Wirtschaftsmathematik

für International Management (BA) und Betriebswirtschaft (BA)

Wintersemester 2014/15

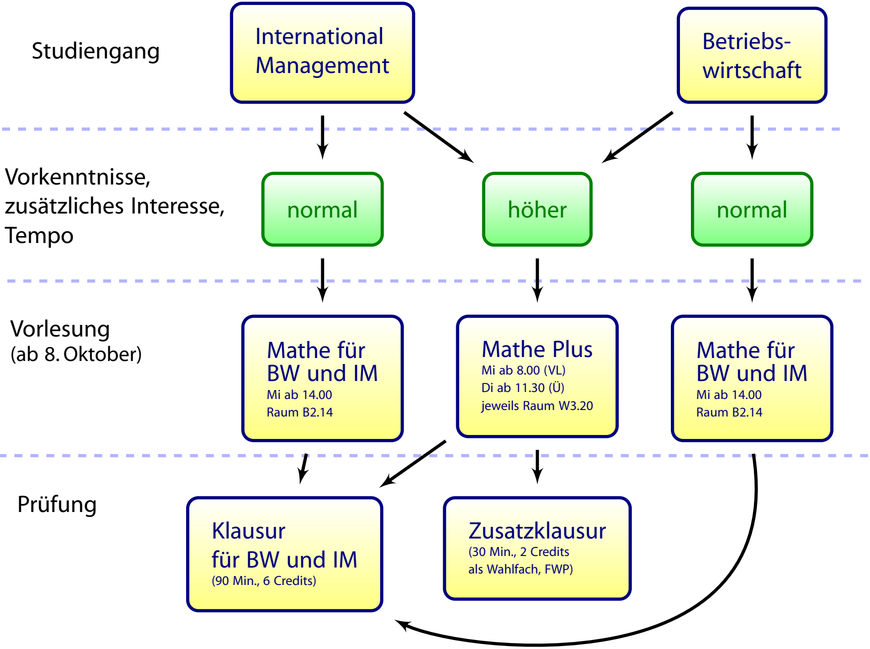
Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg

Veranstaltungskonzept

- Mitschrift empfohlen!
- Folien sind nur ergänzendes Material zur Mitschrift
- Aufteilung in Vorlesung (Plenum) und Übungsgruppen (kleinere Gruppen)

- Viele Aufgaben als Hausaufgabe, Besprechung in Übungsgruppen
- Ohne selbständiges Rechnen der Übungsaufgaben ist Nutzen der Veranstaltung sehr gering
- Fragenstellen ist jederzeit erwünscht
- Bei Fragen oder Problemen: E-Mail an Team
- Informations-Backbone für Unterlagen und mehr: `http://goo.gl/AmOyp9`

Organisation



Vorlesungsbegleitende Unterlagen

- **Arbeitsmaterial**: Foliensatz, Aufgabenskript, Mitschrift auf Wunsch
- **Bücher** (unterstützend):

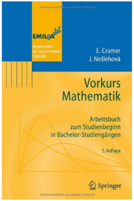
Cramer, Erhard und Johanna Neslehova (2012). **Vorkurs Mathematik – Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen**. 4. Aufl. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Luderer, Bernd (2003). **Einstieg in die Wirtschaftsmathematik**. 5. Aufl. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden: Teubner.

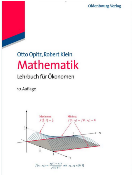
Opitz, Otto und Robert Klein (2011). **Mathematik – Lehrbuch für Ökonomen**. München: Oldenbourg. ISBN: 3486596713.

Sydsaeter, Knut und Peter Hammond (2008). **Essential Mathematics for Economic Analysis**. 3. Aufl. Prentice Hall. ISBN: 0273713248.

E-Books innerhalb des Hochschulnetzwerks kostenlos unter



http://goo.gl/9k3rqt



http://goo.gl/CWClv2

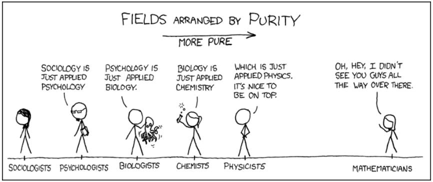
Prüfung

Klausur:

- Klausur am Ende des Semesters
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten
- Erreichbare Punktzahl: 50
- Hilfsmittel:
  - Schreibzeug,
  - Taschenrechner, der nicht 70! berechnen kann,
  - ein Blatt (DIN-A4, vorne und hinten beschrieben) mit handgeschriebenen Notizen (keine Kopien oder Ausdrucke),
- Danach (optional): Für Teilnehmer der Mathe-Plus Vorlesung noch eine 30-minütige Teilklausur über zusätzliche Inhalte (2 Wahlfachcredits als FWP-Fach zusätzlich möglich)

Zitate

- Es gibt Dinge, die den meisten Menschen unglaublich erscheinen, die nicht Mathematik studiert haben.
  – Archimedes



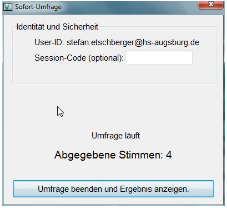
- Die Mathematik muss man schon deswegen studieren, weil sie die Gedanken ordnet.
  - M. W. Lomonossow
- Physics is the study of the world, while mathematics is the study of all possible worlds.
  – Clifford Taubes
- In mathematics you don't understand things. You just get used to them.
  – John von Neumann,
- Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk.
  – Leopold Kronecker
- Du wolltest doch Algebra, da hast du den Salat.
  – Jules Verne
- Es ist schon alles gesagt worden, aber noch nicht von allen.
  – Karl Valentin

...die Sie nach dem Kurs lösen können:

- Sich widersprechende Politiker entlarven,
- Bedarf an Einzelteilen in Produktionsprozessen bestimmen,
- die Käuferfluktuation zwischen verschiedenen Produkten im Zeitablauf analysieren,
- die Nachfragereaktion von Kaffee auf Preisänderungen bestimmen
- Ihre Rente ausrechnen
- Große Kisten in kleine Ecken quetschen
- Möglichst viel Gewinn bei möglichst wenig Ressourcenverbrauch machen

Umfragen in Vorlesung mit **EduVote**:

- System zur Abstimmung im Hörsaal
- App herunterladen oder direkt benutzen unter eduvote.de
- User-Id: `Etschberger`

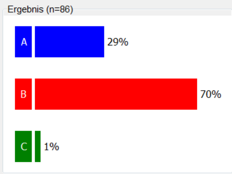


Testfrage: Was ist ein Veterinär?

A) Ein ehemaliger Soldat

B) Ein Tierarzt

C) Jemand, der kein Fleisch isst

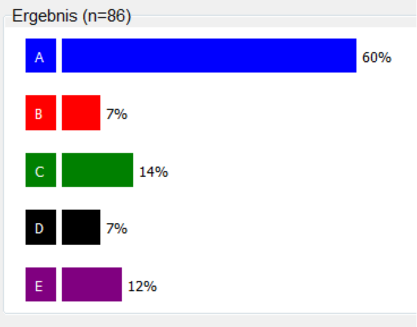


Testfrage: Letzte Mathestunde

Wie viel Zeit ist seit Ihrer letzten Mathestunde vergangen?
(ohne Startklar oder Vorkurs an der Hochschule zu zählen)

Antwort:

- A 0 bis 6 Monate
- B mehr als 6 Monate bis 1 Jahr
- C mehr als 1 Jahr bis 2 Jahre
- D mehr als 2 Jahre bis 4 Jahre
- E mehr als 4 Jahre



Begriffe

Begriff	Nie gehört	Gehört	Kann ich erklären
Logarithmus			
Kartesisches Produkt			
Geometrische Reihe			
Kapitalwert			
Simplex-Algorithmus			

Mathematik: Gliederung

1 Grundlegende Bausteine

- Reelle Zahlen
- Ganzzahlige Potenzen
- Algebraische Umformungen
- Brüche
- Nichtganzzahlige Potenzen
- Logarithmen

„Vernünftige" Zahlen

- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}$
- Ganze Zahlen; $\mathbb{Z}$
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q}$
- Rationale Zahlen liegen unendlich dicht auf dem Zahlenstrahl

Aber

- Aber: Lösungen von Gleichungen wie

$$x^2 = 2$$

  haben keine rationale Lösung
- Folge: Es gibt auch irrationale Zahlen: Z.B. $\sqrt{2}$

Zahldarstellung über Vielfache von 10

- Die meisten Leute schreiben Zahlen heute im Dezimalsystem
- Damit möglich: Schreiben jeder natürlichen Zahl mit Kombinationen der Ziffern $0, 1, \ldots, 9$
- z.B.: $2009 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
- Mit Dezimalkomma: Schreiben rationaler Zahlen möglich
- z.B.: $2{,}36 = 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 6 \cdot \frac{1}{10^2}$ (endlicher Dezimalbruch)
- z.B.: $\frac{10}{3} = 3{,}333\ldots = 3 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^3} + \ldots$ (unendlicher Dezimalbruch)
- Jede rationale Zahl kann man über einen periodischen Dezimalbruch darstellen

Definition reeller Zahlen

- Eine reelle Zahl hat die Form

$$x = m, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

- Dabei: m: Ganze Zahl
- und a_i (mit $i = 1, 2, \ldots$) ist unendliche Folge von Ziffern von 0 bis 9
- Damit: Nichtperiodische Dezimalbrüche heißen irrationale Zahlen
- Beispiele:

$$\sqrt{2}, \quad -\sqrt{17}, \quad \pi, \quad 0{,}1121121112\ldots$$

- Rechenoperationen $+$, $-$, $\cdot$, : mit reellen Zahlen ergeben wieder reelle Zahlen
- Einzige Ausnahme: $\frac{p}{0}$ ist keine reelle Zahl

- Abkürzung: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ oder $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$
- Allgemein:

$$\boxed{a^n = a \cdot a \cdot \ldots a}$$

- Rechenregeln:

$$\boxed{\begin{aligned} a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\ (a^r)^s &= a^{r \cdot s} \end{aligned}}$$

- Achtung: im allgemeinen

$$\boxed{(a+b)^r \neq a^r + b^r}$$

Anwendungsbeispiel für Potenzen

Zinseszinsen

- Anlage von 1000 € auf Bankkonto
- Verzinsung jeweils am Jahresende 2,5 %
- Zinsen nach einem Jahr: $1000 \cdot 2{,}5\ \% = 25$
- Kontostand am Jahresende:

$$1000 + 1000 \cdot 2{,}5\ \% = 1000 \cdot (1 + 0{,}025) = 1000 \cdot 1{,}025$$

- Kontostand am Ende des zweiten Jahres:

$$\begin{aligned} &(1000 \cdot 1{,}025) + (1000 \cdot 1{,}025) \cdot 0{,}025 \\ &= 1000 \cdot 1{,}025 \cdot (1 + 0{,}025) \\ &= 1000 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}025 = 1000 \cdot 1{,}025^2 \end{aligned}$$

- Allgemein: Kontostand ist bei Anfangskapital K und einem Zinssatz von i nach n Jahren

$$\boxed{K_n = K \cdot (1 + i)^n}$$

Wichtige Rechenregeln

Es gilt für beliebige Zahlen a, b, c:

(1) $a + b = b + a$

(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(3) $a + 0 = a$

(4) $a + (-a) = 0$

(5) $ab = ba$

(6) $(ab)c = a(bc)$

(7) $1 \cdot a = a$

(8) $aa^{-1} = 1$ (für $a \neq 0$)

(9) $(-a)b = a(-b) = -ab$

(10) $(-a)(-b) = ab$

(11) $a(b + c) = ab + ac$

(12) $(a + b)c = ac + bc$

Algebraische Ausdrücke

- Beispiel für einen algebraischen Ausdruck:

$$4x^2y^2 + 7y^4x - 9xy + 11xy^4$$

- Die einzelnen Summanden ($4x^2y^2$, $-9xy$, usw.) heißen Terme des Ausdrucks
- Faktoren vor den Buchstaben (4, 7, -9, 11): Koeffizienten
- Terme, die sich maximal durch Koeffizienten unterscheiden, genannt Koeffizienten von der gleichen Art, können zusammengefasst werden:

$$7y^4x + 11xy^4 = 18xy^4$$

Binomische Formeln

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Primfaktorzerlegung

- Zahlen können multiplikativ in Primfaktoren zerlegt werden,
- Beispiel

$$64 = 8 \cdot 8 \quad \text{oder} \quad 1848 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

Faktorisierung algebraischer Ausdrücke

- Analog bei algebraischen Ausdrücken:
  Zerlegung in irreduzible Faktoren
- Beispiele:

$$5a^2b^3 - 15ab^2 = 5 \cdot a \cdot b^2 \cdot (ab - 3)$$

$$16a^4b^2 - 9b^4 = b^2 \cdot \left(4a^2 - 3b\right) \cdot \left(4a^2 + 3b\right)$$

Brüche

- Division zweier Zahlen ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) kann durch Bruch geschrieben werden

$$a : b = \frac{a}{b} = a/b$$

- Rechenregeln ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \quad (b, c \neq 0)$$

$$-\frac{a}{b} = (-1)\frac{a}{b} = \frac{(-1)a}{b} = \frac{-a}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{(-a) \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Quadratwurzel

- Potenz mit a^x, wenn $a \geq 0$ und $x = 1/2$: Quadratwurzel
- Schreibweise:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad \text{wenn } a \geq 0$$

- Rechenregeln für $a \neq 0$ und $b > 0$:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

- Achtung: Im allgemeinen:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

N-te Wurzeln

- Problem: Was bedeutet z.B. $5^{\frac{1}{3}}$?
- Damit Rechenregeln gültig bleiben: $5^{\frac{1}{3}}$ ist Lösung der Gleichung $x^3 = 5$
- Also Allgemein ($a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$):

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^1 = a$$

- Schreibweise:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

- Allgemeine rationale Exponenten ($a \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$):

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p}$$

Logarithmen

- Wie löst man die Gleichung $a^x = b$ nach x auf? (dabei soll gelten $a, b > 0$ und $a \neq 1$)
- Neues Symbol: Der **Logarithmus von b zur Basis a**:

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b$$

- Beobachtungen:
  - $\log_a a = 1$
  - $\log_a 1 = 0$
  - $\log_a (a^n) = n$
- Rechenregeln:

$$\log_a (c \cdot d) = \log_a c + \log_a d$$

$$\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Logarithmen

Spezielle Logarithmen:

- $\log_2 x = \operatorname{ld} x$ Logarithmus dualis
- $\log_{10} x = \log x$ Dekadischer Logarithmus
- $\log_e x = \ln x$ Logarithmus naturalis

Umrechnung von Basen

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Beispiel

- Nach wieviel Jahren verdoppelt sich ein Anfangskapital K mit einem jährlichen Zins von 5%?
- Lösung:

$$\begin{aligned} & 2K = K \cdot (1 + 5\%)^n = K \cdot 1{,}05^n \\ \Leftrightarrow\quad & 1{,}05^n = 2 \\ \Leftrightarrow\quad & n = \log_{1{,}05} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2 \end{aligned}$$

Mathematik: Gliederung

2 Grundlegende Werkzeuge

- Notation von Summen
- Binomische Formel
- Doppelsummen
- Grundbegriffe der Logik
- Grundlegendes über Mengen

Summenzeichen

- Oft sinnvoll: Abkürzen von längeren Summen durch das Summenzeichen $\sum$ (Großes griechisches Sigma)
- Beispiel: Summe von 6 durchnumerierten Zahlen:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = \sum_{i=1}^{6} N_i$$

  Sprechweise: „Summe von i gleich 1 bis 6 über N_i"
- Obere und untere Summationsgrenze kann variieren, z.B.

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$$

- Auch konkrete Berechnungsvorschriften sind möglich, z.B.

$$\sum_{i=3}^{8} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$$

Rechenregeln für das Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \text{Additivität}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{Homogenität}$$

- Damit leicht zu zeigen (Setze $\mu_x = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$):

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - \mu_x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - \mu_x)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) - n \cdot \mu_x^2$$

Produktzeichen

- Analog zum Summenzeichen:
  Das Produktzeichen $\prod$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

- Zum Beispiel:

$$\prod_{i=1}^{2} \left(x + (-1)^i\right) = (x-1)(x+1)$$

- Spezielle Abkürzung:

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! \qquad \text{„n Fakultät"}$$

Binomialkoeffizient

- Man definiert den Binomialkoeffizienten als:

$$\binom{m}{k} = \frac{\prod\limits_{i=(m-k+1)}^{m} i}{\prod\limits_{j=1}^{k} j} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$$

- Wobei $0! = 1$ gesetzt wird. Also: $\binom{m}{0} = 1$
- Beispiel:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

- Rechenregeln:

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \qquad \text{und} \qquad \binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1}$$

Binomische Formel

- Newtons **binomische Formel**

$$(a+b)^m = \binom{m}{0} a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \cdots + \binom{m}{m-1} a b^{m-1} + \binom{m}{m} b^m$$

- Kurzform:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

- Zum Beispiel:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

- Beispielsituation: Daten in Tabellenform in n Spalten und m Zeilen
- Einzelne Einträge: a_{ij} mit $i \in 1, \ldots, m$ und $j \in 1, \ldots, n$
- Summe über alle Zahlen mit Doppelsummen:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \ldots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right)$$

- Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Sätze, Implikation und Äquivalenz

- Satz: Aussage, die als wahr oder falsch nachgewiesen werden kann
- Implikation: Wenn Aussage A wahr ist muss Aussage B wahr sein. Andernfalls ist Implikation falsch. Schreibweise:

$$A \Rightarrow B$$

- Gilt $A \Rightarrow B$ sagt man auch:
  - A ist eine hinreichende Bedingung für B
  - B ist eine notwendige Bedingung für A
- Äquivalenz: Gilt $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ gleichzeitig, sind A und B äquivalent:

$$A \Leftrightarrow B$$

Warum Äquivalenzumformungen bei Gleichungen?

- Gegeben: Kette von Äquivalenzumformungen

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = 17$$

- Ersetzen von „$\Leftrightarrow$" durch „$\Rightarrow$"?
  Bedeutung: Lösungsmenge $\subset \{1, 17\}$
- Ersetzen von „$\Leftrightarrow$" durch „$\Leftarrow$"?
  Bedeutung: Lösungsmenge $\supset \{1, 17\}$

Mengen und Elemente

- Menge: Sammlung von Elementen
- Aufzählung in geschweiften Klammern. Zum Beispiel Menge E:

$$E = \{\text{Fisch}, \text{Nudeln}, \text{Huhn}, \text{Eis}\}$$

- Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn jedes Element von A auch in B ist und andersherum, also:

$$\{a,\ 1,\ 4\} = \{4,\ 1,\ a\}$$

- Darstellung von Mengen durch Beschreibung der Elemente, z.B.

$$M = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$$

- Zugehörigkeit zu einer Menge:

$x \in A$ x ist ein Element der Menge A

Teilmengen und Verknüpfungen

Teilmengen

- Ist Jedes Element einer Menge A auch Element der Menge B,

  so heißt A **Teilmenge** von B $\quad A \subset B$

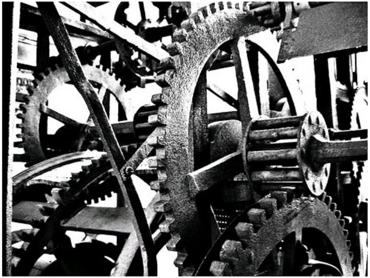
- Damit gilt:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \text{ und } B \subset A$$

Mengenverknüpfungen

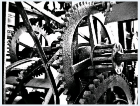
Notation	Sprechweise	Die resultierende Menge besteht aus den Elementen, die
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B	mindestens zu A oder B gehören
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B	sowohl in A als auch in B liegen
$A \backslash B$	A ohne B	zu A, aber nicht zu B gehören

Mathematik: Gliederung



3 Aussagenlogik

- Einführung
- Aussagenverknüpfungen
- Argumentationstechniken



Warum beschäftigen wir uns mit der Aussagenlogik?

- zahlreiche „Aussagen“ aus der Vorlesung erforden grundlegendes Verständnis der Aussagenlogik
- Grundlage der mathematischen Beweisführung
- Hilfreich zum Erlernen von Programmiersprachen

Wesentliche Lernziele

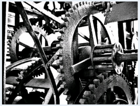
- Kenntniss der relevanten Begriffe wie Definition, Axiom, Satz und Beweis
- Verständnis der wesentlichen aussagenlogischen Operatoren
- Auswertung logischer Aussagen hinsichtlich der Eigenschaften „wahr“ oder „falsch“
- Beherrschung grundlegender Beweistechniken wie dem direkten und indirekten Beweis sowie der vollständigen Induktion

Aussagen eines Politikers zur Wahl

A : Vollbeschäftigung
B : Steuererhöhung
C : Politiker kümmern sich

1 $A \vee \bar{B}$
2 $C \Rightarrow B$
3 $C \vee \bar{A}$
4 $A \Rightarrow B$

- 1 Die Vollbeschäftigung wird erhalten oder die Steuern dürfen nicht erhöht werden.
- 2 Wenn sich Politiker um die Bevölkerung kümmern, müssen die Steuern angehoben werden.
- 3 Die Politiker kümmern sich um die Bevölkerung oder die Vollbeschäftigung kann nicht erhalten werden.
- 4 Es stimmt nicht, dass die Erhaltung der Vollbeschäftigung eine Steuererhöhung zur Folge haben muss.



Aussagenlogik

Axiom: nicht zu beweisen, Grundtatsache

z.B. jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger

Definition: Abkürzung

z.B.: $\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{-mal}} = a^n$

Aussage (Satz, Theorem, Lemma): Als falsch oder wahr identifizierbar

z.B.: $a^0 = 1 \quad (a\neq 0)$

$$a^0 = a^{n-n} = a^n\cdot a^{-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

(wahr)

Verknüpfung von Aussagen

Negation: Aussage A, Negation: $\overline{A}$

z.B.: A: Es regnet, $\overline{A}$: Es regnet nicht

Wahrheitstabelle

wahr
falsch

A	w	f
$\overline{A}$	f	w

Konjunktion: Aussagen: A, B

$A \wedge B$: „A und B"

z.B.: A: Herr Mayer ist gesund
B: Herr Mayer atmet

$A \wedge B$: Herr Mayer ist gesund und er atmet

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A\wedge B$	w	f	f	f

Disjunktion

$A \vee B$: „A oder B"

(nicht: entweder oder)

Bsp: $A\vee B$: Herr Mayer ist gesund oder er atmet

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A\vee B$	w	w	w	f

Implikation

$A \Rightarrow B$ "Wenn A, dann B"
„A ist hinreichend für B"
„Aus A folgt B"
„B ist notwendig für A"

Beispiel: $A \Rightarrow B$: Wenn Herr Mayer ~~atmet~~ gesund ist, ~~ist er gesund~~ atmet er

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A\Rightarrow B$	w	f	w	w

Achtung: $A \Rightarrow B$ ist nicht gleichwertig mit $\left.\begin{array}{l}\bar{A} \Rightarrow \bar{B} \\ B \Rightarrow A\end{array}\right\}$

$A \Rightarrow B$ ist gleichwertig mit $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

Beweis:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$\bar{A}$	f	f	w	w
$\bar{B}$	f	w	f	w
$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$	w	w	f	w
$B \Rightarrow A$	w	w	f	w
$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$	w	f	w	w

Äquivalenz

$A \Leftrightarrow B$ „Genau dann wenn A gilt, gilt auch B"

Beispiel: $A \Leftrightarrow B$: Genau dann, wenn Herr Maye gesund ist, atmet er

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w

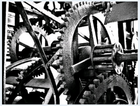
Beobachtung: $A \Leftrightarrow \bar{\bar{A}}$, $(A \Rightarrow B) \not\Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$ → Tautologie (eine immer wahre Aussage)

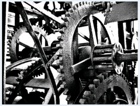
Beispiel

Aussagen eines Politikers zur Wahl

- Die Vollbeschäftigung wird erhalten oder die Steuern dürfen nicht erhöht werden.
- Wenn sich Politiker um die Bevölkerung kümmern, müssen die Steuern angehoben werden.
- Die Politiker kümmern sich um die Bevölkerung oder die Vollbeschäftigung kann nicht erhalten werden.
- Es stimmt nicht, dass die Erhaltung der Vollbeschäftigung eine Steuererhöhung zur Folge haben muss.



Begriffe

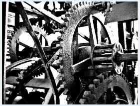


- Axiom: Grundsachverhalt als Ausgangspunkt, wird nicht bewiesen
- Definition: Sachverhalt, wird durch neuen Begriff beschrieben, bezieht sich auf bereits Definiertes oder auf Axiome
- Aussage (math. Satz): Formulierung auf Basis bisherigen Wissens, wird als wahr oder falsch identifiziert.
- Aussagenverknüpfungen: Negation ($\overline{A}$), Konjunktion ($A \wedge B$), Disjunktion ($A \vee B$), Implikation ($A \Rightarrow B$), Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$)
- Tautologie: Verknüpfte, stets wahre Aussage
- Kontradiktion: Verknüpfte, stets falsche Aussage
- Allaussage:

$$A(1) \wedge A(2) \ldots \quad = \quad \bigwedge_x A(x) \ (\text{für } x = 1{,}2, \ldots) \quad = \quad \forall\, x: \ A(x)$$

- Existenzaussage:

$$A(1) \vee A(2) \ldots \quad = \quad \bigvee_x A(x) \ (\text{für } x = 1{,}2, \ldots) \quad = \quad \exists\, x: \ A(x)$$



Wahrheitswerte aller möglichen Verknüpfungen der Aussagen A und B

A	w	w	f	f	
B	w	f	w	f	
1)	w	w	w	w	Verknüpfung ist stets wahr
2)	f	f	f	f	Verknüpfung ist stets falsch
2)	f	f	f	f	Verknüpfung ist stets falsch
3)	w	w	w	f	Disjunktion $A \vee B$
4)	w	w	f	w	Implikation $B \Rightarrow A$
5)	w	f	w	w	Implikation $A \Rightarrow B$
6)	f	w	w	w	Negierte Konjunktion $\overline{A \wedge B}$
7)	w	f	f	f	Konjunktion $A \wedge B$
8)	f	w	f	f	Negierte Implikation $\overline{A \Rightarrow B}$
9)	f	f	w	f	Negierte Implikation $\overline{B \Rightarrow A}$
10)	f	f	f	w	Negierte Disjunktion $\overline{A \vee B}$
11)	w	f	f	w	Äquivalenz $A \iff B$
12)	f	w	w	f	Negierte Äquivalenz $\overline{A \iff B}$
13)	f	w	f	w	Negation $\overline{B}$
14)	f	f	w	w	Negation $\overline{A}$