Aufgabe 43

Ein Kraftfahrzeughändler weiß aus langjähriger Erfahrung, dass bei den in Zahlung genommenen Wagen 50% Mängel am Motor, 70% an der Karosserie und 30% an Motor und Karosserie aufweisen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein in Zahlung genommener Wagen

a) ohne Mängel an Motor und Karosserie ist,
b) auch einen Mangel am Motor besitzt, wenn bekannt ist, dass die Karosserie schadhaft ist?

Lösungshinweis:

Abkürzungen: (M)otormangel; (K)arosserieschaden.

Gegeben: $P(M) = 0{,}5, \quad P(K) = 0{,}7, \quad P(M \cap K) = 0{,}3.$

Damit ergibt sich:

	K	$\overline{K}$	
M	0,30	0,20	0,50
$\overline{M}$	0,40	0,10	0,50
	0,70	0,30	

a) $P\left(\overline{M} \cap \overline{K}\right) = 0{,}10$

b) $P\left(M|K\right) = \dfrac{P(M \cap K)}{P(K)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}7} = \dfrac{3}{7} \approx 0{,}429$

Aufgabe 45

Alexandra, Bernhard und Claudio sind als heilige drei Könige verkleidet von Haus zu Haus unterwegs. Bei jedem Haus lassen Sie den Zufall entscheiden, wer von den dreien ein Gedicht aufsagen darf. Dazu würfeln sie jeweils vorher einmal mit einem fairen Würfel. Alexandra sagt das Gedicht, wenn eine 1 fällt, Bernhard bei einer 2 oder 3 und Claudio darf bei 4, 5 oder 6 rezitieren. Alexandra sagt das Gedicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % perfekt (mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % ist mindestens ein kleiner Fehler dabei), Bernhard sagt das Gedicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % perfekt auf, Claudio mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Gedicht bei einem beliebigen Haus perfekt zum Vortrag gebracht?

b) Frau Maier erzählt am Tag nach dem Besuch der drei Ihrer Nachbarin, dass sich bei Ihr ein Sternsinger beim Gedicht ganz schön verhaspelt hätte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Bernhard das Gedicht bei Frau Maier aufgesagt?

Lösungshinweis:

Abkürzungen: $A \widehat{=}$ Alexandra sagt das Gedicht, analog (B)ernhard bzw. (C)laudio.
$F \widehat{=}$ Gedicht mit Fehler aufgesagt.

$P(A \cap F) = 1/5 \cdot 1/6$

	A	B	C	
F	$1/30$	$1/30$	$1/40$	$11/120$
$\overline{F}$	$4/30$	$9/30$	$19/40$	$\frac{16+36+57}{120}$
	$1/6$	$2/6$	$3/6$	

Gegeben: $P(A) = 1/6,\quad P(B) = 2/6,\quad P(C) = 3/6,$
$P(F|A) = 0{,}2,\quad P(F|B) = 0{,}1,\quad P(F|C) = 0{,}05$

a)
$$\begin{aligned} P(\overline{F}) &= 1 - P(F) \\ &= 1 - \left[P(F|A)\cdot P(A) + P(F|B)\cdot P(B) + P(F|C)\cdot P(C)\right] \\ &= 1 - \left[0{,}2\cdot 1/6 + 0{,}1\cdot 2/6 + 0{,}05\cdot 3/6\right] \\ &= 1 - \tfrac{4+4+3}{120} \\ &= \tfrac{109}{120} \approx 0{,}908 \end{aligned}$$

b)
$$P(B|F) = \frac{P(B\cap F)}{P(F)} = \frac{P(F|B)\cdot P(B)}{P(F)} = \frac{0{,}1\cdot 2/6}{11/120} = \frac{4}{11} \approx 0{,}364.$$

Aufgabe 46

In einer Großbank kommen 80 % der männlichen Kreditkunden ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nach, 15 % schleppend nach, und bei 5 % muss die Bank den Kredit abschreiben. Bei den weiblichen Kreditkunden sind die entsprechenden Zahlen 85 %, 10 % und 5 %. Von den Kreditkunden der Bank sind 70 % männlich.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nachkommt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person weiblich ist, falls die Person ihren Kreditverpflichtungen nur schleppend nachkommt?

c) Sind die Ereignisse „Kunde ist männlich“ und „Kunde zahlt pünktlich“ stochastisch unabhängig?

