Wirtschaftsmathematik

für International Management (BA) und Betriebswirtschaft (BA)

Wintersemester 2014/15

Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg

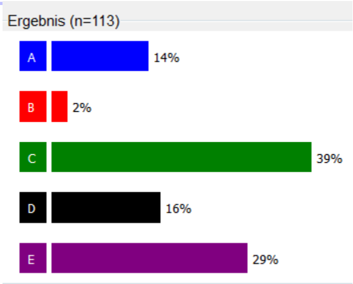
Testfrage: Differentialrechnung 1

Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x) + \ln\left(x^3\right).$$

Ergebnis: $f'(x) =$

- A $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$
- B $\frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2}$
- C $2\ln(x) + 2 + \frac{3}{x}$
- D Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.
- E Differentialrechnung hatte ich noch nie.



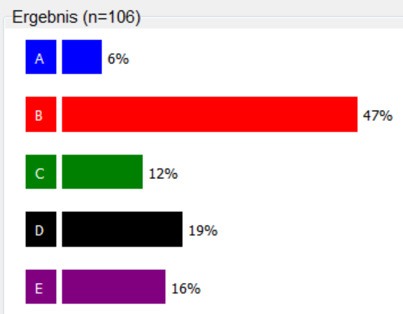
Richtig: C (Produktregel, Kettenregel, $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$)

Testfrage: Differentialrechnung 2

$\beta \in \mathbb{R}$ sei ein Parameter. Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion

$$f(t) = \left(1 + \beta t^2\right)^3 .$$

Ergebnis: $f'(t) =$



- (A) $6\beta^3 t^5$
- (B) $6\beta t\left(1 + \beta t^2\right)^2$
- (C) $3\left(1 + \beta t^2\right)^2$
- (D) Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.
- (E) Differentialrechnung hatte ich noch nie.

Richtig: (B) (Kettenregel, $[x^a]' = a x^{a-1}$)

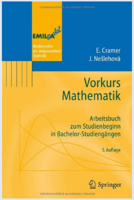
Testauswertung:

Ihr Ergebnis:

- 2 Antworten korrekt: Funktioniert!
- 1 Antworten richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 10.5-10.8 aus Cramer et al. sowie aus Purkert ab Seite 301 von 5.6 die Nummern 1-8!
- Keine Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 10.1-10.8 aus Cramer et al. sowie aus Purkert ab Seite 301 von 5.6 die Nummern 1-20 (oder mehr)!

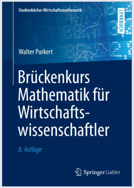
Übungsmaterial

Aufgaben 10.5-10.8 aus



http://goo.gl/qHwN7X

S. 301ff. (5.6): Aufgabe 1-34 aus



http://goo.gl/2D1oYo

- In Deutschland Einteilung des Zinsjahres in 12 Monate zu je 30 Tagen (360 Tage)
- Dadurch Berechnung von Monats- bzw. Tageszinsen möglich
- Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ in Jahren wird dann zu Laufzeit $f \in \mathbb{Q}$ in Jahren mit

$$f = \frac{t_2 - t_1}{360}$$

  (t_1 entspricht Tag der Einzahlung, t_2 Tag der Auszahlung)
- Daraus ergibt sich

$$\boxed{K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360} = K_0 \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)}$$

- Stellung eines Tages im Jahr:

$$(\text{Aktueller Monat} - 1) \cdot 30 + \text{Tag im Monat}$$

Finanzmathematisches Äquivalenzprinzip

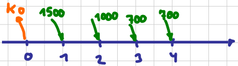
Beispiel:

Zahlungsreihe ①

Rentenbarwert $R_0 = 1000 \cdot \frac{1{,}05^4 - 1}{1{,}05 - 1} \cdot 1{,}05^{-4}$

$= 3545{,}95$

② Zahlungsreihe



Idee: Beide Zahlungen sind vergleichbar, wenn sie auf den Zeitpunkt 0 diskontiert werden; d.h. diskontieren (abzinsen) und summieren der Einzelzahlungen

$K_0 = 1500 \cdot 1{,}05^{-1} + 1000 \cdot 1{,}05^{-2} + 700 \cdot 1{,}05^{-3} + 700 \cdot 1{,}05^{-4}$
$= 3516{,}18$ € → also: ① besser

Jetzt: Zins $i = 0{,}15$

① $R_0 = 1000 \cdot \frac{1{,}15^4 - 1}{1{,}15 - 1} \cdot 1{,}15^{-4} = 2854{,}98$ €

② $K_0 = 1500 \cdot 1{,}15^{-1} + 1000 \cdot 1{,}15^{-2} + 700 \cdot 1{,}15^{-3} + 700 \cdot 1{,}15^{-4}$
$= 2920{,}98$ € → jetzt: ② besser

Allgemein: Zahlungsströme sind finanzmathematisch äquivalent, wenn die Summe der diskontierten Einzelzahlungen gleich hoch ist.

$$\text{Kapitalwert} = K_0 = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t}$$

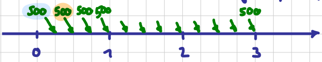
$A_t \mathrel{\hat{=}}$ Zahlung zum Zeitpunkt t

Schlussfolgerungen:

- Zwei Projekte mit geg. Zahlungsstrom sind mittels Kapitalwert vergleichbar d.h.: Höherer K.W. → besseres Projekt
- Nur Projekte mit positivem Kapitalwert sind rentabel
- Zinssatz, bei dem $K_0 = 0$ heißt interner Zins

Unterjährige Renten:

500 € jeweils zum Quartalsende, 3 Jahre, $i = 0{,}05$ p.a.



Zinsabrechnung für 1. Jahr:

$500 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot \frac{3}{4}) + 500 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot \frac{2}{4})$
$+ 500 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot \frac{1}{4}) + 500 (1 + 0{,}05 \cdot \frac{0}{4})$

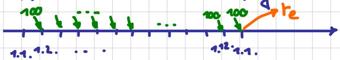
$= 500 \cdot \left(4 + \frac{0{,}05}{4} \big(\underbrace{3 + 2 + 1 + 0}_{=6} \big)\right) = 2037{,}50$ €

jährl. Rentenersatzrate

Prinzip unterjährige Renten:

Zusammenfassen pro Jahr zu jährlichen (nachschüssiger) Rentenersatzrate r_e
dann: Weiterrechnen mit jährlichen Rentenformeln

Jetzt: monatl. 100 € nachschüssig



$$r_e = 100\cdot\left(1+0{,}05\,\tfrac{11}{12}\right) + \dots + 100\cdot\left(1+0{,}05\,\tfrac{1}{12}\right) + 100\left(1+0{,}05\,\tfrac{0}{12}\right)$$

$$= 100\cdot\left(12 + \frac{0{,}05}{12}\,\underbrace{(11+10+9+\dots+3+2+1+0)}_{11\cdot\frac{11+1}{2} = \frac{11\cdot 12}{2}}\right)$$

11 11 11

$$= 100\cdot\left(12 + 0{,}05\cdot\tfrac{11}{2}\right)$$

allgemein: m unterjährige Zahlungen (nachschüssig) vorschüssig

$$r_e = r\cdot\left(m + i\cdot\frac{m\overset{+}{-}1}{2}\right)$$

Tilgungsrechnung

Schuldsumme S soll zurückbezahlt (getilgt) werden

Ratentilgung: Kredit wird mit konstanten Tilgungsraten zurückbezahlt

Beispiel: S = 100000 €, i = 0,05, in 10 Jahren mit gleich hohen Tilgungsraten zurückzuzahlen

Tilgungsrate $T = S/10 = 10000$ €

Tilgungsplan: T = 10000

Zins + Tilgung

Jahr	Restschuld zu Beginn	Zins	Annuität
1	100000	5000	15000
2	90000	4500	14500
3	80000	4000	14000
⋮	⋮	⋮	⋮
10	10000	500	10500

Annuitätentilgung

konstante jährliche Zahlungen (≙ Annuitäten) (nachschüssig)

analog Rentenrechnung

Renten	Annuit. tilgung
Rate r	Annuität A
Rentenbarwert R_0	Schuldsumme S
$R_0 = r\,\frac{q^n-1}{q-1}\cdot q^{-n}$	$S = A\,\frac{q^n-1}{q-1}\,q^{-n}$

Beispiel: S = 700 000, i = 0,03, n = 25

ges. A: $A = S\,\frac{q-1}{q^n-1}\cdot q^n = 700'\cdot\frac{0{,}03}{1{,}03^{25}-1}\cdot 1{,}03^{25}$

$= 40\,199{,}51$ €

Beispiel: $S = 700000$, $i = 0{,}03$

Anfangstilgung 1%

$A = 700000\,(0{,}03 + 0{,}01) = 28000$

Vertragslaufzeit 10 Jahre

gesucht: Restschuld nach 10 Jahren

$$= S \cdot q^{10} - A\,\frac{q^{10}-1}{q-1}$$

$$= 700000 \cdot 1{,}03^{10} - 28000 \cdot \frac{1{,}03^{10}-1}{0{,}03}$$

$$= 619\,752{,}84$$

gesucht: Laufzeit bei konstantem Zins

$$S = A\,\frac{q^n-1}{q-1}\,q^{-n} \iff \frac{S}{A}\cdot(q-1) = 1 - q^{-n}$$

$$\iff q^{-n} = 1 - \frac{S}{A}(q-1)$$

$$\iff n = -\frac{\ln\left[1-\frac{S}{A}(q-1)\right]}{\ln q}$$

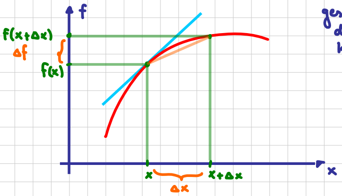
$$= -\frac{\ln\left[1-\frac{700'}{28'}\cdot 0{,}03\right]}{\ln 1{,}03} = -\frac{\ln\left[1-\frac{0{,}03}{0{,}04}\right]}{\ln 1{,}03}$$

$$= \frac{\ln 4}{\ln 1{,}03} \approx 46{,}9$$

(46 Jahre lang 28'€ dann 1 Jahr bisschen weniger)

Differentialrechnung einer Veränderlichen

Gegeben: $f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subset \mathbb{R}$



gesucht: Steigung der Tangente an Kurve

Näherungswert für Steigung $\quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad$ Differenzenquotient

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = f'$$

Differentialquotient
1. Ableitung

Wichtige Funktionen und ihre Ableitung

	$f(x)$	$f'(x)$
$b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	x^b	$b\,x^{b-1}$
$a \in \mathbb{R}$	a^x	$a^x \cdot \ln a$
	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

$[x^5]' = 5x^4$

$\left[\frac{1}{x^3}\right]' = [x^{-3}]' = -3x^{-4}$

$\left[\sqrt[3]{x^5}\right]' = \left[x^{\frac{5}{3}}\right]' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$

Rechenregeln für Ableitung

Summenregel: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Quotientenregel: $\left(\frac{z}{n}\right)' = \frac{z'n - zn'}{n^2}$

Kettenregel: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

nachdifferenzieren

$$[x^3 + \ln x]' = 3x^2 + \frac{1}{x}$$

$$[x^3 \cdot \ln x]' = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(3\ln(x) + 1)$$

$$\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]' = \frac{2x \cdot (x^2-1) - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$[\ln(x^2+4x^3)]' = \frac{1}{x^2+4x^3} \cdot (x^2+4x^3)' = \frac{1}{x^2+4x^3} \cdot (2x + 12x^2) = \frac{2+12x}{x+4x^2}$$

Barwert bei einfacher Verzinsung

K_0 unbekannt: Abzinsung bzw. Diskontierung bzw. Barwertberechnung

- Amtliche Diskontierung:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + ni}$$

- Kaufmännische Diskontierung (Nur erste Näherung):

$$K_0 = K_n(1 - ni)$$

Die Zinseszinsformel

- Während Laufzeit Zinszahlungen mit sofortiger Wiederanlage und Verzinsung zum Zinssatz i
- Entwicklung des Kapitals:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot q \\
K_2 &= K_1 \cdot (1 + i) = (K_0 \cdot q) \cdot q = K_0 \cdot q^2 \\
K_3 &= K_2 \cdot (1 + i) = \left(K_0 \cdot q^2\right) \cdot q = K_0 \cdot q^3 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

- Damit folgt die Zinseszinsformel, mit n (zunächst) ganzzahlig.

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$$

- q^n heißt Aufzinsungfaktor

Auflösung der Zinseszinsformel nach K_0, q und n:

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n}$$

- Abzinsungs- oder Diskontierungsformel
- $\frac{1}{q^n}$ heißt Abzinsungsfaktor

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad \text{bzw.} \quad i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q}$$

Gemischte Verzinsung

- Üblich: Einfache Verzinsung bei Restlaufzeiten kleiner einem ganzzahliges Vielfachen der Zinsperiode
- Genauer: Mit
  - Δt_1 (Zinstage im ersten Jahr),
  - n (die weiteren, ganzen Zinsperioden) und
  - Δt_2 (Zinstage im letzten Jahr),
  - gilt für das Endkapital K_x:

$$K_x = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_1}{360}\right) \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_2}{360}\right)$$

- Gemischte Zinsrechnung (unter Verwendung der $30/360-$Methode), auch Sparbuchmethode.

Beispiel

Am 15.9.2006 wurden € 12 000 zu 3,75 % angelegt. Wie hoch war der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21.9.2013 (letzter Zinstag 20.9.2013)?

Lösung:

$$15.9. \;\hat{=}\; (9-1)\cdot 30 + 15 = 255$$
$$\Rightarrow \Delta t_1 = 360 - (255 - 1) = 106$$

$$20.9. \;\hat{=}\; (9-1)\cdot 30 + 20 = 260$$
$$\Rightarrow \Delta t_2 = 260$$

$(n = 6)$:

$$K_x = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 106}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 260}{360}\right)$$
$$= 15\,541{,}20$$

Gemischte Verzinsung: Anmerkungen

- Würde man – von t_0 ausgehend – in ganze Jahre und einem Rest aufteilen, so ergäbe sich:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^7 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 6}{360}\right) = 15\,537{,}08$$

(7 Jahre von 15.9.96 bis 14.9.2003; dazu 6 Tage)

- Würde man die **Zinseszinsformel** mit nicht-ganzzahligem Exponenten verwenden, so ergäbe sich Folgendes:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{7+\frac{6}{360}} = 15\,536{,}90$$

- Gemischte Verzinsung ist also (zumindest für Kapitalanleger) verbraucherfreundlich

Gemischte Verzinsung: Anmerkungen

Nachteil der gemischten Verzinsung

- Die gemischte Verzinsung ist inkonsistent und vom Zeitpunkt des Zinszuschlages (bzw. der Einzahlung) abhängig.
- Im Beispiel: Wäre der Zeitraum um einen Monat verschoben (vom 15.10.96 bis zur Auflösung am 21.10.2003), so ergäbe sich …

$$K_x = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 76}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 290}{360}\right)$$
$$= 15\,540{,}31$$

Die Widersprüche verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung zum konformen Zinssatz vorgenommen wird.

- Zahlung von Zinsen nicht jährlich, sondern in kürzeren Fristen
- Dazu: m gleich lange Zinsperioden pro Jahr
- Typische Aufteilungen: $m = 2, 4, 12$ Zinsperioden
- Annahme: Laufzeit n in Jahren sei (aus Vereinfachungsgründen) ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{m}$ (z.B. $m = 2$, $n = 1{,}5$ oder $m = 12$, $n = 1{,}25$).

Ist ein Jahreszins i gegeben, so heißt:

- $i^* = \frac{i}{m}$ der relative Periodenzins.
- i' der zu i konforme Periodenzins, wenn die periodische Verzinsung mit i' zum selben Ergebnis führt wie die jährliche Verzinsung mit i.

$$(1 + i')^m = (1 + i)$$

Unterjährige Verzinsung

Betrachte den relativen Periodenzinsen $i_* = \frac{i}{m}$, so heißt:

- i der nominelle Jahreszins
- i_{eff} der effektive Jahreszins, wenn jährliche Verzinsung mit i_{eff} zum selben Ergebnis führt wie die periodische Verzinsung mit i_*.
  (Entsprechendes gilt für q_*, q', q_{eff}).

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 \cdot q_*^m = K_0 \cdot q_{\text{eff}} \\ \Rightarrow q_{\text{eff}} &= q_*^m \end{aligned}$$

$$\text{mit } q_* = 1 + i_* = 1 + \frac{i}{m}$$

Unterjährige Verzinsung: Formel

- Damit: Effektivzins q_{eff} ist

$$q_{\text{eff}} = (1 + i_*)^m = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

- Endkapital K_n ist:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_*)^{m \cdot n} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

- **Anmerkung**: $m \cdot n$ muss nach o.g. Bedingungen ganzzahlig sein.

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung

Beispiel

Ein Betrag von 10 000 € soll zu 5 % nominal bei monatlicher Verzinsung angelegt werden. Welcher Betrag kann nach 16 Monaten entnommen werden? Wie hoch ist der Effektivzins?

Lösung:

Mit $i = 5\,\%$, $m = 12$ und $m \cdot n = 16$ gilt:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{16} = 10\,687{,}91\,€$$

Effektiver Jahreszins:

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12} - 1 = 5{,}12\,\%$$

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung mit dem konformen Zinssatz

- Widersprüche der gemischten Verzinsung aus Folie 184 verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung mit dem konformen Zinssatz gemäß den Richtlinien für den internationalen Wertpapierhandel (ISMA – International Securities Market Association) vorgenommen wird.

Beispiel

Am 15 9 1996 (15 10 1996) wurden € 12 000 zu **effektiv** 3,75 % angelegt. Wie hoch war der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21 9 2003 (21 10 2003)?

Lösung

- Wir verwenden den konformen Zins auf täglicher Basis,
- also $p' = \sqrt[360]{1{,}0375} = 1{,}0375^{\frac{1}{360}}$
- $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{106}{360}} \cdot 1{,}0375^{6} \cdot 1{,}0375^{\frac{260}{360}} = 15\,536{,}90$
- alternativ: $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{76}{360}} \cdot 1{,}0375^{6} \cdot 1{,}0375^{\frac{290}{360}} = 15\,536{,}90$

Stetige Verzinsung

- Lässt man $m \to \infty$ wachsen, so erhält man aus der obigen Formel

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} = K_0 \left[\lim_{m\to\infty} \left(\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m}\right)\right]^{n} = K_0 \left(e^{i}\right)^{n}$$

- die Formel für die stetige Verzinsung:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot e^{i\cdot n}}$$

- Für den effektiven Jahreszinssatz gilt damit:

$$\boxed{i_{\text{eff}} = e^{i} - 1}$$

- Anwendung stetiger Wachstumsprozesse:
  - Ökonomie (Bevölkerungswachstum),
  - Physik (radioaktiver Zerfall),
  - BWL (Portfolio- und Kapitalmarkttheorie)

Beispiel

$K_0 = €\ 10\,000$, $n = 5$, nominaler Jahreszins $p = 5\,\%$. Wie hoch ist K_n und p_{eff} bei stetiger Verzinsung?

Lösung:

$$K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n} = 10\,000 \cdot e^{0{,}05 \cdot 5} = 12\,840{,}25\,€$$

$$i_{\text{eff}} = e^{0{,}05} - 1 = 5{,}127\,\%$$

Anmerkung 1: Bei Variation von m ergeben sich:

m	1	2	4	12	∞
p_{eff}	5	5,063	5,095	5,116	5,127

Anmerkung 2: Die stetige Verzinsung wird z.B. in der Portfoliotheorie verwendet, da sie mathematisch einfacher zu handhaben ist als die diskrete Verzinsung.

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

- Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik für Vergleich von Zahlungen, welche zu verschiedenen Zeitpunkten anfallen.

Vereinfachende Annahmen:

- Zinseszinsliche Verzinsung
- Zahlungen stets am Anfang oder am Ende einer Zinsperiode

Prinzip

- Vergleich von 2 oder mehreren zu verschiedenen Zeitpunkten anfallende Geldbeträge: Beziehen auf den gleichen Zeitpunkt durch geeignetes Auf- oder Abzinsen.
- Wahl des Zeitpunktes dabei unerheblich.
- Meist: Zeitpunkt $t = 0$ oder $t = n$ (Ende der Laufzeit)
  - $t = 0$ den Anfang des ersten Zinszeitraums („heute“).
  - $t = 1$ Ende des ersten Zinszeitraums (31.12. des ersten Jahres).
  - $t = 2$ Ende des zweiten Zinszeitraumes (31.12. des zweiten Jahres).
  - $t = n$ Ende des letzen Zinszeitraumes (31.12. des n-ten Jahres)

Äquivalenzprinzip: Herleitung

- Zwei Zahlungen, A im Zeitpunkt t_A und B im Zeitpunkt t_B, sind dann gleichwertig ($A \sim B$), wenn ihre Zeitwerte in jedem Zeitpunkt t übereinstimmen.

Beispiel

Gegeben: $A = 10\,000$, $t_A = 2$, $p = 7\%$
Gesucht: B mit $t_B = 5$ so, dass $A \sim B$.

Lösung:

$$B = 10\,000 \cdot 1{,}07^{(5-2)} = 12\,250{,}43 \text{ €}$$

Eine Zahlung von € 12 250,43 nach 5 Jahren ist also gleichwertig zu einer Zahlung von € 10 000 nach 2 Jahren. Der Barwert („Wert heute“) beider Zahlungen ist übrigens
$10\,000 \cdot 1{,}07^{-2} = 12\,250{,}43 \cdot 1{,}07^{-5} = 8\,734{,}39$ [€].

- Ein Zahlungsstrom $(A_0, \ldots, A_n)$ ist eine Folge von Zahlungen mit Zahlungszeitpunkten $t = 0, \ldots, n$.
- Summe aller auf $t = 0$ abgezinsten Zahlungen (Kapitalwert):

$$K_0 = \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t}$$

- Summe aller auf $t = n$ abgezinsten Zahlungen (Endwert):

$$K_n = \sum_{t=0}^{n} q^n \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{n-t}$$

Gleichheit zweier Zahlungsströme

Zwei Zahlungsströme (A_t), (B_t), $t = 0, \dots, n$ sind genau dann äquivalent, wenn sie zu einem beliebigen Zeitpunkt T den gleichen Zeitwert besitzen:

$$\begin{aligned}
(A_t) \sim (B_t) \quad \Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{T-t} &= \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{T-t} \\
\Leftrightarrow \quad q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t} &= q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{-t} \\
\Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{t=0}^{n} (A_t - B_t) \cdot q^{-t} &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{(A_t) \sim (B_t) \Leftrightarrow \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t - B_t}{q^t} = 0}$$

Investitionsrechnung: Beispiel

Beispiel

$p = 5\,\%$, Welches Projekt ist zu bevorzugen?

Jahr t	0	1	2	3	4	5
A_t	0	1.000	0	1.000	0	1.000
B_t	400	400	400	600	600	600

Lösung: Kapitalwert von (A_t):

$$\sum_{t=0}^{5} \frac{A_t}{1{,}05^t} = \frac{0}{1{,}05^0} + \frac{1\,000}{1{,}05^1} + \frac{0}{1{,}05^2} + \frac{1\,000}{1{,}05^3} + \frac{0}{1{,}05^4} + \frac{1\,000}{1{,}05^5} = 2\,599{,}74$$

Kapitalwert von (B_t):

$$\sum_{t=0}^{5} \frac{B_t}{1{,}05^t} = \frac{400}{1{,}05^0} + \frac{400}{1{,}05^1} + \frac{400}{1{,}05^2} + \frac{600}{1{,}05^3} + \frac{600}{1{,}05^4} + \frac{600}{1{,}05^5} = 2\,625{,}80$$

Alternative B ist der Alternative A vorzuziehen.

Definition

Rente: Zahlungsstrom mit Zahlungen in gleichen zeitlichen Abständen und (meistens) in konstanter Höhe

Unterscheidung zwischen Renten

- mit Zahlung am Ende einer Rentenperiode (nachschüssig)
- mit Zahlung zu Beginn einer Rentenperiode vorschüssig)

- mit endlicher Laufzeit (endliche Renten)
- mit unendlicher Laufzeit (ewige Renten)

Rentenrechnung: Symbole

Symbol	Bezeichnungen
r_t	Rentenrate in Periode t
n	Laufzeit $(t = 1, \ldots, n)$
m	Anzahl der Rentenzahlungen pro Zinsperiode
p	Prozentzinssatz
R_0	Barwert der Rente
R_t	Zeitwert der Rente
R_n	Endwert der Rente

Rentenzahlung jeweils am Ende einer Zinsperiode, jeweils in Höhe von

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = \text{const.} = r$$

$\Rightarrow$ Rentenendwert R_n:

$$\begin{aligned} R_n &= r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \ldots + r \cdot q + r \\ &= r \cdot \left(q^{n-1} + \cdot q^{n-2} + \ldots + q + 1\right) \\ &= r \cdot \sum_{t=0}^{n-1} q^t \qquad \text{(geometrische Reihe)} \\ &= r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

Rentenendwert und Rentenbarwert

- Endwert R_n der Rente:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \text{NREF}_{p,n}$$

- NREF: Nachschüssiger Rentenendwertfaktor für endliche konstante Rente.
- Barwert der Rente:

$$R_0 = R_n \cdot q^{-n} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n} = r \cdot \text{NRBF}_{p,n}$$

- NRBF: Nachschüssiger Rentenbarwertfaktor

Beispiel Rentenendwert

Beispiel

Genau 10 Jahre lang wurde jeweils zum Jahresende ein Betrag von 12.000 € zum Zinssatz von 4% angelegt. Wieviel kann zu Beginn des 11. Jahres (entspricht dem Ende des 10. Jahres) abgehoben werden?

Lösung:

Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt Folgendes:

$$
\begin{aligned}
R_{10} &= 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1} \\
&= 12\,000 \cdot 12{,}006107 \\
&= 144\,073{,}28 \quad [€]
\end{aligned}
$$

Beispiel Rentenbarwert

Beispiel

Aus welchem zum Zeitpunkt 0 eingezahlten Betrag kann 10 Jahre lang bei 4% Zins eine konstante nachschüssige Rente von 12.000 € bezahlt werden?

Lösung: Frage nach dem Barwert einer Rente. Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt:

$$R_0 = 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04^{11} - 1{,}04^{10}}$$

$$\approx 12\,000 \cdot 8{,}110896$$

$$\approx 97\,330{,}75 \quad [€]$$

Umformung der Rentenbar- und -endwertformel

- Je nach Fragestellung: Laufzeit n, Rentenzahlung r, Verzinsungsfaktor q
.
- Rentenzahlung r:

$$r = \frac{R_0}{\text{NRBF}_{p,n}} = R_0 \cdot \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1} = \frac{R_n}{\text{NREF}_{p,n}} = R_n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$$

- Laufzeit n aus R_n:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{R_n \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- Laufzeit n aus R_0:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{R_0 \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- q aus R_0:

$$R_0 q^{n+1} - (R_0 + r) q^n + r \stackrel{!}{=} 0 \,.$$

- q aus R_n:

$$r \cdot q^n - R_n \cdot q + R_n - r \stackrel{!}{=} 0 \,.$$

- Berechnung von q im Allgemeinen nur näherungsweise (iterativ) möglich

Beispiel nachschüssige Rente

Beispiel

Ein Steuerberater kauft die Kanzlei eines älteren Kollegen und muss als Kaufpreis 10 Jahre lang jährlich–nachschüssig je 12.500 € zahlen. Durch welchen Betrag könnte der Steuerberater diese Zahlungsverpflichung sofort bei Vertragsabschluss ablösen, wenn mit 8% Zinsen kalkuliert wird?

Lösung: Gesucht ist der Rentenbarwert mit $r = 12\,500$, $q = 1{,}08$ und $n = 10$. Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
R_0 &= 12\,500 \cdot \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08^{11} - 1{,}08^{10}} \\
&= 12\,500 \cdot 6{,}710081 \\
&= 83\,876{,}01 \quad [\text{€}]
\end{aligned}
$$

Beispiel nachschüssige Rente

Beispiel

Der Barwert einer über 15 Jahre laufenden nachschüssigen Jahresrente beträgt bei 5%-iger Verzinsung 10.380 €. Wie hoch sind die jährlichen Rentenzahlungen?

Lösung: Gesucht sind die Rentenzahlungen r mit $R_0 = 10\,380$, $q = 1{,}05$ und $n = 15$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} r &= 10\,380 \cdot \frac{1{,}05^{16} - 1{,}05^{15}}{1{,}05^{15} - 1} \\ &= 10\,380 \cdot 0{,}096342 \\ &= 1\,000{,}03 \quad [€\,] \end{aligned}$$

Vorschüssige konstante Renten

- Rentenbetrag wird jeweils zu **Beginn der Zinsperiode** in Höhe von $r'_1 = r'_2 = \cdots = r'_n = r'$ bezahlt.
- Äquivalenzprinzip $\Rightarrow$ Endwert der Rente:
- vorschüssige Rentenzahlung $r' \sim$ nachschüssige Rentenzahlung $r \quad \Rightarrow \quad r = r'q$

$$R_n \quad = \quad r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r' \cdot \mathrm{VREF}_{p,n}$$

- **VREF**: Vorschüssiger Rentenendwertfaktor
- Barwert der Rente:

$$\begin{aligned} R_0 \quad &= \quad R_n \cdot q^{-n} \\ &= \quad r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} \quad = \quad r' \cdot \frac{q^n - 1}{q^n - q^{n-1}} = r' \cdot \mathrm{VRBF}_{p,n} \end{aligned}$$

- **VRBF**: Vorschüssiger Rentenbarwertfaktor

Aufteilung der Zinsperiode in mehrere gleich lange Rentenperioden, d.h. m Rentenzahlungen pro Zinsperiode (= Jahr). Dazu:

- Rechnung mit einfacher Verzinsung innerhalb der Zinsperiode
- Rentenzahlungen nachschüssig (also am Ende jeder unterj. Rentenperiode) oder vorschüssig möglich

Lösung: Errechnung von konformen (gleichwertigen) jährlich nachschüssigen Ersatzzahlungen zu den m unterjährigen Zahlungen.

Definition

r_e heißt konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate einer nachschüssigen (oder vorschüssigen) unterjährigen Rentenrate r.

Konforme jährliche nachschüssige Ersatzrentenrate

Berechnung von r_e:

falls unterjährige Rente **nachschüssig**:

$$
\begin{aligned}
r_e &= r + r \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \cdot i\right) \\
&\quad + r \cdot \left(1 + \frac{2}{m} \cdot i\right) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + r \cdot \left(1 + \frac{m-1}{m} \cdot i\right) \\
&= \quad r \cdot m \\
&\quad + i \cdot r \cdot \frac{1}{m} \left(1 + 2 + \ldots + (m-1)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{r_e = r \cdot \left[m + i \cdot \frac{m-1}{2}\right]}
$$

falls unterjährige Rente **vorschüssig**:

$$
\begin{aligned}
r_e &= r \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \cdot i\right) \\
&\quad + r \cdot \left(1 + \frac{2}{m} \cdot i\right) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + r \cdot \left(1 + \frac{m}{m} \cdot i\right) \\
&= r \cdot m \\
&\quad + i \cdot r \cdot \frac{1}{m} \left(1 + 2 + \ldots + m\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{r_e = r \cdot \left[m + i \cdot \frac{m+1}{2}\right]}
$$

Aus Ersatzrentenrate r_e: Weiterrechnen mit Formeln für jährliche nachschüssige Rente

Beispiel konforme Ersatzrentenraten

Beispiel

Ein Sparer legt monatliche nachschüssig 1.000 € auf ein Konto. Wie hoch ist der Kontostand nach 10 Jahren bei einem Zinssatz von 4%?

Lösung: Gesucht ist der Rentenendwert auf Basis der konformen Rentenraten. Mit $n = 10$, $m = 12$, $q = 1{,}04$ und $r = 1\,000$ ergibt sich Folgendes:

$$R_{10} = 1\,000 \cdot \underbrace{\left[12 + \frac{0{,}04 \cdot 11}{2}\right]}_{12{,}22} \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}$$

$$= 12\,220 \cdot 12{,}006107 = 146\,714{,}63$$

Beim Zinssatz von $i = 4\%$ kann eine monatlich nachschüssige Rente von 1.000 € durch eine jährlich nachschüssige Rentenzahlung von 12.220 € gleichwertig ersetzt werden. Der Kontostand nach 10 Jahren beträgt $146\,714{,}63$ €.

Ewige Renten

- Eine Rente heißt ewige Rente, wenn Anzahl n der Ratenzahlungen nicht begrenzt, n also beliebig groß wird ($n \to \infty$).
- Berechnung des Rentenendwertes dann nicht möglich
- Rentenbarwert R_0 existiert jedoch:

$$R_0 = \lim_{n\to\infty} (r \cdot \mathrm{NRBF}) = r \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$
$$= r \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1} \right) = r \cdot \frac{1}{q-1} = \frac{r}{i}$$

- Damit: Rentenbarwert einer nachschüssigen ewigen Rente:

$$\boxed{R_0 = \frac{r}{i}}$$

Beispiel

Wie groß ist der Barwert einer ewigen nachschüssigen Rente von 40.000 € pro Jahr, wenn der Zins bei 8% liegt?

Lösung:

$$R_0 = \frac{40\,000}{0{,}08} = 500\,000$$

kung: Geht man von einer vorschüssigen ewigen Rente aus, so ergibt sich für den Rentenbarwert:

$$R_0 = r' + \frac{r'}{i}$$

- Rückzahlung oder Tilgung größerer Darlehen oft in mehreren Raten
- Hier betrachtet: Tilgung in mehreren Teilbeträgen, in konstanten Zeitabständen
- Jede zu bezahlende Rate beinhaltet Zinsen und Tilgung
- Verwendete Symbole:

Symbol	Bezeichnung
S	Darlehenssumme, Anfangsschuld
R_k	Restschuld zu Beginn des k-ten Jahres
n	Tilgungsdauer ($\in \mathbb{N}$)
Z_k	Zinsquote am Ende des k-ten Jahres
T_k	Tilgungsquote am Ende des k-ten Jahres
A_k	Annuität am Ende des k-ten Jahres

- Unterscheidung zwischen Ratentilgung und Annuitätentilgung

- Während Laufzeit sind Tilgungsquoten konstant. Daraus folgt:

$$T_k = T = \frac{S}{n}$$

- und damit:

$R_k = S - (k-1) \cdot T$	Restschuld zu Beginn des k-ten Jahres
$Z_k = R_k \cdot i$	Zinsquote am Ende des k-ten Jahres
$A_k = Z_k + T$	Annuität am Ende des k-ten Jahres

- Problem der Ratentilgung: Belastung anfangs hoch, später geringer
- Ausweg: Konstanthalten der Annuitäten über Rentenformel

$$A_k = A = S \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$

- Daraus ergibt sich:

$R_k = S \cdot \dfrac{q^n - q^{k-1}}{q^n - 1}$	Restsch. zu Beg. des k-ten J.
$Z_k = R_k \cdot i = A \cdot \left(1 - q^{k-n-1}\right)$	Zinsen im k-ten Jahr
$T_k = A - Z_k = A \cdot q^{k-n-1}$	Tilgung im k-ten Jahr

Kursrechnung

Festverzinsliche Wertpapiere

- Wertpapier: Investor erwirbt für bestimmten Preis ein Recht auf Zahlungen
- Hier: Gesamtfällige festverzinsliche Wertpapiere
- Emission (Erstausgabe): Investor zahlt pro 100 € Nennwert einen Preis C_0 (Emissionskurs)
- Emittend: Zahlt während Laufzeit Zinsen (Kuponszahlung) und (meist nach Ablauf) Tilgung (Rücknahmekurs)
- Kuponzahlung: mittels nominellen Jahreszinses i^* (oder Jahreszinsfuß p^*) auf den Nennwert an Investor, meist jährlich nachschüssig
- Falls $i^* = 0$: Null-Kupon-Anleihen oder Zerobonds
- Rücknahmekurs: Tilgung in einem Betrag am Ende der Laufzeit C_n als Prozentsatz des Nennwertes
- Rendite: i_{eff} Jährlicher Effektivzins, der Leistung des Investors und des Emittenden gleichwertig macht

Äquivalenzgleichung für Emissionskurs

$$C_0 = p^* \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n} + C_n \cdot q^{-n}$$

Dabei:

- n : Laufzeit in Jahren
- C_0 : Emissionskurs
- p^* : Nominalzinsfuß, jährliche Zinszahlung pro 100 € Nennwert
- C_n : Rücknahmekurs am Ende der Laufzeut
- $q = 1 + i_{\text{eff}}$: Effektiver Jahreszins bzw. Rendite des festverz. Wertpapiers

Anmerkungen:

- Gleichung i.a. nicht elementar nach q auflösbar
- Deswegen oft: Näherung durch Iteration (z.B. regula falsi)
- Emissionskurs $\hat{=}$ mit Rendite abgezinster Kapitalwert sämtlicher zukünftiger Leistungen des Wertpapiers

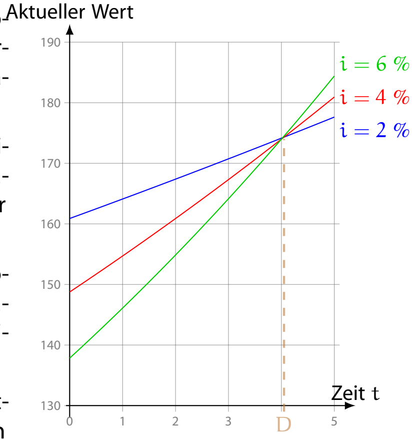
Ganzzahlige Restlaufzeiten

- Festverzinsliche Wertpapiere können meist jederzeit gehandelt werden
- Annahme zunächst: Handel nur unmittelbar nach Kuponzahlung möglich
- Gesucht: Kurs C_t für eine Restlaufzeit von t Jahren
- Lösung: Preis eines Wertpapiers ist zu jedem Zeitpunkt der Kapitalwert aller in der Restlaufzeit noch ausstehenden Leistungen
- Abgezinst wird dabei mit dem Marktzins (auch: Umlaufrendite)

$$C_t = p^* \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \cdot q^{-t} + C_n \cdot q^{-t}$$

Risikoanalyse – Duration

- Änderung des Marktzinses: Abhängig von Zeitpunkt Auswirkung auf aktuellen Wert des Papiers
- Fall 1 (Zins steigt): C_0 ist niedriger, aber Wiederanlage der Kuponzahlungen erbringen mehr Rendite
- Fall 2 (Zins fällt): C_0 ist höher, aber Wiederanlage der Kuponzahlungen erbringen weniger Rendite
- Vermutung: An einem (Zeit-)Punkt heben sich diese beiden Effekte auf
- Dieser Zeitpunkt heißt Duration D.



Risikoanalyse – Duration

- Der aktuelle Wert eines Papiers $C_t(q) = q^t \cdot C_0(q)$ ändert sich also nicht bzgl. Änderungen von q, wenn $t = D$
- damit gilt für die Duration D

$$\frac{\partial C_D(q)}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(q^D \cdot C_0(q)\right) = D \cdot q^{D-1} C_0(q) + q^D \frac{\partial C_0(q)}{\partial q} = 0$$

- Da q^{D-1} immer positiv ist muss also für D gelten $D \cdot C_0(q) + q \cdot \frac{\partial C_0(q)}{\partial q} = 0$ und damit:

$$\boxed{D = -\frac{\partial C_0(q)}{\partial q} \cdot \frac{q}{C_0(q)} = -q \cdot \frac{C_0'(q)}{C_0(q)}}$$

- Weitere mögliche Interpretation der Duration als Bruttozinselastizität des Barwertes.

Kursrechnung

Partielle Ableitung des Kapitalwertes

- Für die Berechnung von D ist $C_0'(q)$ zu bestimmen;
- bei einem festverzinslichen Wertpapier ergibt sich so

$$C_0'(q) = -\frac{n}{q^{n+1}}\left(p * \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + C_n\right) + \frac{p*}{q^n} \cdot \frac{n \cdot q^{n-1}(q-1) - (q^n - 1)}{(q-1)^2}$$

Varianten der Duration

- Modifizierte Duration:

$$MD = \frac{D}{q} = -\frac{C_0'(q)}{C_0(q)}$$

- Elastizität (von i):

$$\varepsilon_{C_0,i} = \frac{C_0'(i)}{C_0(i)} \cdot i = -\frac{i}{q} \cdot D = -MD \cdot i$$

Auswirkungen von Zinsänderungen

- Bei bekanntem Emissionskurs: Auswirkungen kleiner Zinsänderungen über Duration

$$C_0(i + \Delta i) \approx C_0(i) \cdot (1 - MD \cdot \Delta i)$$

Mathematik: Gliederung

8 Reelle Funktionen

- Grundbegriffe
- Elementare Funktionen
- Stetigkeit reeller Funktionen

Warum beschäftigen wir uns mit reellen Funktionen?

- allgemein: kompakte und präzise Beschreibung von Abhängigkeiten zwischen mehreren Faktoren
- speziell: Modellierung technischer und ökonomischer Systeme
- Basis für Analyse und Optimierung von Systemen / Prozessen

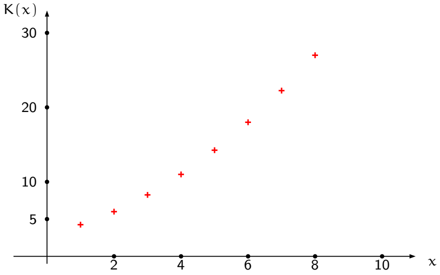
Wesentliche Lernziele

- Fähigkeit mit den wesentlichen Begriffen im Zusammenhang mit Funktionen umzugehen
- Kennenlernen der wichtigsten Klassen reeller Funktionen
- Beherrschen des Stetigkeitsbegriffs

Kostenfunktion

- Unternehmen ermittelt empirisch Kosten K für die Herstellung von x Einheiten eines Produktes
- Dargestellt als Wertetabelle

x	K
1	4,25
2	6,00
3	8,25
4	11,00
5	14,25
6	18,00
7	22,25
8	27,00

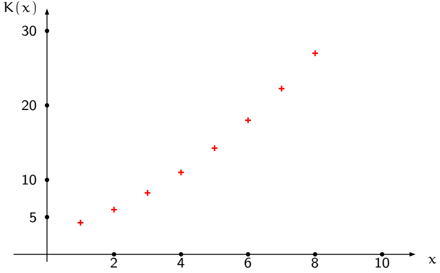


Beispiel

Kostenfunktion

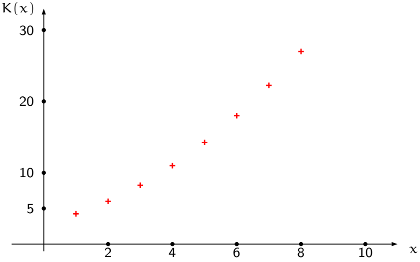
- Unternehmen ermittelt empirisch Kosten K für die Herstellung von x Einheiten eines Produktes
- Dargestellt als Wertetabelle und als Grafik

x	K
1	4,25
2	6,00
3	8,25
4	11,00
5	14,25
6	18,00
7	22,25
8	27,00



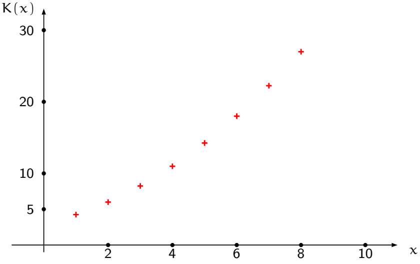
Kostenfunktion

- Jetzt: Betrachte zusätzlich Funktion $K(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 3$
- für Definitionsbereich $D = \{1, \ldots, 8\}$



Kostenfunktion

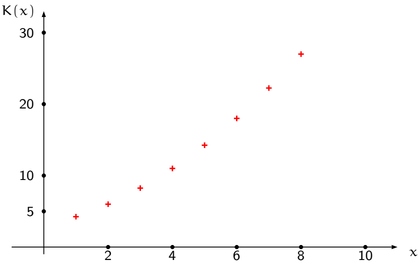
- Jetzt: Betrachte zusätzlich Funktion $K(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 3$
- für Definitionsbereich $D = \{1, \ldots, 8\}$



- Darstellung durch Funktion: kompakt, eindeutig

Kostenfunktion

- Jetzt: Betrachte zusätzlich Funktion $K(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 3$
- für Definitionsbereich $D = \{1, \ldots, 8\}$



- Darstellung durch Funktion: kompakt, eindeutig
- Möglicher Ausgangspunkt für Prognosen (Kosten für 9, 10, ... Einheiten)

Begriff reelle Funktion

Definition

- $f : D \to \mathbb{R}$ heißt reellwertige Abbildung mit Definitionsbereich D
- Mit $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt f reelle Funktion von n Variablen

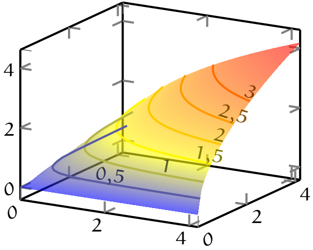
Darstellung von Funktionen

- Durch Funktionsgleichungen $f(x_1, \ldots, x_n) = y$
  - $x = (x_1, \ldots, x_n)$: unabhängige (exogene) Variablen
  - y: abhängige (endogene) Variablen
- Durch Wertetabellen
- Durch Graphen
  - Für $D \subset \mathbb{R}$: Darstellung im kartesischen Koordinatensystem
  - Für $D \subset \mathbb{R}^2$: 3-dimensionale Darstellung oder Niveaulinien $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

Cobb-Douglas-Funktion

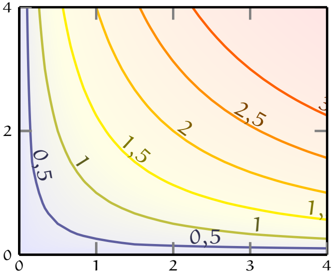
- neoklassische Produktionsfunktion der Form
  $f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots x_n^{a_n}$
- Beispiel für zwei Produktionsfaktoren
  $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2} = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$

Dreidimensionale Darstellung



Niveaulinien

für $f(x_1, x_2) = c$ mit $c = 1/2, \ldots, 3$



Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f : D \to W$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ und $W \subset \mathbb{R}$ heißt:

- surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- injektiv, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f : D \to W$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ und $W \subset \mathbb{R}$ heißt:

- surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- injektiv, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Komposition von Funktionen

- Voraussetzung: Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ mit $D_f \subset \mathbb{R}^n$ und $f(D_f) \subset D_g \subset \mathbb{R}$
- Zusammengesetzte Funktion: $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$: Zuordnung des Werts $(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$ für alle $x \in D_f$

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f : D \to W$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ und $W \subset \mathbb{R}$ heißt:

- surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- injektiv, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.

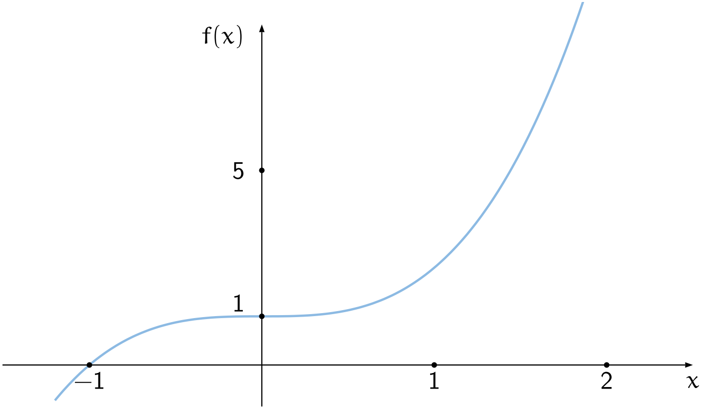
Komposition von Funktionen

- Voraussetzung: Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ mit $D_f \subset \mathbb{R}^n$ und $f(D_f) \subset D_g \subset \mathbb{R}$
- Zusammengesetzte Funktion: $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$: Zuordnung des Werts $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$ für alle $x \in D_f$

Inverse Funktion / Umkehrfunktion

- Voraussetzung: bijektive Funktion $f : D \to W$ mit $D, W \subset \mathbb{R}$
- Inverse Funktion: $f^{-1} : W \to D,\ y \mapsto f^{-1}(y)$, wobei y für alle $x \in D$ mit $y = f(x)$ zugeordnet wird

- Beispiel b) $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 1$



Satz: Operationen zwischen Funktionen

- Gegeben: $f, g : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit identischem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$.
- Dann sind auch die folgenden Abbildungen relle Funktionen:

$$
\begin{array}{llll}
f+g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\
f-g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D \mapsto (f-g)(x) = f(x) - g(x) \\
f \cdot g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D \mapsto (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \\
\frac{f}{g}: & D_1 \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D_1 \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}
\end{array}
$$

$$D_1 = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$$

Besondere Punkte bei Funktionen

- Gegeben: Reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$

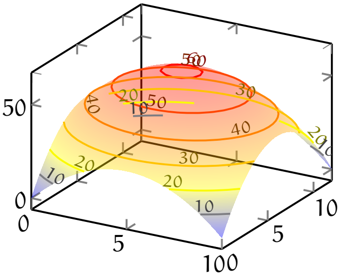
Definitionen

- c-Stelle von f: $x_c \in D$ mit $f(x_c) = c$
- Mit $c = 0$ heißt c-Stelle dann 0-Stelle von f
- Maximalstelle oder globales Maximum:
  $x_{\max} \in D$ mit $f(x_{\max}) \geq f(x)$ für alle $x \in D$
- Minimalstelle oder globales Minimum:
  $x_{\min} \in D$ mit $f(x_{\min}) \leq f(x)$ für alle $x \in D$
- $x^* \in D$ mit $f(x^*) \;\substack{\geq \\ (\leq)}\; f(x)$ für $x \in [x^* - a, x * +a] \subset D$
  heißt lokale Maximalstelle (Minimalstelle), $f(x^*)$ lokales Maximum

- Weitere Sprechweisen: Extremal-, Optimalstelle, Extremum, Optimum

Beispiel: Maximal-, bzw. Minimalstellen

- **Umsatzmaximierung** für zwei Produkte mit Absatzquantitäten x_1, x_2 und Preisen p_1, p_2:
- Gegeben:
  Preis-Absatz-Funktionen
  $$x_1 = 10 - p_1$$
  $$\text{und } x_2 = 12 - p_2$$
- Wegen $x_1, x_2 \geq 0$ und $p_1, p_2 \geq 0$ folgt $p_1 \in [0{,}10]$ und $p_2 \in [0{,}12]$
- Gesamtumsatz?
- Maximalstelle?
- Minimalstellen?



Weitere Eigenschaften reeller Funktionen

- f beschränkt $\Leftrightarrow$ es gibt $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ mit $c_0 \leq f(x) \leq c_1$
- f monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
  f monoton fallend $\Leftrightarrow$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$
- bei strenger Monotonie entfällt „=“
- f konvex $\Leftrightarrow$ $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$
  f konkav $\Leftrightarrow$ $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$
  $\lambda \in (0,1)$
- bei strenger Konkavität entfällt „=“
- f periodisch mit Periode $p > 0$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(x \pm p)$
- f gerade (ungerade) $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(-x)$ $(-f(x) = f(-x))$

Polynome

Definition

- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (\text{mit } a_n \neq 0)$$

- heißt Polynom n-ten Grades
- Schreibweise: $\operatorname{grad}(p) = n$

Satz

- Summen, Differenzen und Produkte von Polynomen sind wieder Polynome.
- $p(x_1) = 0 \Rightarrow u(x) = \frac{p(x)}{x - x_1}$ ist wieder Polynom mit $\operatorname{grad}(u) = \operatorname{grad}(p) - 1$

Definition

- $q : D \to \mathbb{R}$ mit

$$q(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \quad \text{(mit } p_1, p_2 (\neq 0) \text{ sind Polynome)}$$

- heißt Rationale Funktion.

Satz

- Jedes Polynom ist auch rationale Funktione (z.B. $p_2(x) = c$).
- Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (falls definiert) von rationalen Funktionen sind wieder rationale Funktionen.

Potenzfunktion

- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = x^a$, $(a \in \mathbb{R})$ heißt Potenzfunktion.
- f ist streng monoton wachsend für $a > 0$ und streng monoton fallend für $a < 0$.
- Für $a \neq 0$ existiert eine inverse Funktion f^{-1} zu f

Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ heißt Exponentialfunktion zur Basis a.
- $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $g(y) = \log_a(y)$, $(a > 0, a \neq 1)$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis a mit $g = f^{-1}$.
- Satz: f, g wachsen streng monoton für $a > 1$ und fallen streng monoton für $a < 1$

Grenzwert einer Funktion

Ausgangssituation

- Gegeben: Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$
- Grenzwert von f aufbauend auf Konvergenz von Zahlenfolgen
- Dazu betrachte: Alle Folgen $a^m = \left(a_1^m, \ldots, a_n^m\right)^T \in D$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, also $a^m \to a$ für $m \to \infty$
- Untersuche Grenzwerte $\lim\limits_{a^m \to a} f(a^m)$.

Definition des Grenzwerts einer Funktion

- f heißt an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ (die nicht notwendig zu D gehören muss) konvergent gegen $\tilde{f} \in \mathbb{R}$,
- wenn
  1. mindestens eine Folge (a^m) mit $a^m \in D$, $a^m \neq a$ und $a^m \to a$ existiert (d.h. a ist kein „isolierter Punkt“)
  2. für alle Folgen (a^m) mit $a^m \in D$ und $a^m \to a^0$ gilt $f(a^m) \to \tilde{f}$.
- $\tilde{f}$ heißt dann Grenzwert von $f(a^m)$.

Schreibweise für alle gegen a konvergierende Folgen (a^m):

$$\lim_{a^m \to a} f\left(a^m\right) = \tilde{f} \qquad \text{oder kurz} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \tilde{f}$$

Begriff der Stetigkeit

Gegeben

- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$

Definition

- f heißt **stetig in x_0** $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f heißt **stetig in $T \subset D$** $\Leftrightarrow$ f ist für alle $x \in T$ stetig
- Ist f für ein $\tilde{x} \in D$ nicht stetig, so heißt $\tilde{x}$ **Unstetigkeitsstelle** oder **Sprungstelle**

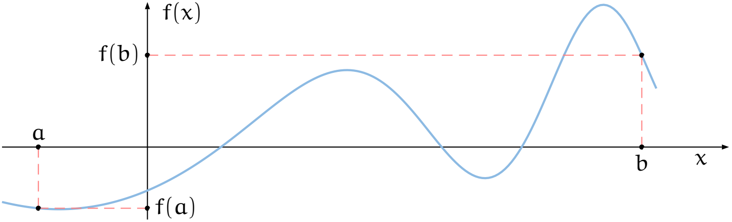
Satz

- Für stetige Funktionen f, g gilt:
  - $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g ($g(x) \neq 0$) sind stetig
  - $|f|$, $f \circ g$, sind stetig
  - Falls f auf einem Intervall definiert und invertierbar: f^{-1} stetig
- Alle elementaren Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig

Zwischenwertsatz

- Gegeben: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig
- Dann gilt:

$$f(a) < f(b) \quad \Rightarrow \quad \forall\, y \in [f(a), f(b)] \;\exists\, x \in [a, b] \quad \text{mit } f(x) = y$$



Mathematik: Gliederung

9 Differenzieren 1

- Differentialquotient und Ableitung
- Änderungsrate und Elastizität
- Kurvendiskussion

Warum Differentialrechnung?

Anwendungen

- Analyse und ökonomische Interpretation wirtschaftswissenschaftlicher Gesetzmäßigkeiten durch Untersuchung der Charakteristika von Funktionen
- Ermittlung von optimalen Lösungen betriebswirtschaftlicher Entscheidungsprobleme wie zum Beispiel Absatzmengenplanung, Loßgrößenplanung etc.

Wesentliche Lernziele

- Verständnis des Differentialquotienten
- Fähigkeit, eine Funktion zu differenzieren
- Bestimmung und Interpretation von Änderungsraten und Elastizitäten
- Durchführung und Interpretation von Kurvendiskussionen

Preisbestimmung beim Angebotsmonopol

Bekannt sind folgende Zusammenhänge:

- $p(x) = c_1 - c_2 x$ (Preis-Absatz-Funktion)
- $K(x) = c_3 + c_4 x$ (Kostenfunktion)
- (mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}^+$ Konstanten)

Damit ergibt sich:

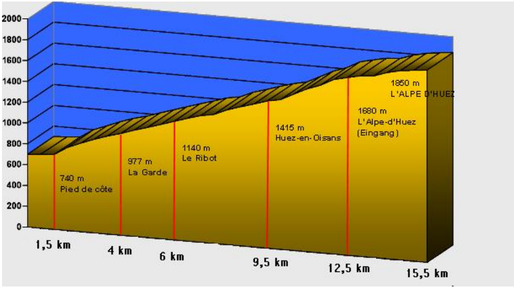
- Umsatzfunktion: $U(x) = c_1 x - c_2 x^2$
- Gewinnfunktion:
  $G(x) = U(x) - K(x) = c_1 x - c_2 x^2 - (c_3 + c_4 x)$

Fragen:

- Welche Menge/Welcher Preis ist Umsatz-/Gewinnmaximal?
- Welche Veränderung des Umsatzes ergibt sich bei einer Veränderung der Absatzmenge?

Differenzenquotient: Idee

- Tour de France: Anstieg nach L'Alpe d'Huez
- Länge des Anstiegs: 13,9 km
- Auf einer Höhe von 740 m beginnen die 21 Kehren
- Zielankunft liegt auf 1850 m
- Bestimmung von Steigungen: $\dfrac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Distanz}}$

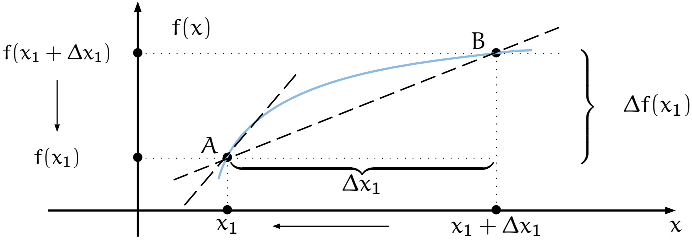


Differenzenquotient

- Gegeben: Reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \in \mathbb{R}$
- Dann heißt der Ausdruck $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

  Differenzenquotient (Steigung) von f im Intervall $[x_1, x_2] \subset D$
- Alternative Schreibweise, dabei Ersetzen von x_2 durch $x_1 + \Delta x_1$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1} = \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1}$$



- Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_1 \in D$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1}$$

existiert.

- Ist f an der Stelle x_1 differenzierbar, heißt

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1} \\ = & \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1} \\ = & \frac{df}{dx_1}(x_1) = f'(x_1) \end{aligned}$$

Differentialquotient oder erste Ableitung von f an der Stelle x_1.

- f heißt in D differenzierbar, wenn f für alle $x \in D$ differenzierbar ist.

G. W. Leibniz (1646-1716)

I. Newton (1643-1727)

Ableitungsregeln

- Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (soweit definiert) von differenzierbaren Funktionen sind differenzierbar.
- Summenregel:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

- Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)' \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Daraus ergibt sich für eine Konstante c: $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
- Quotientenregel:

$$\left(\frac{z}{n}\right)'(x) = \frac{z'(x) \cdot n(x) - z(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

- Kettenregel:

$$(g \circ f)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Gegeben: $f : D \to \mathbb{R}$, mit $D \subset \mathbb{R}$ und $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
x^b	bx^{b-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$