Probeklausur Wirtschafts- und Finanzmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: Dezember 2014 – Prüfer:
Studiengang: IM und BW

Aufgabe 1 — 10 Punkte

a) Geben Sie die explizite Form der im folgenden rekursiv definierten Folge a_n an:

$$a_n = a_{n-1} \cdot 2 \quad \text{mit} \quad a_0 = 2$$

b) Geben Sie die Grenzwerte der Folgen b_n und c_n an, die folgendermaßen definiert sind:

$$b_n = \frac{1}{\mathrm{e}^n} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{(n^2+2)^2+n^3}{n^4+n^2+1}$$

Dabei bezeichnet e die Eulersche Zahl.

c) Zeigen Sie, dass die im folgenden definierte Reihe r_n konvergent ist und geben Sie ihren Grenzwert an:

$$r_n = \sum_{i=1}^{n} (1-q)^i \quad \text{mit} \quad q \in (0;1)$$

Lösungshinweis:

2 a) $a_n = 2^{n+1}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 2 denn $|b_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{e^n} < \varepsilon \Leftrightarrow -n < \ln\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \ln\varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+4n^2+4+n^3}{n^4+n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+4\left(\frac{1}{n}\right)^2+4\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{1}{n}\right)^1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^4}$$

$$= \frac{1+0+0+0}{1+0+0} = 1 \quad 2$$

(verwendet: Grenzwertsätze und bekannten Grenzwert von $\frac{1}{n}$)

c) $q \in (0;1) \Rightarrow 1-q \in (0;1) \Rightarrow r_n$ ist konvergente 1 geometrische Reihe. Grenzwert:

$$r_n = \sum_{i=1}^{n}(1-q)^i = \underbrace{-(1-q)^0}_{=-1} + \sum_{i=0}^{n}(1-q)^i = -1 + \frac{1-\overbrace{(1-q)^{n+1}}^{\to 0}}{1-(1-q)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1 + \frac{1-0}{q} = \frac{1}{q} - 1 \quad 3$$

geometrische Reihe: $\sum\limits_{i=0}^{n} \square^i = \dfrac{1-\square^{n+1}}{1-\square}$

Aufgabe 2 **10 Punkte**

a) In dem nachfolgenden Tableau zur Berechnung der Inversen von Matrix A fehlen einige Einträge. Bitte ergänzen Sie diese fehlenden Einträge. Die Lösungen dürfen direkt in das Tableau eingetragen werden.

Zeile	A			E			Umformung
(1)		2	4	1	0	0	
(2)	1		2	0	1	0	
(3)	4	2		0	0	1	
(4)	1	2	4	1	0	0	(1)
(5)	0	0	-2	-1	1	0	(2) $-$ (1)
(6)	0	-6	-14	-4	0	1	(3) $- 4 \cdot$ (1)
(7)	1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	(4) $+ \frac{1}{3} \cdot$ (6)
(8)	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6} \cdot$ (6)
(9)	0	0	-2	-1	1	0	(5)
(10)	1	0	0				
(11)	0	1	0				
(12)	0	0	1				

b) Bilden Sie die Inverse zur Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $Cx = b$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mithilfe der Inversen von C.

Lösungshinweis:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

a)

Zeile	A			E			Umformung
(1)	$\boxed{1}$	2	4	1	$\boxed{0}$	0	
(2)	1	$\boxed{2}$	2	$\boxed{0}$	1	0	
(3)	4	2	$\boxed{2}$	0	0	$\boxed{1}$	
(4)	1	2	4	1	0	0	(1)
(5)	0	0	-2	-1	$\boxed{1}$	0	(2) − (1)
(6)	0	-6	-14	-4	0	1	$(3) - 4 \cdot (1)$
(7)	1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$(4) + \frac{1}{3} \cdot (6)$
(8)	0	$\boxed{1}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6} \cdot (6)$
(9)	0	0	-2	-1	1	0	(5)
(10)	1	0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$\boxed{(7) + \frac{2}{3}(12)}$
(11)	0	1	0	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	$\boxed{\frac{7}{6}}$	$\boxed{-\frac{1}{6}}$	$\boxed{(8) - \frac{7}{3}(12)}$
(12)	0	0	1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-\frac{1}{2}(9)}$

