Wirtschaftsmathematik

für International Management (BA) und Betriebswirtschaft (BA)

Wintersemester 2014/15

Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg

Beispiele linearer Gleichungssysteme

a)
$$\begin{array}{lrcrcr} ① & 2x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \\ ② & x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}$$

② in ①: $2(2-x_2)-3x_2=-1 \Leftrightarrow 5 = 5x_2 \Leftrightarrow x_2 = 1$, in ②: $x_1 = 2-1 = 1$

genau eine Lsg.

b)
$$\begin{array}{lrcrcr} ① & x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ ② & x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}$$

① − ②: $0 = 2$

keine Lsg.

c)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & -2 \end{array}$$

$x_1 = 1 + x_2$

unendl. viele Lösungen

Lineare Gleichungssysteme: Einführung

Beispiele linearer Gleichungssysteme

a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

b) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow L = \emptyset$$

c) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{unendlich viele Lösungen}$$

Probleme:

- System lösbar oder nicht?
- Verfahren zum Auffinden von Lösungen
- Darstellung von mehrdeutigen Lösungen

Beispiele linearer Gleichungssysteme

a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

b) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow L = \emptyset$$

c) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{unendlich viele Lösungen}$$

Probleme:

- System lösbar oder nicht?
- Verfahren zum Auffinden von Lösungen
- Darstellung von mehrdeutigen Lösungen

Dazu gibt es:

- Den Gaußschen Algorithmus (erzeugt Dreiecksmatrix)
- das Verfahren von Gauß-Jordan (modifizierte Gauß: erzeugt Einheitsmatrix)

Allgemeines lineares Gleichungssystem

- Ein System von Gleichungen

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

- heißt lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten.
- Die a_{ij} und b_i heißen Koeffizienten des Gleichungssystems.
- In Matrixform:

$$Ax = b$$

$$2x_1 + 3x_2 = 5$$
$$-x_1 - 2x_2 = 7$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$Ax = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = b$$

- Lösungsmenge:

$$L = \{x : \quad Ax = b\}$$

Lösungsdarstellung

- Beispiel für Enddarstellung:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \quad x_3 \qquad &= 4 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 7 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \quad E \qquad\qquad R \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ \\ \text{Basis} \\ \\ \\ \text{Nicht basis} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Dabei bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} E & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

- kann nach Basisvariablen aufgelöst werden:
  $x_1 = 4 - x_3, \quad x_2 = 7 - 3x_3 - 2x_4$ (allgemeine Lösung)
- In diesem Fall immer lösbar, zum Beispiel mit

$$x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Gesucht: Verfahren zur Überführung beliebiger Gleichungssysteme in diese Form

Elementare Umformungen

- Das sind Umformungen der Koeffizientenmatrix, die die Lösung nicht verändern. Erlaubt ist
- Multiplikation einer Zeile mit beliebigen Zahlen $c \neq 0$
- Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Vertauschen von Zeilen (oder Spalten)

Lösungsalgorithmus

- Lösung mit Verfahren von Gauß-Jordan: Systematische Umformungen nach obigem Prinzip, bis Darstellung der Koeffizientenmatrix in Einheits- und Restmatrix ensteht
- Algorithmus und Lösungsvarianten siehe Vorlesung

Beispiel 1 (LGS)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 0\\
4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1\\
9x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

Pivot-Element

	x_1	x_2	x_3		
1	1	1	1	0	→ Pivot-Zeile
2	4	2	1	1	
3	9	3	1	3	
4	1	1	1	0	1
5	0	−2	−3	1	2 − 4·1
6	0	−6	−8	3	3 − 9·1
7	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4 − 8
8	0	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ 5
9	0	0	1	0	6 − 3·5
	1	0	0	$\frac{1}{2}$	7 + $\frac{1}{2}$ 9
	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	8 − $\frac{3}{2}$ 9
	0	0	1	0	9

Einheitsmatrix

kein Rest

⇒ genau eine Lösung, abzulesen aus letzter Spalte

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

	x_1	x_2	x_3		
1	1	2	−4	1	
2	2	1	−2	0	
3	1	−4	8	0	
4	1	−4	8	0	3
5	0	6	−12	1	1 − 3
6	0	9	−18	0	2 − 2·3
7	1	0	0	0	4 + 4·8
8	0	1	−2	0	$\frac{1}{9}$ 6
9	0	0	0	1	5 − 6·8

Zeile 9: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ (immer falsch)

⇒ LGS hat keine Lösung

(Signal: Eine Zeile mit ausschließlich 0en bis auf letzte Spalte ≠ 0)

Beispiel 3 (LGS)

	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	1	5	2	3	4	
2	4	18	2	8	12	
3	3	11	-6	1	4	
4	0	2	6	4	4	
5	1	5	2	3	4	1
6	0	-2	-6	-4	-4	2 − 4 1
7	0	-4	-12	-8	-8	3 − 3 1
8	0	2	6	4	4	4
9	1	0	-13	-7	-6	5 − 5 10
10	0	1	3	2	2	½ 8
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	6 + 8
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	7 + 2 8
	E		R			

