Wirtschaftsmathematik

für International Management (BA) und Betriebswirtschaft (BA)

Wintersemester 2014/15

Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg

Satz: Bei konvexem Zulässigkeitsbereich und linearen Nebenbed. sowie lin. Zielfunktion liegen die Optima in Ecken von Z.

Simplex-Algorithmus

Beispiel:

$4x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 1500 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 1200 \\ x_1 + x_2 &\leq 700 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

allgemein:

$c^T \cdot x \to \max$

$A \cdot x \leq b$
$x \geq 0$

Standardmaximumproblem

Normalform

$4x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + y_1 &= 1500 \\ 2x_1 + x_2 + y_2 &= 1200 \\ x_1 + x_2 + y_3 &= 700 \end{aligned}$$

$\underbrace{x_1, x_2}_{\text{Strukturvariablen}}, \underbrace{y_1, y_2, y_3}_{\text{Schlupfvariablen}} \geq 0$

$c^T x \to \max$

$Ax + Ey = b$
$x, y \geq 0$

Bedeutung im Optimum $\left(x^T = \underbrace{(300, 400)}_{\text{siehe letzte VL}} \right)$

$300 + 3 \cdot 400 + y_1 = 1500 \Rightarrow y_1 = 0 \to$ ausgeschöpft
$2 \cdot 300 + 400 + y_2 = 1200 \Rightarrow y_2 = 200 \to$ Puffer
$300 + 400 + y_3 = 700 \Rightarrow y_3 = 0 \to$ ausg.

Algorithmus

1) Zielfunktion als Gleichung: $c^T x = z$

2) Nebenbed. $\underbrace{(A\ E)}_{\text{A und E bilden Gesamtmatrix durch Nebeneinanderschreiben}} \binom{x}{y} = b \quad x, y \geq 0$

Basislösung: $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}_+^{n+m}$

Startlösung: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, y = b$

[im Beispiel: $(x^T, y^T) = (0, 0, 1500, 1200, 700)$

hier: Basis y_1, y_2, y_3; Nichtbasis x_1, x_2]

Satz:
- $\binom{x}{y}$ ist Basislösung $\Leftrightarrow$ x ist Ecke des Zulässigkeitsbereichs
- Basiswechsel $\Leftrightarrow$ Eckenwechsel

Simplexalgorithmus (Beispiel)

Pivot-Element in dieser Zeile, da hier knappste Ressource

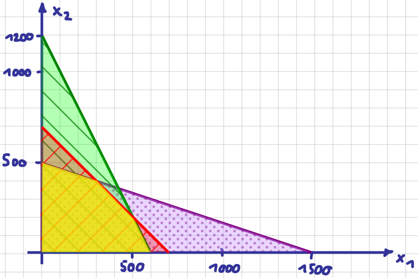
Pivot-Element in dieser Spalte, da ZF-Koeffizient hier minimal

		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	z	
	①	-4	-5	0	0	0	0	ZF
1500 : 3 = 500	②	1	3	1	0	0	1500	NB_1
1200 : 1 = 1200	③	2	1	0	1	0	1200	NB_2
700 : 1 = 700	④	1	1	0	0	1	700	NB_3
	⑤	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	0	2500	① + $\frac{5}{3}$ ②
500 : $\frac{1}{3}$ = 1500	⑥	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	500	$\frac{1}{3}$ ②
700 : $\frac{5}{3}$ = 420	⑦	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	700	③ $-\frac{1}{3}$ ②
200 : $\frac{2}{3}$ = 300	⑧	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	200	④ $-\frac{1}{3}$ ②
		0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3200	⑤ + $\frac{1}{2}$ ⑧
		0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	400	⑥ $-\frac{1}{2}$ ⑧
		0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	200	⑦ $-\frac{5}{2}$ ⑧
		1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	300	$\frac{3}{2}$ ⑧

▶ Optimum erreicht (keine negativen Koeff. in Zielfunktionszeile)

→ neue Basis: x_1, x_2, y_2
(setze Nichtbasis $y_1 = y_3 = 0$)

damit: $\underbrace{x_1 = 300,\ x_2 = 400}_{\text{optimales Prod.-programm}},\ \underbrace{y_2 = 200}_{\text{Puffer bei } NB_2}$



Lösung über Tabellenkalkulation

		Typ A	Typ B			
Entscheidungsvariablen		300	400	Wert Zielfunktion		
Zielfunktionskoeffizienten	Deckungsbeiträge	4,00 €	5,00 €	3.200,00 €		
				Wert Nebenbed.		
Nebenbedingunskoeffizienten	Kapazität Furnier 1	1	3	1500	<=	1500
	Kapazität Furnier 2	2	1	1000	<=	1200
	Pressminuten pro Stück	1	1	700	<=	700

Microsoft Excel 14.0 Antwortbericht
Arbeitsblatt: [Fallstudie_LinearePlanung_aus_Vorlesung.xlsx]Bsp. Lineares Programm
Bericht erstellt: 19.11.2014 10:13:41
Ergebnis: Solver hat eine Lösung gefunden. Alle Nebenbedingungen und Optionen wurden eingehalten.
Solver-Modul
Modul: Simplex-LP
Lösungszeit: 41,777 Sekunden
Iterationen: 2 Teilprobleme: 0
Solver-Optionen
Höchstzeit 100 Sek., Iterationen 100, Precision 0,000001, Iterationsergebnisse anzeigen
Höchstzahl der Teilprobleme Unbegrenzt, Max. Ganzzahllösungen Unbegrenzt, Ganzzahltoleranz 5%, Ohne ganzzahl

Zielzelle (Max.)

Zelle	Name	Ursprünglicher Wert	Lösungswert
$E$3	Deckungsbeiträge Wert Zielfunktion	3.600,00 €	3.200,00 €

Variablenzellen

Zelle	Name	Ursprünglicher Wert	Lösungswert	Integer
$C$2	Entscheidungsvariablen Typ A	400	300	Fortlaufend
$D$2	Entscheidungsvariablen Typ B	400	400	Fortlaufend

Nebenbedingungen

Zelle	Name	Zellwert	Formel	Status	Puffer
$E$6	Kapazität Furnier 2 Wert Nebenbed.	1000	$E$6<=$G$6	Nicht einschränkend	200
$E$5	Kapazität Furnier 1 Wert Nebenbed.	1500	$E$5<=$G$5	Einschränkend	0
$E$7	Pressminuten pro Stück Wert Nebenbed.	700	$E$7<=$G$7	Einschränkend	0

Microsoft Excel 14.0 Sensitivitätsbericht
Arbeitsblatt: [Fallstudie_LinearePlanung_aus_Vorlesung.xlsx]Bsp. Lineares Programm
Bericht erstellt: 19.11.2014 10:13:42

Variablenzellen

Zelle	Name	Endgültig Endwert	Reduziert Kosten	Ziel Koeffizient	Zulässig Erhöhen	Zulässig Verringern
$C$2	Entscheidungsvariablen Typ A	300	0	4	1	2,333333333
$D$2	Entscheidungsvariablen Typ B	400	0	5	7	1

Nebenbedingungen

Zelle	Name	Endgültig Endwert	Schatten Preis	Nebenbedingung Rechte Seite	Zulässig Erhöhen	Zulässig Verringern
$E$6	Kapazität Furnier 2 Wert Nebenbed.	1000	0	1200	1E+30	200
$E$5	Kapazität Furnier 1 Wert Nebenbed.	1500	0,5	1500	600	400
$E$7	Pressminuten pro Stück Wert Nebenbed.	700	3,5	700	80	200

hier klicken zum öffnen

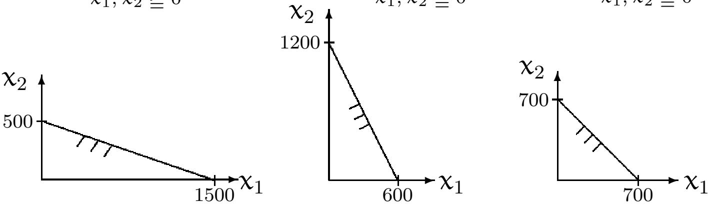
Beispiel: Graphische Darstellung Zulässigkeitsbereich

- Ungleichung (1) mit $x_1 + 3x_2 \leqq 1500$ entspricht dreieckigem Bereich in $\mathbb{R}_+^2$
- Begrenzung durch die drei Geraden mit $x_1 + 3x_2 = 1500,\ x_1 = 0$ und $x_2 = 0$
- Also: Grenzpunkte $(0{,}500),\ (1500{,}0),\ (0{,}0)$
- Analog für die übrigen Nebenbedingungen

(Zeichnung siehe Vorlesung)

- Ungleichung (1) mit $x_1 + 3x_2 \leqq 1500$ entspricht dreieckigem Bereich in $\mathbb{R}_+^2$
- Begrenzung durch die drei Geraden mit $x_1 + 3x_2 = 1500,\ x_1 = 0$ und $x_2 = 0$
- Also: Grenzpunkte $(0{,}500),\ (1500{,}0),\ (0{,}0)$
- Analog für die übrigen Nebenbedingungen

$$(1)\quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leqq 1500 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned} \qquad (2)\quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqq 1200 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned} \qquad (3)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqq 700 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$



Beispiel: Graphische Darstellung der Restriktionen

Beispiel: Graphische Darstellung Zulässigkeitsbereich

- Die gesamte zulässige Lösungsmenge Z ergibt sich dann aus dem Durchschnitt der angegebenen Bereiche.
- Alle (x_1, x_2)-Kombinationen im mit Z gekennzeichneten Bereich erfüllen damit die vorgegebenen Restriktionen.

Mögliche Fälle für Z

1. $Z = \emptyset$, d.h., es existiert keine zulässige (x_1, x_2)-Kombination.
2. $|Z| = 1$, d.h., es existiert genau eine zulässige (x_1, x_2)-Kombination. Dieser Fall tritt meist dann auf, wenn die Restriktionen in Form von Gleichungen formuliert werden.
3. $|Z| > 1$, d.h., es existieren mehrere zulässige Lösungen.

- In den ersten beiden Fällen ist durch die Restriktionen das Planungsergebnis festgelegt.
  - Im ersten Fall können nicht alle Restriktionen gleichzeitig erfüllt werden,
  - im zweiten Fall gibt es eine einzige Lösung, die alle Restriktionen erfüllt.
- Im letzten Fall entsteht weiterer Planungsbedarf, da für die Modellvariablen noch Spielraum besteht. Um diesen Spielraum weiter einzuschränken, ist eine Zielsetzung zu formulieren, die die zulässigen Lösungen bewertet. Kann diese Zielsetzung z als lineare Funktion der Modellvariablen modelliert werden, so entsteht ein lineares Optimierungsproblem mit der Zielfunktion $z(x)$ und Nebenbedingungen in Form von Gleichungen und/oder Ungleichungen.

Der holzverarbeitende Betrieb aus Beispiel 1 verfolgt die Zielsetzung der Gewinnmaximierung. Die Spanplatten vom Typ A bringen 4 €, die vom Typ B 5 € Gewinn pro Stück.

Zusammen mit den Restriktionen aus Beispiel 1 kann nun ein mathematisches Modell in Form eines linearen Optimierungsproblems formuliert werden.

Zielfunktion:

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \quad \longrightarrow \max \qquad \text{(Gewinnmaximierung)}$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{lrcrcrl}
(1) & x_1 & + & 3x_2 & \leqq & 1500 & (\text{Vorrat } F_1) \\
(2) & 2x_1 & + & x_2 & \leqq & 1200 & (\text{Vorrat } F_2) \\
(3) & x_1 & + & x_2 & \leqq & 700 & (\text{Kapazität Presse}) \\
(4)(5) & & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2 \geqq 0} & (\text{nicht-negative Mengen})
\end{array}$$

Beispiel: Graphische Lösung

- Zur graphischen Lösung des Problems: Zusätzlich Zielfunktion in Graphik
- Zu diesem Zweck: Darstellung von Isogewinngeraden
- Für Gewinn in Höhe von c:

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 = c \quad \text{bzw.} \quad x_2 = \frac{c}{5} - \frac{4}{5}x_1 \; .$$

- Graphische Darstellung der Optimallösung im Beispiel
- Nur der Achsenabschnitt $= c/5$ hängt vom Wert c ab, die Steigung $= -4/5$ jedoch nicht.
- Im Beispiel maximaler c-Wert im Schnittpunkt der Geraden für die Nebenbedingungen (1) und (3), d.h. in $(x_1, x_2) = (300{,}400)$.
- Ein höherer Zielfunktionswert als

$$z(300{,}400) = 4 \cdot 300 + 5 \cdot 400 = 3200$$

kann unter Einhaltung der Restriktionen nicht erreicht werden. Man spricht von einer optimalen Lösung.

Beispiel, Bereich optimaler Lösungen

- Variante: Gewinnbeiträge der Spanplatten aus Beispiel 1 jetzt für beide Typen gleich 4.- € pro Stück, d.h. $z(x_1, x_2) = 4x_1 + 4x_2$,
- In diesem Fall: kein eindeutiges Optimum
- Bereich Z^* optimaler Lösungen; beschreibbar durch folgende Menge:

$$Z^* = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 : 4x_1 + 4x_2 = 2800, x_1 \in [300{,}500] \right\}$$

Z^* entspricht der durch die Punkte $C = (300{,}400)$ und $D = (500{,}200)$ begrenzten Strecke.

Zusammenfassung für graphische Lösung linearer Optimierungsprobleme (mit nicht-konstanter Zielfunktion):

- Optimale Lösungen liegen stets auf dem Rand des zulässigen Bereiches Z beziehungsweise in „Ecken“ von Z.
- Mindestens eine Ecke gehört zur optimalen Lösung.
- Entspricht Menge der Optimallösungen genau einer Ecke von Z $\Longleftrightarrow$ ist Optimallösung eindeutig.
- Gibt es zwei „optimale Ecken“ , so ist die Menge aller Punkte der durch diese Ecken festgelegten Strecke optimal.

Mathematik: Gliederung

6 Folgen und Reihen

- Eigenschaften und Beispiele
- Konvergenz und Grenzwert
- Reihen

Folgen Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Schreibweise : $n \mapsto a(n) = a_n$

z.B. $a(n) = \frac{1}{n^2+1}$

n	1	2	3	...	10	...
a_n	$1/2$	$1/5$	$1/10$	...	$1/101$	....

[Tabellen mit TR : Mode → Table
→ „f(x)" $\frac{1}{x^2+1}$ $\boxed{=}$
„Minimum" 1 $\boxed{=}$
„Maximum" 20 $\boxed{=}$
„Schrittweite" 1 $\boxed{=}$]

Rekursive Folgen (beziehen sich auf Vorgänger)

z.B. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 0 = 1$
$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$
$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$
$\vdots$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21

Fibonacci-Zahlen

Beispiel $a_0 = s$ $(s \in \mathbb{R})$
$a_{n+1} = a_n + d$ $(d \in \mathbb{R})$

$a_0 = s$, $a_1 = s + d$, $a_2 = s + 2d$,
$a_3 = s + 3d$

$\boxed{a_n = s + n \cdot d}$ arithmetische Folge

Beispiel : $a_0 = s$ $(s \in \mathbb{R})$
$a_{n+1} = a_n \cdot q$ $(q \in \mathbb{R})$

$a_1 = s \cdot q$, $a_2 = s \cdot q^2$
$a_3 = s \cdot q^3$

$\boxed{a_n = s \cdot q^n}$ geometrische Folge

Grenzwert und Konvergenz von Folgen

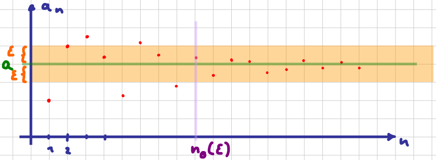
z.B. $a_n = \frac{10^n}{n!}$

	n	an
1	1	10.00000
2	2	50.00000
3	3	166.66667
4	4	416.66667
5	5	833.33333
6	6	1388.88889
7	7	1984.12698
8	8	2480.15873
9	9	2755.73192
10	10	2755.73192
11	11	2505.21084
12	12	2087.67570
13	13	1605.90438
14	14	1147.07456
15	15	764.71637
16	16	477.94773
17	17	281.14573
18	18	156.19207
19	19	82.20635
20	20	41.10318

Vermutung: a_n wird immer kleiner und „geht gegen 0"

a_n heißt **Konvergent** gegen **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \; |a_n - a| < \varepsilon$$



Für jedes (noch so kleine) ε gibt es eine Schranke n_0, ab der alle Folgenglieder höchstens ε vom Grenzwert a entfernt sind

$\Leftrightarrow$ a_n hat Grenzwert a

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad a_n \to a$$

Beispiel: $a_n = n \cdot \frac{-2n}{1+n^2}$

Vermutung: a_n konvergiert mit Grenzwert $a = -2$

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| -\frac{2n^2}{1+n^2} - (-2) \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\cancel{-2n^2} + 2 + \cancel{2n^2}}{1+n^2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{1+n^2} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < 1 + n^2 \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$$

	n	an
1	1	-1.000000
2	2	-1.600000
3	3	-1.800000
4	4	-1.882353
5	5	-1.923077
6	6	-1.945946
7	7	-1.960000
8	8	-1.969231
9	9	-1.975610
10	10	-1.980198
11	100	-1.999800
12	200	-1.999950
13	300	-1.999978
14	400	-1.999988
15	500	-1.999992
16	600	-1.999994
17	700	-1.999996
18	800	-1.999997
19	900	-1.999998
20	1000	-1.999998

Warum beschäftigen wir uns mit Folgen und Reihen?

- Analyse von Datensequenzen, insbesondere Modellierung diskreter, zeitlicher Entwicklungen (z.B. von Aktienkursen, Absatzmengen)
- Grundlage der Finanzmathematik (z.B. Zinseszinsrechnung, Tilgungsrechnung)
- wesentlich zum Verständnis der Konzepte der Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Wesentliche Lernziele:

- Verständnis der Begriffe Folgen und Reihen
- Fähigkeit Folgen und Reihen nach ihrer Art zu klassifizieren
- Kennenlernen typischer, insbesondere der Grenzwerteigenschaften von Folgen und Reihen
- Fähigkeit, diese Eigenschaften zu erkennen und nachzuweisen

Definition und Eigenschaften

Definition

- Eine Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$
- Schreibweise für Folgenglieder: $a(0), a(1), \ldots$ oder $a_0, a_1, \ldots$
- Schreibweise für Folge: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ oder (a_n)

Leonardo von Pisa
(ca. 1180 - 1250)

Eigenschaften von Folgen: Eine Folge heißt

- endlich (unendlich), falls Anzahl der Folgenglieder endlich (unendlich) ist
- gesetzmäßig gebildet, falls Folgenglieder einem Bildungsgesetz folgen, zum Beispiel: $a_n = \frac{1}{n+1}$

- rekursiv definiert, falls zur Berechnung eines Folgengliedes frühere Werte nötig sind
  Beispiel: $a_0 = 0$; $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n > 1$ (Fibonacci-Folge)

Spezielle Folgen

- Arithmetische Folge: $(a_n) : \; a_{n+1} - a_n = d \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $d \in \mathbb{R}$
- Geometrische Folge: $(a_n) : \; \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $q \in \mathbb{R}$

Geometrische Folge: Beispiel Schachspiel

- Sissa ibn Dahir, der Erfinder des Schachspieles, darf sich vom indischen König Shihram eine Belohnung wünschen.
- Sein Wunsch: So viele Weizenkörner, wie man auf ein Schachbrett legen kann, wenn

1. Feld	:	$a_0 = 1$	Korn
2. Feld	:	$a_1 = 2$	Körner
3. Feld	:	$a_2 = 4$	Körner
4. Feld	:	$a_3 = 8$	Körner
		$\vdots$	
n. Feld	:	$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2}$	Körner

Konvergenz und Grenzwert

- Fragen: Bleiben Folgenglieder ab einem gewissen n in einen kleinen Bereich um einen festen Wert?
- Und: Kann man diesen Bereich beliebig verkleinern?
- Definition:

$$a \in \mathbb{R} \text{ heißt } \textbf{Grenzwert} \text{ oder } \textbf{Limes} \text{ von } (a_n) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n(\epsilon) \quad \text{mit} \quad |a_n - a| < \epsilon \quad \forall\, n > n(\epsilon)$$

- Schreibweise für Grenzwert: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$
- Existiert dieser Grenzwert, heißt die Folge **konvergent**
- Ist der Grenzwert $a = 0$, heißt die Folge **Nullfolge**
- Existiert kein Grenzwert, heißt die Folge **divergent**

Beispiel zur Definition des Grenzwerts

- Gegeben: $a_n = \frac{n}{n+1}$
- Vermutung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = 1$
- Beweis: Wenn $a = 1$, dann folgt

$$
\begin{aligned}
& |a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\epsilon} < n+1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\epsilon} - 1 < n
\end{aligned}
$$

- Also: Für jedes ϵ findet man ein $n(\epsilon)$, so dass die Grenzwertbedingung stimmt
- Zum Beispiel: Wähle
  $\epsilon = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon} - 1 = \frac{1}{0{,}01} - 1 = 100 - 1 = 99$