Wirtschaftsmathematik

für International Management (BA) und Betriebswirtschaft (BA)

Wintersemester 2014/15

Hausaufgabe:
- Diagonalisierung (Beispiel aus VL)
- Aufgaben: 28, 29, 30, 40

Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg

Es gilt für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (Determinantenmultiplikationssatz)
- aber: im allgemeinen $\det(A + B) \neq \det A + \det B$
- $\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}$ existiert

Gilt zusätzlich $\det A \neq 0$

- Mit $D = (d_{ij})_{n,n}$, der Matrix der Kofaktoren zu A gilt
- $A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- Ist A orthogonal gilt: $\det A = \pm 1$

Entw. satz von Laplace:

$A \cdot D^T = \det(A) \cdot E$

$\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot D^T = A^{-1} \cdot \underbrace{\det(A)}_{\text{Zahl}} \cdot E$

$\Leftrightarrow \underbrace{E \cdot D^T}_{D^T} = \det(A) \cdot \underbrace{A^{-1} \cdot E}_{A^{-1}}$

$\Leftrightarrow D^T = \det(A) \cdot A^{-1} \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot D^T$

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel (Invertierung mittels Entw. satz)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

A, E

①	1	2	1	0	
②	3	4	0	1	
③	1	2	1	0	①
④	0	-2	-3	1	② - 3①
	1	0	-2	1	③ + ④
	0	1	3/2	-1/2	-1/2 ④

E, A^{-1}

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \begin{cases} \det A_{ij} & \text{für } i+j \text{ gerade} \\ -\det A_{ij} & \text{für } i+j \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} +\cdot & -\cdot & +\cdot & -\cdot \\ -\cdot & +\cdot & -\cdot & +\cdot \\ +\cdot & -\cdot & +\cdot & -\cdot \\ -\cdot & +\cdot & -\cdot & +\cdot \end{pmatrix}$$

Lösung eindeutig bestimmter linearer Gleichungssysteme

- Gegeben: Lineares Gleichungssystem $Ax = b$
- Voraussetzung: Es existiert A^{-1}, also auch $\det A \neq 0$
- Bezeichnung: Mit A_j ist die Matrix, in der gegenüber A die j-te Spalte durch b ersetzt wird, also

Gabriel Cramer
(1704 – 1752)

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,
gesucht: x mit $Ax = b$
$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_1 = 0$
$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$

- Dann lässt sich die Lösung x in folgender Form schreiben:

$\det A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$
$\Rightarrow x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{0}{-2} = 0$
$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-2}{-2} = 1$

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

(Cramersche Regel)

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel Cramersche Regel

Zu zeigen:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- und $Ax = b$
- Damit: $x^T = (1, -1, 1)$

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Eigenwerte: Einführendes Beispiel

Bevölkerungsentwicklung

- Gegeben:

$$\begin{array}{ll} x_t > 0 & \text{die Anzahl von Männern im Zeitpunkt } t \text{ und} \\ y_t > 0 & \text{die Anzahl von Frauen im Zeitpunkt } t. \end{array}$$

- Anzahl der Sterbefälle für Männer bzw. Frauen im Zeitintervall $[t, t+1]$ sei proportional zum jeweiligen Bestand im Zeitpunkt t, und zwar $0{,}2x_t$ für die Männer und $0{,}2y_t$ für die Frauen.
- Anzahl der Knaben- und Mädchengeburten im Zeitintervall $[t, t+1]$ proportional ist zum Bestand der Frauen.
- Anzahl der Knabengeburten: $0{,}2y_t$,
- Anzahl der Mädchengeburten: $0{,}3y_t$.
- Für Übergang vom Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t+1$ damit:

$$\begin{array}{rclcr} x_{t+1} & = & x_t - 0{,}2x_t + 0{,}2y_t & = & 0{,}8x_t + 0{,}2y_t \\ y_{t+1} & = & y_t - 0{,}2y_t + 0{,}3y_t & = & 1{,}1y_t \end{array}$$

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel Bevölkerungsentwicklung

- Matriziell:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

- Forderung: Zeitliches Verhältnis von Männern und Frauen soll konstant bleiben
- Also:

$$x_{t+1} = \lambda x_t \iff y_{t+1} = \lambda y_t \qquad (\lambda \in \mathbb{R}_+),$$

- Dieser Fall beschreibt einen gleichförmigen Wachstums- ($\lambda > 1$) beziehungsweise Schrumpfungsprozess ($\lambda < 1$)
- Matriziell:

$$\lambda z = Az \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

- Lösung?

