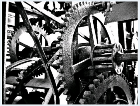
Wirtschaftsmathematik

für International Management (BA) und Betriebswirtschaft (BA)

Wintersemester 2014/15

Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg



- Direkter Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ (analog Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$):

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$$

- Beweis von $A \not\Rightarrow B$ durch Gegenbeispiel
- Beweisprinzip der vollständigen Induktion für Allaussagen
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für kleinstmöglichen Wert von n (oft $n = 0$ oder $n = 1$)
  - Induktionsvoraussetzung: Annahme, dass die Aussage für n wahr ist
  - Induktionsschluss: Beweis (unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung), dass die Aussage auch für $n + 1$ gültig ist
- Beispiel (vollst. Induktion): $A(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $n \in \mathbb{N}$
  - Ind.-Anfang: $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 \quad = \quad \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$
  - Ind.-Schluss:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Notation von Summen und Produkten

Zielwert

Beispiel : $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

Laufvariable　　Startwert　　zu summierender Ausdruck

Summenzeichen

„Summe von i = 1 bis n über i^2"

allgemein : $\sum_{i=m}^{n} a_i \qquad (n, m \in \mathbb{Z},\ m \leq n)$

Beispiel : $\sum_{i=1}^{7} 2i-1 = \underset{i=1}{1} + \underset{i=2}{3} + \underset{3}{5} + \underset{4}{7} + \underset{5}{9} + \underset{6}{11} + \underset{7}{13}$

$$\sum_{k=3}^{6} \frac{k}{k+1} = \frac{3}{3+1} + \frac{4}{4+1} + \frac{5}{5+1} + \frac{6}{6+1}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}$$

$$\sum_{j=-2}^{2} (j^2+k)^2 = ((-2)^2+k)^2 + ((-1)^2+k)^2 + (0^2+k)^2$$

$$+ (1^2+k)^2 + (2^2+k)^2$$

$$= (16 + 8k + k^2) \cdot 2 + (1 + 2k + k^2) \cdot 2 + k^2$$

$$= 5k^2 + 20k + 34$$

Produkte　Analog entspricht $\prod$ der Multiplikation

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

Beispiel : $\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdots n = n!$

↳ n Fakultät

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod_{i=n-k+1}^{n} i}{\prod_{j=1}^{k} j}$$

„n über k"
„k aus n"
Binomial-Koeffizient

$$\binom{7}{3} = \frac{\prod_{i=7-3+1}^{7} i}{\prod_{j=1}^{3} j} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

[TR : 7 nCr 3 = 35]

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

alternativ, ohne Produktzeichen

Argumentationstechniken

Direkter Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$

Über Zwischenschritte :

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad A \Rightarrow B$$

Beispiel : Behauptung : $(x+y)^2 = 4xy \Rightarrow x = y$

(A) $(x+y)^2 = 4xy$

$(C_1) \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 4xy \quad | -4xy$

$(C_2) \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0$

$(C_3) \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow \underset{(C_4)}{x-y=0} \Rightarrow \underset{(B)}{x=y}$

Indirekter Beweis von $A \Rightarrow B$

Nutze $A \Rightarrow B \iff \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

Beispiel: $\underbrace{x^3 - x + x^2 - 1 \neq 0}_{A} \Rightarrow \underbrace{|x| \neq 1}_{B}$

$\overset{\bar{B}}{|x| = 1} \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \overset{\bar{A}}{x^3 - x + x^2 - 1 = 0}$

Beweis von $A \not\Rightarrow B$ durch Gegenbeispiel

Beispiel: Behauptung $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x^{100} \geq x!$

$$200! = \underbrace{\underset{\geq 200}{200 \cdot 1} \cdot \underset{>200}{199 \cdot 2} \cdots \underset{>200}{102 \cdot 99} \cdot \underset{>200}{101 \cdot 100}}_{100 \text{ Faktoren, alle größer } 200}$$

$\Rightarrow 200! > 200^{100}$

Beweis durch vollständige Induktion

Beispiel: Zu zeigen: Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$ ergibt die Quadratzahl n^2

[z.B. $\underbrace{1 + 3 + 5 + 7}_{4 \text{ unger. Zahlen}} = 16 = 4^2$]

etwas aufwendig: direkter Beweis

$$\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + \dots + (2 \cdot n - 1)$$
$$= (-1) \cdot n + 2 \cdot \underbrace{(1 + 2 + 3 + \dots + n)}_{(n+1) \frac{n}{2}}$$

[$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$

$1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$

$1 + \dots + n$ wenn n ungerade

$\underbrace{1 + \dots + (n-1)}_{n \cdot \frac{n-1}{2}} + n$

$n \cdot \frac{n-1}{2} + n = n\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)$

$= n \, \frac{n-1+2}{2} = n \cdot \frac{n+1}{2}$]

$= (-1) \cdot n + 2 \cdot \frac{n}{2} \cdot (n+1)$

$= -n + n(n+1) = -n + n^2 + n = n^2$

besser: Beweis durch vollst. Induktion

1. Schritt: Induktionsanfang
   Suche möglichst kleines n, für das die Aussage stimmt

2. Schritt Induktionsschritt
   - Nimm an, dass die Aussage für beliebiges n wahr ist
   - Zeige, dass die Aussage für $n+1$ wahr ist

Beispiel: $A_n: \sum_{i=1}^{n} 2i-1 = n^2$ (zu zeigen)

① Ind. Anfang: $A_1: \sum_{i=1}^{1} 2i-1 = 2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$

② $n \to n+1$

$$A_{n+1}: \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} 2i-1}_{\text{linke Seite von } A_{n+1}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (2i-1)}_{\text{linke Seite von } A_n} + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n+2-1$$

$$= (n+1)^2$$

ersetze linke Seite von A_n ($\sum_{i=1}^{n} 2i-1$) durch rechte Seite von A_n (n^2)

Beispiel: zu zeigen: $A_n: \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

① $n=1$: $A_1: \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1}{6}(1+1)(2\cdot 1+1)$

② $n \to n+1$:

$$A_{n+1}: \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} i^2}_{\text{l.S. von } A_{n+1}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (i^2)}_{\text{linke Seite von } A_n} + \underbrace{(n+1)^2}_{\text{letzte Summand von } A_{n+1}}$$

$$= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

verwende Induktions-behauptung

$$= \frac{n+1}{6}\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]$$

$$= \frac{n+1}{6}\left[2n^2 + 7n + 6\right]$$

von oben gerechnet

$$= \frac{n+1}{6}(2n^2+3n+4n+6)$$

$$= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3) = \frac{n+1}{6}(n+1+1)(2(n+1)+1)$$

von unten

Beispiel: Beweis durch Gegenbeispiel

- Ausgangspunkt: Die ökonomische Gleichung

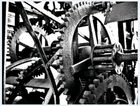
$$\text{Gewinn} \quad = \quad \text{Umsatz} - \text{Kosten}$$

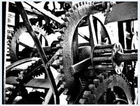
- Daraus:

  A: Für zwei Produkte stimmen Umsätze und Kosten überein
  B: Für zwei Produkte sind die Gewinne gleich

- Damit gilt: $A \Rightarrow B$, andererseits aber $B \not\Rightarrow A$.

Gegenbeispiel zur Bestätigung von $B \not\Rightarrow A$:





Beispiel: Beweis durch Gegenbeispiel

- Ausgangspunkt: Die ökonomische Gleichung

$$\text{Gewinn} \quad = \quad \text{Umsatz} - \text{Kosten}$$

- Daraus:

  A: Für zwei Produkte stimmen Umsätze und Kosten überein
  B: Für zwei Produkte sind die Gewinne gleich

- Damit gilt: $A \Rightarrow B$, andererseits aber $B \not\Rightarrow A$.

Gegenbeispiel zur Bestätigung von $B \not\Rightarrow A$:

- Für zwei Produkte gegeben:
  - Umsätze $u_1 = 2, u_2 = 5$
  - Kosten $c_1 = 1, c_2 = 4$
- Dann ist $g_1 = u_1 - c_1 = 2 - 1 = 1 = u_2 - c_2 = 5 - 4 = g_2$, aber $u_1 \neq u_2$, $c_1 \neq c_2$.

Mathematik: Gliederung

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. Differentialgleichungen

4 Lineare Algebra

- Matrizen und Vektoren
- Matrixalgebra
- Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
- Lineare Gleichungssysteme
- Inverse Matrizen
- Determinanten
- Eigenwerte

Warum beschäftigen wir uns mit linearer Algebra?

- Quantitative tabellarische Daten (Excel) sind aus betriebs- und volkswirtschaftlichen Fragestellungen nicht wegzudenken
- Methoden der Matrizenrechnung erleichtern beziehungsweise ermöglichen die Analyse solcher Daten

Wesentliche Lernziele

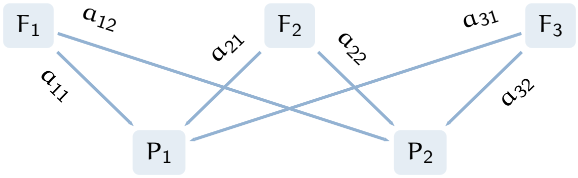
- Kennenlernen der Eigenschaften von Matrizen
- Beherrschen elementarer Matrixoperationen
- Fähigkeit, lineare Gleichungssysteme aufzustellen, zu lösen und diese Lösung darzustellen
- Beherrschen des Invertierens spezieller Matrizen

Beispiel 1

- Eine Unternehmung stellt mit Hilfe der Produktionsfaktoren F_1, F_2, F_3 zwei Produkte P_1, P_2 her.
- Zur Produktion für jede Mengeneinheit von P_j $(j = 1{,}2)$ werden a_{ij} Mengeneinheiten von F_i $(i = 1{,}2{,}3)$ verbraucht.

