Aufgabe 61

Die Gesamtdauer X eines Projektes wird als normalverteilt mit dem Parameter $\mu = 10$ (Wochen) angenommen. Ferner wird für die Wahrscheinlichkeit $P(8 \leq X \leq 12)$ der Wert 0,8 geschätzt. Man bestimme den Parameter σ.

$$P(8 \leq X \leq 12) = F(12) - F(8) = \Phi\left(\frac{12-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{8-10}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\tfrac{2}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\tfrac{2}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\tfrac{2}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\tfrac{2}{\sigma}\right)\right)$$

$$= 2\Phi\left(\tfrac{2}{\sigma}\right) - 1 = 0.8$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\tfrac{2}{\sigma}\right) = 0.9$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{2}{\sigma} \approx 1{,}28 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{2}{1{,}28} \approx 1{,}5625$$

$x_1 \backslash x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147

Aufgabe 62

Das Körpergewicht X (in kg) zufällig ausgewählter Personen aus einer Grundgesamtheit sei normalverteilt mit den Parametern μ und σ. Es gilt:

$$P(X \leq 80) = \tfrac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad P(X \leq 70) = \tfrac{1}{4}\ .$$

a) Geben Sie μ und σ an.

b) Berechnen Sie $P(X \geq 100)$.

c) Wieviel Prozent der Personen der Grundgesamtheit, die mindestens 100 kg wiegen, wiegen über 110 kg?

a) $P(X \leq 80) = 0.5 \Rightarrow \mu = 80$

$P(X \leq 70) = F(70) = \phi\left(\frac{70-80}{\sigma}\right) = \phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right) = 0.25$

$\Leftrightarrow\ 1 - \phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0.25 \ \Leftrightarrow\ \phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0.75$

$\Leftrightarrow\ \frac{10}{\sigma} \approx 0.67 \ \Leftrightarrow\ \sigma \approx \frac{10}{0.67} \approx 14,93$

b) $P(X \geq 100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - \phi\left(\frac{100-80}{14,93}\right) = 1 - \phi(1,34)$

$= 1 - 0.90988 = 0.09012$

c) $P(X \geq 110 \mid X \geq 100) = \dfrac{P(X \geq 110)}{P(X \geq 100)} = \dfrac{1 - \phi\left(\frac{110-80}{14,93}\right)}{0.09012} = \dfrac{1 - \phi(2,01)}{0.09012}$

$= \dfrac{1 - 0.97778}{0.09012} \approx 0.2466$

$x_1 \setminus x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04
0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507

Aufgabe 63

Die Zufallsvariable X beschreibt den täglichen Umsatz in einer Eisdiele. Es wird angenommen, dass $X \sim N(\mu, \sigma)$ gilt. Außerdem sei bekannt, dass der Umsatz an 30,854 % der Tage mindestens 1500 € und an 30,854 % der Tage weniger als 900 € beträgt.

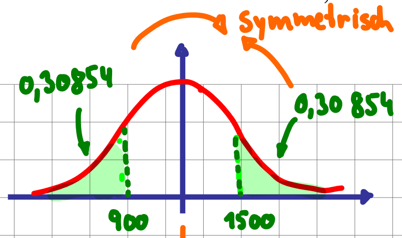
a) Bestimmen Sie μ und σ.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Umsatz an einem Tag mehr als 3000 € beträgt?

c) Wie hoch müsste der Umsatz mindestens gemäß der Verteilung an den 5 % besten Tagen sein?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Umsatz negativ ist? Was bedeutet das?

a)



$\Rightarrow \mu$: Mitte, also 1200

$P(X \leq 1500) = 1 - 0{,}30854 = \Phi\left(\frac{1500-1200}{\sigma}\right)$

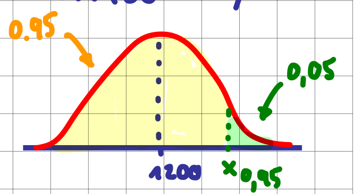
Tabelle

$\Rightarrow 0{,}69146 = \Phi\left(\frac{300}{\sigma}\right) \Leftrightarrow \frac{300}{\sigma} = 0.50$