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Definition

David Hilbert
(1862 – 1943)

- Gegeben: $n \times n$-Matrix A.
- Ist nun für eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$
- lineare Gleichungssystem $Ax = \lambda x$ erfüllt, so heißt λ reeller Eigenwert zu A und
- x reeller Eigenvektor zum Eigenwert λ.
- Insgesamt: Eigenwertproblem der Matrix A.

Damit

- $Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = Ax - \lambda Ex = (A - \lambda E)x = 0$
- Satz: Das LGS $Ax = \lambda x$ hat genau dann eine Lösung $x \neq 0$, wenn gilt:

$$\boxed{\det(A - \lambda E) = 0}$$

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = \det\left[\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0.8-\lambda & 0.2 \\ 0 & 1.1-\lambda \end{pmatrix} = (0.8-\lambda)(1.1-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 1.1$

Eigenvektor zu Eigenwert $\lambda_1 = 0.8$:

$$(A - \lambda_1 E)\cdot x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.8-0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1-0.8 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} 0.2x_2 = 0 \\ 0.3x_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 \text{ beliebig} \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

(d.h.: bel. viele Männer und keine Frauen:
pro Zeitraum Reduktion auf 80 %
der vorherigen Population)

Schreibweise: Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0.8$: $v_1 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$a \in \mathbb{R}$ beliebig

Eigenvektor zu Eigenwert $\lambda_2 = 1.1$:

$$(A - \lambda_2 E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.8-1.1 & 0.2 \\ 0 & 1.1-1.1 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\Leftrightarrow -0.3x_1 + 0.2x_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_2 = 3x_1$$

$\Leftrightarrow$ Eigenvektor $v_2 = b\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $b \in \mathbb{R}$ beliebig

[Probe: 200 Männer, 300 Frauen

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 330 \end{pmatrix} = 1.1\begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$
]

Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren

- Jedes λ, das $\det(A - \lambda E) = 0$ löst ist ein Eigenwert von A.
- Anschließend: Für jedes erhaltene λ Lösen des Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)x = o \quad \text{mit} \quad x \neq o$$

- Damit hat man für jedes λ mindestens einen reellen Eigenvektor x.
- Satz: Mit $x \neq o$ ist auch jeder Vektor rx $(r \in \mathbb{R},\ r \neq 0)$ Eigenvektor zum Eigenwert λ von A.

Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}65 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

  $D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Sätze über Eigenwertprobleme

- Gegeben: A ist eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix
- Es gilt: Die Eigenwerte sind alle reell und nicht notwendigerweise verschieden und
- ist der Rang von A gleich $k \leq n$, so ist $\lambda = 0$ ein $(n-k)$-facher Eigenwert
- Zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ existieren genau n reelle, linear unabhängige Eigenvektoren $x^1, \ldots, x^n$
- Diese Eigenvektoren kann man so wählen, dass $X = (x^1, \ldots, x^n)$ orthogonale Matrix wird, also $XX^T = E$
- Gegeben zusätzlich: $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von A und $A^m = A \cdot \ldots \cdot A$ mit $m \in \mathbb{N}$
- Dann gilt: $L = X^T A X \quad$ und $\quad A = X L X^T$
- außerdem gilt: A^m besitzt die Eigenwerte $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

ges.: Eigenwerte

$$\underbrace{\det(C - \lambda E) = 0}_{\text{„charakteristisches Polynom" von A}}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - [(1-\lambda)+(1-\lambda)]$$
$$= (1-\lambda)\cdot\big((1-\lambda)(2-\lambda) - 2\big)$$
$$= (1-\lambda)\cdot(-3\lambda+\lambda^2)$$
$$= (1-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda-3) = 0$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$

EV zu $\lambda_1 = 1$: $(C - \lambda_1 E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow v_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2 = 0$:

$$\begin{array}{c|ccc} ① & 1 & 0 & 1 \\ ② & 0 & 1 & 1 \\ ③ & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & ① \\ 0 & 1 & 1 & ② \\ 0 & 0 & 0 & ③ - ① - ② \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow v_2 = b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{array}{c|ccc} ① & -2 & 0 & 1 \\ ② & 0 & -2 & 1 \\ ③ & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} ④ & 1 & 1 & -1 & ③ \\ ⑤ & 0 & -2 & 1 & ② \\ & 0 & 2 & -1 & ① + 2③ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & ④ + \frac{1}{2}⑤ \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}⑤ \end{array}$$

$x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \quad \wedge \quad x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}x_3 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{1}{2}x_3$

$\Rightarrow \quad v_3 = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (c \in \mathbb{R})$

Diagonalisierung

EV in Matrix:
$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

normiere Spalten auf Länge 1

$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$\|v_2\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\|v_3\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$$\Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

HA:

- Ist X orthogonal?
- Berechne $X^T C X = L$
- Beobachte L. Was fällt auf?