$\Rightarrow$ Basis : x_1, x_2 , Nichtbasis : x_3, x_4

9 $\quad x_1 = 13x_3 + 7x_4 - 6$

10 $\quad x_2 = -3x_3 - 2x_4 + 2$

Wähle Nichtbasis frei : $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 13\lambda + 7\mu - 6 \\ x_2 &= -3\lambda - 2\mu + 2 \\ x_3 &= 1\cdot\lambda + 0\cdot\mu + 0 \\ x_4 &= 0\cdot\lambda + 1\cdot\mu + 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x = \lambda \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Invertierung von Matrizen

Definition

- Gegeben: $n \times n$-Matrix (quadratisch)
- Existiert eine $n \times n$-Matrix X mit $AX = XA = E$, so heißt X die zu A inverse Matrix.
- Schreibweise: $X = A^{-1}$
- $\Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Inverse Matrizen und Gleichungssysteme

- Falls A^{-1} existiert, gilt:

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad Ex = x = A^{-1}b$$

- Damit existiert genau eine Lösung und zwar:

$$x = A^{-1}b$$

LGS und Orthogonalität

Berechnung inverser Matrizen durch den Gaußalgorithmus:

- Ansatz:

$$
\begin{aligned}
& Ax + \quad Ey = 0 \\
\Rightarrow \quad & A^{-1}Ax + A^{-1}Ey = 0 \\
\Rightarrow \quad & Ex + \quad A^{-1}y = 0
\end{aligned}
$$

- Also: Gaußtableau mittels elementarer Umformungen folgendermaßen umformen:

$$
(A|E) \quad \longrightarrow \quad (E|A^{-1})
$$

Orthogonale Matrizen

- Eine $n \times n$-Matrix A heißt orthogonal, wenn gilt:
- $AA^T = A^TA = E$
- Bei orthogonalen Matrizen A gilt also: $A^{-1} = A^T$.
- Mit A ist damit auch A^T orthogonal

Beispiel (Invertierung von Matrizen)

A **E**

①	1	2	1	0	
②	3	4	0	1	
③	1	2	1	0	①
④	0	-2	-3	1	② $- 3$①
	1	0	-2	1	③ + ④
	0	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ ④

E **A^{-1}**

[Probe: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$]

Beispiel (Lösen eines LGS mit A^{-1}):

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 = 4 \end{array}$$

$$\iff x = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determinanten: Vorüberlegung

Permutationen und Inversionen

(1, 2, 3, 4)
(2, 4, 1, 3)

- Sei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine n-elementige Menge.
- Dann: jede Anordnung $(a_{p_1}, \dots, a_{p_n})$ der Elemente $a_1, \dots, a_n$ mit $\{p_1, \dots, p_n\} = \{1, \dots, n\}$ heißt eine Permutation.
- Wenn für ein Paar (a_i, a_j) einerseits $i < j$, und andererseits $p_i > p_j$, gilt: Inversion.
- Also: Ausgehend von Permutation $(a_1, \dots, a_n)$: Jede Vertauschung zweier Elemente a_i und a_j ist eine Inversion.

Beispiel

- Gegeben: Menge $\{1,2,3\}$

Permutationen und Inversionen

- Sei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine n-elementige Menge.
- Dann: jede Anordnung $(a_{p_1}, \dots, a_{p_n})$ der Elemente $a_1, \dots, a_n$ mit $\{p_1, \dots, p_n\} = \{1, \dots, n\}$ heißt eine Permutation.
- Wenn für ein Paar (a_i, a_j) einerseits $i < j$, und andererseits $p_i > p_j$, gilt: Inversion.
- Also: Ausgehend von Permutation $(a_1, \dots, a_n)$: Jede Vertauschung zweier Elemente a_i und a_j ist eine Inversion.

$$\begin{array}{cccc} & i & j & \\ (& 1 & 2 & 3) \\ (& 2 & 1 & 3) \\ & p_i & p_j & \end{array}$$

Beispiel

- Gegeben: Menge $\{1,2,3\}$
- Damit: Folgende 6 Permutationen:

$(1,2,3)$	ohne Inversion,
$(1,3,2)$, $(2,1,3)$	mit je einer Inversion,
$(2,3,1)$, $(3,1,2)$	mit je zwei Inversionen,
$(3,2,1)$	mit drei Inversionen.

Definition Determinante

- Gegeben: A, eine $n \times n$-Matrix.
- Außerdem: $(1, \ldots, n)$ sei geordnetes n-Tupel der Zeilenindizes und $p = (p_1, \ldots, p_n)$ eine Permutation von $(1, \ldots, n)$ mit $\nu(p)$ Inversionen.
- Determinante von A ist dann:

$$\det A = \sum_{p} (-1)^{\nu(p)} \cdot a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \ldots \cdot a_{np_n}$$

$p = (3, 1, 2)$

$\nu(p) = 2$

$\ldots + (-1)^2 \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} + \ldots$

$= \ldots + (-1)^2 a_{13} a_{21} a_{32} + \ldots$

Beispiele

- Gegeben: A als eine $n \times n$-Matrix
- Für $n = 1$ gilt dann $A = (a_{11})$ sowie $\det A = \det(a_{11}) = a_{11}$.
- Für $n = 2$ enthält die Determinante $2! = 2$ Summanden,
- nämlich: $a_{11} a_{22}$ ohne Inversion und $-a_{12} a_{21}$ mit einer Inversion.
- Damit: $\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$.

