegen der EULER-Formel ist die HESSE-Matrix singulär) und insbesondere ist die zu  $Q(z, p)$  korrespondierende HAMILTON-Funktion  $\Phi(z, y)$  für  $y \neq 0$  von der Klasse  $C^2$  mit

$$Q(z, p) = \Phi(z, y) \quad \text{und} \quad p^i = \Phi_{y_i}(z, y).$$

Siehe [GH2, Chapter 8, 2.1, S.180–188] insbesondere Proposition 1.

**(B.1.20) Proposition.**

Seien  $F \in C^2(K \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}))$  und  $K$  wie in den Voraussetzungen (B.1.1) und (B.1.3), sowie alle Linienelemente  $(z, p) \in K \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  elliptisch. Weiter sei  $\gamma$  eine quasinormale Kurve in  $K$ , die schwaches LIPSCHITZ-Extremal von  $\mathcal{F}$  ist.

Dann ist  $\gamma$  ein Extremal von  $\mathcal{F}$ , d.h.  $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$  mit  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  für  $t \in I$  und

$$\frac{d}{dt} F_p(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - F_z(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0.$$

*Beweis.* Wegen der Quasinormalität gibt es eine Konstante  $c > 0$ , so daß  $F(\gamma, \dot{\gamma}) = c$  fast überall und damit nach Voraussetzung (B.1.1)

$$0 < \frac{c}{m_2} < |\dot{\gamma}(t)| < \frac{c}{m_1} \quad \text{fast überall auf } I.$$

Nach der DUBOIS-REYMOND-Gleichung für schwache LIPSCHITZ-Extremale (siehe z.B. [GH1, Chapter 1, 3.1, Proposition 1, S.41]) gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{R}^N$ , so daß für fast alle  $t \in I$  gilt

$$F_p(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \lambda + \int_0^t F_z(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \, ds. \quad (\text{B.7})$$

Durch Multiplikation mit  $c$  und  $Q = \frac{1}{2}F^2$  ergibt sich für fast alle  $t \in I$

$$\begin{aligned} Q_p(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) &= F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) F_p(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \\ &= c F_p(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \\ &= c \lambda + \int_0^t c F_z(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \, ds \\ &= c \lambda + \int_0^t Q_z(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \, ds. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Nun führen wir die zu  $Q(z, p)$  korrespondierende HAMILTON-Funktion  $\Phi(z, y)$  ein, welche für  $y \neq 0$  von der Klasse  $C^2$  ist. Für den Impuls  $y(t) = Q_p(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$  erhalten wir dann die Gleichung

$$y(t) = \lambda c - \int_0^t \Phi_z(\gamma(s), y(s)) ds \quad \text{für fast alle } t \in I. \quad (\text{B.9})$$

Aus (B.8) ersieht man mit  $F_z(\gamma(\cdot), \dot{\gamma}(\cdot)) \in L^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ , daß  $y \in C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ . Damit ist  $\Phi(\gamma(t), y(t))$  stetig auf  $I$  und aus (B.9) folgt sogar  $y \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ , so daß wegen

$$\dot{\gamma}(t) = \Phi_y(\gamma(t), y(t)) \quad \text{fast überall auf } I$$

die Gleichheit, wegen der Stetigkeit der rechten Seite auf ganz  $I$  gilt, und damit  $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ . Da wir nun, wegen  $\Phi$  von der Klasse  $C^2$  sogar wissen, daß die rechte Seite in  $C^1$  ist, gilt  $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$ .

Die EULER-LAGRANGE-Gleichung erhält man nun durch Differenzieren von (B.7).  $\square$

## B.2 Anhang I

Hier stellen wir einige Ergebnisse zusammen, die wir im Beweis von Lemma (B.1.10) benötigen.

### (B.2.1) Lemma (Umkehrregel).

Seien  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige, injektive reelle Funktion. Dann gilt für  $x \in (a, b)$  beliebig

$$f \text{ ist in } x \text{ differenzierbar} \quad \Rightarrow \quad f^{-1} \text{ ist in } f(x) \text{ differenzierbar}$$

mit

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}.$$

*Beweis.* Es gilt für  $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{\frac{h}{f(x+h) - f(x)}} = \frac{1}{\frac{f^{-1}(f(x+h)) - f^{-1}(f(x))}{f(x+h) - f(x)}} \\ &\stackrel{t=f(x+h)-f(x)}{=} \frac{1}{\frac{f^{-1}(f(x)+t) - f^{-1}(f(x))}{t}}, \end{aligned}$$

so daß wegen der Stetigkeit von  $f$  mit  $h \rightarrow 0$  auch  $t(h) \rightarrow 0$  und damit

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(f(x)+t) - f^{-1}(f(x))}{t}} = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}.$$

$\square$

### (B.2.2) Lemma (Komplemente von Nullmengen sind dicht).

Seien  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  eine offene Menge und  $N \subseteq M$  eine LEBESGUE-Nullmenge. Dann ist  $M \setminus N$  dicht in  $M$ .

