Probeklausur FWP-Fach Mathematik Plus – Januar 2014

Aufgabe 1 25 Punkte

Gegeben ist eine Konstante $b \in \mathbb{R}$ und die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} -b+1 & b & 3-3b & 2-2b \\ b-2 & 2 & 2 & b-2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b+2 & -1 & b-2 & 2-b \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det A$.

b) Für welche Werte von b ist A invertierbar?

c) Falls A^{-1} existiert: Berechnen Sie $\det\left(A^{-1}\right)$.

Lösungshinweis:

a) Nach dem Entwicklungssatz von Laplace und der Sarrus-Regel ergibt sich:

$$\det A = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-b & 3(1-b) & 2(1-b) \\ b-2 & 2 & b-2 \\ 2-b & -(2-b) & 2-b \end{pmatrix} = -(1-b)\cdot(2-b)\cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ b-2 & 2 & b-2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -(1-b)\cdot(2-b)\cdot \underbrace{\Big(2+3(b-2)-2(b-2)-\big[4-(b-2)+3(b-2)\big]\Big)}_{=-2-(b-2)=-b}$$

$$= b(b-1)(b-2)\,.$$ 15

b) A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \;\Leftrightarrow\; b \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,2\}$. 5

c) Falls $b \neq 0,1,2$: $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1} = \dfrac{1}{b(b-1)(b-2)}$. 5

Aufgabe 2 25 Punkte

Die Gammafunktion $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

kann für $n \in \mathbb{N}$ zur Berechnung der Fakultät $n!$ genutzt werden. Im Folgenden soll mit Hilfe vollständiger Induktion gezeigt werden, dass $\Gamma(n) = (n-1)!$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass $\Gamma(1) = 1$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$ gilt!

Tipps für b):

- Verwenden Sie partielle Integration
- Sie dürfen verwenden, dass $\lim\limits_{t\to\infty} -t^n e^{-t} = 0$.

Lösungshinweis:

a) $\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1.$ 10

b) $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \left[t^n \cdot \left(-e^{-t}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty n t^{n-1} \cdot \left(-e^{-t}\right) dt = 0 + n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt = n \cdot \Gamma(n)$ 15