Statistik Workshop

Mini-Einführung und Auffrischung zu einigen Teilen der angewandten Statistik

12. und 14. Januar 2015

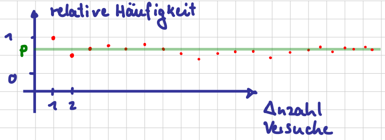
Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Outline

Statistik: Table of Contents

3 Wahrscheinlichkeitstheorie

- Kombinatorik
- Zufall und Wahrscheinlichkeit
- Zufallsvariablen und Verteilungen
- Verteilungsparameter



relative Häufigkeit
1
p
0
1
2
Anzahl
Versuche

Kombinatorik: Anzahl von Kombinationen bei Auswahl

2-mal Würfeln, das heißt Auswahl von $k = 2$ aus $n = 6$ Zahlen.

$\rightarrow$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- mit WH, mit RF: alle Möglichkeiten, $6^2 = 36$
- ohne WH, mit RF: Diagonale entfällt, $36 - 6 = 30 = 6 \cdot 5 = \dfrac{6!}{(6-2)!}$
- ohne WH, ohne RF: Hälfte des letzten Ergebnisses: $\frac{30}{2} = 15 = \frac{6!}{4!2!} = \binom{6}{2}$
- mit WH, ohne RF: Letztes Ergebnis plus Diagonale, $15 + 6 = 21 = \binom{7}{2}$

Auswahl von k aus n Dingen		
	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
mit Reihenfolge	n^k	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$
ohne Reihenfolge	$\dbinom{n+k-1}{k}$	$\dbinom{n}{k}$

Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

- Zufallsvorgang: Geschehen mit ungewissem Ausgang, z.B. Münzwurf
- Elementarereignis ω: Ein möglicher Ausgang, z.B. „ Kopf “ Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus („ Kopf “ oder „ Zahl “)!
- Ergebnismenge Ω: Menge aller ω
- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\Omega: \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \cdots & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \Omega = \{(x_1, x_2) : \ x_1, x_2 \in \{1, \ldots, 6\}\}$$

- Ereignis A: Folgeerscheinung eines Elementarereignisses
- Formal:

$$A \subset \Omega$$

- Ereignisse schließen sich nicht gegenseitig aus!
- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

Ereignis	verbal	formal
A	Augensumme $= 4$	$\{(1{,}3),\ (2{,}2),\ (3{,}1)\}$
B	Erste Zahl $= 2$	$\{(2{,}1),\ (2{,}2),\ \ldots,\ (2{,}6)\}$

- Wahrscheinlichkeit $P(A)$: Chance für das Eintreten von A
- Laplace-Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}$$

Laplace Wahrscheinlichkeit und Urnenmodell

- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\text{Augensumme} = 4: \quad A = \{(1,3),\ (2,2),\ (3,1)\}$$

$$|\Omega| = 36, \quad |A| = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}083$$

- Urnenmodell: Ziehe n Objekte aus einer Menge mit N Objekten
  Anzahl Möglichkeiten:

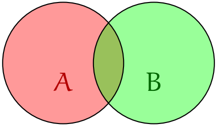
$$\begin{aligned} &\text{mit Zurücklegen:} && N^n \\ &\text{ohne Zurücklegen:} && N \cdot (N-1) \cdots (N-(n-1)) = \frac{N!}{(N-n)!} \end{aligned}$$

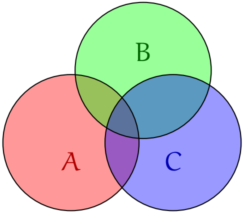
- **Beispiel:**
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem gut gemischten 32-er Kartenblatt bei viermaligem Ziehen vier Asse zu bekommen?
  a) Ziehen mit Zurücklegen,
  b) Ziehen ohne Zurücklegen

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

- Wichtige Rechenregeln:

1. $P(A) \leqq 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqq P(B)$
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
5. $P(A \cup B) =$
   $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

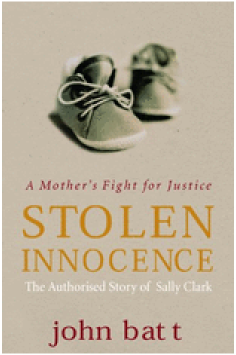




- **Beispiel:**

$$P(\text{„Augenzahl} \leqq 5\text{“}) = 1 - P(\text{„Augenzahl} = 6\text{“}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Der Fall Sally Clark



- Sally Clarks Söhne Christopher und Harry sterben 1996 und 1997 beide kurz nach der Geburt an plötzlichem Kindstod.
- Kinderarzt: „Wahrscheinlich Mord, da 2 maliger plötzlicher Kindstod sehr unwahrscheinlich!“ (ohne konkrete Hinweise)
- Gerichtliche Untersuchung
- Hauptargument der Anklage gestützt durch Gerichtsgutachter Sir Roy Meadow (renommierter Facharzt für Kinderheilkunde): Wahrscheinlichkeit für plötzlichen Kindstod ist 1:8500, d.h. Wahrscheinlichkeit für 2 maliges Auftreten in einer Familie

$$p = \left(\frac{1}{8500}\right)^2 \approx 1 : 72\,000\,000$$

- Urteil: Doppelmord; Strafe: 2 mal lebenslang; Inhaftierung von Sally Clark 1999

Beispiel Gegenereignis

Der Fall Sally Clark


Gene find casts doubt on double 'cot death' murders

An expert said there was a one in 73 million chance Sally Clark's babies died naturally – and a jury agreed. Now new genetic research could help to clear her. John Sweeney and Bill Law investigate

- Problem: Es gibt sehr viele Familien mit 2 Kindern
- Europa: ca. 80 Mio Familien mit Kindern, davon ca. 50% mit mindestens zwei Kindern, also ca. 40 Mio.
- Wahrscheinlichkeit, dass in einer solchen Familie kein zweifacher plötzlicher Kindstod auftritt: $1 - \left(\frac{1}{8500}\right)^2$
  Annahmen:
  - Jede dieser Familien hat genau 2 Kinder; in Wirklichkeit: ca. 20% dieser Familien haben mindestens 3 Kinder
  - Zweiter plötzlicher Kindstod unabhängig von erstem (nicht untersucht)
- Wahrscheinlichkeit, dass in 40 Mio. Familien mindestens ein zweifacher plötzlicher Kindstod auftritt:

$$1 - \left(1 - \left(\frac{1}{8500}\right)^2\right)^{40\,000\,000} \approx 42{,}5\%$$

Beispiel Gegenereignis

Der Fall Sally Clark

Gene find casts doubt on double 'cot death' murders

An expert said there was a one in 73 million chance Sally Clark's babies died naturally – and a jury agreed. Now new genetic research could help to clear her. John Sweeney and Bill Law investigate

- Problem: Es gibt sehr viele Familien mit 2 Kindern
- Europa: ca. 80 Mio Familien mit Kindern, davon ca. 50% mit mindestens zwei Kindern, also ca. 40 Mio.
- Wahrscheinlichkeit, dass in einer solchen Familie kein zweifacher plötzlicher Kindstod auftritt: $1 - \left(\frac{1}{8500}\right)^2$
  Annahmen:
  - Jede dieser Familien hat genau 2 Kinder; in Wirklichkeit: ca. 20% dieser Familien haben mindestens 3 Kinder
  - Zweiter plötzlicher Kindstod unabhängig von erstem (nicht untersucht)
- Wahrscheinlichkeit, dass in 40 Mio. Familien mindestens ein zweifacher plötzlicher Kindstod auftritt:

$$1 - \left(1 - \left(\frac{1}{8500}\right)^2\right)^{40\,000\,000} \approx 42{,}5\%$$

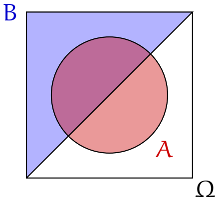
- 2001: Royal Statistical Society interveniert
- 2003: Sally Clark wird nach Revision freigesprochen
- 2007 findet man sie tot in ihrer Wohnung auf - gestorben an einer akuten Alkoholvergiftung. Sie habe sich, so ihre Familie, von dem Justizirrtum nie erholt.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit von A hängt von anderem Ereignis B ab.
  (B kann zeitlich vor A liegen, muss aber nicht!)
- **Beispiel:** Wahrscheinlichkeit für Statistiknote hängt von Mathenote ab.
- Formal:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Im Venndiagramm:



Unabhängigkeit von Ereignissen

- A, B unabhängig: Eintreten von A liefert keine Information über $P(B)$.
- Formal:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

- Bei Unabhängigkeit ist äquivalent dazu:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Dann gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

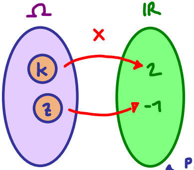
- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\left.\begin{array}{rl} A: & \text{"'erster Würfel gleich 6"'} \\ B: & \text{"'zweiter Würfel gleich 6"'} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} = P(A)$$

Zufallsvariablen und Verteilungen

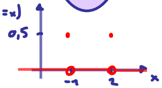
- Beschreibung von Ereignissen durch reelle Zahlen
- Formal: Zufallsvariable ist Abbildung von Ereignisraum in reelle Zahlen:

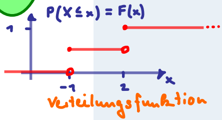
$$X: \ \Omega \to \mathbb{R}$$



- **Nach** Durchführung des Zufallsvorgangs:

  Realisation: $x = X(\omega)$





- **Vor** Durchführung des Zufallsvorgangs:

  Wertebereich: $X(\Omega) = \{x : \ x = X(\omega), \ \omega \in \Omega\}$

- **Beispiel:** Würfeln, X: Augenzahl, $X(\Omega) = \{1,2,\ldots,6\}$, $x = 4$ (z.B.)

$$P(X = 4) = \tfrac{1}{6}, \quad P(X \leqq 3) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$$

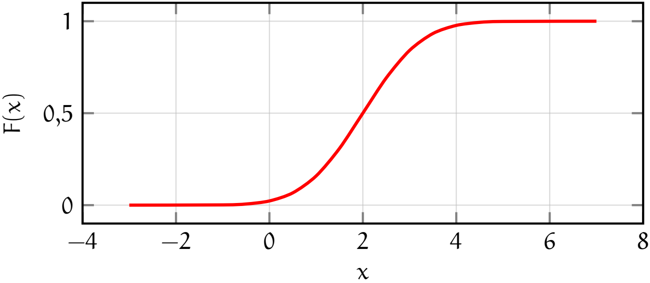
Verteilungsfunktion

- Zuweisung von Wahrscheinlichkeiten zu Realisationen
- Formal:

$$F(x) = P(X \leqq x)$$

- Eigenschaften der Verteilungsfunktion:
  - $F(x) \in [0; 1]$
  - Definitionsbereich: $\mathbb{R}$ mit $F(-\infty) = 0,\ F(\infty) = 1$
  - monoton wachsend, d.h. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leqq F(x_2)$
  - Es gilt:

$$P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a)$$



Beispiel einer Verteilungsfunktion

Diskrete Zufallsvariablen

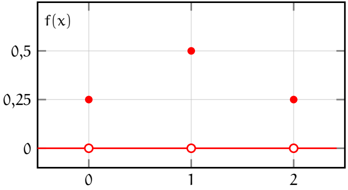
- X heißt diskret, wenn $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ endlich ist.
- Wahrscheinlichkeitsfunktion dann:

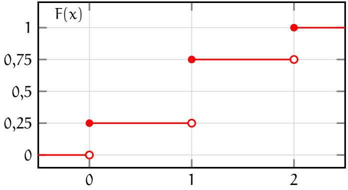
$$f(x) = P(X = x)$$

Beispiel: Münze 2 mal werfen; X: Anzahl "'Kopf"'

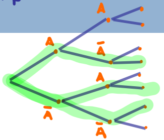
	(Z, Z)	$(Z, K), (K, Z)$	(K, K)
x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \quad x < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{falls } 0 \leqq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{falls } 1 \leqq x < 2 \\ 1, & \text{falls } \quad x \geqq 2 \end{cases}$$





$P(A) = p$



$P(A\bar{A}\bar{A}) = p(1-p)(1-p)$

$P(\bar{A}A\bar{A}) = (1-p)p \cdot (1-p)$

.... = "

$X \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl Treffer bei 3 Versuchen

$P(X=3) = 3 \cdot p \cdot (1-p)^2$

- **Wiederholter** Zufallsvorgang
- n Durchführungen (jeweils unabhängig)
- Pro Durchführung: A oder $\bar{A}$ mit $P(A) = p$ ($\mathrel{\hat{=}}$ Ziehen mit Zurücklegen)
- Schreibe:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ bei } i\text{-ter Durchführung eintritt} \\ 0, & \text{falls } \bar{A} \text{ bei } i\text{-ter Durchführung eintritt} \end{cases}$$

- Dann gibt

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

an, wie oft A eintritt.

- Gesucht: Wahrscheinlichkeitsfunktion von X

Binomialverteilung

- Herleitung:
  1) $P(X_i = 1) = P(A) = p, \; P(X_i = 0) = P(\bar{A}) = 1 - p$
  2) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x$ entspricht "'x mal Ereignis A und $n - x$ mal $\bar{A}$"'
     Wahrscheinlichkeit (bei Unabhängigkeit): $p^x \cdot (1-p)^{n-x}$
  3) Aber: Reihenfolge irrelevant! Anzahl Anordnungen: $\binom{n}{x}$

➠ Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}, & \text{falls } x \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Kurzschreibweise: $X \sim B(n; p)$
  X ist binomialverteilt mit Parametern n und p
- Tabellen zeigen meist $F(x)$
- für $f(x)$ gilt: $f(x) = F(x) - F(x-1)$

$X \sim B(n, 0.25)$, Tabelle der Binomialverteilung $F(x) = P(X \leq x)$

$x \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0.7500	0.5625	0.4219	0.3164	0.2373	0.1780	0.1335	0.1001	0.0751	0.0563	0.0422	0.0317	0.0238	0.0178	0.0134
1	1.0000	0.9375	0.8438	0.7383	0.6328	0.5339	0.4450	0.3671	0.3003	0.2440	0.1971	0.1584	0.1267	0.1010	0.0802
2		1.0000	0.9844	0.9492	0.8965	0.8306	0.7564	0.6786	0.6007	0.5256	0.4552	0.3907	0.3326	0.2811	0.2361
3			1.0000	0.9961	0.9844	0.9624	0.9295	0.8862	0.8343	0.7759	0.7133	0.6488	0.5843	0.5213	0.4613
4				1.0000	0.9990	0.9954	0.9871	0.9727	0.9511	0.9219	0.8854	0.8424	0.7940	0.7415	0.6865
5					1.0000	0.9998	0.9987	0.9958	0.9900	0.9803	0.9657	0.9456	0.9198	0.8883	0.8516
6						1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9965	0.9924	0.9858	0.9757	0.9617	0.9434
7							1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9988	0.9972	0.9944	0.9897	0.9827
8								1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9979	0.9958
9									1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
10										1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
11											1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0.0100	0.0075	0.0056	0.0042	0.0032	0.0024	0.0018	0.0013	0.0010	0.0008	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002
1	0.0635	0.0501	0.0395	0.0310	0.0243	0.0190	0.0149	0.0116	0.0090	0.0070	0.0055	0.0042	0.0033	0.0025	0.0020
2	0.1971	0.1637	0.1353	0.1114	0.0913	0.0745	0.0607	0.0492	0.0398	0.0321	0.0258	0.0208	0.0166	0.0133	0.0106
3	0.4050	0.3530	0.3057	0.2631	0.2252	0.1917	0.1624	0.1370	0.1150	0.0962	0.0802	0.0666	0.0551	0.0455	0.0375
4	0.6302	0.5739	0.5187	0.4654	0.4149	0.3674	0.3235	0.2832	0.2467	0.2138	0.1844	0.1583	0.1354	0.1153	0.0979
5	0.8104	0.7653	0.7175	0.6678	0.6172	0.5666	0.5168	0.4685	0.4222	0.3783	0.3372	0.2990	0.2638	0.2317	0.2026
6	0.9205	0.8929	0.8610	0.8251	0.7858	0.7436	0.6994	0.6537	0.6074	0.5611	0.5154	0.4708	0.4279	0.3869	0.3481
7	0.9729	0.9598	0.9431	0.9226	0.8982	0.8701	0.8385	0.8037	0.7662	0.7265	0.6852	0.6427	0.5998	0.5568	0.5143
8	0.9925	0.9876	0.9807	0.9713	0.9591	0.9439	0.9254	0.9037	0.8787	0.8506	0.8196	0.7860	0.7502	0.7126	0.6736
9	0.9984	0.9969	0.9946	0.9911	0.9861	0.9794	0.9705	0.9592	0.9453	0.9287	0.9092	0.8868	0.8616	0.8337	0.8034
10	0.9997	0.9994	0.9988	0.9977	0.9961	0.9936	0.9900	0.9852	0.9787	0.9703	0.9599	0.9472	0.9321	0.9145	0.8943
11	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9991	0.9983	0.9971	0.9954	0.9928	0.9893	0.9845	0.9784	0.9706	0.9610	0.9494
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9988	0.9979	0.9966	0.9948	0.9922	0.9888	0.9842	0.9784
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9944	0.9918
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998
17		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18			1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Beispiel

Aus einem 32-er Kartenblatt wird 3-mal eine Karte mit Zurücklegen gezogen.
Wie wahrscheinlich ist es, 2-mal Herz zu ziehen?

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i\text{-te Karte Herz} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X_i \sim B(1; \tfrac{8}{32})$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + X_3 \quad \Rightarrow \quad X \sim B(3; \tfrac{1}{4})$$

Mithilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

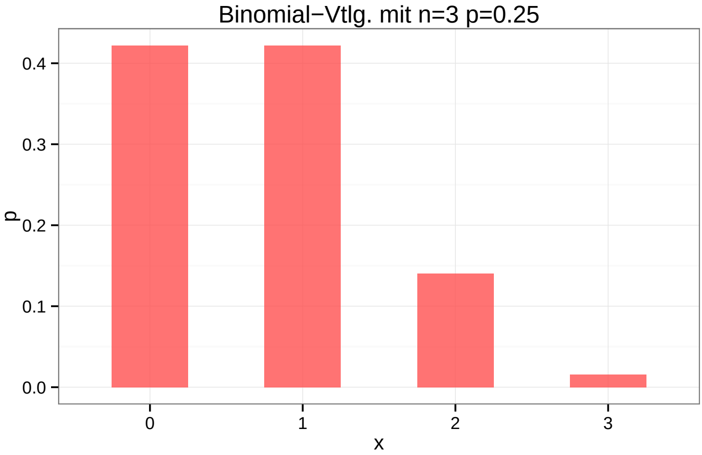
$$P(X = 2) = f(2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}1406$$

Mithilfe der Tabelle ($n = 3$):

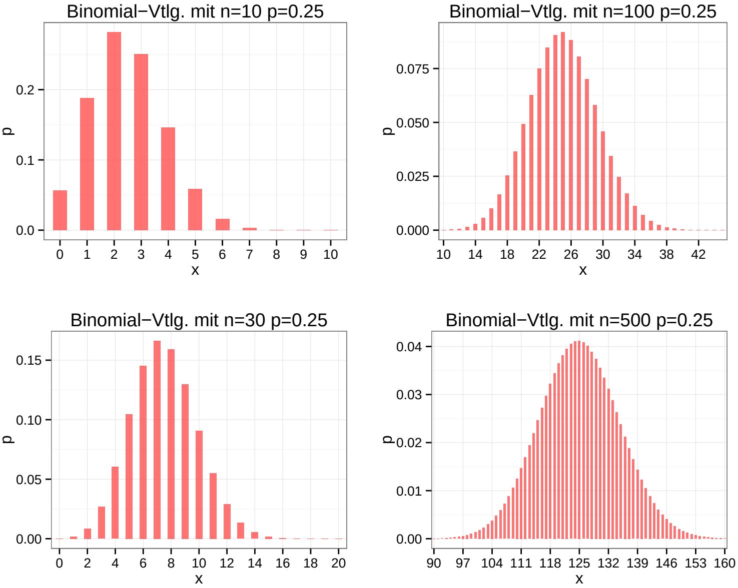
$$P(X = 2) = F(2) - F(1) = 0{,}9844 - 0{,}8438 = 0{,}1406$$

Binomialverteilung: Wahrscheinlichkeitsfunktion

- $X \sim B(3, \frac{1}{4})$



Binomialverteilung: Wahrscheinlichkeitsfunktion



Hypergeometrische Verteilung

- n-faches Ziehen **ohne** Zurücklegen aus N Objekten, davon M markiert.

$$X = \text{Anzahl gezogener Objekte mit Markierung}$$

heißt hypergeometrisch verteilt mit den Parametern N, M, n.

- Kurzschreibweise: $X \sim \text{Hyp}(N; M; n)$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \text{falls } x \text{ möglich} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ist $n \leqq \frac{N}{20}$, so gilt: $\text{Hyp}(N; M; n) \approx B(n; \frac{M}{N})$

Beispiel: Hypergeometrische Verteilung

- Aus einem 32-Kartenblatt wird 3-mal eine Karte ohne Zurücklegen gezogen.
- Wie wahrscheinlich ist es, 2-mal "‘Herz"’ zu ziehen?
- D.h.: $N = 32,\ M = 8,\ n = 3,\ x = 2.$

$$P(X=2) = f(2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{32-8}{3-2}}{\binom{32}{3}} = \frac{\binom{8}{2}\binom{24}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{\frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot 24}{\frac{32!}{3!\cdot 29!}}$$

$$= \frac{29!\cdot 8!\cdot 3!\cdot 24}{32!\cdot 6!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 3\cdot 24}{32\cdot 31\cdot 30} = \frac{4032}{29760} = \frac{21}{155}$$

$$= 0{,}1355$$

Dabei wurde verwendet:

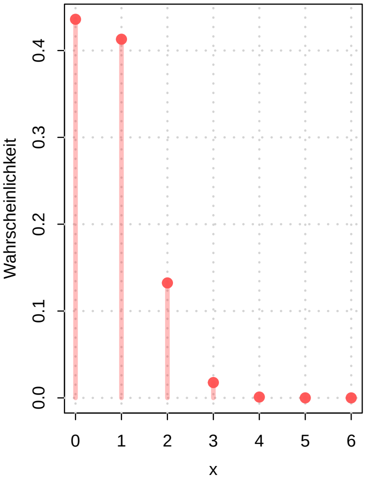
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{und} \quad \binom{n}{1} = n.$$

Hypergeometrische Verteilung

Beispiel: x Treffer im Lotto 6 aus 49

- $X \sim \text{Hyp}(49, 6, 6)$

x	$P(X = x)$ (in %)
0	43.596498
1	41.301945
2	13.237803
3	1.765040
4	0.096862
5	0.001845
6	0.000007



Poisson-Verteilung

- Approximation für $B(n;p)$ und $\mathrm{Hyp}(N;M;n)$
- Geeignet, wenn
  p klein ($\leqq 0{,}1$), n groß ($\geqq 50$) und $np \leqq 10$.
- ➠ „Verteilung der seltenen Ereignisse“
  (z.B. Anzahl 6-er pro Lottoausspielung)
- X ist poissonverteilt mit Parameter λ: $X \sim P(\lambda)$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, & \text{falls } x = 0,1,2,\ldots \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $F(x)$ in Tabelle
- Überblick: Approximation

$$\mathrm{Hyp}(N;M;n) \xrightarrow{p = \frac{M}{N}} B(n;p) \xrightarrow{\lambda = np = n\frac{M}{N}} P(\lambda)$$

Poissonverteilung: $X \sim P(\lambda)$, Tabelle der Verteilungsfunktionen

$x \setminus \lambda$	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
0	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.5249	0.4933	0.4628	0.4338	0.4060	0.3796	0.3546	0.3309	0.3085	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1992
2	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571	0.8387	0.8194	0.7994	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9474	0.9379	0.9275	0.9163	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9970	0.9962
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \setminus \lambda$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
0	0.0451	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0203	0.0183	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1469	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3209	0.3028	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381	0.2238	0.2102	0.1974	0.1852	0.1736
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4533	0.4335	0.4142	0.3954	0.3772	0.3595	0.3423
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7255	0.7064	0.6872	0.6679	0.6484	0.6288	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321
5	0.9057	0.8946	0.8829	0.8706	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851	0.7693	0.7532	0.7367	0.7199	0.7029
6	0.9612	0.9554	0.9490	0.9422	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893	0.8787	0.8675	0.8558	0.8437	0.8311
7	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489	0.9427	0.9361	0.9290	0.9214	0.9134
8	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.9815	0.9786	0.9755	0.9721	0.9683	0.9642	0.9598
9	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919	0.9905	0.9889	0.9871	0.9851	0.9829
10	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972	0.9966	0.9959	0.9952	0.9943	0.9933
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991	0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9976
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Poisson-Verteilung: Beispiel

Beispiel

- $X \sim B(10\,000; 0{,}0003)$; In Tabelle der Binomialverteilung nicht vertafelt! Approximation:

$$\left.\begin{aligned} p &= 0{,}0003 < 0{,}1 \\ n &= 10\,000 > 50 \\ np &= 3 \qquad\quad < 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B(10\,000; 0{,}0003) \approx P(3)$$

- Mithilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

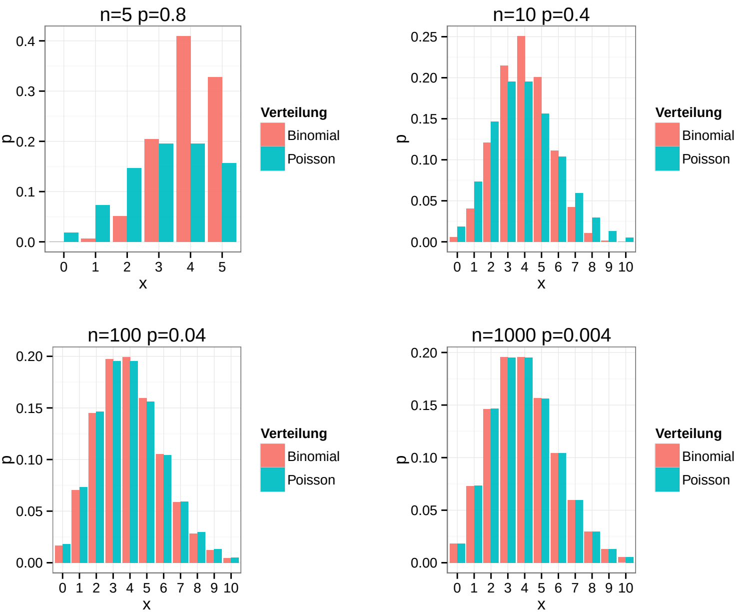
$$P(X = 5) = \frac{3^5}{5!} \cdot e^{-3} = 0{,}1008188$$

- Mithilfe der Tabelle der Poissonverteilung:

$$P(X = 5) = F(5) - F(4) = 0{,}9161 - 0{,}8153 = 0{,}1008$$

- Exakter Wert: $P(X = 5) = 0{,}1008239$

Poisson- versus Binomialverteilung: Vergleich

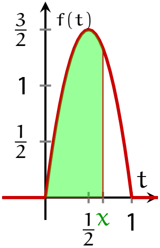


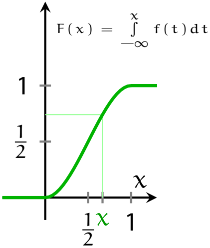
Stetige Zufallsvariablen

- X heißt stetig, wenn $F(x)$ stetig ist.
- Dann existiert ein $f(t)$ mit:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

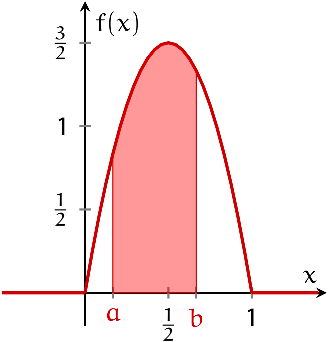
$f(x)$ heißt Dichtefunktion von X.





- Dann:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leqq X < b) \\ &= P(a < X \leqq b) \\ &= P(a \leqq X \leqq b) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$



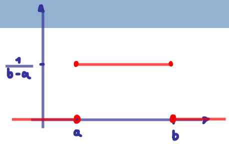
Eigenschaften der Dichtefunktion

- $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- Wegen $F(\infty) = 1$ muss stets gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

- $P(X = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) > 1$ ist möglich
- für $x \in \mathbb{R}$ ist $F(x)$ differenzierbar $\Rightarrow F'(x) = f(x)$.
- Intervallgrenzen spielen keine Rolle:

$$\begin{aligned} P(X \in [a;b]) &= P(X \in (a;b]) \\ &= P(X \in [a;b)) \\ &= P(X \in (a;b)) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$



Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{1}{10}, & \text{falls} \quad 0 \leqq x \leqq 10 \\ 0, & \text{falls} \quad x > 10 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{10}\,dt = \left[\frac{t}{10}\right]_0^x = \frac{x}{10} \Rightarrow$$

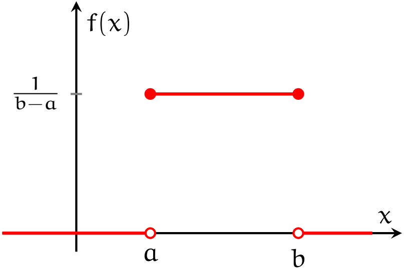
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{x}{10}, & \text{falls} \quad 0 \leqq x \leqq 10 \\ 1, & \text{falls} \quad x > 10 \end{cases}$$

Gleichverteilung

Eine Zufallsvariable X mit

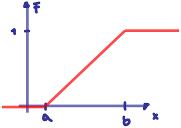
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{falls } a \leqq x \leqq b \\ 0\ , & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt gleichverteilt im Intervall $[a; b]$.



Gleichverteilung

- Verteilungsfunktion der Gleichverteilung:



$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{falls} \qquad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{falls} \quad a \leqq x \leqq b \\ 1 \quad , & \text{falls} \qquad x > b \end{cases}$$

- **Beispiel:** X gleichverteilt in $[1;20]$

$$\begin{aligned} P(2 \leqq X \leqq 12) = F(12) - F(2) &= \frac{12-1}{20-1} - \frac{2-1}{20-1} \\ &= \frac{12-2}{20-1} = \frac{10}{19} \\ &= 0{,}5263 \end{aligned}$$

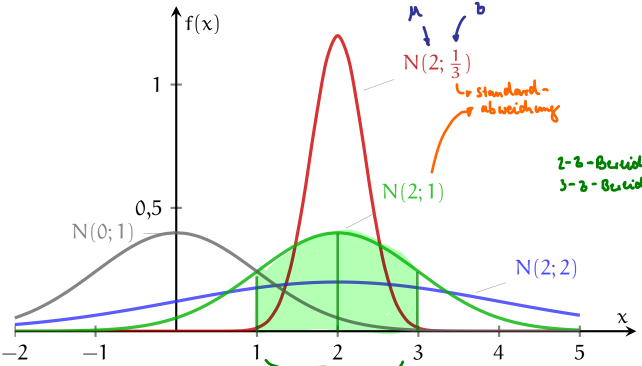
Normalverteilung

Eine Zufallsvariable X mit einer Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

e^{-x^2}

und $\sigma > 0$ heißt normalverteilt.



2-σ-Bereich: $P(|x-\mu| < 2\sigma) \approx 95\%$
3-σ-Bereich: $P(|x-\mu| < 3\sigma) \approx 99{,}8\%$

$\underbrace{}_{\text{1-Sigma-Bereich}}$: $P(|x-\mu| < \sigma) \approx 68\%$

Kurzschreibweise: $X \sim N(\mu; \sigma)$

Normalverteilung: Gaußkurve

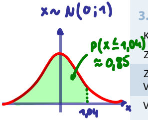
Normalverteilung

C.F. Gauß

Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

Dabei bedeutet $\Phi(x)$ zum Beispiel: $\Phi(2{,}13) = \Phi(2{,}1 + 0{,}03) = 0{,}9834$. Diesen Wert findet man in der Zeile mit $x_1 = 2{,}1$ und der Spalte mit $x_2 = 0{,}03$.

$x_1 \backslash x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6737	0.6773	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7020	0.7054	0.7089	0.7123	0.7157	0.7191	0.7224
0.6	0.7258	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7882	0.7910	0.7939	0.7967	0.7996	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8290	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8414	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8532	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9237	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9358	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9516	0.9526	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9600	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9679	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9914	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9933	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9975	0.9975	0.9976	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995



Eigenschaften der Normalverteilung

- Dichte ist symmetrisch zu μ:

$$f(\mu - x) = f(\mu + x)$$

➡ μ ist Lage-, σ ist Streuungsparameter

- Standardnormalverteilung:
  $N(0;1)$ mit Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ ($\to$ Tabelle 3)
- Kenntnis von $\Phi(x)$, μ und σ genügt, denn:
  $X \sim N(\mu;\sigma) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0;1) \quad \Rightarrow$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- Tabelle enthält nur positive x: Deswegen

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Normalverteilung: Beispiel

Beispiel:

Projektdauer $X \sim N(39; 2)$.

Wahrscheinlichkeit für Projektdauer zwischen 37 und 41 Wochen?

Lösung:

$$\begin{aligned}
P(37 \leqq X \leqq 41) &= F(41) - F(37) \\
&= \Phi\left(\tfrac{41-39}{2}\right) - \Phi\left(\tfrac{37-39}{2}\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] \\
&= 2 \cdot \Phi(1) - 1 \\
&= 2 \cdot 0{,}8413 - 1 \\
&= 0{,}6826
\end{aligned}$$

a) Modus x_{Mod}: $f(x_{\text{Mod}}) \geqq f(x)$ für alle x
(i.A. nicht eindeutig, z.B. Gleichverteilung)

Beispiele:

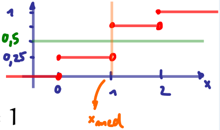
- Normalverteilung: $x_{\text{Mod}} = \mu$
- Diskrete Verteilung mit:

$$\left.\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ f(x) & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{\text{Mod}} = 1$$

b) Median x_{Med}: $F(x_{\text{Med}}) = \frac{1}{2}$ bzw. kleinstes x mit $F(x) > \frac{1}{2}$

Beispiele:

- Normalverteilung: $x_{\text{Med}} = \mu$
- Diskrete Verteilung
  oben: $F(0) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $F(1) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \Rightarrow x_{\text{Med}} = 1$



Lageparameter: Fraktile

c) **α-Fraktil** x_α: $F(x_\alpha) = \alpha$ (für stetige Verteilungen)

Beispiel: $X \sim N(0;1)$, $Y \sim N(3;2)$

$$\begin{aligned} x_{0,975} &= & &1{,}96 \quad \text{(Tab. 3)} \\ x_{0,025} &= -x_{0,975} & &= -1{,}96 \\ y_{0,025} &= 2 \cdot x_{0,025} + 3 & &= -0{,}92 \end{aligned}$$

Hinweise:

- $x_{\text{Med}} = x_{0,5}$
- Wenn x_α nicht vertafelt $\rightarrow$ Interpolation:

$$x_\alpha \approx x_a + (x_b - x_a) \cdot \frac{\alpha - a}{b - a}$$

mit
a : größte vertafelte Zahl $< \alpha$
b : kleinste vertafelte Zahl $> \alpha$

Beispiel: $X \sim N(0;1)$; $x_{0,6} \approx 0{,}25 + (0{,}26 - 0{,}25) \cdot \frac{0{,}6 - 0{,}5987}{0{,}6026 - 0{,}5987} = 0{,}2533$

$\hat{=}$ arithm. Mittel in deskr. Statistik

d) Erwartungswert $E(X)$ bzw. μ:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Beispiel: Diskrete Verteilung mit

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad E(X) = 0 \cdot \tfrac{1}{4} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} = 1$$

Beispiel: Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{folgt}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \int_0^{\infty} 1 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) dx \right]$$

$$= -x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = -0 - \left(-0 - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

Rechenregeln für den Erwartungswert

- Ist f symmetrisch bzgl. a, so gilt $E(X) = a$
  Beispiel: f der Gleichverteilung symmetrisch bzgl. $\frac{a+b}{2} \Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2}$
- Lineare Transformation:

$$\boxed{E(a + bX) = a + b \cdot E(X)}$$

- Summenbildung:

$$\boxed{E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)}$$

Beispiel: X gleichverteilt in $[0; 10]$, $Y \sim N(1; 1)$; $Z = X + 5Y$

$$E(Z) = E(X+5Y) = E(X)+E(5Y) = E(X)+5 \cdot E(Y) = \frac{10+0}{2} + 5 \cdot 1 = 10$$

- Unabhängigkeit:

$$X,\ Y \text{ unabhängig} \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Streuungsparameter

deskr.: mittlere quadr. Abweichung

$\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2 = s^2$

- **Varianz** $\operatorname{Var}(X)$ bzw. σ^2:

$$\operatorname{Var}(X) = E([X - E(X)]^2) = \begin{cases} \sum_i [x_i - E(X)]^2 f(x_i), & \text{wenn } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)\, dx, & \text{wenn } X \text{ stetig} \end{cases}$$

- **Standardabweichung** $\operatorname{Sta}(X)$ bzw. σ: $\operatorname{Sta}(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}$

Beispiel: Diskrete Verteilung

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

:

$$\operatorname{Var}(X) = (0-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Beispiel: Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X (Dichte siehe Erwartungswert) folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X)) f(x)\, dx = \lambda \int_0^{\infty} \left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot e^{-\lambda x}\, dx \\ &= e^{-\lambda x} \left(-x^2 + \tfrac{2x}{\lambda} - \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2 - \tfrac{2}{\lambda^2} - \tfrac{2x}{\lambda} + \tfrac{2}{\lambda^2} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= 0 - \left(-0^2 - \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2 \right) = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Rechenregeln für die Varianz

- Verschiebungssatz:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Beispiel: Diskrete Verteilung

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \cdot \tfrac{1}{4} + 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{3}{2} \\ \Rightarrow \quad E(X^2) - [E(X)]^2 &= \tfrac{3}{2} - 1^2 = \tfrac{1}{2} = \text{Var}(X) \end{aligned}$$

- Lineare Transformation:

$$\text{Var}(a + bX) = b^2 \, \text{Var}(X)$$

- Summenbildung gilt nur, wenn die X_i unabhängig! Dann:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i)$$

Erwartungswerte und Varianzen wichtiger Verteilungen

Verteilung von X	$E(X)$	$Var(X)$
Binomialverteilung $B(n;p)$	np	$np(1-p)$
Hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N, M, n	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Poisson-Verteilung $P(\lambda)$	λ	λ
Gleichverteilung in $[a;b]$ mit $a<b$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Normalverteilung $N(\mu;\sigma)$	μ	σ^2

- Für beliebige Zufallsvariablen X und $\varepsilon > 0$ gilt die Ungleichung von Tschebyschow:

$$P\big(|X - E[X]| \geq \varepsilon\big) \;\leq\; \frac{\mathrm{Var}[X]}{\varepsilon^2}$$

Beispiele:

- X ist gleichverteilt mit Parametern a, b und $\varepsilon = \frac{1}{3}(a-b)$, also $E[X] = \frac{1}{2}(a+b)$ und $\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{12}(a-b)^2$

$$\Rightarrow P\Big(\big|X - \tfrac{1}{2}(a+b)\big| \geq \tfrac{1}{3}(a-b)\Big) \;\leq\; \frac{(a-b)^2}{12} \cdot \frac{3^2}{(a-b)^2} = 3/4$$

- $X \sim B(100; 0{,}2)$ und $\varepsilon = 10$
damit: $E[X] = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ und $\mathrm{Var}[X] = 100 \cdot 0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2) = 16$

$$\Rightarrow P\big(|X - 20| \geq 10\big) \;\leq\; \frac{16}{10^2} = 0{,}16$$

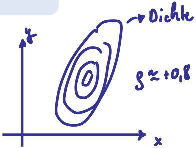
deskr. Stat.
Cov. $= \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

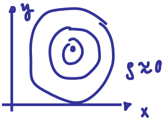
- **Kovarianz:**

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \\ &\text{(Verschiebungssatz)} \end{aligned}$$

- **Korrelationskoeffizient:**

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

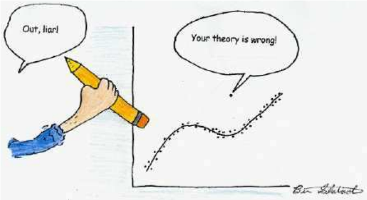




- **Bemerkungen:**
  - ρ ist r nachgebildet $\Rightarrow \rho \in [-1; 1]$
  - $|\rho| = 1 \iff Y = a + bX$ (mit $b \neq 0$)
  - $\rho = 0 \iff X, Y$ **unkorreliert**
- Varianz einer Summe zweier ZV:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\,\text{Cov}(X, Y)$$

Statistik: Table of Contents

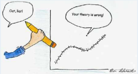


- Vollerhebung of unmöglich,
- Deshalb: Beobachte Teilgesamtheit und schließe auf Grundgesamtheit

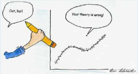
Beispiel

Warensendung von 1000 Stück; darunter M Stück Ausschuss.
M ist unbekannt.
$\rightarrow$ Zufällige Entnahme von $n = 30$ Stück („Stichprobe“).
Darunter 2 Stück Ausschuss.
Denkbare Zielsetzungen:

- Schätze M durch eine Zahl (z.B. $\frac{2}{30} \cdot 1000 = 66{,}67$)
- Schätze ein Intervall für M (z.B. $M \in [58; 84]$)
- Teste die Hypothese, dass $M > 50$ ist.



Grundbegriffe



- **Grundgesamtheit (G):** Menge aller relevanten Merkmalsträger.
- **Verteilung von G:** $F(x) = P(X \leqq x) =$ Wahrscheinlichkeit, dass ein Merkmalsträger ausgewählt wird, der beim untersuchten Merkmal maximal die Ausprägung x aufweist.
- **Uneingeschränkte (reine) Zufallsauswahl:**
  Jedes Element von G hat die selbe Chance, ausgewählt zu werden.
- **Stichprobenumfang (n):** Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe.
- **Einfache Stichprobe:**
  Uneingeschränkte Zufallsauswahl und unabhängige Ziehung.
  $\rightarrow$ Alle Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind iid.
  independent
  identical
  distributed
- **Stichprobenergebnis:**
  n-Tupel der Realisationen der Stichprobenvariablen, $(x_1, \ldots, x_n)$.

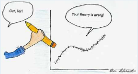
Wichtige Stichprobenfunktionen

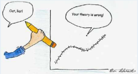
- Gegeben: Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$, Beliebige Verteilung, mit $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$

Stichprobenfunktion V	Bezeichnung	$E(V)$	$Var(V)$
$\sum_{i=1}^{n} X_i$	Merkmalssumme	$n\mu$	$n\sigma^2$
$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	Stichprobenmittel	μ	$\frac{\sigma^2}{n}$
$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$	Gauß-Statistik	0	1
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	mittlere quadratische Abweichung bezüglich μ	σ^2	
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$	mittlere quadratische Abweichung	$\frac{n-1}{n}\sigma^2$	
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$	Stichprobenvarianz	σ^2	
$S = \sqrt{S^2}$	Stichproben-Standardabweichung		
$\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$	t-Statistik		

sta(V)

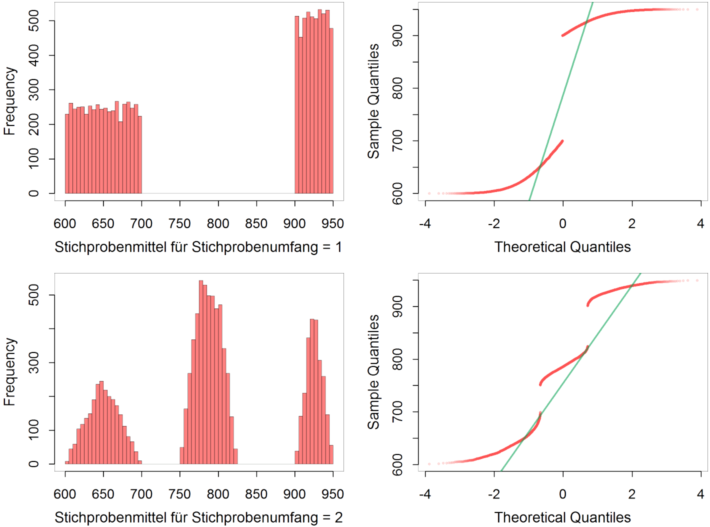
$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

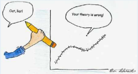




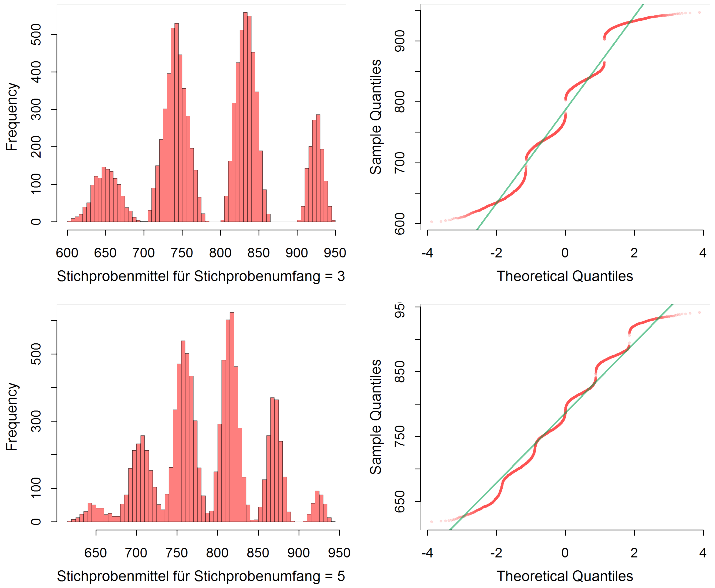
Auswirkungen der Stichprobengröße

Ziehen von 10.000 Stichproben (jeweils vom Umfang n) und Berechnung der Stichprobenmittel (Verteilung: zwei überlagerte Gleichverteilungen):

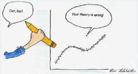


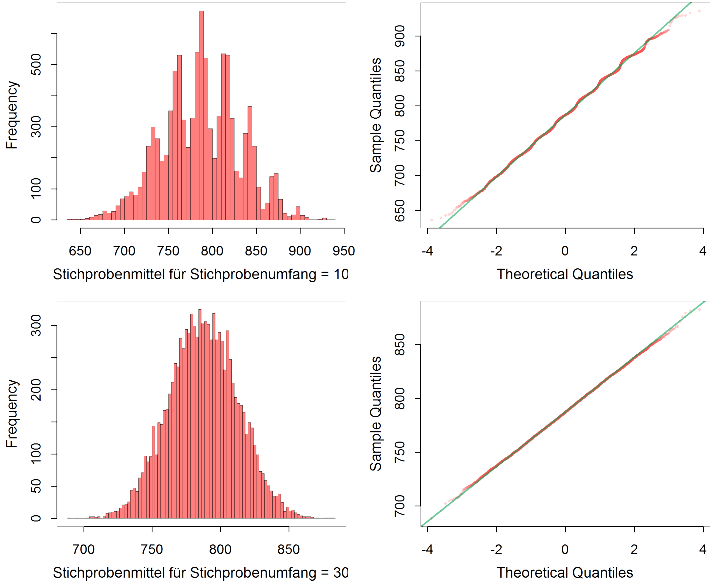


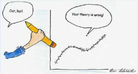
Auswirkungen der Stichprobengröße



Auswirkungen der Stichprobengröße





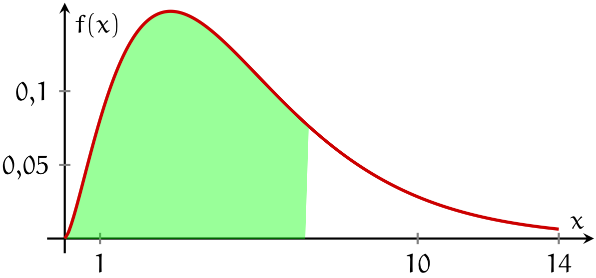


Chi-Quadrat-Verteilung

- Sind $X_1, \ldots, X_n$ iid $N(0;1)$-verteilte Zufallsvariablen, so wird die Verteilung von

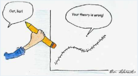
$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

als **Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden** bezeichnet.



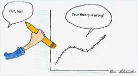
- Kurzschreibweise: $Z \sim \chi^2(n)$
- **Beispiel:** $\chi^2(30)$: $x_{0,975} = 46{,}98$

Quantilstabelle der χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden



$\alpha \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16	2.60	3.07	3.56	4.07	4.60
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26
0.1	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20	2.83	3.49	4.17	4.87	5.58	6.30	7.04	7.79	8.55
0.2	0.06	0.45	1.01	1.65	2.34	3.07	3.82	4.59	5.38	6.18	6.99	7.81	8.63	9.47	10.31
0.25	0.10	0.58	1.21	1.92	2.67	3.45	4.25	5.07	5.90	6.74	7.58	8.44	9.30	10.17	11.04
0.4	0.28	1.02	1.87	2.75	3.66	4.57	5.49	6.42	7.36	8.30	9.24	10.18	11.13	12.08	13.03
0.5	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35	6.35	7.34	8.34	9.34	10.34	11.34	12.34	13.34	14.34
0.6	0.71	1.83	2.95	4.04	5.13	6.21	7.28	8.35	9.41	10.47	11.53	12.58	13.64	14.69	15.73
0.75	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84	9.04	10.22	11.39	12.55	13.70	14.85	15.98	17.12	18.25
0.8	1.64	3.22	4.64	5.99	7.29	8.56	9.80	11.03	12.24	13.44	14.63	15.81	16.98	18.15	19.31
0.9	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64	12.02	13.36	14.68	15.99	17.27	18.55	19.81	21.06	22.31
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.95	23.59	25.19	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80

$\alpha \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.005	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43	8.03	8.64	9.26	9.89	10.52	11.16	11.81	12.46	13.12	13.79
0.01	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26	8.90	9.54	10.20	10.86	11.52	12.20	12.88	13.56	14.26	14.95
0.025	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59	10.28	10.98	11.69	12.40	13.12	13.84	14.57	15.31	16.05	16.79
0.05	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85	11.59	12.34	13.09	13.85	14.61	15.38	16.15	16.93	17.71	18.49
0.1	9.31	10.09	10.86	11.65	12.44	13.24	14.04	14.85	15.66	16.47	17.29	18.11	18.94	19.77	20.60
0.2	11.15	12.00	12.86	13.72	14.58	15.44	16.31	17.19	18.06	18.94	19.82	20.70	21.59	22.48	23.36
0.25	11.91	12.79	13.68	14.56	15.45	16.34	17.24	18.14	19.04	19.94	20.84	21.75	22.66	23.57	24.48
0.4	13.98	14.94	15.89	16.85	17.81	18.77	19.73	20.69	21.65	22.62	23.58	24.54	25.51	26.48	27.44
0.5	15.34	16.34	17.34	18.34	19.34	20.34	21.34	22.34	23.34	24.34	25.34	26.34	27.34	28.34	29.34
0.6	16.78	17.82	18.87	19.91	20.95	21.99	23.03	24.07	25.11	26.14	27.18	28.21	29.25	30.28	31.32
0.75	19.37	20.49	21.60	22.72	23.83	24.93	26.04	27.14	28.24	29.34	30.43	31.53	32.62	33.71	34.80
0.8	20.47	21.61	22.76	23.90	25.04	26.17	27.30	28.43	29.55	30.68	31.79	32.91	34.03	35.14	36.25
0.9	23.54	24.77	25.99	27.20	28.41	29.62	30.81	32.01	33.20	34.38	35.56	36.74	37.92	39.09	40.26
0.95	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41	32.67	33.92	35.17	36.41	37.65	38.89	40.11	41.34	42.56	43.77
0.975	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17	35.48	36.78	38.08	39.36	40.65	41.92	43.19	44.46	45.72	46.98
0.99	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57	38.93	40.29	41.64	42.98	44.31	45.64	46.96	48.28	49.59	50.89
0.995	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00	41.40	42.80	44.18	45.56	46.93	48.29	49.64	50.99	52.34	53.67



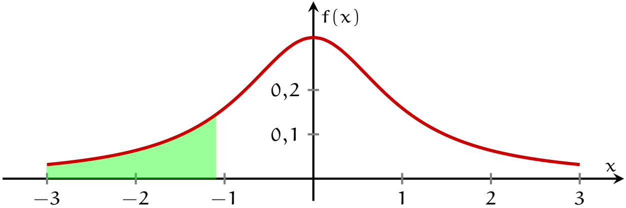
Testverteilungen: t-Verteilung

- Ist $X \sim N(0; 1)$, $Z \sim \chi^2(n)$, X, Z unabhängig, so wird die Verteilung von

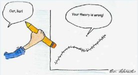
$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n} Z}}$$

als t-Verteilung mit n Freiheitsgraden bezeichnet.

William Sealy Gosset
1876 – 1937



- Kurzschreibweise: $T \sim t(n)$
- **Beispiel:** $t(10)$ $x_{0,6} = 0{,}260$, $x_{0,5} = 0$, $x_{0,1} = -x_{0,9} = -1{,}372$



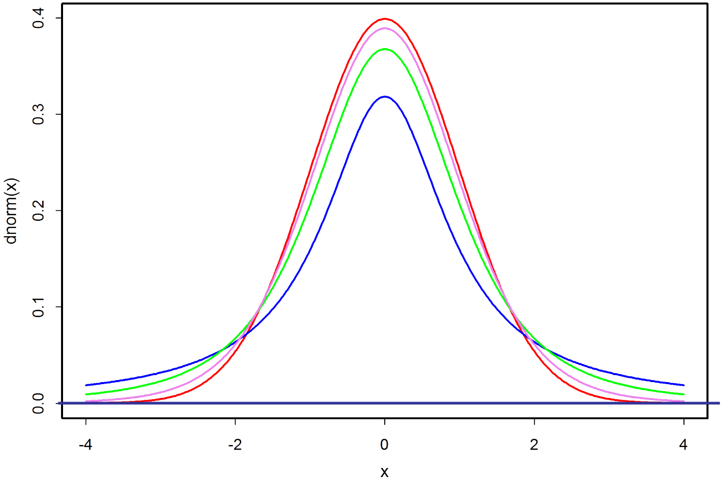
Quantilstabelle der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden

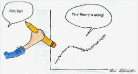
$n \backslash \alpha$ ~~$\alpha \backslash n$~~	0.6	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.325	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.820	63.657
2	0.289	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	0.979	1.638	2.353	3.183	4.541	5.841
4	0.271	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.897	3.355
9	0.261	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.698	0.875	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.696	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.054
13	0.259	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.603	2.947
16	0.258	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.684	0.856	1.316	1.708	2.059	2.485	2.787
26	0.256	0.684	0.856	1.315	1.706	2.055	2.479	2.779
27	0.256	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.683	0.855	1.312	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750

t-Verteilung vs. Normalverteilung

Dichtefunktion

- t-Verteilung mit 1 (blau), 3 (grün) und 10 (lila) Freiheitsgraden
- Standardnormalverteilung (rot)





- Ein unbekannter Parameter ϑ der Verteilung von G soll auf Basis einer Stichprobe geschätzt werden.
- Zum Beispiel: σ von $N(10; \sigma)$
- Schätzwert: $\hat{\vartheta}$
- Vorgehen: Verwendung einer Schätzfunktion

$$\hat{\Theta} = g(X_1, \ldots, X_n)$$

Beachte: Der Schätzwert $\hat{\vartheta}$ ist die Realisierung der ZV (!) $\hat{\Theta}$.

- Frage: Welche Stichprobenfunktion ist zur Schätzung geeignet?

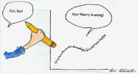
➡ Kriterien für die Beurteilung/Konstruktion von Schätzfunktionen!

- Im Folgenden: Vorliegen einer einfachen Stichprobe, d.h. $X_1, \ldots, X_n$ iid.

Beispiel

- Schätzen des Mittelwertes einer Grundgesamtheit
- dazu: Einfache Stichprobe vom Umfang 5
- und den beiden Stichprobenfunktionen

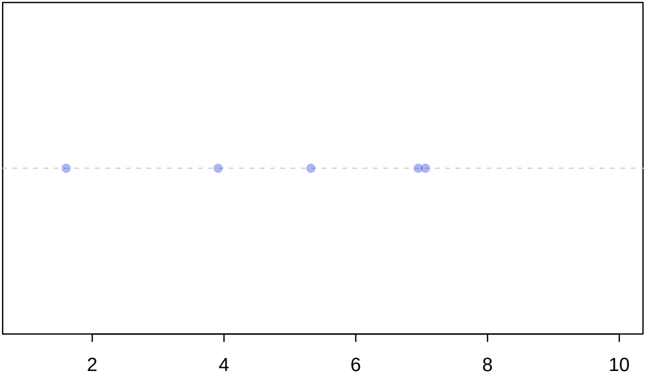
$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

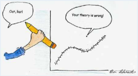


Beispiel

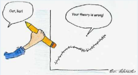
- Schätzen des Mittelwertes einer Grundgesamtheit
- dazu: Einfache Stichprobe vom Umfang 5
- und den beiden Stichprobenfunktionen

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$$



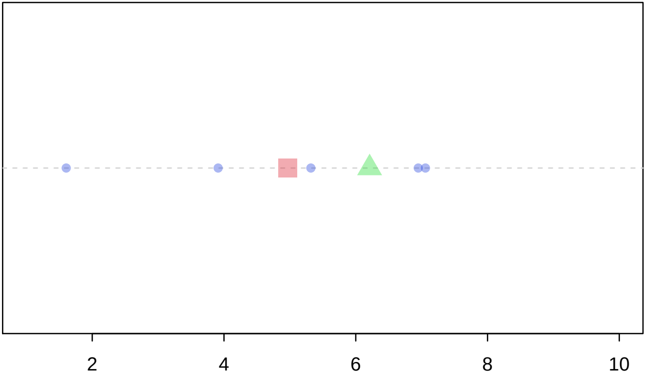


Beispiel



- Schätzen des Mittelwertes einer Grundgesamtheit
- dazu: Einfache Stichprobe vom Umfang 5
- und den beiden Stichprobenfunktionen

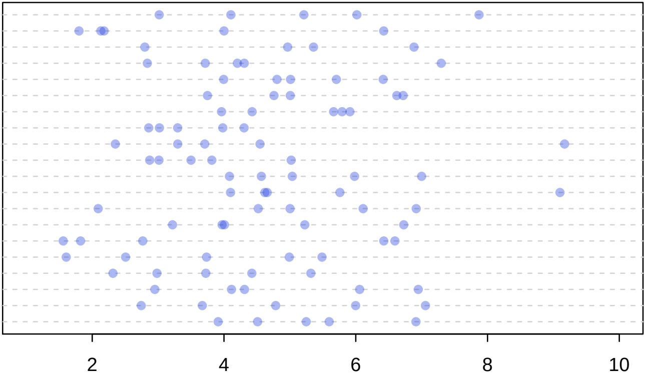
$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

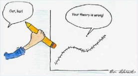


Beispiel

- Schätzen des Mittelwertes einer Grundgesamtheit
- dazu: Einfache Stichprobe vom Umfang 5
- und den beiden Stichprobenfunktionen

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

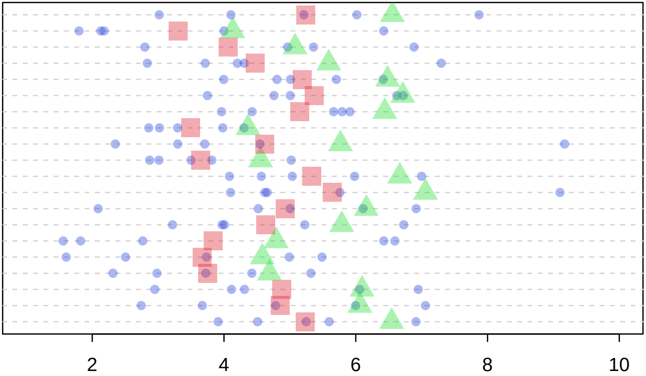


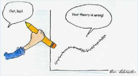


Beispiel

- Schätzen des Mittelwertes einer Grundgesamtheit
- dazu: Einfache Stichprobe vom Umfang 5
- und den beiden Stichprobenfunktionen

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

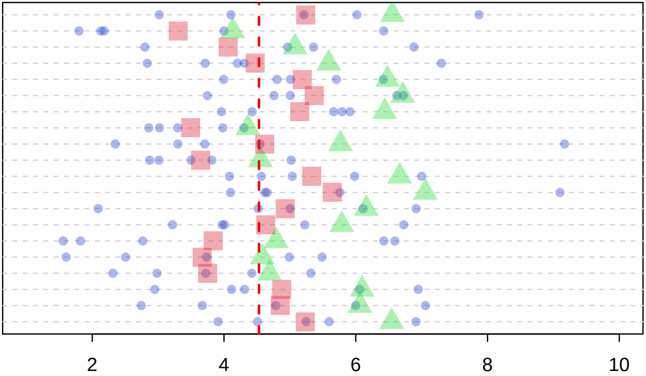




Beispiel

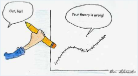
- Schätzen des Mittelwertes einer Grundgesamtheit
- dazu: Einfache Stichprobe vom Umfang 5
- und den beiden Stichprobenfunktionen

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$$



Mittelwert Grundgesamtheit = 4.53

Erwartungstreue und Wirksamkeit



- Eine Schätzfunktion $\hat{\Theta} = g(X_1, \ldots, X_n)$ heißt **erwartungstreu** oder **unverzerrt** für ϑ, wenn unabhängig vom numerischen Wert von ϑ gilt:

$$E(\hat{\Theta}) = \vartheta$$

Beispiel

Sind $\hat{\Theta}_1 = \bar{X}$, $\hat{\Theta}_2 = \frac{X_1+X_n}{2}$, $\hat{\Theta}_3 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ erwartungstreu für μ?

a) $\hat{\Theta}_1$: $\quad E(\bar{X}) = \mu$
$\Rightarrow \hat{\Theta}_1$ ist erwartungstreu.

b) $\hat{\Theta}_2$: $\quad E\left(\frac{X_1+X_n}{2}\right) = \frac{1}{2}[E(X_1) + E(X_n)] = \frac{1}{2}(\mu + \mu) = \mu$
$\Rightarrow \hat{\Theta}_2$ ist erwartungstreu.

c) $\hat{\Theta}_3$: $E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{n}{n-1}\mu \neq \mu$
$\Rightarrow \hat{\Theta}_3$ ist nicht erwartungstreu

Erwartungstreue und Wirksamkeit

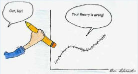
- Welche der erwartungstreuen Schätzfunktionen $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2$ ist „besser“?
- Von zwei erwartungstreuen Schätzfunktionen $\hat{\Theta}_1$, $\hat{\Theta}_2$ für ϑ heißt $\hat{\Theta}_1$ wirksamer als $\hat{\Theta}_2$, wenn unabhängig vom numerischen Wert von ϑ gilt:

$$\mathrm{Var}(\hat{\Theta}_1) < \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_2)$$

Beispiel: ($\hat{\Theta}_1 = \bar{X}$, $\hat{\Theta}_2 = \frac{X_1+X_n}{2}$)
Wegen

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_1) &= \mathrm{Var}(\bar{X}) && = \frac{\sigma^2}{n} \\ \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_2) &= \mathrm{Var}\left(\frac{X_1+X_n}{2}\right) = \frac{1}{4}(\sigma^2+\sigma^2) && = \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_1) < \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_2)$$

(falls $n > 2$) ist $\hat{\Theta}_1$ wirksamer als $\hat{\Theta}_2$.

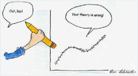


Intervall-Schätzung

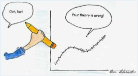
- Für einen unbekannten Verteilungsparameter ϑ soll auf Basis einer Stichprobe ein Intervall geschätzt werden.
- Verwendung der Stichprobenfunktionen V_u, V_o, so dass $V_u \leqq V_o$ und

$$P(V_u \leqq \vartheta \leqq V_o) = 1 - \alpha$$

  stets gelten.
  $[V_u; V_o]$ heißt Konfidenzintervall (KI) für ϑ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$. meist groß, z.B. 95%
- Beachte: Das Schätzintervall $[v_u; v_o]$ ist Realisierung der Zufallsvariablen (!) V_u, V_o.
  ➠ Irrtumswahrscheinlichkeit α (klein, i.d.R. $\alpha \leqq 0{,}1$)
- Frage: Welche Konfidenzintervalle sind zur Schätzung geeignet?
  ➠ Hängt von Verteilung von G sowie vom unbekannten Parameter (μ, σ^2) ab!
- Im Folgenden: Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$



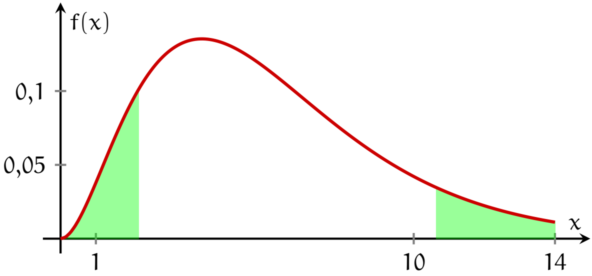
Intervall-Schätzung



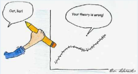
Wichtiger Spezialfall: Symmetrische Konfidenzintervalle

- Symmetrisch heißt **nicht**, dass die Dichte symmetrisch ist, sondern
- übereinstimmende Wahrscheinlichkeiten für Über-/Unterschreiten des Konfidenzintervalls, d.h.

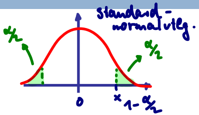
$$P(V_u > \vartheta) = P(V_o < \vartheta) = \tfrac{\alpha}{2}$$



- **Wichtig:** Eine Verkleinerung von α bewirkt eine Vergrößerung des Konfidenzintervalls.



Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit bekanntem σ^2

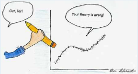


Vorgehensweise:

1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1-\alpha$
2. Bestimmung des $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Fraktils c der $N(0,1)$-Verteilung
3. Berechnen des Stichprobenmittels $\bar{x}$
4. Berechnen des Wertes $\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}$
5. Ergebnis der Intervall-Schätzung:

$$\left[\bar{x}-\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}\,;\quad \bar{x}+\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervallschätzung: Beispiel



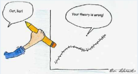
Beispiel

Normalverteilung mit $\sigma = 2{,}4$
$(x_1, \ldots, x_9)$ = (184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1, 184.4)

Gesucht: Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0{,}99$

1. $1 - \alpha = 0{,}99$
2. $N(0;1)$: $c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-\frac{0{,}01}{2}} = x_{0{,}995} = 2{,}576$ (Tab. 3; Interpolation)
3. $\bar{x} = \frac{1}{9}(184{,}2 + \cdots + 184{,}4) = 184{,}8$
4. $\frac{\sigma c}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}4 \cdot 2{,}576}{\sqrt{9}} = 2{,}06$
5. $\text{KI} = [184{,}8 - 2{,}06; 184{,}8 + 2{,}06] = [182{,}74; 186{,}86]$

Interpretation: Mit 99 % Wahrscheinlichkeit ist $\mu \in [182{,}74; 186{,}86]$.



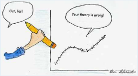
Wichtige Fraktilswerte

Wichtige $N(0;1)$-Fraktilswerte:

α	x_α
0,9	1,281552
0,95	1,644854
0,975	1,959964
0,99	2,326348
0,995	2,575829

(I.d.R. genügen drei Nachkommastellen.)

Intervalllänge



- Bei bekannter Standardabweichung gilt offenkundig

$$L = V_o - V_u = \frac{2\sigma c}{\sqrt{n}}$$

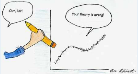
- Welcher Stichprobenumfang n sichert eine vorgegebene (Maximal-)Länge L? $\Rightarrow$ Nach n auflösen! $\Rightarrow$

$$\boxed{n \geqq \left(\frac{2\sigma c}{L}\right)^2}$$

- Eine Halbierung von L erfordert eine Vervierfachung von n!
- Angewendet auf letztes **Beispiel**:

$$L = 4 \Rightarrow n \geqq \left(\tfrac{2 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}576}{4}\right)^2 = 9{,}556 \Rightarrow n \geqq 10$$

$$L = 2 \Rightarrow n \geqq \left(\tfrac{2 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}576}{2}\right)^2 = 38{,}222 \Rightarrow n \geqq 39$$

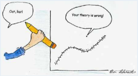


Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit unbekanntem σ^2

- Vorgehensweise:
  1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1-\alpha$
  2. Bestimmung des $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Fraktils c der $t(n-1)$-Verteilung
  3. Berechnen des Stichprobenmittels $\bar{x}$ und der Stichproben-Standardabweichung s
  4. Berechnen des Wertes $\frac{sc}{\sqrt{n}}$
  5. Ergebnis der Intervall-Schätzung:

$$\left[\bar{x}-\frac{sc}{\sqrt{n}}\,;\quad \bar{x}+\frac{sc}{\sqrt{n}}\right]$$

- Zu Schritt 2: Falls $n-1>30$ wird die $N(0;1)$-Verteilung verwendet.



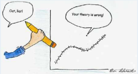
Beispiel:
Wie das letzte Beispiel, jedoch σ unbekannt.

1. $1 - \alpha = 0{,}99$
2. $t(8)$: $c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-\frac{0{,}01}{2}} = x_{0{,}995} = 3{,}355$ (Tab. 4)
3. $\bar{x} = \frac{1}{9}\,(184{,}2 + \cdots + 184{,}4) = 184{,}8$
   $s = \sqrt{\frac{1}{8}\,[(184{,}2^2 + \cdots + 184{,}4^2) - 9 \cdot 184{,}8^2]} = 1{,}31$
4. $\frac{sc}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}31 \cdot 3{,}355}{\sqrt{9}} = 1{,}47$
5. $\text{KI} = [184{,}8 - 1{,}47; 184{,}8 + 1{,}47] = [183{,}33; 186{,}27]$

Interpretation: Mit 99 % Wahrscheinlichkeit
ist $\mu \in [183{,}33; 186{,}27]$.

```
x <- c(184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2,
       183.9, 185.0, 187.1, 184.4)
t.test(x,conf.level=.99)
```

```
##
##  One Sample t-test
##
## data:  x
## t = 422.1129, df = 8, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
## 99 percent confidence interval:
##  183.331 186.269
## sample estimates:
## mean of x
##     184.8
```

Konfidenzintervall für μ bei beliebiger Verteilung

- Voraussetzung: $n > 30$, bzw. falls G dichotom: $5 \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i \leqq n - 5$
- Vorgehensweise:

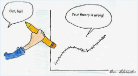
  1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1 - \alpha$
  2. Bestimmung des $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$-Fraktils c der Standardnormalverteilung $N(0; 1)$
  3. Berechnung des Stichprobenmittels $\bar{x}$ sowe eines Schätzwertes $\hat{\sigma}$ für die Standardabweichung σ der GG mittels

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} \sigma, & \text{falls } \sigma \text{ bekannt} \\ \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}, & \text{falls GG dichotom} \\ s, & \text{sonst} \end{cases}$$

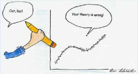
  4. Berechnung von $\frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}$
  5. Ergebnis der Intervallschätzung:

$$\left[\bar{x} - \frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}\right]$$

- Zu Schritt 3: Manchmal kann anderer Schätzwert $\hat{\sigma}$ sinnvoller sein.



Konfidenzintervall für μ bei beliebiger Verteilung



Beispiel:

Poisson-Verteilung mit $\lambda\ (= \mu = \sigma^2)$ unbekannt.

$(x_1, \ldots, x_{40}) = (3; 8; \ldots; 6)$

Gesucht: KI für λ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0{,}9$

1. $1 - \alpha = 0{,}9$
2. $N(0;1):\ c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-\frac{0{,}1}{2}} = x_{0{,}95} = 1{,}645$
3. $\bar{x} = \dfrac{1}{40}(3 + 8 + \cdots + 6) = 6{,}5$

   $\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{x}} = \sqrt{6{,}5} = 2{,}55$ (da $\sigma^2 = \lambda$)
4. $\dfrac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}} = \dfrac{2{,}55 \cdot 1{,}645}{\sqrt{40}} = 0{,}66$
5. $\mathrm{KI} = [6{,}5 - 0{,}66; 6{,}5 + 0{,}66] = [5{,}84; 7{,}16]$

Konfidenzintervall für σ^2 bei Normalverteilung

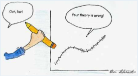
Vorgehensweise

1. Festlegen eines Konfidenzniveaus $1-\alpha$
2. Bestimmung der $\frac{\alpha}{2}$- bzw. $(1-\frac{\alpha}{2})$-Fraktile (c_1 bzw. c_2) der $\chi^2(n-1)$-Verteilung
3. Aus der Stichprobe: Berechnung der Größe

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 v$$

4. Berechnung des Konfidenzintervalls

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{c_2} ; \frac{(n-1)s^2}{c_1} \right]$$



KI für σ^2 bei Normalverteilung

Beispiel:

$G \sim N(\mu; \sigma)$;

$(x_1, \ldots, x_5) = (1, 1.5, 2.5, 3, 2)$

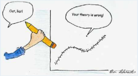
Gesucht: KI für σ^2 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0{,}99$

1. $1 - \alpha = 0{,}99$
2. $\chi^2(5-1): \; c_1 = x_{\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}005} = 0{,}21$

   $c_2 = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}995} = 14{,}86$
3. $\bar{x} = \frac{1}{5}(1 + 1{,}5 + 2{,}5 + 3 + 2) = 2$

   $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 5 \cdot \bar{x}^2 = 1^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2 + 3^2 + 2^2 - 5 \cdot 2^2 = 2{,}5$
4. KI = $\left[\frac{2{,}5}{14{,}86}; \frac{2{,}5}{0{,}21}\right] = [0{,}17; 11{,}9]$

(Extrem groß, da n klein.)

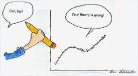


Signifikanztests

- Vorliegen einer Hypothese über die Verteilung(en) der Grundgesamtheit(en).
- Beispiele:
  - „Der Würfel ist fair.“
  - „Die Brenndauern zweier unterschiedlicher Glühbirnensorten sind gleich.“
- Hypothese soll anhand einer Stichprobe überprüft werden.
- Prinzip:
  - Hypothese verwerfen, wenn „signifikanter“ Widerspruch zur Stichprobe.
  - Ansonsten: Hypothese nicht verwerfen.
- Eine verworfene Hypothese gilt als statistisch widerlegt.
- Nicht-Verwerfung ist dagegen ein „Freispruch aus Mangel an Beweisen“.

Zu Beachten:

Nicht-Verwerfung ist **kein** „statistischer Beweis“, dass Hypothese wahr ist!
(„Trick“: Hypothese falsch $\iff$ Gegenhypothese wahr!)



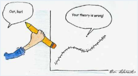
Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit

- Zunächst:
  - $G \sim N(\mu; \sigma)$ mit σ bekannt
  - Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$
  - (Null-)Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Beispiel:**
  $X_1, \ldots, X_{25}$ mit $X_i =$ Füllmenge der i-ten Flasche $\sim N(\mu; 1{,}5)$
  Nullhypothese $H_0 : \mu = 500$, d.h. $\mu_0 = 500$
- Je nach Interessenlage sind unterschiedliche **Gegenhypothesen** möglich:

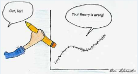
  a) $H_1 : \mu \neq \mu_0$
  b) $H_1 : \mu < \mu_0$
  c) $H_1 : \mu > \mu_0$

- Entscheidung:

	$H_0 : \mu = \mu_0$	wird abgelehnt gegenüber
a)	$H_1 : \mu \neq \mu_0$,	wenn $\lvert\bar{x} - \mu_0\rvert$ „sehr groß“ ist
b)	$H_1 : \mu < \mu_0$,	wenn $\bar{x}$ „weit kleiner“ als μ_0 ist
c)	$H_1 : \mu > \mu_0$,	wenn $\bar{x}$ „weit größer“ als μ_0 ist



Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit



Entscheidungskriterium aus Stichprobe:

$$v = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

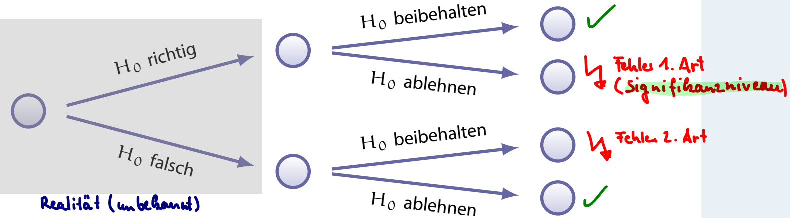
- Vorteil: Verteilung bekannt: $N(0; 1)$
- Dann:

$H_0 : \mu = \mu_0$ wird abgelehnt gegenüber

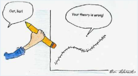
a) $H_1 : \mu \neq \mu_0$, wenn $|v|$ „sehr groß“ ist
b) $H_1 : \mu < \mu_0$, wenn v „sehr negativ“ ist
c) $H_1 : \mu > \mu_0$, wenn v „sehr positiv“ ist

Mögliche Fehlentscheidungen

- **Ablehnung von** H_0, obwohl H_0 richtig ist: Fehler 1. Art
- **Nicht-Ablehnung von** H_0, obwohl H_0 falsch ist: Fehler 2. Art



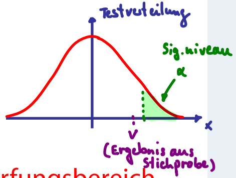
- Signifikanzniveau α: Maximal erlaubte Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.



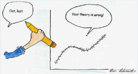
Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit

- Mithilfe von α und V kann geklärt werden, was „sehr groß“ usw. heißt:
  Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art im Fall
  a): $|v| > x$, obwohl H_0 richtig:

$$
\begin{aligned}
P(|V| > x) &= P(V > x) + P(V < -x) \\
&= 2 \cdot P(V > x) \qquad \text{(Symmetrie der Normalverteilung)} \\
&= 2 \cdot [1 - P(V \leqq x)] = 2 \cdot [1 - \Phi(x)] \stackrel{!}{=} \alpha \\
&\iff \Phi(x) = 1 - \tfrac{\alpha}{2} \\
&\iff x = x_{1-\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$



  H_0 wird demnach verworfen,
  wenn $|v| > x_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $v \in B$ ist.
  $B = (-\infty; -x_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (x_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$ heißt Verwerfungsbereich.
- Analoge Vorgehensweise für die Fälle b) und c)



Rezept

1. Ein Signifikanzniveau α wird festgelegt.
2. Der Verwerfungsbereich

$$
\begin{array}{ll}
B = \left(-\infty;\ -x_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(x_{1-\alpha/2};\ \infty\right) & \text{im Fall a)} \\
B = \left(-\infty;\ -x_{1-\alpha}\right) & \text{im Fall b)} \\
B = \left(x_{1-\alpha};\ \infty\right) & \text{im Fall c)}
\end{array}
$$

   wird festgelegt, wobei $x_{1-\alpha/2}$ bzw. $x_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha/2)$- bzw. das $(1-\alpha)$-Fraktil der $N(0,1)$-Verteilung ist. (Wichtig: Der Ablehnungsbereich ist also unabhängig von der Stichprobe)
3. Wichtig: Erst jetzt werden die Daten der Stichprobe erhoben/beachtet:
   Der Testfunktionswert $v = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ wird berechnet.
4. H_0 wird genau dann verworfen, wenn $v \in B$ gilt.

Beispiel:

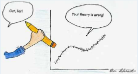
$X_1, \dots, X_{25}$ mit $X_i \sim N(\mu; 1{,}5)$ und $\bar{x} = 499{,}28$

Prüfe $H_0: \ \mu = 500, \ H_1: \ \mu \neq 500$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$

Lösung: Einstichproben-Gaußtest, Fall a)

1. $\alpha = 0{,}01$
2. $N(0;1): \ x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-0{,}005} = x_{0{,}995} = 2{,}576$
   $\Rightarrow B = (-\infty; -2{,}576) \cup (2{,}576; \infty)$
3. $v = \frac{499{,}28-500}{1{,}5} \cdot \sqrt{25} = -2{,}4$
4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Interpretation: Zum Signifikanzniveau 1 % kann der Brauerei keine Abweichung vom Sollwert $\mu_0 = 500$ nachgewiesen werden.



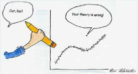
1. Einführung
2. Deskriptive Statistik
3. W-Theorie
4. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
5. Datenanalyse

Aufbau und Klassifikation von Signifikanztests

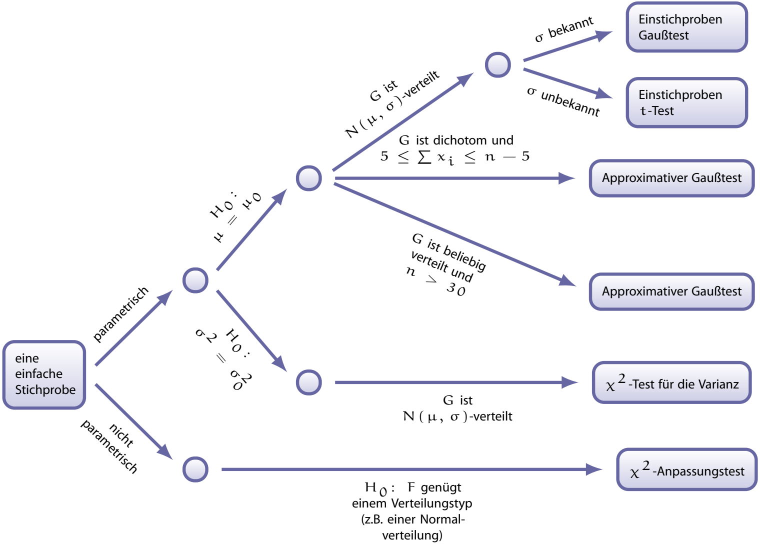
Der jeweils geeignete Test hängt ab von ...

- dem zu testenden Hypothesenpaar H_0, H_1; unterscheide:
  - Parametrische Hypothesen:
    Beziehen sich auf unbekannte(n)
    Verteilungsparameter $(\mu, \sigma^2, \ldots)$
  - Nichtparametrische Hypothesen:
    Beinhalten sonstige Aussagen, z.B. „Alter und Einkommen sind unabh.“
- den Voraussetzungen an die Verteilung/parameter
  (z.B. $G \sim N(\mu; \sigma)$)
- den Voraussetzungen an den Stichprobenumfang
  (z.B. $n > 30$)
- Art und Anzahl der Stichproben; unterscheide:
  - Signifikanztests bei einer einfachen Stichprobe
  - Signifikanztests bei mehreren unabhängigen Stichproben
  - Signifikanztests bei zwei verbundenen Stichproben

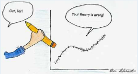
In dieser Vorlesung: Nur **einfache Stichproben**



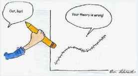
Signifikanztests bei einer einfachen Stichprobe



(Umfangreichere Übersicht über alle möglichen Fälle siehe Bamberg u. a. (2011), Seite 171ff.)



Einstichproben-t-Test und approximativer Gaußtest



Gegeben:

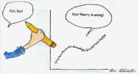
- Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit
- $E(X_i) = \mu, \;$ Var$(X_i) = \sigma^2$

Hypothesenpaare:

a)	$H_0: \mu = \mu_0$		$H_1: \mu \neq \mu_0$
b)	$H_0: \mu = \mu_0$	(oder $\mu \geqq \mu_0$),	$H_1: \mu < \mu_0$
c)	$H_0: \mu = \mu_0$	(oder $\mu \leqq \mu_0$),	$H_1: \mu > \mu_0$

Voraussetzungen:

1. Normalverteilung mit σ unbekannt (Einstichproben-t-Test)
   oder
2. Beliebige Verteilung
   mit $n > 30$ bzw. $5 \leqq \sum x_i \leqq n - 5$ (bei $B(1;p)$)
   (approximativer Gaußtest)

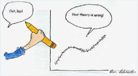


Ablauf:

1. Festlegen des Signifikanzniveaus α
2. Festlegen des Verwerfungsbereichs B:
   - Falls $H_1: \mu \neq \mu_0$: $B = (-\infty; -x_{1-\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}; \infty)$
   - Falls $H_1: \mu < \mu_0$: $B = (-\infty; -x_{1-\alpha})$
   - Falls $H_1: \mu > \mu_0$: $B = (x_{1-\alpha}; \infty)$

   Dabei steht $x_{1-\alpha/2}$ bzw. $x_{1-\alpha}$ für das jeweilige Fraktil
   - der $t(n-1)$-Verteilung bei $n \leq 29$ bzw.
   - der $N(0;1)$-Verteilung bei $n \geq 30$.
3. Berechnen des Testfunktionswertes:

$$
v = \begin{cases}
\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} & \text{falls Grundgesamtheit } N(\mu; \sigma)\text{-verteilt, } \sigma \text{ unbekannt oder falls Verteilung der GG beliebig, } n > 30,\ \sigma \text{ unbekannt} \\[2ex]
\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} & \text{falls Verteilung der GG beliebig, } n > 30,\ \sigma \text{ bekannt} \\[2ex]
\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\mu_0(1-\mu_0)}}\sqrt{n} & \text{falls GG gemäß } B(1; \mu)\text{-verteilt, } n > 30
\end{cases}
$$

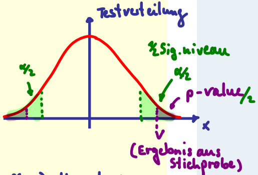


Beispiel t-Test: Energieaufnahme von Frauen

- Empfohlene täglich Energieaufnahme für Frauen: 7724 kJ (1845 kcal)
- Nehme einfache Stichprobe von 11 Frauen und teste zum Signifkanzniveau $\alpha = 0{,}05$ für
- H_0: „Der Erwartungswert der täglichen Energieaufnahme für Frauen ist 7724 kJ“ (μ_0)
- gegen H_1: $\mu \neq \mu_0$

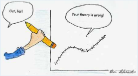
```
daily.intake <- c(5260, 5470, 5640, 6180, 6390, 6515, 6805, 7515, 7515, 8230, 8770)
t.test(daily.intake, alternative="two.sided", mu=7724, conf.level=0.95)

##
##  One Sample t-test
##
## data:  daily.intake
## t = -2.8179, df = 10, p-value = 0.01823
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 7724
## 95 percent confidence interval:
##  5986.348 7520.925
## sample estimates:
## mean of x
##  6753.636
```



p-value < α $\Rightarrow$ H_0 ablehnen

Einstichproben-t-Test, approx. Gaußtest



Beispiel:

$X_1, \ldots, X_{2000} \sim B(1; p)$ mit

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls i-te Person Wähler einer bestimmten Partei} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ergebnis der Stichprobe: $\sum\limits_{i=1}^{2000} x_i = 108$

Prüfe $H_0: \ p \leqq 0{,}05$ gegen $H_1: \ p > 0{,}05$ zum Signifikanzniveau 2 %

Lösung:

approximativer Gaußtest bei dichotomer (zweiwertiger) Verteilung; Voraussetzung 2 erfüllt: $5 \leqq 108 \leqq 2000 - 5$

1. $\alpha = 0{,}02$
2. $N(0;1): \ x_{1-\alpha} = x_{0{,}98} = 2{,}05$ (Tabelle) $\Rightarrow B = (2{,}05; \infty)$
3. $v = \dfrac{\frac{108}{2000} - 0{,}05}{\sqrt{0{,}05 \cdot (1 - 0{,}05)}} \sqrt{2000} = 0{,}82$
4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Zusatzfrage: Entscheidung, falls $\alpha = 0{,}01$? $\rightarrow$ Keine Änderung!

Chi-Quadrat-Test für die Varianz

- Gegeben: Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu; \sigma)$
- Hypothesenpaare:

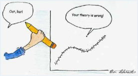
$$
\begin{array}{llll}
\text{a)} & H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 & & H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \\
\text{b)} & H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 & (\text{oder } \sigma^2 \geqq \sigma_0^2), & H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \\
\text{c)} & H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 & (\text{oder } \sigma^2 \leqq \sigma_0^2), & H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2
\end{array}
$$

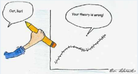
- **Vorgehensweise:**
  1. Festlegen des Signifikanzniveaus α.
  2. Festlegen des Verwerfungsbereichs:

$$
\begin{array}{ll}
B = \left[0; x_{\alpha/2}\right) \cup \left(x_{1-\alpha/2}; \infty\right) & \text{im Fall a)} \\
B = [0; x_{\alpha}) & \text{im Fall b)} \\
B = (x_{1-\alpha}; \infty) & \text{im Fall c)}
\end{array}
$$

  3. Berechnung des Testfunktionswertes:

$$
v = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2
$$





Chi-Quadrat-Test für die Varianz

Beispiel: $G \sim N(\mu; \sigma)$

$$(x_1, \ldots, x_{10}) = (2100; 2130; 2150; 2170; 2210; 2070; 2230; 2150; 2230; 2200)$$

Prüfe $H_0: \ \sigma = 40, \ H_1: \ \sigma \neq 40$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$

Lösung: χ^2-Test für die Varianz, Hypothese Fall a);
Voraussetzungen sind erfüllt

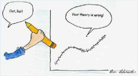
1. $\alpha = 0{,}1$
2. $\chi^2(9): \ x_{\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}05} = 3{,}33; \ x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}95} = 16{,}92$
   (Tabelle der χ^2-Verteilung)

   $$\Rightarrow B = [0; 3{,}33) \cup (16{,}92; \infty)$$

3. $\bar{x} = \frac{1}{10}(2100 + 2130 + \cdots + 2200) = 2164$

   $v = \frac{1}{40^2}\left[(2100 - 2164)^2 + \cdots + (2200 - 2164)^2\right] = 16{,}65$

   $\Rightarrow v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen



Zwei verbundene einfache Stichproben: Kontingenztest

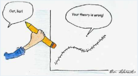
- Situation: In Grundgesamtheit G: Zwei verbundene einfache Stichproben, also Beobachtung zweier Merkmale X, Y
- Hypothese:

H_0 : Die beiden Merkmale X und Y sind in G unabhängig.
H_1 : X und Y sind in G abhängig.

Vorgehensweise Kontingenztest:

1. Festlegen des Signifikanzniveaus α.
2. Unterteilung der x-Achse in $k \geq 2$ und die y-Achse in $l \geq 2$ disjunkte, aneinander angrenzende Intervalle $A_1, \ldots, A_k$ bzw. $B_1, \ldots, B_l$
3. Erstellen einer Kontingenztabelle mit Randhäufigkeiten:

$x\downarrow \; y\rightarrow$	B_1	B_2	$\cdots$	B_l	
A_1	h_{11}	h_{12}	$\cdots$	h_{1l}	$h_{1\bullet}$
A_2	h_{21}	h_{22}	$\cdots$	h_{2l}	$h_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
A_k	h_{k1}	h_{k2}	$\cdots$	h_{kl}	$h_{k\bullet}$
	$h_{\bullet 1}$	$h_{\bullet 2}$	$\cdots$	$h_{\bullet l}$	n



Vorgehensweise Kontingenztest (Fortsetzung):

4. Mit dem Fraktilswert $x_{1-\alpha}$ der χ^2-Verteilung mit $(k-1)\cdot(l-1)$ Freiheitsgraden: Berechnung des Verwerfungsbereichs

$$B = (x_{1-\alpha}; \infty)$$

5. Zu jeder Kombination aus $i = 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, l$: Berechnung der Größe

$$\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\bullet} \cdot h_{\bullet j}}{n}$$

6. Berechnung des Testfunktionswerts v:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\left(\tilde{h}_{ij} - h_{ij}\right)^2}{\tilde{h}_{ij}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{h_{ij}^2}{\tilde{h}_{ij}} - n$$

7. Ablehnung von H_0 genau dann, wenn $v \in B$.

Zwei verbundene einfache Stichproben: Kontingenztest

Kontingenztest: Beispiel

- 400 Erstkandidaten einer praktischen Führerscheinprüfung schneiden abhängig von der besuchten Fahrschule folgendermaßen ab:

	Fahrschule		
	A	B	C
bestanden	130	88	62
durchgefallen	70	38	12

- Zum Signifikanzniveau von 5 % soll getestet werden, ob das Bestehen der Prüfung unabhängig von der besuchten Fahrschule ist.

Testdurchführung

1. Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$
2. entfällt, da Skalenniveau nominal
3. Kontingenztabelle:

	A	B	C	$\sum$
best.	130	88	62	280
durchg.	70	38	12	120
$\sum$	200	126	74	400

4. Berechnung der $\tilde{h}_{ij}$:

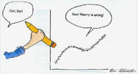
	A	B	C
best.	140	88,2	51,8
durchg.	60	37,8	22,2

5. χ^2-Verteilung mit $(3-1)\cdot(2-1) = 2$ Freiheitsgraden: $x_{1-0,05} = x_{0,95} = 5{,}99$:

$$B = (5{,}99; \infty)$$

6. $$v = \frac{(130-140)^2}{140} + \ldots + \frac{(12-22{,}2)^2}{22{,}2} \approx 9{,}077$$

7. $v \in B$: Also wird H_0 abgelehnt, die Prüfungsergebnisse sind abhängig von der Fahrschule.



Statistik: Table of Contents

Problemstellung

- Synonym: Multivariate Datenanalyse, Numerische Taxonomie, Multivariatenanalyse
- Aufgaben: Analyse von **Zusammenhängen und Ähnlichkeitsbeziehungen** zwischen Elementen einer bestimmten Menge
- Teilgebiet der **Statistik**
- Einsatz sinnvoll bei großen Datenmengen mit mehr als einem Merkmal
- Ausgangspunkt: Datenmatrix oder Distanzmatrix.

Die Datenmatrix

- enthält zeilenweise Objekte (Merkmalsträger, cases)
- enthält spaltenweise Merkmale (variables, items)

Beispiel

	type	income	education	prestige
engineer	prof	72	86	88
insurance.agent	wc	55	71	41
lawyer	prof	76	98	89
dentist	prof	80	100	90
mail.carrier	wc	48	55	34

(Auszug aus Daten von Duncan (1961))

Die Distanzmatrix

- enthält zeilen- und spaltenweise Objekte.
- Die Einträge der Matrix sind Werte für die Verschiedenheit (Distanzen) zweier Objekte.

Beispiel

	engineer	insurance.agent	lawyer	dentist	mail.carrier
engineer	0.000	0.676	0.102	0.149	0.851
insurance.agent	0.676	0.000	0.778	0.825	0.175
lawyer	0.102	0.778	0.000	0.047	0.953
dentist	0.149	0.825	0.047	0.000	1.000
mail.carrier	0.851	0.175	0.953	1.000	0.000

3 Teilbereiche der Datenanalyse nach dem Zweck der Anwendung

Datenverdichtende Verfahren (**deskriptiv**)

- Kennzahlen
- Indizes
- Faktorenanalyse

Strukturaufdeckende Verfahren (**explorativ**)

- Kreuztabellen
- Faktorenanalyse
- Clusteranalyse
- MDS
- Korrespondenzanalyse

Strukturprüfende Verfahren (**induktiv**)

- Varianzanalyse
- Regressionsanalyse
- logistische Regression
- Diskriminanzanalyse
- Conjoint-Analyse

Klassische Anwendungsbereiche der Datenanalyse

Marketing/ Marktforschung

- Marktsegmentierung
- Kundentypisierung
- Aufdecken von Marktnischen
- Ermittlung von Marktreaktionen

Sozialwissenschaften

- Einstellungsanalysen
- Qualifikationsprofile

Biologie

- Zuordnung von Pflanzen oder Tieren zu Gattungen

Medizin

- Hilfe bei Diagnosen
- Überprüfung von Therapieerfolgen

Volkswirtschaft

- Input-Output-Analysen zur Abgrenzung und Aggregation von Wirtschaftssektoren

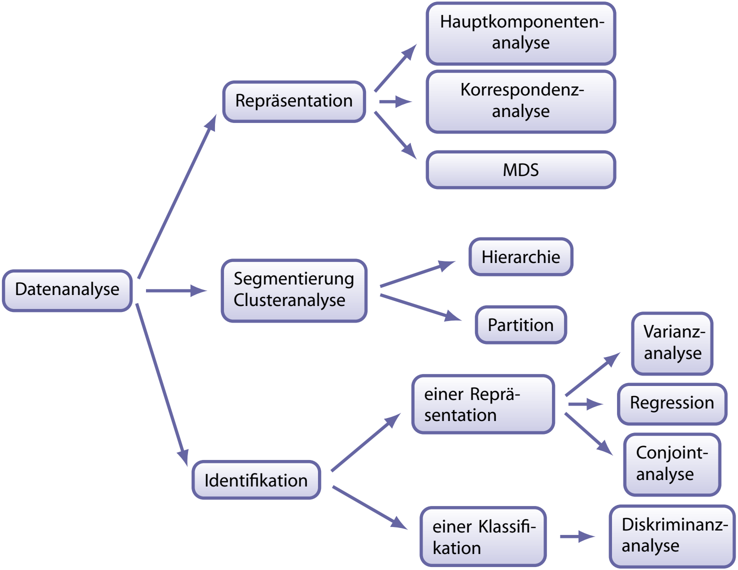
Bibliothekswesen

- Katalogisierung
- Auffinden von ähnlichen Werken

Die klassische Dreiteilung der Datenanalyse

- Segmentierung (Clusteranalyse): Zusammenfassung von Objekten zu homogenen Klassen aufgrund von Ähnlichkeiten in wichtigen Merkmalsbereichen
- Repräsentation: Darstellung von Objekten durch Punkte im 2- oder 3-dimensionalen Raum, wobei Ähnlichkeitsbeziehungen durch räumliche Nähe zum Ausdruck kommen sollen
- Identifikation: Reproduktion einer gegebenen Segmentierung oder Repräsentation mit Hilfe weniger aussagekräftiger Merkmale (Ziel: Prognose, Klassifikation)

Dreiteilung: Methoden



Ablauf einer datenanalytischen Untersuchung

1. Präzisierung des Untersuchungsziels

- Formulierung der Zielsetzung
- Abgrenzung der Untersuchungsobjekte
- Ableitung der taxonomischen Aufgabenstellung
  - Segmentierung
  - Repräsentation
  - Identifikation

2. Diskussion der Datenbasis

- Auswahl der Merkmale
- Festlegung des Skalenniveaus oder
- Charakterisierung der Objekte durch direkte Vergleiche

3. Datenerhebung und -erfassung

- Primär- oder Sekundärerhebung
- Vollerhebung oder Teilerhebung (Stichprobenauswahl!)
- Datencodierung und ggf. Dateneingabe in DV-Systeme

Ablauf einer datenanalytischen Untersuchung

4. Datenanalyse

- Univariate Datenanalyse
  (Screening, erster Einblick in die Merkmalsstruktur, Plausibilitätsprüfung)
  $\longrightarrow$ Deskriptive Verfahren
- Multivariate Datenanalyse
  (nicht 'statistics all', sondern Verfahrenseinsatz nach Aufgabenstellung und Zielsetzung)
  $\longrightarrow$ Explorative und induktive Verfahren

5. Interpretation der Ergebnisse

- Klassenstatistiken und Bezeichnungen bei Clusteranalysen
- Benennung der Achsen bei Repräsentationsverfahren
- Überprüfen der Modellqualität z.B. mittels Test- bzw. Validierungsdaten bei Identifikationsverfahren