Wirtschaftsmathematik

für International Management (BA) und Betriebswirtschaft (BA)

Wintersemester 2014/15

Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg

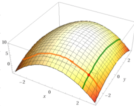
Mathematik: Gliederung

10 Differenzieren 2

- Partielle Ableitung
- Kurvendiskussion
- Optimierung mit Nebenbedingungen

Differentialrechnung von $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

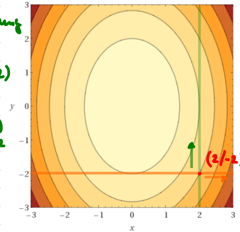
Beispiel: $f(x,y) = 10 - x^2 - \frac{1}{2} y^2$



ges: Steigung von f in Richtung der positiven y-Achse im Punkt (2/-2)

dazu: neue Funktion

$h(y) = f(2,y)$
$= 10 - 2^2 - \frac{1}{2} y^2$
$= 6 - \frac{1}{2} y^2$
$h'(y) = -y$
$h'(-2) = 2$



ges.: Steigung von f in Richtung der positiven x-Achse im Punkt (2/-2)

dazu: neue Funktion

$g(x) = f(x,-2)$
$= 10 - x^2 - \frac{1}{2}(-2)^2$
$= 8 - x^2$

Abl. von g(x)

$g'(x) = -2x$
$g'(2) = -2 \cdot 2 = -4$

Partielle Ableitung

Partielle Ableitung nach x: Setze y konstant und leite nach x ab

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y)}$$

Beispiel: $f(x,y) = 10 - x^2 - \frac{1}{2} y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 - 2x - 0$$
$$= -2x$$

Abl. von y^2 nach x ist 0 (y ist konstant)

Analog: Part. Abl. nach y (hier x konstant)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 - 0 - y$$
$$= -y$$

Abl. von $-x^2$ nach y ist 0 (x ist konstant)

Beispiel: $f(x,y) = x^4 + y^2 - x^2 y$

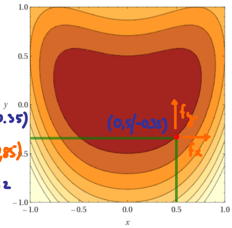
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 0 - 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 + 2y - x^2$$

$f_x(0{,}5/-0{,}35) = 4 \cdot 0{,}5^3 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot (-0{,}35)$
$= \frac{1}{2} + 0{,}35 = 0{,}85$

(Steigung in Rg. x-Achse: 0,85)

$f_y(0{,}5/-0{,}35) = 2 \cdot (-0{,}35) - 0{,}5^2$
$= -0{,}7 - 0{,}25 = -0{,}95$



Gradient: Vektor der partiellen Ableitungen

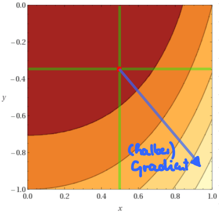
$$\text{grad}(f(x,y)) = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

Nabla-Operator

Beispiel: $f(x,y) = x^4 + y^2 - x^2 y$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2xy \\ 2y - x^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0{,}5/-0{,}35) = \begin{pmatrix} 0{,}85 \\ -0{,}95 \end{pmatrix}$$

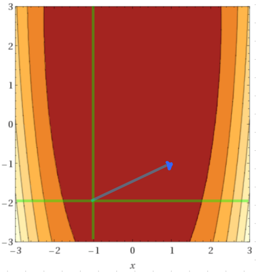


Beobachtungen:

- ∇f zeigt immer in Richtung des stärksten Anstiegs von f
- $-\nabla f$ zeigt in Rg. des stärksten Abfalls von f
- 90° von ∇f gedreht: Richtung der Höhenlinie