5

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$. 1

c) $Cx = b \;\Leftrightarrow\; x = C^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ 4

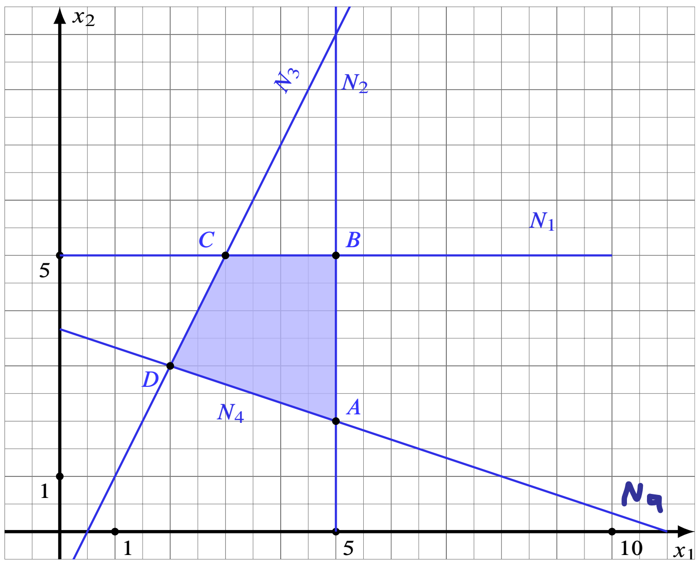
Aufgabe 3 **10 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, der Zielfunktion F und den Nebenbedingungen N_1, N_2 und N_3 mit

$$
\begin{array}{rrcrl}
\text{Zielfunktion:} & mx_1 + 2x_2 & \rightarrow & \min & (F) \\
\text{Nebenbedingungen:} & kx_1 + \ \ x_2 & \leqq & 5 & (N_1) \\
 & x_1 \qquad & \leqq & 5 & (N_2) \\
 & -2x_1 + \ \ x_2 & \leqq & -1 & (N_3) \\
 & x_1 + 3x_2 & \geqq & 11 & (N_4)
\end{array}
$$

$(N_3) + 2(N_4)$:
$7x_2 = 21 \Rightarrow x_2 = 3$
in (N_3): $x_1 = 2$

Für die Teilaufgaben a) bis c) sei der Wert der Konstanten k in Nebenbedingung N_1 gleich 0 und der Wert der Konstanten m in der Zielfunktion gleich 1.



a) Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich Z des Problems. Benutzen Sie dazu das vorgegebene Koordinatensystem rechts.

b) Berechnen Sie die relevanten Eckpunkte von Z.

c) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe b) und bestimmen Sie damit die Menge der Optimallösungen des Problems.

d) Jetzt sei $m = 2/3$ und weiterhin $k = \cancel{1}$ 0. Bestimmen Sie damit alle optimalen Lösungen.

e) Wie klein kann $k \in (-\infty; 0)$ in Nebenbedingung N_1 werden, so dass der Zulässigkeitsbereich des Problems begrenzt bleibt.

Lösungshinweis:

3 a) siehe Zeichnung

1 b) $A = (5{,}2), B = (5{,}5), C = (3{,}5), D = (2{,}3)$

2 c) $\text{ZF}(A) = 9$,
$\text{ZF}(B) = 15$,
$\text{ZF}(C) = 13$,
$\text{ZF}(D) = 8$,
optimal ist also D

$z^* = \{ \lambda \binom{5}{2} + (1-\lambda)\binom{2}{3} \ , \lambda \in [0;1] \}$

2 d) $m = 2/3 : \text{ZF}(A) = \text{ZF}(D) = 22/3$. Also: A, D und die Verbindungsstrecke sind optimal.

2 e) Z begrenzt für jedes $k < 0$, da Z immer durch N_2 und N_3 begrenzt.