*Beweis.* Falls  $M = \emptyset$  gilt, ist die Aussage klar. Sei also  $M \neq \emptyset$ . Wir wissen, daß jede Kugel in  $\mathbb{R}^N$  echt positives LEBESGUE-Maß hat. Das heißt für  $x \in M$  und  $\varepsilon > 0$  gilt

$$B_\varepsilon(x) \cap (M \setminus N) \neq \emptyset.$$

Somit enthält jede Umgebung von  $x$  in  $M$  einen Punkt aus  $M \setminus N$ . □

**(B.2.3) Lemma.**

Seien  $-\infty < a < b < \infty$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine LIPSCHITZ-stetige, injektive Funktion mit

$$0 < c \leq f'(x) \quad \text{fast überall auf } [a, b].$$

Dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  ebenfalls LIPSCHITZ-stetig.

*Beweis.* Es gilt also bis auf eine Nullmenge  $N \subseteq (a, b)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \geq c.$$

Damit gibt es für alle  $x \in D := (a, b) \setminus N$  eine offene Umgebung  $U(x) \subseteq (a, b)$  mit

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geq \frac{c}{2} \quad \text{für alle } x' \in U(x).$$

Nach Lemma (B.2.2) ist  $D$  dicht in  $(a, b)$ , so daß

$$(a, b) = \bigcup_{x \in D} U(x),$$

das heißt

$$\begin{aligned} & \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geq \frac{c}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{c} |f(x') - f(x)| \geq |x' - x| && \text{für alle } x, x' \in (a, b) \text{ mit } x \neq x' \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{c} |y' - y| \geq |f^{-1}(y') - f^{-1}(y)| && \text{für alle } y, y' \in f((a, b)) \text{ mit } y \neq y'. \end{aligned}$$

Nach dem Satz über das Abbildungsverhalten stetiger, streng monotoner reeller Funktionen ist  $f^{-1}$  ebenfalls stetig und  $f((a, b))$  ein Intervall, so daß

$$\frac{2}{c} |y' - y| \geq |f^{-1}(y') - f^{-1}(y)| \quad \text{für alle } y, y' \in f([a, b]) \text{ mit } y \neq y'.$$

□

### B.3 Anhang II: Monotone reelle Funktionen

Wir wollen hier einige Aussagen, welche aus den reellen Funktionen wohlbekannt sind, entwickeln, die wir im Beweis von Lemma (B.1.10) benötigen. Die Bezeichnungen, Lemmata und Sätze sind mit Ausnahme von Korollar (B.3.5) aus [N].



**(B.3.1) Bezeichnungen.**

Seien  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion. Wir bezeichnen den linksseitigen bzw. rechtsseitigen Grenzwert mit

$$f(x_0 - 0) := \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$$

$$f(x_0 + 0) := \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$

**(B.3.2) Lemma.**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend sowie  $m \in \mathbb{N}$ , dann gilt für jede Wahl  $x_1, \dots, x_m \in (a, b)$

$$[f(a + 0) - f(a)] + \sum_{k=1}^m [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] + [f(b) - f(b - 0)] \leq f(b) - f(a).$$

*Beweis.* Wir können ohne Einschränkung (durch Ummummern, bzw. Streichen der doppelten Einträge und entsprechendem Anpassen von  $m$ , die zusätzlichen Einträge vergrößern die Summe nur) annehmen, daß

$$a < x_1 < \dots < x_m < b.$$

Setze nun  $x_0 := a$ ,  $x_{m+1} := b$  und wähle Punkte  $y_0, \dots, y_m$  mit  $x_k < y_k < x_{k+1}$  für  $k = 0, \dots, m$ . Wegen der Monotonie von  $f$  gilt dann

$$\begin{aligned} f(a + 0) - f(a) &\leq f(y_0) - f(a) \\ f(x_k + 0) - f(x_k - 0) &\leq f(y_k) - f(y_{k-1}), \quad k = 1, \dots, m \\ f(b) - f(b - 0) &\leq f(b) - f(y_m). \end{aligned}$$

Durch Summieren der Ungleichungen (Teleskopsumme) ergibt sich die Behauptung.  $\square$

**(B.3.3) Lemma.**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend sowie  $\varepsilon > 0$ . Dann kann  $f$  höchstens endlich viele Sprungstellen haben, deren Sprung größer als  $\varepsilon$  ist.

