Wirtschaftsmathematik

für International Management (BA) und Betriebswirtschaft (BA)

Wintersemester 2014/15

Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg

Unterjährige Verzinsung

Beispiel: Kontostand 1.1. : -1000€
Kreditzins: 16 %
quartalsweise Abrechnung

nach 1. Quartal: $-1000\cdot\left(1+\frac{0,16}{4}\right) = -1040$

nach 2. Quartal: $-1000\cdot\left(1+\frac{1}{4}\cdot 0,16\right)^2 = -1081,60$

⋮

nach 1 Jahr $-1000\cdot\left(1+\frac{1}{4}\, 0\cdot 16\right)^4 = -1169,86$ €

d.h. 16,986 % Effektivzins

allgemein

Nominalzins

$$\boxed{q_{eff} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m}$$

bei m Abr. pro Jahr

Effektivzins

i_{eff} → $q_{eff} - 1$

m	i_{eff}
1	16 %
4	16,986 %
12	17,227 %
52	17,322 %
365	17,347 %
365·24·3600	17,3510622 %
∞	17,3510871 % → $e^{0,16}$

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^m \xrightarrow[m\to\infty]{} e^i$$

stetige Verzinsung: $\boxed{q_{eff} = e^{i_{nom}}}$

Äquivalenzprinzip der Finanzmathe.

Beispiel: 2 Zahlungsvarianten (Kauf am 1.1.)

①: Heute 20000 €
②: Heute 5000 €, dann jährlich am Jahresende 3 mal jeweils 5500 €

Guthabenzins auf Konto: 3 % p.a.

Endstand

Zeitpunkt	0	1	2	3
①	−20000	0	0	0
②	−5000	−5500	−5500	−5500

Erste Idee: Betrachte Zahlungen als Guthaben und vergleiche Kontoendstände

$$K_n^{(1)} = 20000\cdot 1,03^3 = 21.854,54 \text{ €}$$

$$K_n^{(2)} = 5000\cdot 1,03^3 + 5500\cdot 1,03^2 + 5500\cdot 1,03^1 + 5500\cdot 1,03^0 = 22.463,59 \text{ €}$$

also: ① ist besser

Jetzt: Wie hoch müsste Kontostand heute sein, um die Zahlung jeweils genau zu decken?

$K_n = K_0\cdot q^n \Leftrightarrow K_0 = K_n\cdot q^{-n}$

$$K_0^{(1)} = 20000$$

$$K_0^{(2)} = 5000 + 5500\cdot 1,03^{-1} + 5500\cdot 1,03^{-2} + 5500\cdot 1,03^{-3} = 20557,36 \text{ €}$$

allgemein: **Kapitalwert** $\hat{=}$ Summe der abgezinsten Zahlungen

Endwert $\hat{=}$ Summe der aufgezinsten Zahlungen

$$K_0 = \sum_{t=0}^{n} A_t \, q^{-t}$$

K_0 $\hat{=}$ Kapitalwert des Zahlungsstroms
A_t $\hat{=}$ Zahlung zum Zeitpunkt t
q $\hat{=}$ Zinsfaktor

Zwei Zahlungsströme sind finanzmathematisch äquivalent, wenn die Kapitalwerte gleich hoch sind.

Beispiel: zwei Projekte

Zeitpunkt		0	1	2	5	10
Zahlung [in Mio €]	1	-5	0	0	3	8
	2	-5	-2	-1	8	0

Kalkulationszins: $q = 1{,}1$ ($\hat{=}$ 10%)

diskontierte Einzelbeträge

Zins	10%			
t	1: At	1: Barwerte	2: At	2: Barwert
0	- 5.000.000,00 €	- 5.000.000,00 €	- 5.000.000,00 €	- 5.000.000,00 €
1	- €	- €	- 2.000.000,00 €	- 1.818.181,82 €
2	- €	- €	- 1.000.000,00 €	- 826.446,28 €
5	3.000.000,00 €	1.862.763,97 €	8.000.000,00 €	4.967.370,58 €
10	8.000.000,00 €	3.084.346,32 €	- €	- €
	Kapitalwerte	- 52.889,72 €		- 2.677.257,51 €