Mathematik: Gliederung

1 Grundlegende Bausteine

2 Grundlegende Werkzeuge

3 Aussagenlogik

4 Lineare Algebra

5 Lineare Programme

6 Folgen und Reihen

7 Finanzmathematik

8 Reelle Funktionen

9 Differenzieren 1

10 Differenzieren 2

11 Integration

12 Differentialgleichungen

5 Lineare Programme

- Nebenbedingungen und Zulässigkeit
- Zielfunktion
- Graphische Lösung

Lineare Programe: Beispiel

Ein holzverarbeitender Betrieb möchte ein Produktionsprogramm für Spanplatten festlegen. Dabei sind folgende Restriktionen zu berücksichtigen:

- Es werden zwei Typen von Spanplatten hergestellt:

  Typ A in der Quantität x_1 für den Außenbereich und Typ B in der Quantität x_2 für den Innenbereich. Zur Herstellung der Spanplatten werden zwei Arten von Furnierblättern F_1 bzw. F_2 unterschiedlicher Qualität benutzt. Die Spanplatten werden mittels einer Presse, in der die Furniere verleimt werden, hergestellt.
- Zur Herstellung einer Platte vom Typ A wird ein Blatt von F_1 und zwei Blätter von F_2 benötigt, während bei Typ B drei Blätter von F_1 und ein Blatt von F_2 benutzt werden.
- Von F_1 bzw. F_2 stehen 1500 bzw. 1200 Stück zur Verfügung.
- Die Presse steht insgesamt 700 Minuten zur Verfügung, wobei zur Verleimung beider Plattentypen pro Stück jeweils eine Minute benötigt wird.

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Lineare Produktionsplanung: Beispiel

Tabellarische Darstellung der Problemdaten:

Produkt	Menge	Einheiten von F_1	Einheiten von F_2	Pressminuten pro Stück
Typ A	x_1	1	2	1
Typ B	x_2	3	1	1
Kapazitäten		1500	1200	700

Zusammenhang von Daten und Variablen durch System von linearen Ungleichungen beschreibbar:

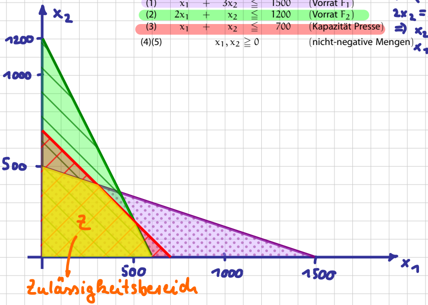
Restriktionen:

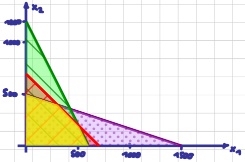
$$\begin{array}{llcrcrl}
(1) & x_1 & + & 3x_2 & \leqq & 1500 & (\text{Vorrat } F_1) \\
(2) & 2x_1 & + & x_2 & \leqq & 1200 & (\text{Vorrat } F_2) \\
(3) & x_1 & + & x_2 & \leqq & 700 & (\text{Kapazität Presse}) \\
(4)(5) & & & x_1, x_2 \geqq 0 & & & (\text{nicht-negative Mengen})
\end{array}$$

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

(1)	x_1	$+$	$3x_2$	$\leqq$	1500	(Vorrat F_1)
(2)	$2x_1$	$+$	x_2	$\leqq$	1200	(Vorrat F_2)
(3)	x_1	$+$	x_2	$\leqq$	700	(Kapazität Presse)
(4)(5)			$x_1, x_2 \geqq 0$			(nicht-negative Mengen)

(1) − (3):
$2x_2 = 800$
$\Rightarrow x_2 = 400$
$x_1 = 300$





Zusätzlich: Zielfunktion: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$ZF(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \to \max.$$

