# Wirtschaftsmathematik

für International Management (BA) und Betriebswirtschaft (BA)

Wintersemester 2014/15

Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg

## Gegeben:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a \quad$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = b$
- kurz: $(a_n) \to a \quad$ und $\quad (b_n) \to b$

Beispiel: $\dfrac{-n^2+n^3}{\sqrt{n}\,(2n^{5/2}+n^2)} = \dfrac{-n^2+n^3}{2n^3+n^{5/2}} = \dfrac{n^3(-n^{-1}+1)}{n^3(2+n^{-1/2})}$

$n^{1/2}\cdot n^{5/2} = n^{6/2} = n^3$

$= \dfrac{-(1/n)+1}{2+(1/n)^{1/2}}$

$\to \dfrac{-0+1}{2+0^{1/2}} = 1/2$

$\frac{1}{n} \stackrel{?}{\to} 0$

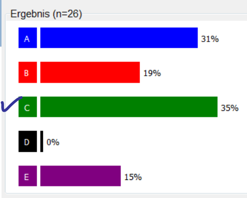
$|\frac{1}{n}-0| < \varepsilon$

$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \to 0$

## Dann gilt:

- $(a_n + b_n) \to a + b$
- $(a_n - b_n) \to a - b$
- $(a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$
- $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$
- $(a_n^c) \to a^c$
  $(a_n > 0,\ a > 0,\ c \in \mathbb{R})$
- $(c^{a_n}) \to c^a \quad (c > 0)$




## Eulers Folge:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} e_n = e \quad \text{(Eulersche Zahl)}$$

Damit ergibt sich: Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g_n$ der Folge

$$g_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \Big[\underbrace{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n}_{e_n}\Big]^2 = e_n^2 \to e^2$$

Antwort:

$$2^{3\cdot 2} = 2^3 \cdot 2^3 = (2^3)^2$$

- **A** ist e, da die Folge den gleichen Grenzwert wie $(e_n)$ ~~und $(e_n^*)$~~ haben muss.
- **B** ist 2e. Der Grund ist das Logarithmusgesetz.
- **C** ist $e^2$. Der Grund ist das Potenzgesetz.
- **D** ist eine andere reelle Zahl, als die obigen, die man noch bestimmen muss.
- **E** ist unendlich. Die Folge divergiert, weil $2n$ sehr viel schneller wächst als $n$

| | n | en |
|---|---|---|
| 1 | 1e+00 | 2.000000 |
| 2 | 2e+00 | 2.250000 |
| 3 | 3e+00 | 2.370370 |
| 4 | 4e+00 | 2.441406 |
| 5 | 5e+00 | 2.488320 |
| 6 | 6e+00 | 2.521626 |
| 7 | 7e+00 | 2.546500 |
| 8 | 8e+00 | 2.565785 |
| 9 | 9e+00 | 2.581175 |
| 10 | 1e+01 | 2.593742 |
| 11 | 1e+01 | 2.593742 |
| 12 | 2e+01 | 2.653298 |
| 13 | 3e+01 | 2.674319 |
| 14 | 4e+01 | 2.685064 |
| 15 | 5e+01 | 2.691588 |
| 16 | 6e+01 | 2.695970 |
| 17 | 7e+01 | 2.699116 |
| 18 | 8e+01 | 2.701485 |
| 19 | 9e+01 | 2.703332 |
| 20 | 1e+02 | 2.704814 |
| 21 | 1e+02 | 2.704814 |
| 22 | 2e+02 | 2.711517 |
| 23 | 3e+02 | 2.713765 |
| 24 | 4e+02 | 2.714892 |
| 25 | 5e+02 | 2.715569 |
| 26 | 6e+02 | 2.716020 |
| 27 | 7e+02 | 2.716343 |
| 28 | 8e+02 | 2.716585 |
| 29 | 9e+02 | 2.716773 |
| 30 | 1e+03 | 2.716924 |
| 31 | 1e+06 | 2.718280 |
| 32 | 1e+09 | 2.718282 |

# Testfrage: Folge Euler

## Eulers Folge:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} e_n = \mathrm{e} \quad \text{(Eulersche Zahl)}$$

Damit ergibt sich: Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g_n$ der Folge

$$g_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

---

Antwort:

- A ist e, da die Folge den gleichen Grenzwert wie $(e_n)$ und $(e_n^*)$ haben muss.
- B ist $2\mathrm{e}$. Der Grund ist das Logarithmusgesetz.
- C ist $\mathrm{e}^2$. Der Grund ist das Potenzgesetz.
- D ist eine andere reelle Zahl, als die obigen, die man noch bestimmen muss.
- E ist unendlich. Die Folge divergiert, weil $2n$ sehr viel schneller wächst als $n$

# Definition der Reihe

- Gegeben: $(a_n)$ unendliche Folge in $\mathbb{R}$
- Dann heißt $(s_n)$ mit

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

eine unendliche Reihe.

- $s_n$ heißt $n$-te Partialsumme
- Klar ist: Reihen sind spezielle Folgen

**Beispiel**:

- $(a_n)$ geometrische Folge $\longrightarrow$ $(s_n)$ geometrische Reihe
- $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ ; mit $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$
- Offensichtlich gilt: $a_n = a_{n-1} q = a_{n-2} q^2 = \ldots = a_0 q^n$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{i=0}^{n} a_0 q^i = a_0 (1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$



**Reihen** $\hat{=}$ Summen von Folgenelemente

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Beispiel: $s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ → $a_i$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | .... | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 1 | $1/2$ | $1/6$ | $1/24$ | $1/120$ | .... | |
| $s_n$ | 1 | 2 | 2,5 | 2,67 | 2,708 | 2,71667 | ... | $e$ |

$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}$ $\qquad$ $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$

Beispiel: $s_n = \sum_{i=0}^{n} s + d \cdot i$ → $a_i$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | .... | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $s$ | $s+d\cdot 1$ | $s+d\cdot 2$ | $s+d\cdot 3$ | ... | $s+d\cdot n$ |
| $s_n$ | $s$ | $2s+d$ | $3s+3d$ | $4s+6d$ | | |

$s + (s+d\cdot 1)$

$s + (s+d\cdot 1) + (s+d\cdot 2)$

$s + (s+d\cdot 1) + (s+d\cdot 2) + (s+d\cdot 3)$
$= 4s + d(1+2+3)$

$$s_n = s + (s + 1\cdot d) + (s + 2d) \cdots + (s + n\cdot d)$$
$$= (n+1)\cdot s + d\underbrace{(1+2+\cdots+n)}_{(n+1)\cdot n/2} = (n+1)\cdot s + d\cdot(n+1)\frac{n}{2}$$
$$= (n+1)\left[s + \tfrac{1}{2} n d\right]$$

Speicher im TR:

STO A $\quad$ (B, C, D)
speichern

z.B. $(2 \cdot \text{RCL } A)^{\wedge} 5$

„k aus n" → $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
„n über k"

$k! = 1 \cdot 2 \cdots k$
$0! := 1$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} s + id = (n+1)\left[s + \tfrac{1}{2} n d\right]$$

arithmetische Reihe $\qquad s, d \in \mathbb{R}$

Beispiel: $s_n = \sum_{i=0}^{n} s \cdot q^i$ → $a_i$

[Exkurs:

$$(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^1 + q^0)\cdot(q-1)$$
$$= q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2 + q^1$$
$$- q^{n-1} - \cdots - q^2 - q^1 - \underbrace{q^0}_{=1} = q^n - 1$$
$$\Leftrightarrow \quad q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^0 = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$
]

| $n$ | 0 | 1 | 2 | ... | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $s$ | $sq$ | $sq^2$ | | $sq^5$ |
| $s_n$ | $s$ | $s(1+q)$ | $s(1+q+q^2)$ | | $s(1+q+q^2+\cdots+q^5)$ |

$s + sq$ $\qquad$ $s + sq + sq^2$

$$s_n = s\cdot(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$$
$$= s \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} s \cdot q^i = s \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \qquad q, s \in \mathbb{R},\ q \neq 1$$

geometrische Reihe

- Summe aller Körner auf Schachbrett:

$= a_0$

$$= \sum_{i=0}^{63} 1 \cdot 2^i$$

$$s_n = \sum_{i=0}^{63} a_i = a_0 \frac{1 - q^{64}}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \approx 1{,}84467 \cdot 10^{19}$$

# Geometrische Reihe: Beispiel Schachspiel





- Summe aller Körner auf Schachbrett:

$$s_n = \sum_{i=0}^{63} a_i = a_0 \frac{1-q^{64}}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} \approx 1{,}84467 \cdot 10^{19}$$

- Das bedeutet:

$$\begin{array}{lll}
100 \text{ Körner} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{g Weizen} & \longrightarrow & 1{,}8 \cdot 10^{17}\,\text{g} \\
& \longrightarrow & 1{,}8 \cdot 10^{14}\,\text{kg} \\
& \longrightarrow & 1{,}8 \cdot 10^{11}\,\text{t} = 180 \text{ Mrd. t} \\
1 \text{ Güterwagon} \mathrel{\hat{=}} 50\,\text{t Weizen} & \longrightarrow & 3{,}6 \text{ Mrd. Güterwagons} \\
& \longrightarrow & 36 \text{ Mrd. m langer Eisenbahnzug} \\
& \longrightarrow & 36 \text{ Mill. km}
\end{array}$$

$\longrightarrow$ 100-fache Entfernung zwischen Erde und Mond

Beispiel: $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ (harmonische Reihe)

$= 1 + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{9} + \dots + \tfrac{1}{16}}_{>8\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots$

$\Rightarrow$ $s_n$ nicht konvergent, obwohl $a_i = \frac{1}{i}$ Nullfolge ist



**Gegeben:** $a_i$ Folge, $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

## Divergenzkriterium

- Ist $s_n$ konvergent $\Rightarrow$ $a_i$ ist Nullfolge ($a_i \to 0$)
- Also äquivalent dazu:

$$a_i \text{ ist keine Nullfolge} \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent}$$

## Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ konvergent}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent}$$

Beispiel

$s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{10^i}{i!}$ ($\frac{10^i}{i!} \to a_i$)

$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{10^k}{k!}}$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{10^{k+1}\cdot k!}{10^k \cdot (k+1)!}$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{10}{k+1} = 0 < 1$

$\Rightarrow$ $s_n$ ist konvergent

- Bemerkung: Für $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$ ist im Allgemeinen keine Aussage möglich
- Spezialfall geometrische Reihe:

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = q \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = q \quad \Rightarrow \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \quad s_n \text{ konvergent} \\ q \geq 1 & \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent} \end{cases}$$

# Mathematik: Gliederung

1 Grundlegende Bausteine

2 Grundlegende Werkzeuge

3 Aussagenlogik

4 Lineare Algebra

5 Lineare Programme

6 Folgen und Reihen

7 Finanzmathematik

8 Reelle Funktionen

9 Differenzieren 1

10 Differenzieren 2

11 Integration

12 Differentialgleichungen

7 Finanzmathematik

- Zinsen
- Renten
- Tilgung
- Kursrechnung

- Zinsen sind der Preis, den ein Schuldner für die befristete Überlassung von Kapital bezahlen muss.
- Der Betrag der Zinsen (Z) wird aus der Höhe des überlassenen Kapitals K und der Dauer der Überlassung berechnet.

0,03 ≙ 3%

0,0084 ≙ 0,84%

q = 1,03 ≙ 3%
0,92 ≙ -8%

**Verwendete Symbole**:

| Symbol | Bezeichnung |
| --- | --- |
| $K_0$ | Anfangskapital |
| $K_n$ | Endkapital |
| $n$ | ganzzahlige Laufzeit |
| $f$ | gebrochene Laufzeit |
| $x$ | nicht–ganzzahlige Laufzeit |
| $Z$ | Zins |
| $\cancel{p}$ | ~~Prozentzinssatz~~ |
| $i = \frac{p}{100}$ | Zinssatz |
| $q = 1 + i$ | Aufzinsungsfaktor |
| $v = \frac{1}{q}$ | Abzinsungsfaktor |

## Einfache Verzinsung
(linear)

$$k_n = k_0 (1 + n \cdot i)$$

Beispiel: $k_0 = 0{,}01$, $n = 1500$
$i = 0{,}03$
$k_n = 0{,}01 (1 + 1500 \cdot 0{,}03)$
$= 0{,}46$ €

## Zinseszinsen
(exponentielle Verzinsung)

$$k_n = k_0 (1+i)^n = k_0 \cdot q^n$$

$$k_n = k_0 q^n$$

Beispiel: $k_0 = 0{,}01$ €, $n = 1500$
$q = 1 + i = 1{,}03$

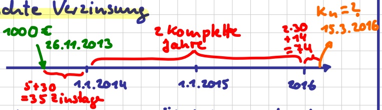
$k_n = 0{,}01 \cdot 1{,}03^{1500}$

$\approx 1{,}80 \cdot 10^{17}$

$\widehat{=}$ 180 000 Billionen €

## Gemischte Verzinsung

Beispiel:




Konto: $i = 0{,}03$ p.a., jährliche Zinsabrechnung
↳ per annum (pro Jahr)

① Jeder Monat hat genau 30 Zinstage

② Einzahlungstag wird komplett verzinst
Auszahlungstag wird nicht verzinst

## Kontostand am 15.3.2016

$$k_n = 1000 \cdot \left(1 + 0{,}03 \cdot \frac{35}{360}\right) \cdot 1{,}03^2 \cdot \left(1 + 0.03 \frac{74}{360}\right)$$

Bis hier: Kontostand am 1.1.2014

K.S. am 1.1.2016

$\approx 1070{,}55$ €

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + i \frac{\Delta t_1}{360}\right) \cdot q^n \cdot \left(1 + i \frac{\Delta t_2}{360}\right)$$

# Einfache Verzinsung



- Sparzinsen können zinseszinslich angelegt werden
- Bei Kreditgeschäften zwischen Privatpersonen ist das illegal (BGB, §248)
- Deswegen: Einfache (lineare) Verzinsung gemäß

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 + Z \\ &= K_0 + K_0 \cdot i \cdot n \\ &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot n}{100}\right) \end{aligned}$$

# Unterjährige einfache Verzinsung

- In Deutschland Einteilung des Zinsjahres in 12 Monate zu je 30 Tagen (360 Tage)
- Dadurch Berechnung von Monats- bzw. Tageszinsen möglich
- Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ in Jahren wird dann zu Laufzeit $f \in \mathbb{Q}$ in Jahren mit

$$f = \frac{t_2 - t_1}{360}$$

  ($t_1$ entspricht Tag der Einzahlung, $t_2$ Tag der Auszahlung)
- Daraus ergibt sich

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360} = K_0 \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$$

- Stellung eines Tages im Jahr:

$$(\text{Aktueller Monat} - 1) \cdot 30 + \text{Tag im Monat}$$



$K_0$ unbekannt: Abzinsung bzw. Diskontierung bzw. Barwertberechnung

- Amtliche Diskontierung:

$$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{1 + ni}}$$

- Kaufmännische Diskontierung (Nur erste Näherung):

$$K_0 = K_n(1 - ni)$$

# Die Zinseszinsformel

- Während Laufzeit Zinszahlungen mit sofortiger Wiederanlage und Verzinsung zum Zinssatz $i$
- Entwicklung des Kapitals:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i) = K_0 \cdot q \\
K_2 &= K_1 \cdot (1+i) = (K_0 \cdot q) \cdot q = K_0 \cdot q^2 \\
K_3 &= K_2 \cdot (1+i) = \left(K_0 \cdot q^2\right) \cdot q = K_0 \cdot q^3 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

- Damit folgt die Zinseszinsformel, mit $n$ (zunächst) ganzzahlig.

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$$

- $q^n$ heißt Aufzinsungfaktor



# Die Zinseszinsformel

Auflösung der Zinseszinsformel nach $K_0$, $q$ und $n$:

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n}$$

- Abzinsungs- oder Diskontierungsformel
- $\dfrac{1}{q^n}$ heißt Abzinsungsfaktor

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad \text{bzw.} \quad i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q}$$



# Gemischte Verzinsung

- Üblich: Einfache Verzinsung bei Restlaufzeiten kleiner einem ganzzahliges Vielfachen der Zinsperiode
- Genauer: Mit
  - $\Delta t_1$ (Zinstage im ersten Jahr),
  - $n$ (die weiteren, ganzen Zinsperioden) und
  - $\Delta t_2$ (Zinstage im letzten Jahr),
  - gilt für das Endkapital $K_x$:

$$K_x = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_1}{360}\right) \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_2}{360}\right)$$

- Gemischte Zinsrechnung (unter Verwendung der $30/360-$Methode), auch Sparbuchmethode.

### Beispiel

Am 15.9.2006 wurden € 12 000 zu 3,75 % angelegt. Wie hoch war der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21.9.2013 (letzter Zinstag 20.9.2013)?

**Lösung:**

$$
\begin{aligned}
15.9. &\mathrel{\hat=} (9-1)\cdot 30 + 15 = 255\\
&\Rightarrow \Delta t_1 = 360 - (255-1) = 106
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
20.9. &\mathrel{\hat=} (9-1)\cdot 30 + 20 = 260\\
&\Rightarrow \Delta t_2 = 260
\end{aligned}
$$

$(n = 6)$:

$$
\begin{aligned}
K_x &= 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375\cdot 106}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375\cdot 260}{360}\right)\\
&= 15\,541{,}20
\end{aligned}
$$



# Gemischte Verzinsung: Anmerkungen





- Würde man – von $t_0$ ausgehend – in ganze Jahre und einem Rest aufteilen, so ergäbe sich:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^7 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 6}{360}\right) = 15\,537{,}08$$

(7 Jahre von 15.9.96 bis 14.9.2003; dazu 6 Tage)

- Würde man die **Zinseszinsformel** mit nicht-ganzzahligem Exponenten verwenden, so ergäbe sich Folgendes:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{7+\frac{6}{360}} = 15\,536{,}90$$

- Gemischte Verzinsung ist also (zumindest für Kapitalanleger) verbraucherfreundlich



## Nachteil der gemischten Verzinsung

- Die gemischte Verzinsung ist inkonsistent und vom Zeitpunkt des Zinszuschlages (bzw. der Einzahlung) abhängig.
- Im Beispiel: Wäre der Zeitraum um einen Monat verschoben (vom 15.10.96 bis zur Auflösung am 21.10.2003), so ergäbe sich …

$$K_x = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 76}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 290}{360}\right)$$
$$= 15\,540{,}31$$

Die Widersprüche verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung zum konformen Zinssatz vorgenommen wird.