$3\,\text{Mio} \cdot 1{,}1^{-5}$

Summe der Barwerte

$\Rightarrow$ Beide Projekte sind unrentabel, 1 weniger deutlich

Zinssatz, bei dem Kapitalwert $=0$: Interner Zins

Im Beispiel (1):

$$K_0 = -5\,\text{Mio} + 3\,\text{Mio} \cdot q^{-5} + 8\,\text{Mio} \cdot q^{-10} = 0$$

$$\Leftrightarrow \; -5 + 3q^{-5} + 8q^{-10} = 0$$

$$\Leftrightarrow \; -5 \cdot q^{10} + 3q^5 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; -5\,(q^5)^2 + 3q^5 + 8 = 0$$

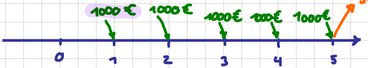
$$q^5 = \frac{1}{2\cdot(-5)}\left(-3 \pm \sqrt{3^2 + 4\cdot 5\cdot 8}\right) = \frac{3}{10} \pm \frac{13}{10} = \begin{cases} 1{,}6 \\ (\ldots) \end{cases}$$

$(\ldots) \rightarrow$ negativ, irrelevant

$$\Rightarrow q^5 = 1{,}6 \Rightarrow q = \sqrt[5]{1{,}6} \approx 1{,}09856054$$

Renten $\hat{=}$ Regelmäßige, konstant hohe Zahlung

Beispiel: Einzahlung von 1000 € jeweils zum Jahresende, 5 Jahre lang zu $i = 0{,}03$ p.a.



Kontostand? R_n

$$R_n = 1000 \cdot 1{,}03^4 + 1000 \cdot 1{,}03^3 + \cdots + 1000 \cdot 1{,}03^0$$

$$= 1000 \cdot \underbrace{\left(1{,}03^4 + 1{,}03^3 + \ldots + 1{,}03^0\right)}_{\text{geometrische Reihe}}$$

$$= 1000 \, \frac{1 - 1{,}03^5}{1 - 1{,}03} = 1000 \, \frac{1{,}03^5 - 1}{1{,}03 - 1} = 5309{,}14\,€$$

allgemein: n Zahlungen in Höhe r jeweils zum Jahresende (nachschüssig), Zins q

$$R_n = r\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

nachschüssiger Rentenendwert

Zahlungen jeweils zu Beginn des Jahres
(vorschüssig)

$$\boxed{R_n = r\,\frac{q^n-1}{q-1}\cdot q}$$ vorschüssiger Rentenendwert

r: vorschüssige Rate

Rentenbarwert: $R_0 = R_n\cdot q^{-n}$

$$\boxed{R_0 = r\,\frac{q^n-1}{q-1}\cdot q^{-n}}$$ nachschüssiger Rentenbarwert

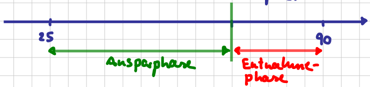
$$\boxed{R_0 = r\,\frac{q^n-1}{q-1}\cdot q\cdot q^{-n}}$$ vorschüssiger Rentenbarwert

Beispiele:

▶ Ansparen durch feste Sparrate am Jahresende; gesucht: Kontostand nach 10 Jahren → nachsch. Rentenendwert

▶ Heute: Kontostand von 1 Mio; ab jetzt jährliche Entnahme von 80000 € → vorschüssiger Rentenbarwert

Beispiel: Altersvorsorge, Zins über Laufzeit von 5% p.a.



Ansparphase: Einzahlung jeweils nachschüssig von 1200 € pro Jahr

Entnahmephase: 50000 € jährlich vorschüssig

gesucht: Dauer Ansparphase

(Nachsch.) Rentenendwert Ansp.phase
= (vorsch.) Rentenbarwert Entnahmephase

$R_n^A = R_0^E$

Dauer insg. von 25 bis 90

$$r^A\cdot\frac{q^n-1}{\cancel{q-1}} = r^E\cdot\frac{q^{65-n}-1}{\cancel{q-1}}\cdot q\cdot q^{-(65-n)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r^A}{r^E\cdot q}(q^n-1) = \left(1-q^{n-65}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{r^A}{r^E\cdot q}q^n - \frac{r^A}{r^E\cdot q} = 1 - q^n\cdot q^{-65}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{r^A}{r^E\cdot q}+q^{-65}\right)q^n = 1+\frac{r^A}{r^E\cdot q}$$

$$\Leftrightarrow n = \ln\left[\ldots : \ldots\right]/\ln q$$

$r^A = 1200$ €
$r^E = 50000$ €
$q = 1{,}05$

$\approx 56{,}55$

(d.h. Arbeit bis 81, Rente bis 90)

jetzt: $r^A = 4000$ € $\Rightarrow n = 45{,}28$
(bis 70 Arbeit)

- Zahlung von Zinsen nicht jährlich, sondern in kürzeren Fristen
- Dazu: m gleich lange Zinsperioden pro Jahr
- Typische Aufteilungen: $m = 2, 4, 12$ Zinsperioden
- Annahme: Laufzeit n in Jahren sei (aus Vereinfachungsgründen) ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{m}$ (z.B. $m = 2$, $n = 1{,}5$ oder $m = 12$, $n = 1{,}25$).

Ist ein Jahreszins i gegeben, so heißt:

- $i^* = \frac{i}{m}$ der relative Periodenzins.
- i' der zu i konforme Periodenzins, wenn die periodische Verzinsung mit i' zum selben Ergebnis führt wie die jährliche Verzinsung mit i.

$$(1 + i')^m = (1 + i)$$

Betrachte den relativen Periodenzinsen $i_* = \frac{i}{m}$, so heißt:

- i der nominelle Jahreszins
- i_{eff} der effektive Jahreszins, wenn jährliche Verzinsung mit i_{eff} zum selben Ergebnis führt wie die periodische Verzinsung mit i_*.
  (Entsprechendes gilt für q_*, q', q_{eff}).

$$K_1 = K_0 \cdot q_*^m = K_0 \cdot q_{\text{eff}}$$
$$\Rightarrow q_{\text{eff}} = q_*^m$$

$$\text{mit } q_* = 1 + i_* = 1 + \frac{i}{m}$$

Unterjährige Verzinsung: Formel

- Damit: Effektivzins q_{eff} ist

$$q_{\text{eff}} = (1 + i_*)^m = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

- Endkapital K_n ist:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_*)^{m \cdot n} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

- **Anmerkung**: $m \cdot n$ muss nach o.g. Bedingungen ganzzahlig sein.

Beispiel

Ein Betrag von 10 000 € soll zu 5 % nominal bei monatlicher Verzinsung angelegt werden. Welcher Betrag kann nach 16 Monaten entnommen werden? Wie hoch ist der Effektivzins?

Lösung:

Mit $i = 5\,\%$, $m = 12$ und $m \cdot n = 16$ gilt:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{16} = 10\,687{,}91\,€$$

Effektiver Jahreszins:

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12} - 1 = 5{,}12\,\%$$

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung mit dem konformen Zinssatz

- Widersprüche der gemischten Verzinsung aus Folie 184 verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung mit dem konformen Zinssatz gemäß den Richtlinien für den internationalen Wertpapierhandel (ISMA – International Securities Market Association) vorgenommen wird.

Beispiel

Am 15 9 1996 (15 10 1996) wurden € 12 000 zu **effektiv** 3,75 % angelegt. Wie hoch war der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21 9 2003 (21 10 2003)?

Lösung

- Wir verwenden den konformen Zins auf täglicher Basis,
- also $p' = \sqrt[360]{1{,}0375} = 1{,}0375^{\frac{1}{360}}$
- $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{106}{360}} \cdot 1{,}0375^6 \cdot 1{,}0375^{\frac{260}{360}} = 15\,536{,}90$
- alternativ: $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{76}{360}} \cdot 1{,}0375^6 \cdot 1{,}0375^{\frac{290}{360}} = 15\,536{,}90$

Stetige Verzinsung

- Lässt man $m \to \infty$ wachsen, so erhält man aus der obigen Formel

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = K_0 \left[\lim_{m\to\infty} \left(\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m}\right)\right]^n = K_0 \left(e^i\right)^n$$

- die Formel für die stetige Verzinsung:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n}}$$

- Für den effektiven Jahreszinssatz gilt damit:

$$\boxed{i_{\text{eff}} = e^i - 1}$$

- Anwendung stetiger Wachstumsprozesse:
  - Ökonomie (Bevölkerungswachstum),
  - Physik (radioaktiver Zerfall),
  - BWL (Portfolio- und Kapitalmarkttheorie)

Beispiel zur stetigen Verzinsung

Beispiel

$K_0 = €\ 10\,000$, $n = 5$, nominaler Jahreszins $p = 5\,\%$. Wie hoch ist K_n und p_{eff} bei stetiger Verzinsung?

Lösung:

$$K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n} = 10\,000 \cdot e^{0{,}05 \cdot 5} = 12\,840{,}25\,€$$

$$i_{\text{eff}} = e^{0{,}05} - 1 = 5{,}127\,\%$$

Anmerkung 1: Bei Variation von m ergeben sich:

m	1	2	4	12	∞
p_{eff}	5	5,063	5,095	5,116	5,127

Anmerkung 2: Die stetige Verzinsung wird z.B. in der Portfoliotheorie verwendet, da sie mathematisch einfacher zu handhaben ist als die diskrete Verzinsung.

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

- Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik für Vergleich von Zahlungen, welche zu verschiedenen Zeitpunkten anfallen.

Vereinfachende Annahmen:

- Zinseszinsliche Verzinsung
- Zahlungen stets am Anfang oder am Ende einer Zinsperiode

Prinzip

- Vergleich von 2 oder mehreren zu verschiedenen Zeitpunkten anfallende Geldbeträge: Beziehen auf den gleichen Zeitpunkt durch geeignetes Auf- oder Abzinsen.
- Wahl des Zeitpunktes dabei unerheblich.
- Meist: Zeitpunkt $t = 0$ oder $t = n$ (Ende der Laufzeit)
  - $t = 0$ den Anfang des ersten Zinszeitraums („heute“).
  - $t = 1$ Ende des ersten Zinszeitraums (31.12. des ersten Jahres).
  - $t = 2$ Ende des zweiten Zinszeitraumes (31.12. des zweiten Jahres).
  - $t = n$ Ende des letzen Zinszeitraumes (31.12. des n-ten Jahres)

Äquivalenzprinzip: Herleitung

- Zwei Zahlungen, A im Zeitpunkt t_A und B im Zeitpunkt t_B, sind dann gleichwertig ($A \sim B$), wenn ihre Zeitwerte in jedem Zeitpunkt t übereinstimmen.

Beispiel

Gegeben: $A = 10\,000,\ t_A = 2,\ p = 7\%$

Gesucht: B mit $t_B = 5$ so, dass $A \sim B$.

Lösung:

$$B = 10\,000 \cdot 1{,}07^{(5-2)} = 12\,250{,}43 \text{ €}$$

Eine Zahlung von € 12 250,43 nach 5 Jahren ist also gleichwertig zu einer Zahlung von € 10 000 nach 2 Jahren. Der Barwert („Wert heute“) beider Zahlungen ist übrigens
$10\,000 \cdot 1{,}07^{-2} = 12\,250{,}43 \cdot 1{,}07^{-5} = 8\,734{,}39$ [€].

- Ein Zahlungsstrom $(A_0, \ldots, A_n)$ ist eine Folge von Zahlungen mit Zahlungszeitpunkten $t = 0, \ldots, n$.
- Summe aller auf $t = 0$ abgezinsten Zahlungen (Kapitalwert):

$$K_0 = \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t}$$

- Summe aller auf $t = n$ abgezinsten Zahlungen (Endwert):

$$K_n = \sum_{t=0}^{n} q^n \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{n-t}$$

Gleichheit zweier Zahlungsströme

Zwei Zahlungsströme $(A_t), (B_t), t = 0, \dots, n$ sind genau dann äquivalent, wenn sie zu einem beliebigen Zeitpunkt T den gleichen Zeitwert besitzen:

$$
\begin{aligned}
(A_t) \sim (B_t) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{T-t} &= \sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{T-t} \\
\Leftrightarrow \quad q^T \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t} &= q^T \sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{-t} \\
\Leftrightarrow \quad \sum_{t=0}^{n} (A_t - B_t) \cdot q^{-t} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
(A_t) \sim (B_t) \Leftrightarrow \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t - B_t}{q^t} = 0
$$

Investitionsrechnung: Beispiel

Beispiel

$p = 5\,\%$, Welches Projekt ist zu bevorzugen?

Jahr t	0	1	2	3	4	5
A_t	0	1.000	0	1.000	0	1.000
B_t	400	400	400	600	600	600

Lösung: Kapitalwert von (A_t):

$$\sum_{t=0}^{5} \frac{A_t}{1{,}05^t} = \frac{0}{1{,}05^0} + \frac{1\,000}{1{,}05^1} + \frac{0}{1{,}05^2} + \frac{1\,000}{1{,}05^3} + \frac{0}{1{,}05^4} + \frac{1\,000}{1{,}05^5} = 2\,599{,}74$$

Kapitalwert von (B_t):

$$\sum_{t=0}^{5} \frac{B_t}{1{,}05^t} = \frac{400}{1{,}05^0} + \frac{400}{1{,}05^1} + \frac{400}{1{,}05^2} + \frac{600}{1{,}05^3} + \frac{600}{1{,}05^4} + \frac{600}{1{,}05^5} = 2\,625{,}80$$

Alternative B ist der Alternative A vorzuziehen.

Definition

Rente: Zahlungsstrom mit Zahlungen in gleichen zeitlichen Abständen und (meistens) in konstanter Höhe

Unterscheidung zwischen Renten

- mit Zahlung am Ende einer Rentenperiode (nachschüssig)
- mit Zahlung zu Beginn einer Rentenperiode vorschüssig)

- mit endlicher Laufzeit (endliche Renten)
- mit unendlicher Laufzeit (ewige Renten)

Rentenrechnung: Symbole

Symbol	Bezeichnungen
r_t	Rentenrate in Periode t
n	Laufzeit $(t = 1, \dots, n)$
m	Anzahl der Rentenzahlungen pro Zinsperiode
p	Prozentzinssatz
R_0	Barwert der Rente
R_t	Zeitwert der Rente
R_n	Endwert der Rente

Rentenzahlung jeweils am Ende einer Zinsperiode, jeweils in Höhe von

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = \text{const.} = r$$

$\Rightarrow$ Rentenendwert R_n:

$$\begin{aligned} R_n &= r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \ldots + r \cdot q + r \\ &= r \cdot \left(q^{n-1} + \cdot q^{n-2} + \ldots + q + 1\right) \\ &= r \cdot \sum_{t=0}^{n-1} q^t \qquad \text{(geometrische Reihe)} \\ &= r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

- Endwert R_n der Rente:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \mathrm{NREF}_{p,n}$$

- NREF: Nachschüssiger Rentenendwertfaktor für endliche konstante Rente.
- Barwert der Rente:

$$R_0 = R_n \cdot q^{-n} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q - 1)} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n} = r \cdot \mathrm{NRBF}_{p,n}$$

- NRBF: Nachschüssiger Rentenbarwertfaktor

Beispiel Rentenendwert

Beispiel

Genau 10 Jahre lang wurde jeweils zum Jahresende ein Betrag von 12.000 € zum Zinssatz von 4% angelegt. Wieviel kann zu Beginn des 11. Jahres (entspricht dem Ende des 10. Jahres) abgehoben werden?

Lösung:

Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt Folgendes:

$$R_{10} = 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}$$

$$= 12\,000 \cdot 12{,}006107$$

$$= 144\,073{,}28 \quad [€]$$

Beispiel Rentenbarwert

Beispiel

Aus welchem zum Zeitpunkt 0 eingezahlten Betrag kann 10 Jahre lang bei 4% Zins eine konstante nachschüssige Rente von 12.000 € bezahlt werden?

Lösung: Frage nach dem Barwert einer Rente. Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt:

$$R_0 = 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04^{11} - 1{,}04^{10}}$$

$$\approx 12\,000 \cdot 8{,}110896$$

$$\approx 97\,330{,}75 \quad [€]$$

Umformung der Rentenbar- und -endwertformel

- Je nach Fragestellung: Laufzeit n, Rentenzahlung r, Verzinsungsfaktor q .
- Rentenzahlung r:

$$r = \frac{R_0}{\text{NRBF}_{p,n}} = R_0 \cdot \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1} = \frac{R_n}{\text{NREF}_{p,n}} = R_n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$$

- Laufzeit n aus R_n:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{R_n \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- Laufzeit n aus R_0:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{R_0 \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- q aus R_0:

$$R_0 q^{n+1} - (R_0 + r) q^n + r \stackrel{!}{=} 0 \,.$$

- q aus R_n:

$$r \cdot q^n - R_n \cdot q + R_n - r \stackrel{!}{=} 0 \,.$$

- Berechnung von q im Allgemeinen nur näherungsweise (iterativ) möglich

Beispiel nachschüssige Rente

Beispiel

Ein Steuerberater kauft die Kanzlei eines älteren Kollegen und muss als Kaufpreis 10 Jahre lang jährlich–nachschüssig je 12.500 € zahlen. Durch welchen Betrag könnte der Steuerberater diese Zahlungsverpflichung sofort bei Vertragsabschluss ablösen, wenn mit 8% Zinsen kalkuliert wird?

Lösung: Gesucht ist der Rentenbarwert mit $r = 12\,500$, $q = 1{,}08$ und $n = 10$. Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
R_0 &= 12\,500 \cdot \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08^{11} - 1{,}08^{10}} \\
&= 12\,500 \cdot 6{,}710081 \\
&= 83\,876{,}01 \quad [€]
\end{aligned}
$$

Beispiel nachschüssige Rente

Beispiel

Der Barwert einer über 15 Jahre laufenden nachschüssigen Jahresrente beträgt bei 5%-iger Verzinsung 10.380 €. Wie hoch sind die jährlichen Rentenzahlungen?

Lösung: Gesucht sind die Rentenzahlungen r mit $R_0 = 10\,380$, $q = 1{,}05$ und $n = 15$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} r &= 10\,380 \cdot \frac{1{,}05^{16} - 1{,}05^{15}}{1{,}05^{15} - 1} \\ &= 10\,380 \cdot 0{,}096342 \\ &= 1\,000{,}03 \quad [€\,] \end{aligned}$$

Vorschüssige konstante Renten

- Rentenbetrag wird jeweils zu **Beginn der Zinsperiode** in Höhe von $r'_1 = r'_2 = \cdots = r'_n = r'$ bezahlt.
- Äquivalenzprinzip $\Rightarrow$ Endwert der Rente:
- vorschüssige Rentenzahlung $r' \sim$ nachschüssige Rentenzahlung $r \quad \Rightarrow \quad r = r'q$

$$R_n \quad = \quad r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r' \cdot \mathrm{VREF}_{p,n}$$

- **VREF**: Vorschüssiger Rentenendwertfaktor
- Barwert der Rente:

$$\begin{aligned} R_0 &= R_n \cdot q^{-n} \\ &= r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} \quad = \quad r' \cdot \frac{q^n - 1}{q^n - q^{n-1}} = r' \cdot \mathrm{VRBF}_{p,n} \end{aligned}$$

- **VRBF**: Vorschüssiger Rentenbarwertfaktor

Aufteilung der Zinsperiode in mehrere gleich lange Rentenperioden, d.h. m Rentenzahlungen pro Zinsperiode (= Jahr). Dazu:

- Rechnung mit einfacher Verzinsung innerhalb der Zinsperiode
- Rentenzahlungen nachschüssig (also am Ende jeder unterj. Rentenperiode) oder vorschüssig möglich

Lösung: Errechnung von konformen (gleichwertigen) jährlich nachschüssigen Ersatzzahlungen zu den m unterjährigen Zahlungen.

Definition

r_e heißt konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate einer nachschüssigen (oder vorschüssigen) unterjährigen Rentenrate r.

Konforme jährliche nachschüssige Ersatzrentenrate

Berechnung von r_e:

falls unterjährige Rente **nachschüssig**:

$$
\begin{aligned}
r_e = r &+ r\cdot\left(1+\frac{1}{m}\cdot i\right)\\
&+ r\cdot\left(1+\frac{2}{m}\cdot i\right)\\
&+ \ldots\\
&+ r\cdot\left(1+\frac{m-1}{m}\cdot i\right)\\
= \quad & r\cdot m\\
&+ i\cdot r\cdot\frac{1}{m}\left(1+2+\ldots+(m-1)\right)
\end{aligned}
$$

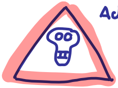
$$\boxed{r_e = r\cdot\left[m+i\cdot\frac{m-1}{2}\right]}$$

falls unterjährige Rente **vorschüssig**:

$$
\begin{aligned}
r_e &= r\cdot\left(1+\frac{1}{m}\cdot i\right)\\
&+ r\cdot\left(1+\frac{2}{m}\cdot i\right)\\
&+ \ldots\\
&+ r\cdot\left(1+\frac{m}{m}\cdot i\right)\\
&= r\cdot m\\
&+ i\cdot r\cdot\frac{1}{m}\left(1+2+\ldots+m\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{r_e = r\cdot\left[m+i\cdot\frac{m+1}{2}\right]}$$

Aus Ersatzrentenrate r_e: Weiterrechnen mit Formeln für jährliche nachschüssige Rente



Achtung: r_e ist immer nachschüssig !

Tilgungsrechnung

Annuitätentilgung ≙ Rückzahlung einer Schuld mit konstant hohen Zahlungen (Annuitäten)

Tilgung + Zins

→ analog Rentenrechnung

Tilgung		Renten	
Schuldsumme	S	nachsch.	R_0 (Barwert)
Annuität	A	Rate	r

$$S = A \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n}$$

$$R_0 = r \frac{q^n - 1}{q - 1} q^{-n}$$

Beispiel konforme Ersatzrentenraten

Beispiel

Ein Sparer legt monatliche nachschüssig 1.000 € auf ein Konto. Wie hoch ist der Kontostand nach 10 Jahren bei einem Zinssatz von 4%?

Lösung: Gesucht ist der Rentenendwert auf Basis der konformen Rentenraten. Mit $n = 10$, $m = 12$, $q = 1{,}04$ und $r = 1\,000$ ergibt sich Folgendes:

$$R_{10} = 1\,000 \cdot \underbrace{\left[12 + \frac{0{,}04 \cdot 11}{2}\right]}_{12{,}22} \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}$$

$$= 12\,220 \cdot 12{,}006107 = 146\,714{,}63$$

Beim Zinssatz von $i = 4\%$ kann eine monatlich nachschüssige Rente von 1.000 € durch eine jährlich nachschüssige Rentenzahlung von 12.220 € gleichwertig ersetzt werden. Der Kontostand nach 10 Jahren beträgt $146\,714{,}63$ €.

- Eine Rente heißt ewige Rente, wenn Anzahl n der Ratenzahlungen nicht begrenzt, n also beliebig groß wird ($n \to \infty$).
- Berechnung des Rentenendwertes dann nicht möglich
- Rentenbarwert R_0 existiert jedoch:

$$R_0 = \lim_{n\to\infty} (r \cdot \text{NRBF}) = r \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$
$$= r \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1} \right) = r \cdot \frac{1}{q - 1} = \frac{r}{i}$$

- Damit: Rentenbarwert einer nachschüssigen ewigen Rente:

$$\boxed{R_0 = \frac{r}{i}}$$

Ewige Renten: Beispiel

Beispiel

Wie groß ist der Barwert einer ewigen nachschüssigen Rente von 40.000 € pro Jahr, wenn der Zins bei 8% liegt?

Lösung:

$$R_0 = \frac{40\,000}{0{,}08} = 500\,000$$

kung: Geht man von einer vorschüssigen ewigen Rente aus, so ergibt sich für den Rentenbarwert:

$$R_0 = r' + \frac{r'}{i}$$

Tilgungsrechnung

- Rückzahlung oder Tilgung größerer Darlehen oft in mehreren Raten
- Hier betrachtet: Tilgung in mehreren Teilbeträgen, in konstanten Zeitabständen
- Jede zu bezahlende Rate beinhaltet Zinsen und Tilgung
- Verwendete Symbole:

Symbol	Bezeichnung
S	Darlehenssumme, Anfangsschuld
R_k	Restschuld zu Beginn des k-ten Jahres
n	Tilgungsdauer ($\in \mathbb{N}$)
Z_k	Zinsquote am Ende des k-ten Jahres
T_k	Tilgungsquote am Ende des k-ten Jahres
A_k	Annuität am Ende des k-ten Jahres

- Unterscheidung zwischen Ratentilgung und Annuitätentilgung

Ratentilgung

- Während Laufzeit sind Tilgungsquoten konstant. Daraus folgt:

$$T_k = T = \frac{S}{n}$$

- und damit:

$R_k = S - (k-1) \cdot T$	Restschuld zu Beginn des k-ten Jahres
$Z_k = R_k \cdot i$	Zinsquote am Ende des k-ten Jahres
$A_k = Z_k + T$	Annuität am Ende des k-ten Jahres

Annuitätentilgung

- Problem der Ratentilgung: Belastung anfangs hoch, später geringer
- Ausweg: Konstanthalten der Annuitäten über Rentenformel

$$A_k = A = S \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$

- Daraus ergibt sich:

$R_k = S \cdot \dfrac{q^n - q^{k-1}}{q^n - 1}$	Restsch. zu Beg. des k-ten J.
$Z_k = R_k \cdot i = A \cdot \left(1 - q^{k-n-1}\right)$	Zinsen im k-ten Jahr
$T_k = A - Z_k = A \cdot q^{k-n-1}$	Tilgung im k-ten Jahr