Beispiel (3×3 Determinante mit Leibniz-Formel)

p	$v(p)$	$(-1)^{v(p)}$	$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$	
$(1\ 2\ 3)$	0	$+1$	$a_{11}a_{22}a_{33}$	1
$(1\ 3\ 2)$	1	-1	$a_{11}a_{23}a_{32}$	4
$(2\ 1\ 3)$	1	-1	$a_{12}a_{21}a_{33}$	5
$(2\ 3\ 1)$	2	$+1$	$a_{12}a_{23}a_{31}$	2
$(3\ 1\ 2)$	2	$+1$	$a_{13}a_{21}a_{32}$	3
$(3\ 2\ 1)$	3	-1	$a_{13}a_{22}a_{31}$	6

$$A_{3\times3} \Rightarrow \det(A) = +1\,a_{11}a_{22}a_{33}$$
$$-1\,a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$\vdots$$
$$-1\,a_{13}a_{22}a_{31}$$

[Merkregel für 3×3-Matrizen

1 2 3 6 4 5

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Regel von Sarrus

Zahlenbeispiel:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 1\cdot2\cdot5 + 4\cdot3\cdot5 + 2\cdot8\cdot(-1) - (5\cdot2\cdot(-1) + 8\cdot3\cdot1 + 2\cdot4\cdot5)$$

$$= 54 - (54) = 0$$

Beispiel: Determinante einer 3×3-Matrix

- Für $n = 3$: Determinante hat $3! = 6$ Summanden, nämlich
  $a_{11}a_{22}a_{33}$ ohne Inversion,
  $a_{12}a_{23}a_{31}$ und $a_{13}a_{21}a_{32}$ mit zwei Inversionen,
  $-a_{11}a_{23}a_{32}$ und $-a_{12}a_{21}a_{33}$ mit einer Inversion und
  $-a_{13}a_{22}a_{31}$ mit drei Inversionen.
- Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\det A = \quad & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
= \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
& -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

- Einfacher zu merken: Regel von Sarrus (siehe Vorl.)

Zahlenbeispiel Determinanten

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie: $\det A = -2,$
  $\det B = 6,$
  $\det C = 0$

Minor, Kofaktoren

- Gegeben: $n \times n$-Matrix A mit $n \geqq 2$;
- Streiche Zeile i und Spalte j, $\Rightarrow$ Matrix mit $n-1$ Zeilen und $n-1$ Spalten:

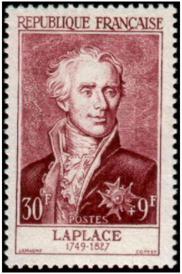
$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- nach dem Streichen heißt diese Matrix Minor
- Damit kann man das algebraische Komplement oder den Kofaktor d_{ij} zur Komponente a_{ij} von A berechnen:

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \begin{cases} \det A_{ij} & \text{für } i+j \text{ gerade} \\ -\det A_{ij} & \text{für } i+j \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$(i, j = 1, \dots, n)$$

Entwicklungssatz von Laplace



- Entwicklungssatz für Determinanten
- Gegeben: A eine $n \times n$-Matrix und D die Matrix der Kofaktoren.
- Dann gilt für $n = 2,3,\ldots$

$$AD^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}.$$

- Insbesondere wird mit:

$$\begin{aligned} \det A &= a_i^T d_i = a_{i1} d_{i1} + \ldots + a_{in} d_{in} && \text{(i=1,\ldots,n)} \\ &= a^{jT} d^j = a_{1j} d_{1j} + \ldots + a_{nj} d_{nj} && \text{(j=1,\ldots,n)} \end{aligned}$$

die Determinante von A nach der $i$ten Zeile $a_i^T = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ bzw. nach der j-ten Spalte $a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ von A entwickelt.

Anwendung des Entwicklungssatzes

Beispiel :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \boxed{} = -1\cdot 2\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 2 - (2\cdot 2\cdot 2 + (-1)\cdot 0\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 0)$$

$$= -4$$

$$D = \begin{pmatrix} -4 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \boxed{} = 4\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 2\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot 0 - (0\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot (-1))$$

$$= -10$$

$\cdot(-1)$

(1. Zeile, 4. Spalte)

$$D = \begin{pmatrix} -4 & \text{egal} & \text{egal} & +10 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2\cdot(-4) + 0\cdot \text{egal} + 0\cdot \text{egal} + 1\cdot 10 = 2$$

Beispiele

- Zeigen Sie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 0$$