Erste Idee: Setze x_2 maximal, da Deckungsbeitrag bei x_2 (5€ pro Stück) größer als bei x_1

$$ZF(0, 500) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 500 = 2500$$

Aber: Reduktion von x_2 um 1 Einheit ermöglicht Produktion von 3 Einheiten von x_1
Verlust: 5€, zus. Gewinn: $4 \cdot 3 = 12$€
→ insg. $12 - 5 = 7$€ höherer Gewinn;
(Bem.: Funktioniert bis nächste Restriktion greift)

Optimal ist also Schnittpunkt von (1) und (3)

(Rechnung: s.o.): $x_1 = 300$, $x_2 = 400$

$$ZF(300, 400) = 4 \cdot 300 + 5 \cdot 400 = 3200$$

Begriffe und Beobachtungen

- Jede (x_1, x_2)-Kombination, die alle Restriktionen (1) bis (5) erfüllt, bezeichnet man als zulässige Lösung.
- Die Menge

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 : \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leqq 1500; \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 1200; \\ x_1 + x_2 &\leqq 700 \end{aligned} \right\}$$

nennt man Zulässigkeitsbereich des Problems.

- Wegen Restriktion $x \in \mathbb{R}_+^2$: Erster Quadrant des Koordinatensystems genügt für graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereiches.

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel: Graphische Darstellung Zulässigkeitsbereich

- Ungleichung (1) mit $x_1 + 3x_2 \leqq 1500$ entspricht dreieckigem Bereich in $\mathbb{R}^2_+$
- Begrenzung durch die drei Geraden mit $x_1 + 3x_2 = 1500,\ x_1 = 0$ und $x_2 = 0$
- Also: Grenzpunkte $(0{,}500),\ (1500{,}0),\ (0{,}0)$
- Analog für die übrigen Nebenbedingungen

(Zeichnung siehe Vorlesung)

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

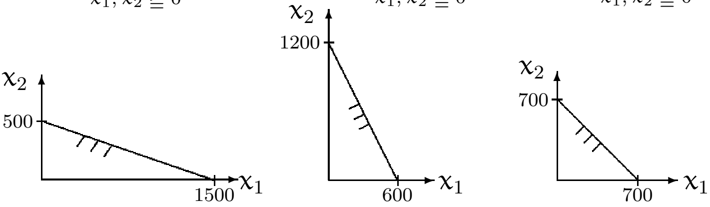
Beispiel: Graphische Darstellung Zulässigkeitsbereich

- Ungleichung (1) mit $x_1 + 3x_2 \leqq 1500$ entspricht dreieckigem Bereich in $\mathbb{R}^2_+$
- Begrenzung durch die drei Geraden mit $x_1 + 3x_2 = 1500,\ x_1 = 0$ und $x_2 = 0$
- Also: Grenzpunkte $(0{,}500),\ (1500{,}0),\ (0{,}0)$
- Analog für die übrigen Nebenbedingungen

(1) $x_1 + 3x_2 \leqq 1500$, $x_1, x_2 \geqq 0$

(2) $2x_1 + x_2 \leqq 1200$, $x_1, x_2 \geqq 0$

(3) $x_1 + x_2 \leqq 700$, $x_1, x_2 \geqq 0$



Beispiel: Graphische Darstellung der Restriktionen

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel: Graphische Darstellung Zulässigkeitsbereich

- Die gesamte zulässige Lösungsmenge Z ergibt sich dann aus dem Durchschnitt der angegebenen Bereiche.
- Alle (x_1, x_2)-Kombinationen im mit Z gekennzeichneten Bereich erfüllen damit die vorgegebenen Restriktionen.

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Mögliche Fälle für Z

1. $Z = \emptyset$, d.h., es existiert keine zulässige (x_1, x_2)-Kombination.
2. $|Z| = 1$, d.h., es existiert genau eine zulässige (x_1, x_2)-Kombination. Dieser Fall tritt meist dann auf, wenn die Restriktionen in Form von Gleichungen formuliert werden.
3. $|Z| > 1$, d.h., es existieren mehrere zulässige Lösungen.

- In den ersten beiden Fällen ist durch die Restriktionen das Planungsergebnis festgelegt.
  - Im ersten Fall können nicht alle Restriktionen gleichzeitig erfüllt werden,
  - im zweiten Fall gibt es eine einzige Lösung, die alle Restriktionen erfüllt.
- Im letzten Fall entsteht weiterer Planungsbedarf, da für die Modellvariablen noch Spielraum besteht. Um diesen Spielraum weiter einzuschränken, ist eine Zielsetzung zu formulieren, die die zulässigen Lösungen bewertet. Kann diese Zielsetzung z als lineare Funktion der Modellvariablen modelliert werden, so entsteht ein lineares Optimierungsproblem mit der Zielfunktion $z(x)$ und Nebenbedingungen in Form von Gleichungen und/oder Ungleichungen.

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Der holzverarbeitende Betrieb aus Beispiel 1 verfolgt die Zielsetzung der Gewinnmaximierung. Die Spanplatten vom Typ A bringen 4 €, die vom Typ B 5 € Gewinn pro Stück.

Zusammen mit den Restriktionen aus Beispiel 1 kann nun ein mathematisches Modell in Form eines linearen Optimierungsproblems formuliert werden.

Zielfunktion:

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Der holzverarbeitende Betrieb aus Beispiel 1 verfolgt die Zielsetzung der Gewinnmaximierung. Die Spanplatten vom Typ A bringen 4 €, die vom Typ B 5 € Gewinn pro Stück.

Zusammen mit den Restriktionen aus Beispiel 1 kann nun ein mathematisches Modell in Form eines linearen Optimierungsproblems formuliert werden.

Zielfunktion:

$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \quad \longrightarrow \max$ (Gewinnmaximierung)

Nebenbedingungen:

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Der holzverarbeitende Betrieb aus Beispiel 1 verfolgt die Zielsetzung der Gewinnmaximierung. Die Spanplatten vom Typ A bringen 4 €, die vom Typ B 5 € Gewinn pro Stück.

Zusammen mit den Restriktionen aus Beispiel 1 kann nun ein mathematisches Modell in Form eines linearen Optimierungsproblems formuliert werden.

Zielfunktion:

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \quad \longrightarrow \max \qquad \text{(Gewinnmaximierung)}$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{llcrcrl}
(1) & x_1 & + & 3x_2 & \leqq & 1500 & (\text{Vorrat } F_1) \\
(2) & 2x_1 & + & x_2 & \leqq & 1200 & (\text{Vorrat } F_2) \\
(3) & x_1 & + & x_2 & \leqq & 700 & (\text{Kapazität Presse})
\end{array}$$

$$(4)(5) \qquad x_1, x_2 \geqq 0 \qquad \text{(nicht-negative Mengen)}$$

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel: Graphische Lösung

- Zur graphischen Lösung des Problems: Zusätzlich Zielfunktion in Graphik
- Zu diesem Zweck: Darstellung von Isogewinngeraden
- Für Gewinn in Höhe von c:

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 = c \quad \text{bzw.} \quad x_2 = \frac{c}{5} - \frac{4}{5}x_1 \ .$$

- Graphische Darstellung der Optimallösung im Beispiel
- Nur der Achsenabschnitt $= c/5$ hängt vom Wert c ab, die Steigung $= -4/5$ jedoch nicht.
- Im Beispiel maximaler c-Wert im Schnittpunkt der Geraden für die Nebenbedingungen (1) und (3), d.h. in $(x_1, x_2) = (300{,}400)$.
- Ein höherer Zielfunktionswert als

$$z(300{,}400) = 4 \cdot 300 + 5 \cdot 400 = 3200$$

kann unter Einhaltung der Restriktionen nicht erreicht werden. Man spricht von einer optimalen Lösung.

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel, Bereich optimaler Lösungen

- Variante: Gewinnbeiträge der Spanplatten aus Beispiel 1 jetzt für beide Typen gleich 4.- € pro Stück, d.h. $z(x_1, x_2) = 4x_1 + 4x_2$,
- In diesem Fall: kein eindeutiges Optimum
- Bereich Z^* optimaler Lösungen; beschreibbar durch folgende Menge:

$$Z^* = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+ : 4x_1 + 4x_2 = 2800, x_1 \in [300{,}500] \right\}$$

Z^* entspricht der durch die Punkte $C = (300{,}400)$ und $D = (500{,}200)$ begrenzten Strecke.

Zusammenfassung für graphische Lösung linearer Optimierungsprobleme (mit nicht-konstanter Zielfunktion):

- Optimale Lösungen liegen stets auf dem Rand des zulässigen Bereiches Z beziehungsweise in „Ecken“ von Z.
- Mindestens eine Ecke gehört zur optimalen Lösung.
- Entspricht Menge der Optimallösungen genau einer Ecke von Z $\Longleftrightarrow$ ist Optimallösung eindeutig.
- Gibt es zwei „optimale Ecken“ , so ist die Menge aller Punkte der durch diese Ecken festgelegten Strecke optimal.

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs