Aufgabe 50

Ein Schießbudenbesitzer hat festgestellt, dass die Trefferwahrscheinlichkeit in den späten Abendstunden 0,1 pro Schuss beträgt.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei 5 Schüssen mindestens 2 Treffer zu erzielen? R
b) Wie viele Schüsse sind notwendig, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 mindestens einen Treffer zu erzielen?

Lösungshinweis:

$X \hat{=}$ Anzahl Treffer bei 5 Schüssen. Damit gilt: $X \sim \mathrm{B}(n = 5;\ p = 0{,}1)$

a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}0815$.
mit R:

```
1 - pbinom(1, size = 5, prob = 0.1)
## [1] 0,08146
```

b) $Y \hat{=}$ Anzahl Treffer bei n Schüssen; damit
$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n = 1 - 0{,}9^n \geq 0{,}9$
$\Leftrightarrow 0{,}9^n \leq 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9} \approx 21{,}85435$, also mindestens 22 Schuss sind nötig

Aufgabe 52

In der Klausur zur Statistik werden 25 Multiple-Choice-Fragen gestellt mit jeweils vier Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtige anzukreuzen ist. Wie wahrscheinlich ist es, mindestens 12 Punkte zu erhalten, wenn man nur rät? R

Lösungshinweis:

$X \hat{=}$ Anzahl der richtig beantworteten Fragen

$X \sim B(n = 25, p = 0{,}25)$

$P(X \geq 12) = 1 - P(x \leq 11) \approx 0{,}01073$

Mit R:

```
1 - pbinom(11, size = 25, prob = 0.25)
## [1] 0,010734
```

Aufgabe 53

Im Laufe eines Jahres werden von 52 aufeinanderfolgenden Ausgaben einer wöchentlich erscheinenden Zeitschrift 11 beliebige Ausgaben mit einer bestimmten Annonce versehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Leser von 20 beliebigen (aber verschiedenen) Ausgaben

a) zwei Ausgaben
b) keine Ausgabe
c) 20 Ausgaben
d) sämtliche 11 Ausgaben
e) mindestens eine Ausgabe

mit einer Annonce erhält?

Lösungshinweis:

$X \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl der Zeitschriften mit der Annonce, $X \sim \text{Hyp}(M = 11, N = 52, n = 20)$

a) $P(X = 2) = \dfrac{\binom{11}{2}\binom{41}{18}}{\binom{52}{20}} \approx 0{,}088$

b) $P(X = 0) = \dfrac{\binom{11}{0}\binom{41}{20}}{\binom{52}{20}} \approx 0{,}002$

c) Das geht nicht, also $P(X = 20) = 0$.

d) $P(X = 11) = \dfrac{\binom{11}{11}\binom{41}{9}}{\binom{52}{20}} \approx 0$

e) $P(X \geq 1) = 1 - P(\text{„Teilaufgabe b)“}) = 0{,}998$

Lösung in R:

```
a = dhyper(x=2, m=11, n=41, k=20)
b = dhyper(x=0, m=11, n=41, k=20)
c = dhyper(x=20, m=11, n=41, k=20)
d = dhyper(x=11, m=11, n=41, k=20)
e = 1 - dhyper(x=0, m=11, n=41, k=20)
print(data.frame(Aufgabe=c("a", "b", "c", "d", "e"),
                 Ergebnis=round(c(a,   b,   c,   d,   e), 7)),
      row.names=FALSE)

##  Aufgabe  Ergebnis
##        a 0,0882275
##        b 0,0021360
##        c 0,0000000
##        d 0,0000028
##        e 0,9978640
```

Aufgabe 54

Unter den 20 Passagieren eines Charterfluges befinden sich zwei Bewaffnete, die das Flugzeug entführen wollen. Zehn Passagiere werden zufällig ausgewählt und genau untersucht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Bewaffneten unentdeckt bleiben?

Lösungshinweis:

$X \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl der entdeckten Bombenleger, $X \sim \text{Hyp}(M = 2, N = 20, n = 10)$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{18}{10}}{\binom{20}{10}} \approx 0{,}2368421$$

Lösung in R:

```
P <- dhyper(x = 0, m = 2, n = 18, k = 10)
P

## [1] 0,2368421
```

Aufgabe 55

Den drei Studentinnen Anna, Julia und Laura steht eine Statistikklausur bevor. Leider hatten die drei keine Zeit, die Vorlesung zu verfolgen. So verlassen Sie sich auf die Aussage des Dozenten, dass alle 5 Klausuraufgaben zufällig aus einer Liste von 50 veröffentlichten Aufgaben ausgewählt werden.

Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens vier Aufgaben richtig gelöst werden. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass eine nicht vorbereitete Aufgabe sicher falsch und eine vorbereitete Aufgabe sicher richtig gelöst wird.

Alle drei wählen eine bestimmte Anzahl von Aufgaben zufällig und unabhängig voneinander aus und bereiten sich auf diese Fragen intensiv vor. Anna bereitet sich auf die Hälfte der Aufgaben vor. Julia geht davon aus, dass es reicht, sich auf vierzig der fünfzig Aufgaben vorzubereiten. Laura möchte nichts dem Zufall überlassen, schafft es aber wegen einer Krankheit nur sich auf 45 Aufgaben vorzubereiten.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bestehen die drei Kandidatinnen jeweils die Prüfung? R
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei bestehen? R
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine von den dreien besteht? R
d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anna in drei Klausurversuchen (mit jeweils den gleichen Konditionen und den gleichen vorbereiteten Aufgaben wie beim ersten Versuch) durchfällt? Wie hoch ist diese Wahrscheinlichkeit bei Laura?

Lösungshinweis:

$X_{A,J,L} \hat{=}$ Anzahl der richtig gelösten Aufgaben, entspricht der Anzahl der vom Prüfer ausgewählten Aufgaben, die (A)nna, (J)ulia, (L)aura jeweils vorbereitet haben.

$X_{A,J,L}$ ist jeweils hypergeometrisch verteilt.

Anzahl vorbereitete Aufg.

a) $$P\left(X_A \geq 4\right) = \frac{\binom{25}{4}\cdot\binom{25}{1}}{\binom{50}{5}} + \frac{\binom{25}{5}\cdot\binom{25}{0}}{\binom{50}{5}} \approx 0{,}17434 = p_A$$

$$P\left(X_J \geq 4\right) = \frac{\binom{40}{4}\cdot\binom{10}{1}}{\binom{50}{5}} + \frac{\binom{40}{5}\cdot\binom{10}{0}}{\binom{50}{5}} \approx 0{,}7419 = p_J$$

$$P\left(X_L \geq 4\right) = \frac{\binom{45}{4}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{50}{5}} + \frac{\binom{45}{5}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{50}{5}} \approx 0{,}92825 = p_L$$

b) $p_A \cdot p_J \cdot p_L \approx 0{,}12006$

c) $1-(1-p_A)\cdot(1-p_J)\cdot(1-p_L) \approx 0{,}98471$

d) Anna: $(1 - p_A)^3 \approx 0{,}56287$

Laura: $(1 - p_L)^3 \approx 0{,}00037$

R

```
# Lösung zu a)
pA <- sum(dhyper(4:5, m = 25, n = 25, 5))
pJ <- sum(dhyper(4:5, m = 40, n = 10, 5))
pL <- sum(dhyper(4:5, m = 45, n = 5, 5))
```

```
c(pA, pJ, pL,                 # Lösung a)
pA * pJ * pL,                 # Lösung b)
1- (1-pA) * (1-pJ) * (1-pL))  # Lösung c)

## [1] 0,17434 0,74190 0,92825 0,12006 0,98471
```

Aufgabe 56

Das Rechenzentrum der Hochschule habe festgestellt, dass während einer Betriebszeit von einem Tag mit der Wahrscheinlichkeit 0,905 kein Ausfall des Systems zu verzeichnen ist. Die Anzahl der Systemausfälle sei Poisson-verteilt.

x = 0

a) Bestimmen Sie den Parameter λ der Poisson-Verteilung.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag genau zwei Systemausfälle zu verzeichnen sind?
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es bei 5 gleichartigen Systemen, die unabhängig voneinander laufen, zu mindestens einem Ausfall am Tage kommt.

Lösungshinweis:

a) $X \hat{=}$ „Anzahl Ausfälle“ $\Rightarrow X \sim P(\lambda)$

$$P(X=0) = \frac{\overbrace{\lambda^0}^{1}}{\underbrace{0!}_{1}} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = 0{,}905 \Leftrightarrow \lambda = -\ln 0{,}905 \approx 0{,}09982$$

b) $P(X=2) = \frac{\lambda^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \approx 0{,}00451$

```
lambda = -log(0.905)
pb = dpois(2, lambda = lambda)
pb

## [1] 0,0045088
```

c) $Y \hat{=}$ „Anzahl Systeme mit mind. einem Ausfall“

$\Rightarrow Y \sim B(n=5,\ p = P(X \geq 1) = 1 - 0{,}905 = 0{,}095)$

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^5 = 1 - 0{,}905^5 \approx 0{,}39292$

Aufgabe 57

In einer Online-Redaktion weiß man, dass ein Webredakteur gemessen am output sehr wenige sprachliche Fehler produziert. Im Durchschnitt werden drei Fehler pro Monat festgestellt. Die Anzahl der Fehler pro Monat kann als Poisson-verteilt angenommen werden und ist jeweils unabhängig von den anderen Monaten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) dass der Redakteur mehr als 9 Fehler pro Monat begeht,

b) für mehr als 3 Fehler, wenn man weiß, dass er schon 2 Fehler gemacht hat,

c) dass er während eines Jahres in mindestens 3 Monaten keinen Fehler produziert?

$\downarrow x$ $\lambda \rightarrow$	2.5	2.75	3
0	0.0821	0.0639	0.0498
1	0.2873	0.2397	0.1991
2	0.5438	0.4815	0.4232
3	0.7576	0.7030	0.6472
4	0.8912	0.8554	0.8153
5	0.9580	0.9392	0.9161
6	0.9858	0.9776	0.9665
7	0.9958	0.9927	0.9881
8	0.9989	0.9978	0.9962
9	0.9997	0.9994	0.9989
10	0.9999	0.9999	0.9997
11	1.0000	1.0000	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000
13	1.0000	1.0000	1.0000
14	1.0000	1.0000	1.0000
15	1.0000	1.0000	1.0000
16	1.0000	1.0000	1.0000
17	1.0000	1.0000	1.0000

Lösungshinweis:

$X \mathrel{\widehat{=}}$ „Anzahl der Fehler pro Monat“, also $X \sim P(\lambda = 3)$

a) $P(X > 9) = 1 - P(X \leq 9) \approx 1 - 0{,}9989 \approx 0{,}0011$

b) $P(X > 3 | X \geq 2) = \dfrac{P(X > 3)}{P(X \geq 2)} = \dfrac{1 - P(X \leq 3)}{1 - P(X \leq 1)} = \dfrac{1 - 0{,}64723}{1 - 0{,}19915} \approx 0{,}44049$

c) $Y \mathrel{\widehat{=}}$ „Anzahl der Monate ohne Fehler in einem Jahr“, also $Y \sim B\big(n = 12; p = P(X = 0)\big)$, wobei $p = \frac{3^0}{0!} \cdot \mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}04979$. Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) &= 1 - \big[P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)\big] \\
&= 1 - \left[\tbinom{12}{0} p^0 (1-p)^{12} + \tbinom{12}{1} p^1 (1-p)^{11} + \tbinom{12}{2} p^2 (1-p)^{10}\right] \\
&\approx 1 - \big[0{,}54182 + 0{,}34067 + 0{,}09817\big] \approx 0{,}01935
\end{aligned}
$$

```r
Pa = 1 - ppois(9, lambda = 3)                        # Teilaufgabe a)
Pb = (1-ppois(3,lambda = 3)) / (1-ppois(1,lambda = 3)) # Teil b)
p = dpois(0, lambda = 3)                              # in c) benutzt
Pc = 1 - pbinom(2, size = 12, prob = p)               # Ergebnis c)
```

```r
c(Pa, Pb, p, Pc)

## [1] 0,0011025 0,4404912 0,0497871 0,0193476
```

Aufgabe 58

Die portugiesische Fußballnationalmannschaft schießt pro Spiel durchschnittlich 1 Tor. Gehen Sie davon aus, dass die Anzahl der Tore pro Spiel poissonverteilt ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft

a) in einem Spiel höchstens 1 Tor erzielt, R
b) in einem Spiel genau 7 Tore erzielt, R
c) während der Gruppenphase einer Fußball-WM (3 Spiele) mindestens einmal 7 Tore schießt? R

Lösungshinweis:

a) $X \mathrel{\hat{=}}$ „Anzahl Tore bei einem Spiel“, also $X \sim P(\lambda = 1)$. Damit:
$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} + \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} = 2 \cdot e^{-1} \approx 0{,}73576$
(alternativ mit Tabelle) R

```
ppois(1, lambda = 1)
## [1] 0,73576
```

b) $P(X = 7) = \frac{1^7}{7!} \cdot e^{-1} \approx 0{,}00007$ R

```
dpois(7, lambda = 1)
## [1] 0,000072992
```

c) $Y \mathrel{\hat{=}}$ „Anzahl der Spiele in Gruppenphase mit genau 7 Toren“,
also $Y \sim B(n = 3, p)$ mit $p = P(X = 7) \approx 0{,}00007$. Damit ergibt sich:

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3 \approx 0{,}00022$$

R

```
p = dpois(7, lambda = 1)
1 - dbinom(0, size = 3, prob = p)
## [1] 0,00021896
```

Aufgabe 59

Johanna und Benedikt haben zu Beginn Ihres Studiums geheiratet, sich aber schon vor dem Abschluss wieder scheiden lassen. Im Verlauf der folgenden $n = 40$ Jahre begegnen sich die beiden jedoch häufiger wieder, wobei allerdings die Wahrscheinlichkeit evtl. wieder zu heiraten in jedem Jahr nur 1/200 beträgt. Wie groß ist dann (bei Unabhängigkeit) die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden

a) nicht wieder heiraten (x=0)
b) noch einmal heiraten (x=1)?

R

Berechnen Sie die beiden Ergebnisse jeweils mit der Binomial- sowie der Poissonverteilung und beurteilen Sie die Abweichungen.

Lösungshinweis:

$X \sim B\big(n = 40; p = \frac{1}{200}\big), \qquad Y \sim P(\lambda = 0{,}2)$

$$P(X=0) = \binom{40}{0}\left(\tfrac{1}{200}\right)^0 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{200}\right)^{40} \approx 0{,}81832 \qquad P(Y=0) = \frac{0{,}2^0}{0!} \cdot e^{-0{,}2} \approx 0{,}81873$$

$$P(X=1) = \binom{40}{1}\left(\tfrac{1}{200}\right)^1 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{200}\right)^{39} \approx 0{,}16449 \qquad P(Y=1) = \frac{0{,}2^1}{1!} \cdot e^{-0{,}2} \approx 0{,}16375$$

Abweichungen klein, Poisson-Approximation funktioniert hier prima.

```
c(dbinom(0:1, size = 40, prob = 1/200),
  dpois(0:1, lambda = 40/200))

## [1] 0,81832 0,16449 0,81873 0,16375
```

Aufgabe 60

Ein Computerhersteller will eine neue Bestückungsmaschine für Platinen kaufen. Die Ausschußrate soll höchstens 5 % sein. Zur Kontrolle wird ein Probelauf mit 20 Platinen durchgeführt. Sind mehr als k Platinen fehlerhaft bestückt, so muss die Produktion gestoppt und kostenfrei nachgebessert werden.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei einer tatsächlichen Ausschussrate von 5 % höchstens 3 fehlerhafte Platinen?

b) Wie muss die Zahl k gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Produktionsstopp trotz ausreichender Ausschussrate kleiner als 10 % ist?

Lösungshinweis:

$n = 20$

$\downarrow x$ $p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0.8179	0.6676	0.5438	0.4420	0.3585
1	0.9831	0.9401	0.8802	0.8103	0.7358
2	0.9990	0.9929	0.9790	0.9561	0.9245
3	1.0000	0.9994	0.9973	0.9926	0.9841
4	1.0000	1.0000	0.9997	0.9990	0.9974
5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997

$X \hat{=}$ „Anzahl fehlerhafter Platinen", damit gilt: $X \sim B(n = 20; p = 0{,}05)$

a) $P(X \leq 3) = F(3) \approx 0{,}9841$

b) $P(X > k) < 0{,}1 \quad \Leftrightarrow 1 - P(X \leq k) < 0{,}1$
$\Leftrightarrow P(X \leq k) > 0{,}9 \quad \Leftrightarrow F(k) > 0{,}9$

k	$F(k)$	
0	0,35849	$< 0{,}9$
1	0,73584	$< 0{,}9$
2	0,92452	$> 0{,}9$

$\Rightarrow$ k muss mindestens 2 sein; d.h. Produktionsstop bei 3 oder mehr defekten Platinen.

Aufgabe 61

Die Gesamtdauer X eines Projektes wird als normalverteilt mit dem Parameter $\mu = 10$ (Wochen) angenommen. Ferner wird für die Wahrscheinlichkeit $P(8 \leq X \leq 12)$ der Wert 0,8 geschätzt. Man bestimme den Parameter σ.

Lösungshinweis:

Aufgabe 62

Das Körpergewicht X (in kg) zufällig ausgewählter Personen aus einer Grundgesamtheit sei normalverteilt mit den Parametern μ und σ. Es gilt:

$$P(X \leq 80) = \tfrac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad P(X \leq 70) = \tfrac{1}{4}\,.$$

a) Geben Sie μ und σ an.

b) Berechnen Sie $P(X \geq 100)$.

c) Wieviel Prozent der Personen der Grundgesamtheit, die mindestens 100 kg wiegen, wiegen über 110 kg?

Lösungshinweis:

Aufgabe 63

Die Zufallsvariable X beschreibt den täglichen Umsatz in einer Eisdiele. Es wird angenommen, dass $X \sim N(\mu, \sigma)$ gilt. Außerdem sei bekannt, dass der Umsatz an 30,854 % der Tage mindestens 1500 € und an 30,854 % der Tage weniger als 900 € beträgt.

a) Bestimmen Sie μ und σ.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Umsatz an einem Tag mehr als 3000 € beträgt?

c) Wie hoch müsste der Umsatz mindestens gemäß der Verteilung an den 5 % besten Tagen sein?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Umsatz negativ ist? Was bedeutet das?

Lösungshinweis:

Aufgabe 64

Eine normalverteilte Zufallsvariable X soll untersucht werden. Zwei Tatsachen sind von X bekannt:

- $P(X > 20) = 20\%$
- $P(X < 1) = 1\%$

Bestimmen Sie damit:

a) $\text{Sta}[X] = \sigma$ sowie $\text{E}[X] = \mu$
b) $P(X = 20)$
c) $P(X \leq 20)$
d) $P(X \geq 25)$
e) $P(X \geq 25 | X \geq 20)$
f) $P(X \geq 20 | X \geq 25)$

Lösungshinweis:

Aufgabe 65

Schokoladennikoläuse mit einem Sollgewicht von 200g sollen bzgl. ihres Gewichts kontrolliert werden. Es stellt sich heraus, dass

- das Gewicht X der Nikoläuse normalverteilt ist,
- die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus mindestens 200g wiegt bei 30 % liegt und
- ein Nikolaus mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % höchstens 210g wiegt.

Berechnen Sie bzw. geben Sie ohne Rechnung aber mit Begründung an:

a) Wie groß ist die Standardabweichung σ sowie der Erwartungswert μ von X?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen Nikolaus mit einem Gewicht von exakt 200g ($\pm$0g) auszuwählen?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus weniger als 190g wiegt?
d) Nikoläuse mit weniger als 195g werden aussortiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus aus diesem Ausschuss zwischen 190g und 195g wiegt?

Lösungshinweis: