Klausur FWP-Fach Mathematik Plus: Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 23. Januar 2013 – Prüfer: Etschberger
Studiengang: International Management und Betriebswirtschaft

Aufgabe 1 — 25 Punkte

Gegeben ist die reelle Zahl b sowie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det A$ in Abhängigkeit von b.

b) Für welche b ist A invertierbar?

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Lösungshinweis:

a) $\det A = b \cdot \det \begin{pmatrix} b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} = b^6 - b^4 = b^4 \cdot (b^2 - 1)$

b) A invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0, -1, +1$

c) $\chi_A(\lambda)$: Hauptdiagonale $b - \lambda$ statt b, also:
$\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)^4 \cdot \big((\lambda - a)^2 - 1\big) = 0,$
Eigenwerte bei: $\lambda = a$ (vierfach), $\lambda = a \pm 1$.

Aufgabe 2 **25 Punkte**

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Aussage

$$A(n) : \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^2+n}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Lösungshinweis:

- Anfang:

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^0 \cdot 1^2 = 1 = (-1)^{1-1} \cdot \frac{1^2+1}{2}$$

- Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 &= (-1)^{(n+1)-1} \cdot (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k^2 \\
&= (-1)^n \cdot (n+1)^2 + (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^2+n}{2} \\
&= (-1)^n \cdot \left(n^2 + 2n + 1 - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) \\
&= (-1)^n \cdot \frac{2n^2 + 4n + 2 - n^2 - n}{2} \\
&= (-1)^n \cdot \frac{n^2 + 2n + 1 \quad + \quad n+1}{2} \\
&= (-1)^n \cdot \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2}
\end{aligned}$$