

## Aufgabe 1

25 Punkte

Gegeben ist eine Konstante  $b \in \mathbb{R}$  und die Matrix  $A$  mit

$$A = \begin{pmatrix} -b + 1 & b & 3 - 3b & 2 - 2b \\ b - 2 & 2 & 2 & b - 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b + 2 & -1 & b - 2 & 2 - b \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie  $\det A$ .
- Für welche Werte von  $b$  ist  $A$  invertierbar?
- Falls  $A^{-1}$  existiert: Berechnen Sie  $\det(A^{-1})$ .

## Aufgabe 2

25 Punkte

Die Gammafunktion  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

kann für  $n \in \mathbb{N}$  zur Berechnung der Fakultät  $n!$  genutzt werden. Im Folgenden soll mit Hilfe vollständiger Induktion gezeigt werden, dass  $\Gamma(n) = (n - 1)!$  gilt.

- Zeigen Sie, dass  $\Gamma(1) = 1$  ist.
- Zeigen Sie, dass  $\Gamma(n + 1) = n \cdot \Gamma(n)$  gilt!

*Tipps für b):*

- ▶ Verwenden Sie partielle Integration
- ▶ Sie dürfen verwenden, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} -t^n e^{-t} = 0$ .