Aufgabe 4 **10 Punkte**

Sven Sonneohr hat sich mit einer Spaßpartei als Kandidat für das Europaparlament aufstellen lassen und nach dem Wegfall der 3 %-Hürde tatsächlich ein Mandat als Abgeordneter ergattert.

Sein Plan sieht folgendermaßen aus: Er möchte auf keinen Fall sinnvoll am politischen Geschehen teilnehmen, sondern nur von seinen Privilegien als Parlamentarier profitieren. Er freut sich neben dem monatlichen (steuerfreien) Gehalt auch auf eine zusätzliche Pauschale (ebenfalls steuerfrei), die er erhält, ohne über deren Verwendung Rechenschaft ablegen zu müssen. Daneben bekommt er weitere Zulagen, Sitzungsgelder, Erstattungen für Fahrten und Geld für abrechenbare Sachaufwendungen sowie Übergangsgeld nach dem Ausscheiden.

Er schätzt, dass er dadurch ab dem 1.1.2015 nach Abzug seiner Kosten 5 Jahre lang jährlich nachschüssig Netto 180 000 € auf ein mit 3 % verzinstes Konto einzahlen kann.

a) Welche Summe hätte er auf diese Weise bis zum 1.1.2020 angespart?

Anschließend möchte er von diesem Konto monatlich Geld entnehmen.

b) Welchen konstanten Betrag könnte er pro Monat ab dem 1.1.2020 vorschüssig entnehmen, wenn das Kapital 55 Jahre lang (bis zu seinem 90. Lebensjahr) reichen soll?

c) Wie lange würde das angesparte Kapital ab dem 1.1.2020 reichen, wenn Sven pro Monat vorschüssig 4000 € entnimmt?

d) Wie lange würde es reichen, wenn er pro Monat vorschüssig 2300 € entnimmt?

Lösungshinweis:

a) Nachschüssiger Rentenendwert: $R_n = 180000 \cdot \dfrac{1{,}03^5 - 1}{1{,}03 - 1} \approx 955644{,}446\,€$.

b) Rentenendwert Ansparphase = (monatlich vorschüssiger) Rentenbarwert Entnahmephase;
gesucht: monatliche Rate r:

$$R_n = \underbrace{r \cdot (12 + i \cdot \tfrac{13}{2})}_{r_e} \cdot q^{-55} \cdot \frac{q^{55-1}}{q-1} \quad \Leftrightarrow \quad r = R_n \frac{q-1}{(1-q^{-55}) \cdot (12 + i \cdot \frac{13}{2})} \approx 2926{,}81\,€$$

c) Wie b), jetzt Laufzeit n unbekannt und $r = 4000$:

$$R_n = \overbrace{4000 \cdot (12 + i \cdot \tfrac{13}{2})}^{r_e} \cdot q^{-n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \Leftrightarrow \quad R_n = 4000 \cdot (12 + i \cdot \tfrac{13}{2}) \cdot \frac{1 - q^{-n}}{q - 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad q^{-n} = 1 - \frac{R_n \cdot i}{4000 \cdot (12 + i \cdot \frac{13}{2})}$$

$$\Leftrightarrow \quad n = -\frac{1}{\ln q} \cdot \ln\left[1 - \frac{R_n \cdot i}{4000 \cdot (12 + i \cdot \frac{13}{2})}\right] \approx 29{,}977 \approx 30 \text{ Jahre}$$

d) $2300 \cdot (12 + i \cdot \frac{13}{2}) / R_n \approx 0{,}029 < 3\,\%$. Damit reicht das Kapital ewig. (Alternativ: Argument des Logarithmus in Formel negativ, deswegen reicht Kapital ewig)

Aufgabe 5 **10 Punkte**

Gegeben sind die Kostenfunktion $K\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und die Umsatzfunktion $U\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ einer Ein-Produkt-Unternehmung jeweils in Abhängigkeit des Absatzes $x > 0$ mit

$$K(x) = x^3 - 11x^2 + 50x + 98 \text{ und}$$
$$U(x) = -8x^2 + 122x$$

Ermitteln Sie

a) den Funktionsterm der Grenzkostenfunktion $k(x)$,

b) der Grenzumsatzfunktion $u(x)$,

c) der Preis-Absatz-Funktion $p(x)$ und

d) der Gewinnfunktion $G(x)$ sowie

e) das gewinnmaximale Produktionsniveau und den maximalen Gesamtgewinn,

f) den gewinnmaximalen Preis,

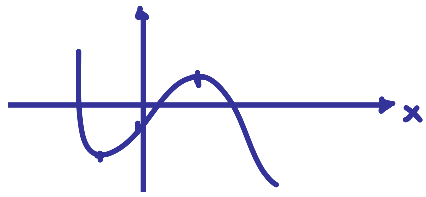
g) die Elastizität des Umsatzes $\varepsilon_U(x)$ mit maximalem Definitionsbereich D_{ε_U} und

h) den Absatzbereich (für $0 < x < 15$), für den die Umsätze elastisch sind.

Hinweise:

- Grenzkosten und Grenzumsatz beschreiben die Änderung (1. Ableitung) der jeweils zugrunde liegenden Funktionen
- Umsatz = Preis · Absatz

Lösungshinweis:



1 a) $k(x) = 3x^2 - 22x + 50$,

1 b) $u(x) = -16x + 122$,

1 c) $p(x) = U(x)/x = -8x + 122$

1 d) $G(x) = U(x) - K(x) = -x^3 + 3x^2 + 72x - 98$

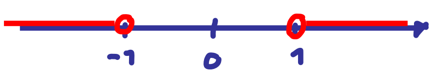
2 e) $G'(x) = -3x^2 + 6x + 72 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = (x-6)\cdot(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 6$ oder $x = -4$. $x = -4$ ist betriebswirtschaftlich uninteressant. Mit $G''(x) = -6x + 6$ folgt $G''(6) < 0$, also ist $x = 6$ mit $G(6) = -6^3 + 3\cdot 6^2 + 72\cdot 6 - 98 = 226$ lokales Maximum (auch global, da $G(0) < 0$).

1 f) mit c): $p(6) = -8\cdot 6 + 122 = 74$.

$-8x^2 + 122x = 0$
$\Leftrightarrow x(122 - 8x) = 0$

1 g) $\varepsilon_U(x) = \dfrac{U'(x)\cdot x}{U(X)} = \dfrac{-16x^2 + 122x}{-8x^2 + 122x}$. $\quad D_{\varepsilon_U} = \mathbb{R}\backslash\{0, \frac{122}{8}\}$

2 h) $\varepsilon_U(x) > 1 \Leftrightarrow -16x^2 + 122x > -8x^2 + 122x \Leftrightarrow -8x^2 > 0$, also nie für $x \in (0; 15)$.
$\varepsilon_U(x) < -1 \Leftrightarrow -16x^2 + 122x < 8x^2 - 122x \Leftrightarrow 244 < 24x \Leftrightarrow 15 > x > 61/6$



Aufgabe 6 — 10 Punkte

Gegeben sei die Funktion $\Theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\Theta(s,t) = s^3 + st^2 - s\,.$$

a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial\Theta}{\partial s}(s,t) = \Theta_s(s,t)$ sowie $\frac{\partial\Theta}{\partial t}(s,t) = \Theta_t(s,t)$.

b) Ermitteln Sie alle Punkte (s_0,t_0), bei denen $\Theta_s(s_0,t_0) = 0$ und $\Theta_t(s_0,t_0) = 0$ gilt. Diese Punkte nennt man *kritische Punkte*.

c) Bestimmen Sie die Hessematrix $H_\Theta(s,t)$.

d) Berechnen Sie für alle kritischen Punkte $P = (s_0,t_0)$ den Wert der Funktion

$$W(P) = \Theta_{ss}(P)\cdot\Theta_{tt}(P) - \Theta_{st}(P)\cdot\Theta_{ts}(P)\,.$$

e) Es gilt allgemein bei kritischen Punkten $P = (s_0,t_0)$ mit $\Theta_s(P) = \Theta_t(P) = 0$:

$$W(P)\begin{cases} > 0 \text{ und } \Theta_{ss}(P) > 0 & \Rightarrow \quad (P) \text{ ist ein Minimum} \\ > 0 \text{ und } \Theta_{ss}(P) < 0 & \Rightarrow \quad (P) \text{ ist ein Maximum} \\ < 0 & \Rightarrow \quad (P) \text{ ist ein Sattelpunkt} \end{cases}$$

Entscheiden Sie mit dieser Regel und den in Teilaufgabe d) berechneten Werten, ob es sich bei den kritischen Punkten jeweils um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

Lösungshinweis:

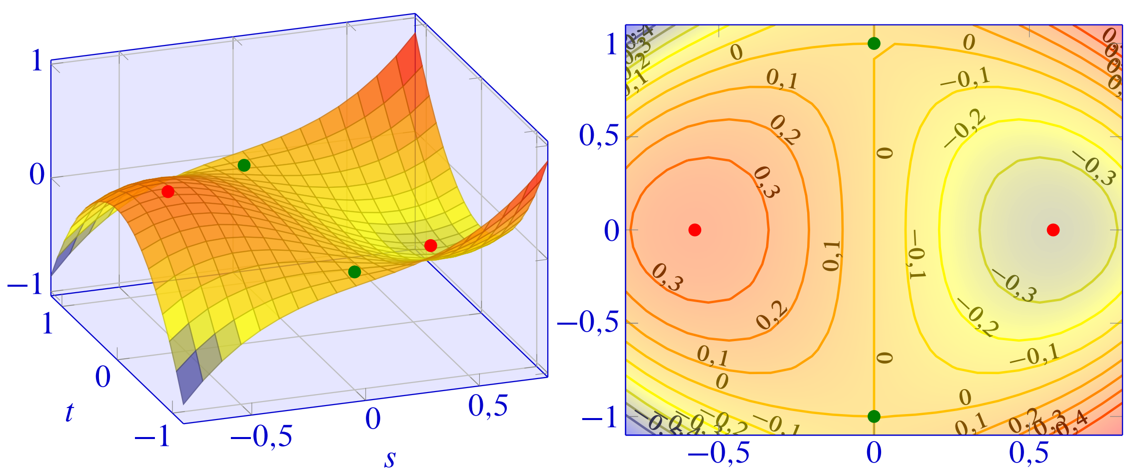
2 a) $\Theta_s(s,t) = 3s^2 + t^2 - 1$, $\Theta_t(s,t) = 2st$.

b) $\Theta_t(s,t) = 0 \Leftrightarrow s = 0$ oder $t = 0$.
2 Falls $s = 0$: $\Theta_s(0,t) = t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$.
Falls $t = 0$: $\Theta_s(s,0) = 3s^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow s = \pm\sqrt{1/3}$.
Die 4 kritischen Punkte sind also: $(0,\pm 1)$, $(\pm\sqrt{1/3},0)$

2 c) $H_\Theta(s,t) = \begin{pmatrix} 6s & 2t \\ 2t & 2s \end{pmatrix}$.

2 d)
$$\begin{aligned} W(0,\pm 1) &= 0\cdot 0 - (\pm 2)\cdot(\pm 2) &&= -4 \\ W(\pm\sqrt{1/3},0) &= 6\cdot\left(\pm\sqrt{1/3}\right)\cdot 2\cdot\left(\pm\sqrt{1/3}\right) - 0\cdot 0 &&= 4 \end{aligned}$$

2 e)
$$\begin{aligned} &W(0,\pm 1) < 0 && \Rightarrow (0,\pm 1) \text{ sind Sattelpunkte,} \\ &W(-\sqrt{1/3},0) > 0 \text{ und } \Theta_{ss}(-\sqrt{1/3},0) < 0 && \Rightarrow \left(-\sqrt{1/3},0\right) \text{ ist Maximum,} \\ &W(\sqrt{1/3},0) > 0 \text{ und } \Theta_{ss}(\sqrt{1/3},0) > 0 && \Rightarrow \left(\sqrt{1/3},0\right) \text{ ist Minimum,} \end{aligned}$$



Plots von Θ (nicht verlangt)