Wirtschaftsmathematik

für International Management (BA) und Betriebswirtschaft (BA)

Wintersemester 2014/15

Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, A: 2×2, B: 2×2

$$\underbrace{A}_{2\times 2}\cdot\underbrace{B}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$1\cdot 2 + (-1)(-1)$, $1\cdot 3 + (-1)\cdot 0$, $0\cdot 2 + 4\cdot(-1)$, $0\cdot 3 + 4\cdot 0$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ

Beispiel: $\underset{11\times 5}{A}$ $\quad \underset{5\times 11}{B}$

$\underbrace{A\cdot B}_{11\times 11}$, $\underbrace{B\cdot A}_{5\times 5}$

Beispiel: (Folie 59)

▶ Zur Produktion für jede Mengeneinheit von P_j $(j = 1,2)$ werden a_{ij} Mengeneinheiten von F_i $(i = 1,2,3)$ verbraucht.

Verbrauch		für eine Einheit des Produkts P_1	P_2
von Einheiten	F_1	a_{11}	a_{12}
der	F_2	a_{21}	a_{22}
Produktionsfaktoren	F_3	a_{31}	a_{32}

$x_1, x_2 \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl der hergestellten Produkte P_1, P_2

$y_1, y_2, y_3 \mathrel{\hat{=}}$ " Produktionsfaktoren F_1, F_2, F_3

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1\cdot a_{11} + x_2\cdot a_{12} \\ y_2 &= x_1 a_{21} + x_2\cdot a_{22} \\ y_3 &= x_1 a_{31} + x_2\cdot a_{32} \end{aligned}$$

$\underset{2\times 1}{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\underset{3\times 1}{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$\underset{3\times 2}{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

$$\underset{3\times 2}{A}\cdot\underset{2\times 1}{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y$$

$\Leftrightarrow \quad y = A\cdot x$

$$\begin{tikzcd} y_1,\dots,y_n \arrow[d, "A_{n\times m}"] \\ x_1,\dots,x_m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y_1,\dots,y_n \arrow[d, "B_{n\times l}"] \\ z_1,\dots,z_l \arrow[d, "C_{l\times m}"] \\ x_1,\dots,x_m \end{tikzcd}$$

Zwischenprodukte

$z = Cx \ \wedge \ y = Bz$

$\Leftrightarrow \quad y = B(Cx) = (B\cdot C)\cdot x$

$$\begin{tikzcd} y_1,\dots,y_n \arrow[dd, bend right, "D_{n\times m}"'] \arrow[d, "B_{n\times l}"] \\ z_1,\dots,z_l \arrow[d, "C_{l\times m}"] \\ x_1,\dots,x_m \end{tikzcd}$$

$y = BCx + Dx = (BC + D)\,x$

Beispiel (Marktforschung)

3 Produkte in abgeschlossenem Markt

Matrix A beschreibt Käuferfluktuation zwischen P_1, P_2, P_3

$A = (a_{ij})_{3,3}$ mit a_{ij}: Anteil der Käufer, die zum Zeitpunkt t Produkt P_i kaufen und zum Zeitpunkt $t+1$ zu Produkt P_j wechseln

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

a_{23}: Anteil der „heutigen" P_2-Käufer, die „morgen" zu P_3 wechseln

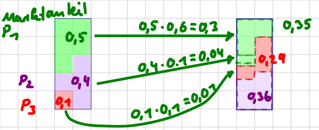
Marktanteile zum Zeitpunkt $t = 1$

$$x_1^T = (0{,}5 \quad 0{,}4 \quad 0{,}1)$$

gesucht: Marktanteile bei $t = 2$:

$$x_2^T = (0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \quad 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \quad 0{,}1 \cdot 0.5 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0.8 \cdot 0{,}1)$$
$$= (0{,}35 \quad 0{,}36 \quad 0{,}29)$$

$$\Rightarrow \quad x_2^T = x_1^T \cdot A \qquad \left[(x_2^T)^T = x_2 = (x_1^T A)^T = A^T \cdot x_1 \right]$$



analog:

$$x_3^T = x_2^T \cdot A = x_1^T \cdot A \cdot A$$

$$x_3^T = x_1^T \cdot A^2$$

$$x_k^T = x_1^T \cdot A^{k-1}$$

Spezialfälle der Matrixmultiplikation

- $A = (m \times n)$-Matrix, $B = (n \times m)$-Matrix
  $\Rightarrow$ es existiert $\underbrace{A \cdot B}_{m\times m}$ und $\underbrace{B \cdot A}_{n\times n}$
- A quadratisch $\Rightarrow$ $A \cdot A = A^2$ existiert
- A, B quadratisch $\Rightarrow$ $A \cdot B$ existiert und $B \cdot A$ existiert.
  Aber: Im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Ist E Einheitsmatrix, dann gilt:

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

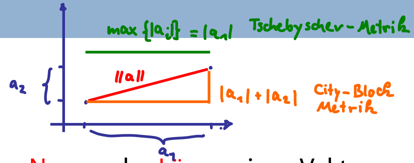
$n\times n \quad n\times n, \quad n\times n \quad n\times n, \quad n\times n$

$(m\times n \quad n\times n, \quad ↯ \quad , m\times n)$

Spezielle Rechenregeln

- $A = (m \times p)$-Matrix, $B = (p \times n)$-Matrix. Damit gilt:
- $A \cdot B$ und $\underbrace{B^T}_{n\times p} \cdot \underbrace{A^T}_{p\times m}$ existieren.
- $B^T A^T = (A \cdot B)^T$
- $A^T A$ ist symmetrische $(p \times p)$-Matrix und
  $A A^T$ ist symmetrische $(m \times m)$-Matrix

Mathematik PLUS
Stefan Etschberger



- Gegeben Vektor $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^n$
- **Definition**: Absolutbetrag, Norm oder Länge eines Vektors:

$$\|\mathrm{a}\| = |\mathrm{a}| = \sqrt{\underset{1\times n}{\mathrm{a}^T}\underset{n\times 1}{\mathrm{a}}} = \sqrt{a_1{}^2 + \ldots + a_n{}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2} \quad \in \mathbb{R}_+ = [0;\infty)$$

$[0;\infty)$ $[0;\infty[$ $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = (0;\infty)$

z.B. $a = (3) \Rightarrow \|a\| = \sqrt{a_1^2} = \sqrt{3^2} = 3$
$a = (-3) \Rightarrow \|a\| = \ldots = \sqrt{(-3)^2} = 3$
$\Rightarrow a \in \mathbb{R}^1 \Rightarrow \|a\| = |a|$

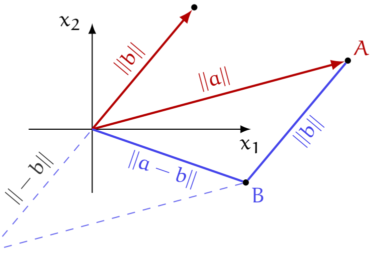
- Seien $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Dann gilt:

a)	$\|\mathrm{a}+\mathrm{b}\| = \|\mathrm{b}+\mathrm{a}\|, \qquad \|\mathrm{a}-\mathrm{b}\| = \|\mathrm{b}-\mathrm{a}\|$	
b)	$\|r\mathrm{a}\| = \lvert r\rvert \cdot \|\mathrm{a}\|$	
c)	$\|\mathrm{a}^T\mathrm{b}\| \leqq \|\mathrm{a}\| \cdot \|\mathrm{b}\|$ für $n > 1$	(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
	$= \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	für $n = 1$
d)	$\|\mathrm{a}+\mathrm{b}\| \leqq \|\mathrm{a}\| + \|\mathrm{b}\|$	(Dreiecksungleichung)
e)	$\|\mathrm{a}-\mathrm{c}\| - \|\mathrm{c}-\mathrm{b}\| \leqq \|\mathrm{a}-\mathrm{b}\| \leqq \|\mathrm{a}-\mathrm{c}\| + \|\mathrm{c}-\mathrm{b}\|$	

- Gegeben: a, b Vektoren des $\mathbb{R}^n$, die den Winkel γ einschließen.
- Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck mit den Ecken $0, A, B$

$$\|a-b\|^2 =$$

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\,\|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\gamma.$$



- Damit gilt:

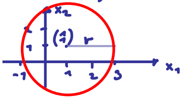
$$\begin{aligned} a^T b &= \tfrac{1}{2}\left(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a-b\|^2\right) \\ &= \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\gamma \end{aligned}$$

Definition **Hyperebene**

- Gegeben: $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$
- Dann heißt $H(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$ **Hyperebene** im $\mathbb{R}^n$
- **Anmerkung**: H teilt den $\mathbb{R}^n$ in zwei Halbräume

$\mathbb{R}^1$: $a = (1)$, $r = 2$

$\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $r = 2$



Definition **Sphäre**

- Gegeben: $a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_+$
- Dann heißt $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\}$ **Sphäre** (Kugelfläche) im $\mathbb{R}^n$ und dem Radius r
- Damit: **r-Umgebung von a**: $K_<(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$

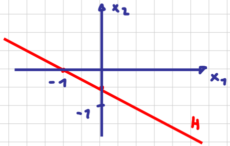
Definition Hyperebene

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$

- Gegeben: $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$
- Dann heißt $H(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$ Hyperebene im $\mathbb{R}^n$
- **Anmerkung**: H teilt den $\mathbb{R}^n$ in zwei Halbräume

Beispiel: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $b = -1$

$$H(a,b) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : a^T \cdot x = b \} \qquad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : (1 \;\; 2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \right\}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R}^2 : 1 \cdot x_1 + 2x_2 = -1 \}$$

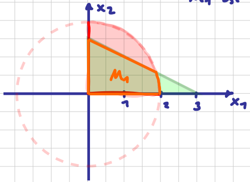


$x_1 + 2x_2 = -1$

Beispiel

$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + 2x_2 \leqq 3, \ \|x\| \leqq 2\}$

$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 \in \mathbb{N}\}$



M_1 ist nicht offen
abgeschlossen
beschränkt
kompakt

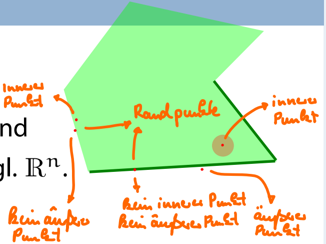
Beispiel Hyperebene/Sphäre

Beispiele

- $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6\}$
- $$K = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \; \left\| x - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1 \right\}$$
  $$= \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \; \sqrt{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + {x_3}^2} = 1 \right\}$$

Gegeben

- $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Punktmenge des $\mathbb{R}^n$ und
- $\overline{M} = \mathbb{R}^n \setminus M$ deren Komplement bzgl. $\mathbb{R}^n$.



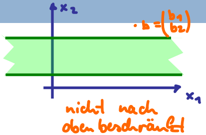
Dann heißt:

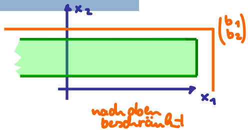
- $a \in \mathbb{R}^n$ innerer Punkt von M, wenn eine r-Umgebung $K_<(a, r)$ von a existiert, die ganz in M liegt, also $K_<(a, r) \subset M$,
- $a \in \mathbb{R}^n$ äußerer Punkt von M, wenn eine r-Umgebung $K_<(a, r)$ von a existiert, die ganz in $\overline{M}$ liegt und
- $a \in \mathbb{R}^n$ Randpunkt von M, wenn a weder innerer noch äußerer Punkt von M ist.

Eine Punktmenge $M \in \mathbb{R}^n$ heißt dann

- offen wenn jedes Element $a \in M$ innerer Punkt von M ist,
- abgeschlossen, wenn jedes Element $a \in \overline{M}$ innerer Punkt von $\overline{M}$ ist, also das Komplement $\overline{M}$ offen ist.

$x \leq b \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$





Eine Punktmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

- **beschränkt nach oben**, wenn ein $b \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $b \geqq x$ für alle $x \in M$,
- **beschränkt nach unten**, wenn ein $a \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $a \leqq x$ für alle $x \in M$,
- **beschränkt**, wenn M nach oben und unten beschränkt ist,
- **kompakt**, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : \ x_1 + 2x_2 \leqq 3, \ \|x\| \leqq 2\}$$
$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : \ x_1 \in \mathbb{N}\}$$