Richtungsableitung von $f(x,y)$ in Richtung des Vektors r (Länge von r gleich 1)

$$\boxed{[\nabla f(x,y)]^T \cdot r}$$



Beispiel: $f(x,y) = x^4 + y^2 - x^2 y$

ges: Richtungsableitung in Richtung $(2/1)$ im Punkt $(-1/-2)$

Normiere Richtung auf Länge 1:

$$\left\|\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$\Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Richtungsableitung:

$$[\nabla f(x,y)]^T \cdot r = \begin{pmatrix}4\cdot(-1)^3 - 2\cdot(-1)\cdot(-2) & 2\cdot(-2) - (-1)^2\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-8 & -5\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-16-5)$$

$$= \frac{-21}{\sqrt{5}} \approx -9{,}39$$

Extremwertbestimmung von $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Notwendiges Kriterium für Extremwert

$$\boxed{\nabla f(x_1,\dots,x_n) = 0}$$

2. Ableitungen und Hessematrix

- $f(x,y)$
  - f_x
    - $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$
    - $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$
  - f_y
    - $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$
    - $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$

Satz von Schwarz: Bei den „meisten" Funktionen gilt $f_{xy} = f_{yx}$

Beispiel: $f(x,y) = x^4 + y^2 - x^2 y$

- f
  - $f_x = 4x^3 - 2xy$
    - $f_{xx} = 12x^2 - 2y$
    - $f_{xy} = -2x$
  - $f_y = 2y - x^2$
    - $f_{yx} = -2x$
    - $f_{yy} = 2$

Hessematrix $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

Kriterien für Extremwerte $(\nabla f = 0)$

$\det H_f(x,y) > 0 \to$ $f_{xx} > 0 \Rightarrow$ Minimum; $f_{xx} < 0 \Rightarrow$ Maximum

$\det H_f(x,y) < 0 \longrightarrow\ \Rightarrow$ Sattel

($\det H_f = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich)

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^4 - 2xy$

gesucht: Extremwerte

① $\nabla f = 0$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x-2y \\ 4y^3-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = y \\ 2y^3 = x \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2y^3 = y \Leftrightarrow 2y^3 - y = 0 \\ \Leftrightarrow 2y\left(y^2 - \frac{1}{2}\right) = 0 \end{matrix}\right\} (x,y) = \begin{matrix} (0/0) \\ \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}/\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) \\ \left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}/-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) \end{matrix}$$

② Einsetzen der Kandidaten in Hessematrix

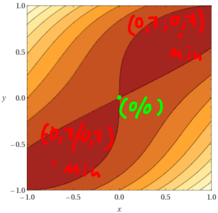
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(0,0) = 2\cdot 0 - (-2)\cdot(-2) = -4 < 0$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0/0)$

$$H_f\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f = 2\cdot 6 - (-2)\cdot(-2) = 8 > 0$$

da $f_{xx} = 2$ ist $\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$ ein Minimum



Optimierung mit Nebenbedingungen

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + 2y^2 \rightarrow$ min.

unter Restriktion: $g = 2y + x - 3 = 0$

allg. gilt im Optimum: $\lambda \nabla g + \nabla f = 0$

① Aufstellen der sog. Lagrangefunktion

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

② Notwendiges Kriterium für Optimum

$$\nabla L = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

③ Hinreichend für Optimum

$$\det \hat{H}_L(x,y,\lambda) = \det \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} > 0$$

und L_{xx} muss entspr. Vorzeichen haben

zurück zum Beispiel:

① $L(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(2y + x - 3)$

② $$\nabla L = \begin{pmatrix} 2x + \lambda \\ 4y + 2\lambda \\ 2y + x - 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg\}$$ ② − 2① : $4y - 4x = 0$ $\Leftrightarrow x = y$ in ③ $2x + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, \; y = 1$

③ $\hat{H}_L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \hat{H}_L = 2\cdot 4 - 0\cdot 0 = 8 > 0$

und $L_{xx} = 2 > 0 \Rightarrow$ Min.

Optimal unter Restr.: $(x,y) = (1,1)$

Partielle Differenzierbarkeit

Betrachtet werden

- Funktionen $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \in \mathbb{R}^n$
- mit $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = z$
- außerdem: i-ter Einheitsvektor $e_i = (0, \ldots ,0,1,0, \ldots ,0)$
- und: $x + h \cdot e_i \in D$ mit $h > 0$

Definition

- f heißt im Punkt x partiell differenzierbar bei Existenz des Genzwerts:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot e_i) - f(x)}{h}$$

- In diesem Fall heißt dieser Grenzwert $f_{x_i}(x)$ die erste partielle Ableitung von f nach x_i im Punkt x. Schreibweisen:

$$f^i(x) = f_{x_i}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

Differenzierbarkeit auf $D_1 \subset D$

- Die Funktion $f : D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- heißt in $D_1 \subset D$ partiell differenzierbar
- wenn f für alle $x \in D_1$ partiell differenzierbar ist

Gradient

- Ist die Funktion $f : D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt x
- nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ differenzierbar, dann heißt

$$\text{grad } f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Gradient von f im Punkt $x \in D$

Tangentialebene

- Gegeben: $f : D \supset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$
- Gesucht: Ebene, die f in $\tilde{x}$ berührt
- Tangentialebene:
  $T(x_1, x_2) = f(x) + \frac{\partial f}{x_1}(\tilde{x}) \cdot (x_1 - \tilde{x}_1) + \frac{\partial f}{x_2}(\tilde{x}) \cdot (x_2 - \tilde{x}_2)$

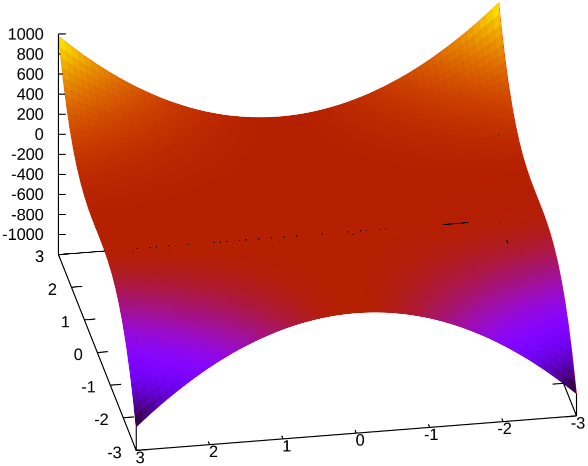
Tangentialhyperebene

- Gegeben: $f : D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $\tilde{x}$
- Gesucht: Ebene, die f in $\tilde{x}$ berührt
- Tangentialhyperebene:

$$H(x) = f(\tilde{x}) + \left(\nabla f(\tilde{x})\right)^T \cdot (x - \tilde{x})$$

Beispiel Tangential(hyper)ebene

- Gegeben: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 4x^3y^2 + 2y$
- Gesucht: Tangentialebene im Punkt $(1, -2, f(1, -2))$



Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $x \in D$
- mit stetig partiellen Ableitungen in D und
- ein Punkt $x \in D$
- und ein Richtungsvektor $r \in D$ mit $\|r\| = 1$.
- Außerdem: Es existiert sowohl ein $\epsilon > 0$ mit $[x - \epsilon r; x + \epsilon r] \in D$
- als auch der Grenzwert

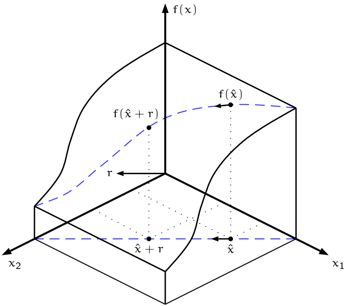
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot r) - f(x)}{t}$$

Richtungsableitung

- Dann heißt

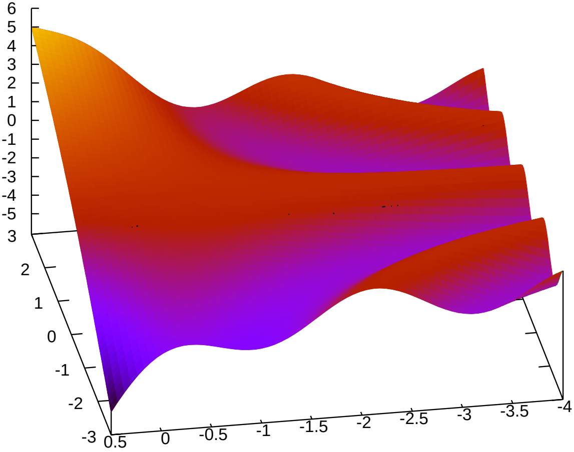
$$(\nabla f(x))^T \cdot r$$

Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung r



Beispiel Tangential(hyper)ebene

- Gegeben: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x\,e^y + \cos(xy)$
- Gesucht: Ableitung im Punkt $(2,0)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$



Voraussetzungen

- Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$
- in D nach allen Variablen $x_1, \dots, x_n$ partiell differenzierbar,
- auch partiell differenzierbar: alle partiellen Ableitungen $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$.

Dann heißt

- f zweimal partiell nach allen Variablen differenzierbar.
- Partielle Ableitungen zweiter Ordnung für $i, j = 1, \dots, n$:

$$f^{ij}(x) = f_{x_i x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$$

- Achtung: Zuerst nach x_i, dann nach x_j differenzieren

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ ist zweimal stetig partiell differenzierbar in D
- 2. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

- mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

Dann gilt für alle $x \in D$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \, \partial x_i}}$$

Hermann Schwarz (1843-1921)

Gegeben

- Zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$

Definition

- Die symmetrische Matrix

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt Hessematrix

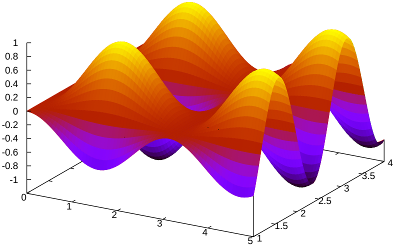
Lokale Extrema und der Gradient

Notwendige Bedingung für lokale Extrema

- Gegeben: Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ stetig partiell nach allen Variablen differenzierbar
- f hat im Punkt $\tilde{x}$ ein lokales Minimum oder Maximum
- Dann gilt: $\nabla f(\tilde{x}) = 0$

Beispiel

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $f(x, y) = \sin^2(x) \cdot \cos(4y)$



Am Punkt $\tilde{x}$ heißt die Hessematrix $H_f(\tilde{x})$

- positiv definit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x > 0$,
- positiv semidefinit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x \geq 0$,
- negativ definit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x < 0$,
- negativ semidefinit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x \leq 0$

- jeweils für alle x gilt.

- Andernfalls heißt $H_f(\tilde{x})$ indefinit.

Einfache Kriterien zu Definitheitseigenschaften

Hauptunterdeterminanten

- Gegeben: Symmetrische $n \times n$-Matrix A
- Dann heißt

$$\det H_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

die i-te Hauptunterdeterminante $(i = 1, \ldots, n)$ von A.

Satz

- Matrix A positiv definit $\Leftrightarrow \det H_i > 0$
  $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv
- Matrix A negativ definit $\Leftrightarrow (-1)^i \det H_i > 0$
  $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind negativ

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema

Voraussetzungen

- $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen
- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar
- Es gibt ein $\tilde{x}$, für das $\nabla f(\tilde{x}) = 0$

Satz

- $H_f(\tilde{x})$ ist negativ definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokale Maximalstelle von f
- $H_f(\tilde{x})$ ist positiv definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokale Minimalstelle von f
- $H_f(\tilde{x})$ ist indefinit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist keine lokale Extremalstelle von f

- $H_f(x)$ ist positiv definit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist einziges globales Minimum von f
- $H_f(x)$ ist negativ definit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist globales Maximum von f

Voraussetzungen

- $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen
- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar

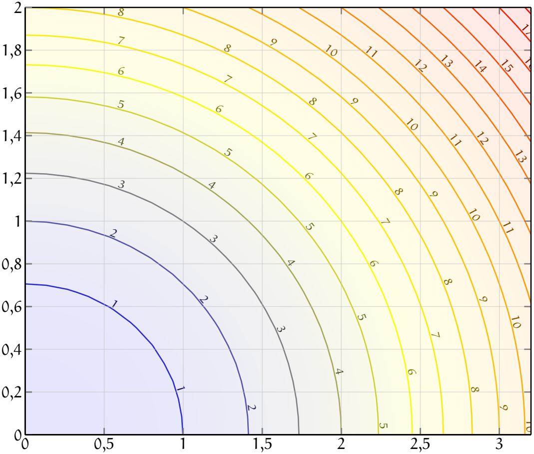
Satz

- $H_f(x)$ ist positiv definit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ f ist streng konvex in D
- $H_f(x)$ ist negativ definit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ f ist streng konkav in D

- $H_f(x)$ ist positiv semidefinit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ f ist konvex in D
- $H_f(x)$ ist negativ semidefinit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ f ist konkav in D

Problem

- Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + 2y^2$
- Gesucht: Punkt in $\mathbb{R}^2$ mit kleinstem Wert von f
- auf der Geraden $2y + x - 3 = 0$



Allgemeines Problem

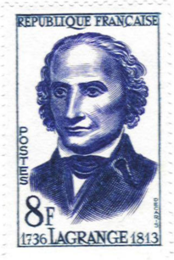
Aufgabe

- Maximiere (oder minimiere) Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- in Abhängigkeit von $x = (x_1, \ldots, x_n)$,
- so dass die Nebenbedingungen $g^i(x) = 0$ mit $g^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $i = 1, \ldots, m$ erfüllt sind
- Kurz:

$$
\begin{array}{ll}
 & f(x) \to \max \quad (\min) \\
\text{NB:} & g^1(x) = 0 \\
 & \vdots \\
 & g^m(x) = 0
\end{array}
$$

Idee von Lagrange

- Gut wäre: Transformation des Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen in eines ohne NB.
- Im Optimum: Gradient der zu optimierenden Funktion und Gradient der NB sind parallel



Lagrangefunktion

- Gegeben: Optimierungsproblem (O) mit $f(x) \to \max(\min)$ unter den Nebenbedingungen $g^j(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$
- Dazu wird definiert: Lagrangefunktion $L : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j(x)$$

Satz von Lagrange

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, zweimal stetig partiell differenzierbar
- Optimierungsproblem (O) mit $f(x) \to \max\ (\min)$ unter den Nebenbedingungen $g^j(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$
- Hessematrix der Lagrangefunktion:

$$\hat{H}_L(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Eine Lösung $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ des Systems $\nabla L(x, \lambda) = 0$

Dann gilt:

- $\hat{H}_L(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ negativ definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokales Maximum von (O)
- $\hat{H}_L(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ positiv definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokales Minimum von (O)
- $\hat{H}_L(x, \tilde{\lambda})$ negativ definit für alle x $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist globales Maximum von (O)
- $\hat{H}_L(x, \tilde{\lambda})$ positiv definit für alle x $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist globales Minimum von (O)

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, zweimal stetig partiell differenzierbar
- Optimierungsproblem (O) mit $f(x) \to \max\ (\min)$ unter den Nebenbedingungen $g^j(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$
- Lagrangefunktion

$$\hat{L}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda(x) g^j(x)$$

Dann gilt:

- Ist $\tilde{x}$ eine Maximalstelle bzw. Minimalstelle von $\hat{L}$
- mit $g^j(\tilde{x}) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$
- dann ist $\tilde{x}$ auch Maximalstelle bzw. Minimalstelle von (O)