Aufgaben zur Kombinatorik

Aufgabe 34

Kombinatorik: Kombinationen

Wie viele verschiedene Zusammenstellungen von genau 5 Buchstaben können aus den 26 Buchstaben des Alphabets gebildet werden, wenn Wiederholungen zulässig bzw. nicht zulässig sind?

Lösungshinweis:

- Mit Wiederholungen: $26^5 = 11\,881\,376$
- Ohne Wiederholungen: $\dfrac{26!}{(26-5)!} = 7\,893\,600$

Aufgabe 35

Bei der Beurteilung der Klangqualität von 10 Lautsprecher-Boxen ist in der Weise zu verfahren, dass die Tester jeweils zwei Boxen durch aufeinander folgendes Anhören miteinander vergleichen. Um die Objektivität der Tester zu überprüfen, soll auch jede Box mit sich selbst in der angegebenen Weise verglichen werden. Wie viele Hörvergleiche sind durchzuführen, wenn es auf die Reihenfolge, in der zwei Boxen angehört werden, nicht ankommt?

Lösungshinweis:

Mit Wiederholung, ohne Reihenfolge, $n = 10, k = 2$:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{11}{2} = 55$$

$$10 \left\{ \begin{array}{l} B_1 B_1 \\ B_1 B_2 \\ B_1 B_3 \\ \vdots \\ B_1 B_{10} \end{array} \right.$$

$$+$$

$$9 \left\{ \begin{array}{l} B_2 B_2 \\ B_2 B_3 \\ \vdots \\ B_2 B_{10} \end{array} \right.$$

$$+$$

$$8 \left\{ \begin{array}{l} B_3 B_3 \\ B_4 \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$+ 7 + 6 + \dots +$$

$$1 \left\{ B_{10} B_{10} \right.$$

$$10+9+8+\dots+3+2+1$$
$$=(10+1)\cdot 5 = 55$$

Aufgabe 36

Ein Kartenspiel mit 32 verschiedenen Karten soll so unter 4 Spieler aufgeteilt werden, dass jeder genau 8 Karten erhält.

a) Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es?
b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass ein Spieler alle vier Asse erhält?
c) Bilden Sie den Quotienten des Ergebnisses von b) und a) und interpretieren Sie den erhaltenen Wert.

Lösungshinweis:

a) $\binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} \approx 9,956 \times 10^{16}$

übrige „Nicht-Asse"

b) $\underbrace{\binom{4}{4} \cdot \binom{28}{4}}_{\text{Anz.M. 1. Spieler 4 Asse}} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} \cdot 4 \approx 7,752 \times 10^{14}$

jeder der 4 Spieler kann die 4 Asse bekommen

4 von 4 möglichen Assen

c) $\frac{\text{Antwort aus b)}}{\text{Antwort aus a)}} \approx 0{,}008$

0,0077

Wahrsch., dass ein Spieler 4 Asse erhält

Aufgabe 37

Gegeben seien die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

a) Wie viele dreistellige Zahlen können daraus gebildet werden, wenn jede Ziffer höchstens einmal vorkommen darf?
b) Wie viele der so gebildeten Zahlen sind gerade, wie viele ungerade?
c) Wie viele dieser Zahlen sind durch 5 teilbar?
d) Wie viele dieser Zahlen sind kleiner als 200 bzw. größer als 500?

Lösungshinweis:

a) $9 \cdot 8 \cdot 7$

b) $8 \cdot 7 \cdot 4 = 224$ (gerade)

2,4, 6,8 möglich

$8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$ (ungerade)

1,3,5, 7,9

a) $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$
b) $7 \cdot 8 \cdot 4 = 224$
c) $7 \cdot 8 \cdot 1 = 56$
d) Kleiner als 200: $1 \cdot 8 \cdot 7 = 56$, größer als 500: $5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$

$8 \cdot 7 \cdot 1$ Mgl.

5

$7 \cdot 8 \cdot 1$

$8 \cdot 7 \cdot 4$

Ziffern: 1,2,3,4

Zahlen

12
13
14
21
23
24
31
32
34
41
42
43

$4 \cdot 3$

gerade

$3 \cdot 2 = 6$

12
32
42
14
24
34

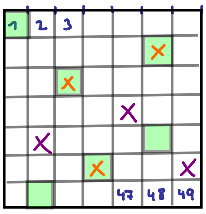
~~9 8.~~

g g g
$4 \cdot 3 \cdot 2$
g u g
$4 \cdot 5 \cdot 3$
u g g
$5 \cdot 4 \cdot 3$
u u g
$5 \cdot 4 \cdot 4$

Aufgabe 38

Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Zahlenlotto „6 aus 49“ genau 3,4,5, beziehungsweise 6 richtige Zahlen anzukreuzen?

Lösungshinweis:



„grüne“ Felder

„weiße“ Felder: 49-6

$\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}$

richtig angekreuzt	Anzahl Möglichkeiten
3	$\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3} = 246820$
4	$\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2} = 13545$
5	$\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1} = 258$
6	$\binom{6}{6}\cdot\binom{43}{0} = 1$

LOTTO 6aus49 Gewinnquoten

Spieleinsatz: 57.265.834,00 €

Klasse	Anzahl Richtige	Gewinne	Quoten
1	6 Richtige + SZ	0 x	Jackpot
2	6 Richtige	5 x	412.478,30 €
3	5 Richtige + SZ	185 x	5.574,00 €
4	5 Richtige	1685 x	1.835,90 €
5	4 Richtige + SZ	9282 x	111,00 €
6	4 Richtige	83127 x	24,80 €
7	3 Richtige + SZ	137691 x	14,90 €
8	3 Richtige	1199722 x	7,70 €
9	2 Richtige + SZ	868797 x	5,00 €

Aufgabe 39

Eine Statistik-Klausur bestehe aus insgesamt 10 Aufgaben mit den (absteigend sortierten) Punktzahlen

$A_1 \quad A_2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$

$$22, 20, 16, 12, 12, 10, 8, 8, 6, 6\,.$$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$

Die Bearbeitung der einzelnen Aufgaben sei in beliebiger Reihenfolge zulässig.

a) Wie viele unterschiedliche Anordnungen (unterschiedliche Bearbeitungsreihenfolgen) gibt es, wenn alle Aufgaben bearbeitet werden?

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

b) Wie viele unterschiedliche Anordnungen (unterschiedliche Auswahlen der Aufgaben sowie unterschiedliche Bearbeitungsreihenfolgen) gibt es, wenn nur 5 Aufgaben bearbeitet werden?

c) Eine Studentin verfolgt die Strategie, die Aufgaben in absteigender Reihenfolge der erreichbaren Punktzahlen zu bearbeiten. Haben mehrere Aufgaben eine übereinstimmende Punktzahl, wählt Sie irgendeine Anordnung dieser Aufgaben. Wie viele unterschiedliche Bearbeitungsreihenfolgen zur Bearbeitung aller Aufgaben bleiben bei dieser Strategie möglich?

Lösungshinweis:

a) $10! = 3628800$ Möglichkeiten.

b) $\dfrac{10!}{(10-5)!} = 30240$ Möglichkeiten.

c) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten.

L = Reihenfolge so lassen   V = Rf. vertauschen

Punkte	12	8	6
	L	L	L
	L	L	V
	L	V	L
	L	V	V
	V	L	L
	V	L	V
	V	V	L
	V	V	V

8 Mgl.

Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

WTheorie: Laplace-Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 40

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit viermaligem Werfen eines Würfels

a) viermal 6
b) keine 6
c) mindestens eine 6
d) der Reihe nach 6, 6, 6, 5

(6665), (6656), (6566), (5666)

e) dreimal 6 und einmal 5
f) genau die Augensumme 7
g) mindestens zweimal die gleiche Zahl

zu erhalten?

Lösungshinweis:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ mit } x_i = 1, \ldots, 6\} \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = 6^4 = 1296$$

a) $A = \{(6,6,6,6)\} \quad \Rightarrow \quad |A| = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{1296} \approx \overset{0{,}00077}{0.001}$

b) $P(B) = \frac{5^4}{6^4} \approx 0.482$

c) $P(C) = 1 - P(B) \approx 0.518$

d) $P(D) = P(A)$

e) $P(E) = \frac{4}{1296} \approx 0.003$

f)

1, 1, 1, 4	: 4 Permutationen
1, 1, 2, 3	: $\frac{4!}{2!} = 12$ Perm.
1, 2, 2, 2	: 4 Perm.
Summe	: 20 Möglichkeiten

$P(F) = \frac{20}{1296} \approx 0.015$

g) $P(G) = 1 - P(\text{„Alle vier sind unterschiedlich“}) = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{13}{18} \approx 0.722.$

Aufgabe 41

In einem Raum befinden sich n Personen, von denen niemand am 29. Februar Geburtstag hat. Nehmen Sie weiterhin an, dass Sie selbst auch nicht am 29. Februar Geburtstag haben.

a) Sei $n = 3$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der drei Personen am gleichen Tag (Tag und Monat) Geburtstag haben?
b) Wie viele Leute müssen sich im Raum befinden, so dass die Wahrscheinlichkeit mindestens 50 % beträgt, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?
c) Sei $n = 100$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens noch eine Person am selben Tag Geburtstag hat wie Sie selbst?
d) Wie viele Personen müssen sich im Raum befinden, so dass die Wahrscheinlichkeit mindestens 50 % beträgt, dass mindestens noch eine Personen am gleichen Tag Geburtstag hat wie Sie selbst?

Lösungshinweis:

```
P.1 = function(n){1- prod(365:(365-n+1)/365)}
P.2 = function(n){1- (364/365)^n}
```

a) $P(3) = P(\text{„Mind. zwei von drei am gleichen Tag Geburtstag“})$
$= 1 - P(\text{„alle an verschiedenen Tagen Geburtstag“})$
$= 1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3} = 0.008$

$1 - \underbrace{(365\ nPr\ x)}_{\frac{365!}{(365-x)!}} \cdot \frac{1}{365^x}$

b) n Leute: $P(n) = 1 - \dfrac{365!}{(365-n)!} \cdot \dfrac{1}{365^n}$

```
options(digits=5)
n=1:20
df = data.frame(n,          P=sapply(n, P.1),
                n21=n+20, P=sapply(n+20, P.1),
                n41=n+40, P=sapply(n+40, P.1),
                n61=n+60, P=sapply(n+60, P.1))
print(df, row.names=FALSE)
```

```
##   n          P n21     P.1 n41     P.2 n61     P.3
##   1 0.0000000  21 0.44369  41 0.90315  61 0.99509
##   2 0.0027397  22 0.47570  42 0.91403  62 0.99591
##   3 0.0082042  23 0.50730  43 0.92392  63 0.99660
##   4 0.0163559  24 0.53834  44 0.93289  64 0.99719
##   5 0.0271356  25 0.56870  45 0.94098  65 0.99768
##   6 0.0404625  26 0.59824  46 0.94825  66 0.99810
##   7 0.0562357  27 0.62686  47 0.95477  67 0.99844
##   8 0.0743353  28 0.65446  48 0.96060  68 0.99873
##   9 0.0946238  29 0.68097  49 0.96578  69 0.99896
##  10 0.1169482  30 0.70632  50 0.97037  70 0.99916
##  11 0.1411414  31 0.73045  51 0.97443  71 0.99932
##  12 0.1670248  32 0.75335  52 0.97800  72 0.99945
##  13 0.1944103  33 0.77497  53 0.98114  73 0.99956
##  14 0.2231025  34 0.79532  54 0.98388  74 0.99965
##  15 0.2529013  35 0.81438  55 0.98626  75 0.99972
##  16 0.2836040  36 0.83218  56 0.98833  76 0.99978
##  17 0.3150077  37 0.84873  57 0.99012  77 0.99982
##  18 0.3469114  38 0.86407  58 0.99166  78 0.99986
##  19 0.3791185  39 0.87822  59 0.99299  79 0.99989
##  20 0.4114384  40 0.89123  60 0.99412  80 0.99991
```

Also: Ab 23 ist P größer als 50 %.

c) $n = 100: \quad P(\text{c})) = 1 - \dfrac{364^{100}}{365^{100}} = 0.23993$

d) $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n \geq 0,5 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(364)-\ln(365)} \approx 252.65199$, also müssen mind. 253 Leute (außer Ihnen) noch im Raum sein.

Aufgabe 42

Ein dreimotoriges Flugzeug stürzt ab, wenn der Hauptmotor in der Mitte ausfällt oder beide Seitenmotoren ausfallen. Es wird angenommen, dass jeder der Flugzeugmotoren mit der Wahrscheinlichkeit p auf einem bestimmten Flug ausfällt. Ferner wird angenommen, dass der Ausfall eines Motors unabhängig vom Verhalten der anderen Motoren erfolgt.

A bezeichne das Ereignis, dass ein Flugzeug dieses Typs infolge von Motorversagen abstürzt.

a) Ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ größer oder kleiner als p? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

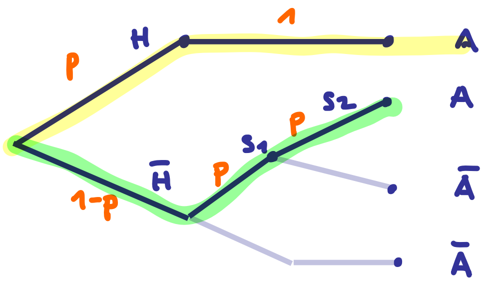
b) Bestimmen Sie $P(A)$ für $p = 0,01$.

Lösungshinweis:

$H \equiv$ Hauptmotor fällt aus, $S_{1/2} \equiv$ Seitenmotor 1 bzw. 2 fällt aus.

a) $P(A) = P(H \cup (\overline{H} \cap S_1 \cap S_2)) = p + (1-p) \cdot p \cdot p > p.$

b) $p = 0,01$: $P(A) = 0,01 + 0,99 \cdot 0,01^2 \approx 0.0101$



$P(A) = p + (1-p)\, p \cdot p > p$