Verbrauch		für eine Einheit des Produkts	
		P_1	P_2
von Einheiten	F_1	a_{11}	a_{12}
der	F_2	a_{21}	a_{22}
Produktionsfaktoren	F_3	a_{31}	a_{32}

- Grafisch dargestellt:



Beispiel 2

- Für fünf gleichartige Produkte $P_1, \dots, P_5$ werden drei Merkmale erhoben,
- und zwar der Preis, die Qualität und die Art des Kundenkreises, der das jeweilige Produkt nachfragt.
- Ergebnis:

		Merkmale		
		Preis	Qualität	Kundenkreis
Produkte	P_1	20	sehr gut	A
	P_2	18	sehr gut	B
	P_3	20	sehr gut	A
	P_4	16	mäßig	C
	P_5	18	ordentlich	B

Beispiel 2

- Für fünf gleichartige Produkte $P_1, \ldots, P_5$ werden drei Merkmale erhoben,
- und zwar der Preis, die Qualität und die Art des Kundenkreises, der das jeweilige Produkt nachfragt.
- Ergebnis:

		Merkmale		
		Preis	Qualität	Kundenkreis
Produkte	P_1	20	sehr gut	A
	P_2	18	sehr gut	B
	P_3	20	sehr gut	A
	P_4	16	mäßig	C
	P_5	18	ordentlich	B

Fragen:

- Ähnlichkeit von Produkten
- Finden von Kundensegmenten
- Zuordnen zu diesen Segmenten

$\longrightarrow$ Marktforschung

Definition Matrix

- Ein geordnetes, rechteckiges Schema von Zahlen oder Symbolen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

  mit $m, n \in \mathbb{N}$ heißt Matrix mit m Zeilen und n Spalten oder kurz $m \times n$-Matrix (Im Folgenden: $a_{ij} \in \mathbb{R}$).
  „m kreuz n"-Matrix
- $a_{11}, \dots, a_{mn}$ heißen Komponenten der Matrix.
- Dabei gibt i die Zeile und j die Spalte an, in der a_{ij} steht.
- i heißt Zeilenindex und j Spaltenindex von a_{ij}.
- Sind alle Komponenten a_{ij} reelle Zahlen, so spricht man von einer reellen Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad 2\times 3\text{-Matrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad 3\times 2\text{-Matrix}$$

Definition

- Zu jeder $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- heißt die $n \times m$-Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- die zu A transponierte Matrix

Transponierte Matrix

Definition

- Zu jeder $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- heißt die $n \times m$-Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- die zu A transponierte Matrix

$$\Rightarrow \left(A^T\right)^T = A$$

Beispiel transponierte Matrix

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel transponierte Matrix

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(A^T\right)^T = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Definition

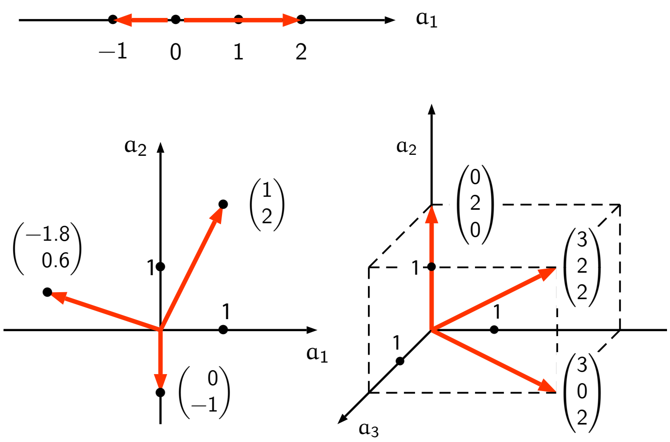
- $n \times 1$-Matrix heißt Spaltenvektor mit n Komponenten:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- $1 \times n$-Matrix heißt Zeilenvektor mit n Komponenten:

$$a^T = (a_1, \ldots, a_n)$$

Geometrische Veranschaulichung von Vektoren



Relationen zwischen Matrizen

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A = C$, $A \neq D$, $A \not< D$, $A \leq D$

$\cancel{A = B}$ nicht definiert, denn Spaltenanzahl ist unterschiedlich

Definition

- Seien $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $B = (b_{ij})_{m,n}$ reelle Matrizen mit übereinstimmender Zeilenzahl m und Spaltenzahl n.
- Dann wird definiert:

$$\begin{array}{lcll}
A = B & \Leftrightarrow & a_{ij} = b_{ij} & \text{für alle } i = 1, \ldots, m\,, j = 1, \ldots, n \\
A \neq B & \Leftrightarrow & a_{ij} \neq b_{ij} & \text{für mindestens ein Indexpaar } (i,j) \\
A \leq B & \Leftrightarrow & a_{ij} \leq b_{ij} & \forall (i,j) \\
A < B & \Leftrightarrow & a_{ij} < b_{ij} & \forall (i,j)
\end{array}$$

- Entsprechend $A \geq B$ und $A > B$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 16 & 25 & 36 \end{pmatrix}$ ist nicht quadratisch

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ist quadratisch

Definition

a) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt quadratisch

Hauptdiagonale a_{ii}

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = (a_{ij})_{n,n}$ mit $A = A^T$ heißt symmetrisch

c) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Dreiecksmatrix, wenn
$a_{ij} = 0$ für $i < j$ (untere Dreiecksmatrix) oder
$a_{ij} = 0$ für $i > j$ (obere Dreiecksmatrix)

obere Dreiecks-matrix

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a_{31}

$i > j$

d) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Diagonalmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Einheitsmatrix, wenn $a_{ii} = 1$ für alle i und
$a_{ij} = 0$ für alle $j \neq j$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Addition und Subtraktion von Matrizen

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A + C$ ist nicht definiert

Definition

- Gegeben: $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $B = (b_{ij})_{m,n}$.
- Dann gilt:
- Addition: $A + B = (a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$
- Subtraktion: $A - B = (a_{ij})_{m,n} - (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m,n}$

Damit:

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Addition/Subtraktion nicht definiert, wenn Zeilen- bzw. Spaltenzahl nicht übereinstimmen

Definition

- Gegeben: $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $r \in \mathbb{R}$ (Skalar).
- Dann gilt:

$$r \cdot A = r \cdot (a_{ij})_{m,n} = (r \cdot a_{ij})_{m,n} = (a_{ij} \cdot r)_{m,n} = A \cdot r$$

Beispiel:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$$

$A = 5 \cdot \frac{1}{5} A$

$\frac{1}{2} A = \frac{1}{10} \cdot (5A)$

$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$

$5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$

$5 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$

Außerdem gilt:

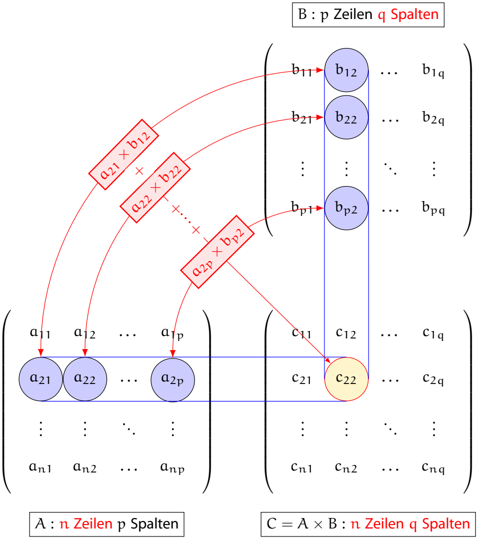
$$\begin{aligned} (rs)A &= r(sA) && \text{(Assoziativgesetz)} \\ (r+s)A &= rA + sA && \text{(Distributivgesetz)} \\ r(A+B) &= rA + rB && \end{aligned}$$

Matrixmultiplikation

- Gegeben:
  $A = (a_{ik})_{m,p}$
  und $B = (b_{kj})_{p,n}$.
- Dann gilt:

$$A \cdot B$$
$$= (a_{ik})_{n,p} \cdot (b_{kj})_{p,q}$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{n,q}$$

- Merke:
  Zeile mal Spalte!



Quelle Grafik: Alain Matthes, altermundus.com

Beispiel (Matrixmultiplikation)

$$\underset{3\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{2\times 2}{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underset{2\times 1}{C} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$1\cdot(-1)$ $\quad 0\cdot(-2)$

$$\underset{3\times 2 \quad 2\times 2}{A\cdot B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 12 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$1\cdot 2 + 0\cdot 4$

$2\cdot 2 + 2\cdot 4$

$2\cdot(-1) + 2\cdot(-2)$