Lösungshinweis:

$$P(p|M) = \frac{P(p \cap M)}{P(M)}$$

Zahlungsmoral: (p)ünktlich, (s)chleppend, (n)ie.
Geschlecht: (M)ann, (F)rau.

	p	s	n	
M	0.56	0.105	0,035	0,7
F	0,255	0.03	0,015	0,3
	0,815	0,135	0,05	1

Gegeben: $P(p|M) = 0{,}8, \quad P(s|M) = 0{,}15, \quad P(n|M) = 0{,}05,$
$P(p|F) = 0{,}85, \quad P(s|F) = 0{,}10, \quad P(n|F) = 0{,}05,$
$P(M) = 0{,}7, \quad P(F) = 0{,}3$

a) $P(p) = P(p|M) \cdot P(M) + P(p|F) \cdot P(F) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}85 \cdot 0{,}3 = 0{,}815.$

b) $$P(F|s) = \frac{P(F \cap s)}{P(s)} = \frac{P(s|F) \cdot P(F)}{P(s|F) \cdot P(F) + P(s|M) \cdot P(M)}$$
$$= \frac{0{,}1 \cdot 0{,}3}{0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}15 \cdot 0{,}7} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222.$$

c) $$P(M|p) = \frac{\overbrace{P(p|M) \cdot P(M)}^{P(M \cap p)}}{P(p)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}7}{0{,}815} \approx 0{,}687 \neq 0{,}7 = P(M),$$
also sind die Ereignisse M und p nicht unabhängig.

Aufgabe 47

In der Stadt D wird im Mittel zu 10 % schwarz gefahren. 70 % der Schwarzfahrer haben keine Fahrkarte, während die anderen 30 % gefälschte oder illegal besorgte Karten besitzen. Von den ehrlichen Fahrgasten haben im Mittel 5 % ihre Fahrkarte vergessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein kontrollierter Fahrgast, der keine Karte vorzeigen kann, ein Schwarzfahrer?

Lösungshinweis:

Abkürzungen: (S)chwarzfahrer; zeigt (K)arte.

Gegeben: $P(S) = 0{,}1, \quad P\left(\overline{K}|S\right) = 0{,}7, \quad P(K|S) = 0{,}3,$
$P\left(\overline{K}|\overline{S}\right) = 0{,}05$

Lösung:

$$\begin{aligned} P\left(S|\overline{K}\right) &= \frac{P\left(\overline{K}|S\right)\cdot P(S)}{P\left(\overline{K}\right)} = \frac{P\left(\overline{K}|S\right)\cdot P(S)}{P\left(\overline{K}|S\right)\cdot P(S) + P\left(\overline{K}|\overline{S}\right)\cdot P\left(\overline{S}\right)} \\ &= \frac{0{,}7\cdot 0{,}1}{0{,}7\cdot 0{,}1 + 0{,}05\cdot 0{,}9} = \frac{14}{23} \approx 0{,}609 \end{aligned}$$

Aufgabe 48

10.000 Flugreisende, die aus einem südlichen Land nach Deutschland einreisen werden auf eine ansteckende tropische Krankheit getestet. Ein positiver Test deutet auf eine Erkrankung hin, allerdings nicht sicher. 9 Leute, bei denen der Test positiv ausgefallen ist sind tatsächlich krank. 9899 Leute mit negativem Testergebnissen sind nicht krank. Insgesamt war der Test bei 9900 Untersuchten negativ. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer beliebig unter diesen 10.000 Flugreisenden ausgewählten Person

a) Der Test positiv ausfällt,
b) die Person krank ist,
c) die Person gesund ist, obwohl der Test positiv ausgefallen ist,
d) der Test positiv ausfällt, wenn bekannt ist, dass die Person gesund ist.

Lösungshinweis:

Abkürzungen: Test ist (p)ositiv; Person hat (K)rankheit.

Gegeben: $P(K \cap p) = 0{,}0009, \quad P\left(\overline{p} \cap \overline{K}\right) = 0{,}9899, \quad P\left(\overline{p}\right) = 0{,}99.$

Damit ergibt sich:

	p	$\overline{p}$	
K	0,0009	0,0001	0,001
$\overline{K}$	0,0091	0,9899	0,999
	0,01	0,99	

a) $P(p) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$
b) $P(K) = 0{,}001$
c) $P\left(\overline{K}|p\right) = \dfrac{0{,}0091}{0{,}01} = 0{,}91$
d) $P\left(p|\overline{K}\right) = \dfrac{0{,}0091}{0{,}999} \approx 0{,}009$

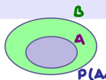
Aufgabe 49

Geben Sie zu den Ereignissen A, B die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ an, wenn

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

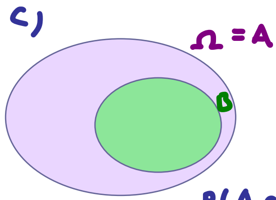
a) $A \subset B$,
b) $B \subset A$,
c) $A = \Omega$,
d) $B = \Omega$,
e) $A \cap B = \{\}$.

Lösungshinweis:



$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$

c)



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

a) $\dfrac{P(A)}{P(B)}$,

b) $\dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$,

c) $\dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$,

d) $\dfrac{P(A)}{1} = P(A)$,

e) $\dfrac{P(\{\})}{P(B)} = 0$.

Aufgabe 50

Ein Schießbudenbesitzer hat festgestellt, dass die Trefferwahrscheinlichkeit in den späten Abendstunden 0,1 pro Schuss beträgt.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei 5 Schüssen mindestens 2 Treffer zu erzielen?
b) Wie viele Schüsse sind notwendig, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 mindestens einen Treffer zu erzielen?

„1- keinen"

Lösungshinweis:

$X \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl Treffer bei 5 Schüssen. Damit gilt: $X \sim \mathrm{B}(n = 5;\ p = 0{,}1)$

a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}082$.
mit R:

```
1 - pbinom(1, size = 5, prob = 0.1)
## [1] 0,08146
```

b) $Y \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl Treffer bei n Schüssen; damit
$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n = 1 - 0{,}9^n \geq 0{,}9$
$\Leftrightarrow 0{,}9^n \leq 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9} \approx 21{,}854$, also mindestens 22 Schuss sind nötig

Aufgabe 52

In der Klausur zur Statistik werden 25 Multiple-Choice-Fragen gestellt mit jeweils vier Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtige anzukreuzen ist. Wie wahrscheinlich ist es, mindestens 12 Punkte zu erhalten, wenn man nur rät?

R

Lösungshinweis:

$X \triangleq$ Anzahl der richtig beantworteten Fragen

$X \sim B(n = 25, p = 0{,}25)$

$P(X \geq 12) = 1 - P(x \leq 11) \approx 0{,}011$

$n = 25$

$\downarrow x$ $p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25
0	0.7778	0.6035	0.4670	0.3604	0.2774	0.2129	0.1630	0.1244	0.0946	0.0718	0.0038	0.0008
1	0.9742	0.9114	0.8280	0.7358	0.6424	0.5527	0.4696	0.3947	0.3286	0.2712	0.0274	0.0070
2	0.9980	0.9868	0.9620	0.9235	0.8729	0.8129	0.7466	0.6768	0.6063	0.5371	0.0982	0.0321
3	0.9999	0.9986	0.9938	0.9835	0.9659	0.9402	0.9064	0.8649	0.8169	0.7636	0.2340	0.0962
4	1.0000	0.9999	0.9992	0.9972	0.9928	0.9850	0.9726	0.9549	0.9314	0.9020	0.4207	0.2137
5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9988	0.9969	0.9935	0.9877	0.9790	0.9666	0.6167	0.3783
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995	0.9987	0.9972	0.9946	0.9905	0.7800	0.5611
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9989	0.9977	0.8909	0.7265
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9532	0.8506
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9827	0.9287
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9944	0.9703
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9985	0.9893
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Mit R:

```
1 - pbinom(11, size = 25, prob = 0.25)
## [1] 0,010734
```

Aufgabe 53

Im Laufe eines Jahres werden von 52 aufeinanderfolgenden Ausgaben einer wöchentlich erscheinenden Zeitschrift 11 beliebige Ausgaben mit einer bestimmten Annonce versehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Leser von 20 beliebigen (aber verschiedenen) Ausgaben

a) zwei Ausgaben
b) keine Ausgabe
c) 20 Ausgaben
d) sämtliche 11 Ausgaben
e) mindestens eine Ausgabe

mit einer Annonce erhält?

Lösungshinweis:

$X \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl der Zeitschriften mit der Annonce, $X \sim \underbrace{\text{Hyp}(M = 11, N = 52, n = 20)}_{\text{ohne Wiederholung}}$

a) $P(X = 2) = \dfrac{\binom{11}{2}\binom{41}{18}}{\binom{52}{20}} \approx 0{,}088$

b) $P(X = 0) = \dfrac{\binom{11}{0}\binom{41}{20}}{\binom{52}{20}} \approx 0{,}002$

c) Das geht nicht, also $P(X = 20) = 0$.

d) $P(X = 11) = \dfrac{\binom{11}{11}\binom{41}{9}}{\binom{52}{20}} \approx 0$

e) $P(X \geq 1) = 1 - P(\text{„Teilaufgabe b)“}) = 0{,}998$

Lösung in R:

```
a = dhyper(x=2, m=11, n=41, k=20)
b = dhyper(x=0, m=11, n=41, k=20)
c = dhyper(x=20, m=11, n=41, k=20)
d = dhyper(x=11, m=11, n=41, k=20)
e = 1 - dhyper(x=0, m=11, n=41, k=20)
print(data.frame(Aufgabe=c("a", "b", "c", "d", "e"),
                 Ergebnis=round(c(a,   b,   c,   d,   e), 7)),
      row.names=FALSE)

##  Aufgabe  Ergebnis
##        a 0,0882275
##        b 0,0021360
##        c 0,0000000
##        d 0,0000028
##        e 0,9978640
```

Aufgabe 54

Unter den 20 Passagieren eines Charterfluges befinden sich zwei Bewaffnete, die das Flugzeug entführen wollen. Zehn Passagiere werden zufällig ausgewählt und genau untersucht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Bewaffneten unentdeckt bleiben?

Lösungshinweis:

$X \hat{=}$ Anzahl der entdeckten Bombenleger, $X \sim \text{Hyp}(M = 2, N = 20, n = 10)$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{18}{10}}{\binom{20}{10}} \approx 0{,}2368421$$

Lösung in R:

```
P <- dhyper(x = 0, m = 2, n = 18, k = 10)
P

## [1] 0,2368421
```