*Beweis.* Sind  $x_1, \dots, x_m$  Unstetigkeitsstellen von  $f$  mit einem Sprung größer als  $\varepsilon$ , so gilt mit Lemma (B.3.2)

$$m\varepsilon \leq f(b) - f(a),$$

so daß nach dem ARCHIMEDISCHEN-Axiom  $m$  nicht beliebig groß sein kann.  $\square$

**(B.3.4) Satz.**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend. Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f$  höchstens abzählbar. Sind  $x_1, \dots$  alle inneren Unstetigkeitsstellen, so gilt

$$\begin{aligned} [f(a + 0) - f(a)] + \sum_{k=1}^m [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] + [f(b) - f(b - 0)] &\leq f(b) - f(a) \quad \text{bzw} \\ [f(a + 0) - f(a)] + \sum_{k=1}^{\infty} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] + [f(b) - f(b - 0)] &\leq f(b) - f(a). \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $H$  die Menge aller Unstetigkeitsstellen von  $f$  und  $H_k$  die Menge der Unstetigkeitsstellen mit Sprung größer als  $\frac{1}{k}$ . Nach Lemma (B.3.3) sind die Mengen  $H_k$  endlich, so daß  $H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k$  höchstens abzählbar ist. Im Falle endlich vieler Unstetigkeitsstellen erhält man die Ungleichung direkt aus Lemma (B.3.2) und im Falle abzählbar unendlich vieler Unstetigkeitsstellen unmittelbar durch Grenzübergang.  $\square$

**(B.3.5) Korollar.**

Seien  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend. Dann gibt es höchstens abzählbar viele (maximale) Intervalle, auf denen  $f$  konstant ist.

*Beweis.* Seien  $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{I}}$  die (maximalen) Intervalle auf denen  $f$  konstant ist,  $\mathcal{I}$  eine Indexmenge sowie  $M := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} I_\alpha$ .

Definiere

$$\bar{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \max \left\{ f(a), \sup_{\bar{x} \in M, \bar{x} \leq x} f(\bar{x}) \right\}.$$

Die Abbildung  $\bar{f}$  ist wohldefiniert (wenn man  $\sup_{\emptyset} f := -\infty$  setzt), da aus  $\bar{x} \leq x$  mit der Monotonie  $f(\bar{x}) \leq f(x)$  folgt, und das Supremum daher, falls  $M$  nichtleer ist, wegen der DEDEKIND-Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  existiert. Weiterhin ist  $\bar{f}$  monoton wachsend, stückweise konstant (dabei sind isolierte Punkte zugelassen) und besitzt damit wegen  $\bar{f}(x) = f(x)$  falls  $x \in M$  mindestens soviele Unstetigkeitsstellen wie  $f$  (maximale) Intervalle besitzt auf denen es konstant ist. Mit Satz (B.3.4) kann die Anzahl dieser Intervalle höchstens abzählbar sein.  $\square$

# Anhang C

## Der Hauptsatz über symmetrische Polynome

In diesem Kapitel wollen kurz den in der Einleitung erwähnten Hauptsatz über symmetrische Polynome vorstellen, dafür sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins.

**(C.1.1) Definition (Symmetrische und elementarsymmetrische Polynome).**

Die symmetrische Gruppe  $S_n$  operiert kanonisch auf dem Polynomring  $R[X_1, \dots, X_n]$  durch

$$S_n \times R[X_1, \dots, X_n] \rightarrow R[X_1, \dots, X_n], (f, \sigma) \mapsto \sigma f = f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

Die Invarianten dieser Operation

$$\sigma f = f \quad \text{für alle } \sigma \in S_n$$

heißen *symmetrische Polynome* und die Menge aller symmetrischen Polynome in  $R[X_1, \dots, X_n]$  bezeichnen wir mit  $\text{Sym}_R[X_1, \dots, X_n]$ . Die *elementarsymmetrischen Polynome*  $s_k(n)$  definieren wir durch

$$s_k(n) := \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \#S=k}} \prod_{i \in S} X_i.$$

Nun kommen wir auch schon zum in der Kapitelüberschrift angekündigten

**(C.1.2) Satz (Hauptsatz über symmetrische Polynome).**

Sei  $f \in R[X_1, \dots, X_n]$  ein symmetrisches Polynom, dann gibt es ein  $g \in R[X_1, \dots, X_n]$ , so daß

$$f = g(s_1(n), \dots, s_n(n)).$$

*Beweis.* Auf  $\mathbb{N}_0^n$  bildet die lexikographische Ordnung

$$(a_1, \dots, a_n) \leq_{\text{lex}} (b_1, \dots, b_n) :\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}_0 : a_j = b_j \forall j \leq i \text{ und } a_i \leq b_i,$$

eine Totalordnung. Sei  $f \in R[X_1, \dots, X_n]$ , dann läßt sich  $f$  darstellen als endliche Summe monomialer Summanden  $a(\alpha)X^\alpha$  mit nichtverschwindendem  $a(\alpha)$ . Daher gibt es einen

Summanden dessen Gewicht  $\alpha'$  maximal (verglichen mit den anderen) bezüglich der lexikographischen Ordnung ist. Da  $f$  symmetrisch ist, bedeutet dies  $\alpha'_1 \geq \dots \geq \alpha'_n$ . Nun betrachten wir die Differenz

$$f_1 := f - a(\alpha') \prod_{i=1}^n s_i(n)^{\alpha'_i - \alpha'_{i+1}} \quad \text{mit } \alpha'_{n+1} := 0.$$

Dabei gilt für alle Gewichte  $\alpha$  der monomialen Summanden von  $f_1$  die echte Ungleichung  $\alpha <_{\text{lex}} \alpha'$  (d.h.  $\alpha \leq_{\text{lex}} \alpha'$  und  $\alpha \neq \alpha'$ ), denn das in  $s_i(n)$  lexikographisch maximale Monom ist

$$\prod_{j=1}^i X_j,$$

so daß der lexikographisch größte monomiale Summand in  $\prod_{i=1}^n s_i(n)^{\alpha'_i - \alpha'_{i+1}}$  gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^i X_j \right)^{\alpha'_j - \alpha'_{j+1}} &= \prod_{i=1}^n X_i^{\sum_{j=i}^n (\alpha'_j - \alpha'_{j+1})} \\ &= \prod_{i=1}^n X_i^{\alpha'_i}. \end{aligned}$$

Dadurch hebt sich der (maximale) Summand mit Gewicht  $\alpha'$  in  $f - a(\alpha') \prod_{i=1}^n s_i(n)^{\alpha'_i - \alpha'_{i+1}}$  einfach weg. Nun könne wir die Konstruktion so lange wiederholen, bis wir irgendwann das Nullpolynom erhalten. Der Prozeß terminiert, da die Gewichte stets echt kleiner werden, ein kleinstes Element  $(0, \dots, 0)$  in  $\mathbb{N}_0^n$  existiert und es nur endlich viele Gewichte kleiner einem festen  $\alpha$  gibt. Damit haben wir die behauptete Darstellung gezeigt.  $\square$

### (C.1.3) Bemerkung.

Häufig wird der Hauptsatz auch in folgender Version (die noch zusätzliche Informationen, wie etwa Eindeutigkeit, beinhaltet) formuliert:

Die Abbildung

$$R[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \text{Sym}_R[X_1, \dots, X_n], \quad g \mapsto g(s_1(n), \dots, s_n(n))$$

ist ein Isomorphismus.

### (C.1.4) Beispiel.

Seien  $R = \mathbb{R}$  und  $n = 2$ . Die elementarsymmetrischen Polynome sind dann gegeben durch

$$s_1(2) = X_1 + X_2, \quad \text{und} \quad s_2(2) = X_1 X_2.$$

Dann gibt es nach dem Hauptsatz über symmetrische Polynome (C.1.2) zu  $\hat{\Phi} \in \text{Sym}_{\mathbb{R}}[\kappa_1, \kappa_2]$  ein  $\tilde{\Phi} \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ , so daß gilt

$$\hat{\Phi}(\kappa_1, \kappa_2) = \tilde{\Phi}(\kappa_1 + \kappa_2, \kappa_1 \kappa_2).$$

Wenn wir nun noch die Koeffizienten anpassen, können wir natürlich auch erreichen, daß für ein  $\Phi \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$  gilt

$$\hat{\Phi}(\kappa_1, \kappa_2) = \Phi \left( \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \kappa_1 \kappa_2 \right).$$

# Literaturverzeichnis

- [A] Alt, H.W., *Lineare Funktionalanalysis*, 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2006.
- [B] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A., Musiol, G., Mühlig, H., *Taschenbuch der Mathematik*, 5. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main 2000.
- [B,D'Ac,F] Bergner, M., Dall'Acqua, A., Fröhlich, S., Symmetric Willmore surfaces of revolution satisfying natural boundary conditions, eingereicht bei *Calculus of Variations* **4** (2009).
- [Bl] Blaschke, W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie III*, Verlag von Julius Springer, Berlin 1929.
- [BG] Bryant, R., Griffiths, P., Reduction for Constrained Variational Problems and  $\int \frac{\kappa^2}{2} ds$ , *Amer. J. Math.* **108** (1986), 525–570.
- [BGN] Barrett, J.W., Garcke, H., Nürnberg, R., Parametric Approximation of Willmore Flow and Related Geometric Evolution Equations, *SIAM Journal on Scientific Computing* **31** (2008), 225–253.
- [C] Canham, P.B., The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell, *J. Theor. Biol.* **26** (1970), 61–81.
- [D'Ac,D,G] Dall'Acqua, A., Deckelnick, K., Grunau, H.-Ch., Classical solutions to the Dirichlet problem for Willmore surfaces of revolution, *Adv. Calc. Var.* **1** (2008), 379–397.
- [D'Ac,F,G,S] Dall'Acqua, A., Fröhlich, S., Grunau, H.-Ch., Schiweck, F., Symmetric Willmore surfaces of revolution satisfying arbitrary Dirichlet boundary data, Preprint (2008).
- [D] Davis, P.J., *Interpolation and Approximation*, Dover, New York 1975.
- [DG] Deckelnick, K., Grunau, H.-Ch., A Navier boundary value problem for Willmore surfaces of revolution, Preprint (2009), to appear in *Analysis*.
- [E] Euler, L., *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*, Marcum-Michaellem Bousquet et Socios, Genf Lausanne 1744.

- [Ev1] Evans, E., Bending Resistance and Chemically Induced Moments in Membrane Bilayers, *Biophys. J.* **14** (1974), 923–931.
- [Ev2] Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics **19**, American Mathematical Society, Providence Rhode Island 2002.
- [G] Germain, S., *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*, Paris 1821.
- [Goe] Goetz, R., *Monte-Carlo-Simulation einer Überstruktur auf Lipidmembranen*, Diplomarbeit, FU Berlin, Fachbereich Physik 1993.
- [GH1] Giaquinta, M., Hildebrandt, S., *Calculus of Variations I*, Grundlehren der math. Wissenschaften **310**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1996.
- [GH2] Giaquinta, M., Hildebrandt, S., *Calculus of Variations II*, Grundlehren der math. Wissenschaften **311**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1996.
- [GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Grundlehren der math. Wissenschaften **224**, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1983.
- [H] Helfrich, W., Elastic properties of lipid bilayers: theory and possible experiments, *Z. Naturforsch. C* **28** (1973), 693–703.
- [HSK] Hsu, L., Kusner, R., Sullivan, J., Minimizing the squared mean curvature integral for surfaces in space forms, *Experiment. Math.* **1** (1992), 191–207.
- [J] Johnson, W.P., The Curious History of Fa? di Bruno's Formula, *Amer. Math. Monthly* **109** (2002), 217–234.
- [K] Kühnel, W., *Differential Geometry*, 2. Auflage, American Mathematical Society, Providence 2006.
- [L] Lee, J.M., *Riemannian Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **176**, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg 1997.
- [LS1] Langer, J., Singer, D., On the total squared curvature of closed curves, *J. Diff. Geom* **20** (1984), 1–22.
- [LS2] Langer, J., Singer, D., Curves in the Hyperbolic Plane and mean Curvature of Tori in 3-Space, *Bull. London Math. Soc.* **16** (1984), 531–534.
- [N] Natanson, I.P., *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*, 2. Auflage, Akademie-Verlag, Berlin 1961.
- [Nit1] Nitsche, J.C.C., Boundary value problems for variational integrals involving surface curvatures, *Quarterly Appl. Math.* **51** (1993), 363–387.

- [Nit2] Nitsche, J.C.C., Periodic surfaces which are extremal for energy functionals containing curvature functions, In: *Statistical thermodynamics and differential geometry of microstructured materials*, H.T. Davis, J.C.C. Nitsche (Ed.), IMA Volumes in Mathematics and its Applications **51**, Springer (1993), 69–98.
- [Nit3] Nitsche, J.C.C., Variationsprobleme, welche die Flächenkrümmung enthalten, und die zugehörigen Randwertaufgaben, *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft* (1992), 13–40.
- [P] Palais, R.S., The principle of symmetric criticality, *Communications in Mathematical Physics* **69** (1979), 19–30.
- [Po] Poisson, S.D., Mémoire sur les surfaces élastiques, *Mém. Cl. Sci. Mathém. Phys. Inst. de France*, 2nd. pt. (1812), 167–225.
- [PR] Peletier, M. A., Røger, M., Partial Localization, Lipid Bilayers, and the Elastica Functional, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, online first (2008).
- [PS] Pinkall, U., Sterling, I., Willmore surfaces, *Math. Intelligencer* **9** (1987), 38–43.
- [Rom] Roman, S., The Formula of Faa di Bruno, *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), 805–809.
- [S] Simon, L., Existence of surfaces minimizing the Willmore functional, *Comm. Anal. Geom.* **1** (1993), 281–326.
- [ST] Shiohama, K., Takagi, R., A characterization of a standard torus in  $E^3$ , *J. Differential Geometry* **4** (1970), 477–485.
- [T] Truesdell, C., The influence of elasticity on analysis: The classic heritage, *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.* **9** (1983), 293–310.
- [Th] Thomsen, G., Über konforme Geometrie 1: Grundlagen der konformen Flächentheorie, *Abh. Math. Sem. Hamburg* **3** (1924), 31–56.
- [TS] Tu, Z.C., Seifert, U., Concise theory of chiral lipid membranes, *Phys. Rev. E*, **76** (2007), 031603.
- [vdM] von der Mosel, H., *Variationsrechnung I*, Skript, 2007, <http://www.instmath.rwth-aachen.de/~heiko/VARI/VarI1-38.pdf>.
- [Wi1] Willmore, T.J., Note on embedded surfaces, *An. Şti. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Sect. I a Mat. (N.S.)* **11B** (1965), 493–496.
- [Wi2] Willmore, T.J., Mean Curvature of Riemannian Immersions, *J. Lond. Math. Soc.* **3** (1971), 307–310.
- [Y] Yosida, K., *Functional Analysis*, Grundlehren der math. Wissenschaften **123**, 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1980.

# Index

- $[\cdot]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$ , 8
- $\leq_{\text{lex}}$ , 127
- $\mathcal{A}$ , 21
- $a$ , 9
- Abbildung
  - WEINGARTEN, 72
- Ableitung
  - klassische, 8
  - kovariante, 12
  - schwache, 7
- $|A|$ , 7
- $\alpha$ , 9
- ARCHIMEDISCHES-Axiom, 125
- $\beta$ , 9
- Bogenlängenfunktion, 13
- Bogenlängenparametrisierung, 13
- $\mathcal{C}$ , 21
- $\mathcal{C}(P_1, P_2, K)$ , 113
- $C(\mathbf{b}, \mathbf{c}, H_0, a, \beta)$ , 42
- CHRISTOFFEL-Symbole, 12
  - von  $\mathbb{H}^2$ , 16
- $C_0^k(\Omega)$ , 8
- $C_c^k(\Omega)$ , 8
- $C^{k,\gamma}(\Omega)$ , 8
- $C^k(\Omega)$ , 8
- $C^k(\bar{\Omega})$ , 8
- $C(\Omega)$ , 8
- $C(\bar{\Omega})$ , 8
- $C^\infty(\Omega)$ , 8
- $C^\infty(\bar{\Omega})$ , 8
- $dS$ , 11
- $D^\alpha u$ , 8
- $\partial^\alpha u$ , 7
- DUBOIS-REYMOND-Gleichung, 122
- Elastica, 19
- Elastica-Funktional, 19
- elastische Energie, 1
- elastische Kurve, 19
- elastisches Katenoid, 1
- Ellipse
  - TODHUNTER, 25
- $\mathbb{E}^n$ , 15
- EUKLIDISCHE Geometrie, 15
- EUKLIDISCHER Raum,  $n$ -dimensionaler, 15
- EULER-LAGRANGE-Gleichung
  - Flächenfunktional, 26, 28
  - NITSCHKE-Funktional, 51
  - WILLMORE-Funktional, 51
- Existenzsatz
  - NITSCHKE-Funktional, 56
  - quasinormale Minimierer, 120
  - WILLMORE-Funktional, 56
- $\mathcal{F}$ , 42
- $\mathcal{F}$ , 111
- FAÀ DI BRUNO
  - Formel von, 69
- $\mathcal{F}_{\gamma, H_0}^{a,\alpha,\beta}$ , 42
- Flächenelement, 11
- Flächenfunktional, 1, 21
  - EULER-LAGRANGE-Gleichung, 26, 28
  - Stetigkeit von, 45
- Formel
  - FAÀ DI BRUNO, 69
- Fortsetzungssatz
  - für gleichmäßig stetige Abbildungen, 68
- Fundamentalform
  - erste, einer Rotationsfläche, 11
  - zweite, einer Rotationsfläche, 11
- Fundamentallemma der Variationsrechnung, 56
- Funktional
  - Elastica, 19
  - Flächenfunktional, 1, 21



- HELFRICH, 1  
 NITSCHKE, 2, 41  
 WILLMORE, 1, 71
- $\mathcal{G}$ , 111  
 $\gamma$ , 42  
 GAUSS-Krümmung  
   einer Rotationsfläche, 11  
 Geodäte, 12  
   Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten, 12  
   in  $\mathbb{H}^2$ , 18  
 geodätische Krümmung, 13  
   von Graphen in  $\mathbb{E}^2$ , 15  
   von Graphen in  $\mathbb{H}^2$ , 16  
   von Nichtbogenlängenparametrisierungen, 14  
 Geometrie  
   EUKLIDISCHE, 15  
   HYPERBOLISCHE, 15  
   RIEMANNSCHE, 12  
 gerade Funktion, 9  
 GOLDSCHMIDT-Kurve, 22
- HÖLDER-Halbnorm, 8  
 HÖLDER-Raum, 8  
 HÖLDERSTETIGKEIT, 8  
 HAMILTON-Funktion, 123  
 HELFRICH-Funktional, 1  
 HERMITE-Interpolation, 48  
 $\mathbb{H}_R^n$ , 16  
 hyperbolische Geometrie, 15  
 hyperbolische Krümmung  
   von Kreisen, 82  
 hyperbolischer Raum  
    $n$ -dimensionaler, mit Radius  $R$ , 16  
   CHRISTOFFEL-Symbole von  $\mathbb{H}^2$ , 16
- $I$ , 9  
 Integral bzgl. Bogenlänge, 13  
   Reparametrisierungsinvarianz, 13
- $\kappa_e$ , 15  
 $\kappa_h$ , 18  
 Katenoid  
   elastisches, 1  
 Katenoide, 27  
 Kettenregel  
   für  $W^{k,\infty}$ , 68
- Klebelemma, 81  
 kompakten Träger in  $\Omega$ , 8  
 kovariante Ableitung, 12  
 Krümmung  
   geodätische, 13  
   hyperbolische, vorzeichenbehaftete, 18  
 kritischer Punkt, 8  
 $\text{Krit}(u)$ , 8  
 Kurve, 12  
   elastische, 19  
   Geodäte, 12  
   Kurvensegment, 12  
   Länge, 13  
   quasinormale, 112  
   reguläre, 12  
   Reparametrisierung, 12  
   zulässige, 12
- L  
    $\mathcal{L}$ , 13  
 $\mathcal{L}$ , 21, 111  
 Längenfunktional, 21  
   für Kurven in RIEMANNSCHEM Mannigfaltigkeit, 13  
 LEBESGUE-Maß, 7  
 LEBESGUE-Raum, 7  
 lexikographische Ordnung, 127  
 Linienelement  
   elliptisches, 121  
 $Lip_u$ , 9  
 Lipid-Doppelschicht, 1  
 LIPSCHITZ-Konstante, 9  
 LIPSCHITZSTETIGKEIT, 8  
 $\mathcal{L}^n(A)$ , 7  
 $L^p(\Omega)$ , 7
- Mannigfaltigkeit  
   glatte, 11  
   RIEMANNSCHE, 12  
 Metrik  
   RIEMANNSCHE, 12  
 Minimalfläche  
   rotationssymmetrische  
   Klassifikation von, 29  
 Minimierer  
   nichttriviale, 85  
   triviale, 83  
 mittlere Krümmung  
   einer Rotationsfläche, 11

- Modellierung, 1
- $\mathbb{N}$ , 7
- $\mathbb{N}_0$ , 7
- $N_\alpha(\bar{I})$ , 9
- $N_{\alpha,\beta}(\bar{I})$ , 9
- nichttriviale Minimierer, 85
- NITSCHKE-Funktional, 2, 41
- EULER-LAGRANGE-Gleichung, 51
  - Existenz klassischer Minimierer, 96
  - Existenzsatz, 56
  - nichttrivialer Minimierer, 85
  - Regularitätssatz, 61
  - Skalierungsverhalten, 43
  - Stetigkeit von, 45
  - triviale Minimierer, 83
- $\|\cdot\|_{C^k(\bar{\Omega})}$ , 8
- $\|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})}$ , 9
- $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ , 7
- $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ , 8
- Parameterinvarianz
- parametrischer Variationsprobleme, 112
- Parameterwechsel, 12
- orientierungserhaltender, 12, 112
- parametrisches Variationsproblem, 111
- Eigenschaften von, 112
  - Parameterinvarianz, 112
- POINCARÉ Halbraum-Modell, 15
- Polynom
- elementarsymmetrisches, 127
  - symmetrisches, 127
- $\mathcal{Q}$ , 111
- quasinormale Kurve, 112
- $\mathbb{R}$ , 7
- $r$ , 23
- $\mathbb{R}_+$ , 7
- $\mathbb{R}_+^*$ , 7
- Regel
- von BERNOULLI-L'HOSPITAL mit Konvergenzrichtung, 108
- Regularitätssatz, 61
- Reparametrisierung, 12
- Reparametrisierungsinvarianz
- des Integrals bzgl. Bogenlänge, 13
  - parametrischer Variationsprobleme, 112
- $\rho$ , 23
- riemannsche Geometrie
- RIEMANNsche Geometrie, 12
- RIEMANNsche Mannigfaltigkeit, 12
- RIEMANNsche Metrik, 12
- Rotationsfläche, 11
- erste Fundamentalform, 11
  - GAUSS-Krümmung, 11
  - mittlere Krümmung, 11
  - zweite Fundamentalform, 11
- rotationssymmetrische Minimalfläche
- Klassifikation, 29
- Satz
- Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten, 12
  - Existenz von Bogenlängenparametrisierungen, 13
  - Hauptsatz
    - über symmetrische Polynome, 127
    - von ARZELÀ-ASCOLI, 117
- Schranken
- $W^{2,2}$  an Minimalfolge, 57
- SOBOLEV-Raum, 7
- Spline, 50
- $\text{supp } u$ , 8
- $\text{supp } u \subset\subset \Omega$ , 8
- symmetrische Funktion, 9
- Tangentialbündel, 11
- Tensid-Film, 1
- TODHUNTER-Ellipse, 25
- Träger
- einer Funktion, 8
  - kompakter, 8
- triviale Minimierer, 83
- $\dot{u}$ , 7
- $u'$ , 7
- ungerade Funktion, 9
- Variationsproblem
- parametrisches, 111
- Vektorfeld
- entlang einer Kurve, 12
- Vorwärtsreparametrisierung, 12
- $W^{2,2}$ -Schranken, 57
- $W_\alpha(I)$ , 9
- $W_{\alpha,\beta}(I)$ , 9
- WEINGARTENabbildung, 72

- $\hat{W}$ , 71
- $W(I)$ , 9
- WILLMORE-Funktional, 1, 71
  - a-priori Schranken an Minimalfolge, 80
  - als Elastica-Funktional in  $\mathbb{H}^2$ , 19
  - EULER-LAGRANGE-Gleichung, 51
  - Existenz klassischer Minimierer, 81
  - Existenzsatz, 56
  - Geschichte von, 71
  - Regularitätssatz, 61
  - Skalierungsverhalten, 43
  - Stetigkeit von, 45
- WILLMORE-Vermutung, 71
- $W^{k,p}(\Omega)$ , 7
- Zahl
  - natürliche, 7
  - reelle, 7
- Zusammenhang
  - LEVI-CIVITA, 12
  - linearer, 11
  - RIEMANNscher, 12
- Zylinder, 83



# Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfaßt habe.

Aachen, den 7. September 2009      Sebastian Scholtes