$\Rightarrow \sigma = \frac{300}{0.50} = 600$

b) $P(X > 3000) = 1 - F(3000) = 1 - \Phi\left(\frac{3000-1200}{600}\right) = 1 - \Phi(3) \approx 1 - 0.99865 = 0{,}00135$

c) $P(X > x) = 0.05 \Rightarrow P(X \leq x) = F(x) = \Phi\left(\frac{x-1200}{600}\right) = 0.95$



$\Rightarrow \frac{x-1200}{600} \approx 1{,}64$

$\Rightarrow x \approx 1{,}64 \cdot 600 + 1200 = 2184$

d) $P(X < 0) = \Phi\left(-1200/600\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 0{,}02275$

Normalverteilungsannahme vermutlich für negative Werte nicht zutreffend

Aufgabe 64

Eine normalverteilte Zufallsvariable X soll untersucht werden. Zwei Tatsachen sind von X bekannt:

- $P(X > 20) = 20\%$
- $P(X < 1) = 1\%$

Bestimmen Sie damit:

a) $\text{Sta}[X] = \sigma$ sowie $\text{E}[X] = \mu$

b) $P(X = 20)$

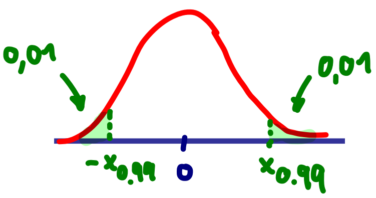
c) $P(X \leq 20)$

d) $P(X \geq 25)$

e) $P(X \geq 25 | X \geq 20)$

f) $P(X \geq 20 | X \geq 25)$

$\phi(x) = 1 - \phi(-x)$



a) $\left.\begin{array}{l} P(X>20) = 0.2 \\ P(X<1) = 0.01 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 1-F(20) = 0.2 \\ F(1) = 0.01 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 1-\phi\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0.2 \\ \phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right) = 0.01 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \phi\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0.8 \\ \phi\left(\frac{\mu-1}{\sigma}\right) = 0.99 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} 20-\mu = 0.84\cdot\sigma \ (1) \\ \mu-1 = 2{,}33\cdot\sigma \ (2) \end{array}\right\}$ $(1)+(2)$: $19 = (0.84+2{,}33)\sigma$

$\Rightarrow \sigma = 5{,}9937$

$\Rightarrow \mu = 2{,}33\cdot\sigma + 1 = 14{,}965$

b) $P(X=20) = 0$

c) $P(X \leq 20) = 1 - 0.2 = 0.8$

d) $P(X \geq 25) = 1 - \phi\left(\frac{25-14{,}965}{5{,}9937}\right) = 1 - \phi(1{,}67) = 1 - 0.95254 = 0{,}04746$

e) $P(X \geq 25 | X \geq 20) = 0{,}04746 / 0.20 = 0{,}2373$

f) $P(X \geq 20 | X \geq 25) = 1$

Aufgabe 65

Schokoladennikoläuse mit einem Sollgewicht von 200g sollen bzgl. ihres Gewichts kontrolliert werden. Es stellt sich heraus, dass

- das Gewicht X der Nikoläuse normalverteilt ist,
- die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus mindestens 200g wiegt bei 30 % liegt und
- ein Nikolaus mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % höchstens 210g wiegt.

Berechnen Sie bzw. geben Sie ohne Rechnung aber mit Begründung an:

a) Wie groß ist die Standardabweichung σ sowie der Erwartungswert μ von X?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen Nikolaus mit einem Gewicht von exakt 200g ($\pm$0g) auszuwählen?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus weniger als 190g wiegt?

d) Nikoläuse mit weniger als 195g werden aussortiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus aus diesem Ausschuss zwischen 190g und 195g wiegt?

a) $X \sim N(\mu; \sigma)$

$$\left.\begin{array}{l} P(X \geq 200) = 0.30 \\ P(X \leq 210) = 0.99 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 1 - F(200) = 0.30 \\ F(210) = 0.99 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} F(200) = 0.70 \\ F(210) = 0.99 \end{array}$$

$$\left\}\begin{array}{l} \Phi\left(\frac{200-\mu}{\sigma}\right) = 0.70 \\ \Phi\left(\frac{210-\mu}{\sigma}\right) = 0.99 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \frac{200-\mu}{\sigma} \approx 0.52 \\ \frac{210-\mu}{\sigma} \approx 2{,}33 \end{array}$$

$$\left\}\begin{array}{ll} 200 - \mu = 0.52 \cdot \sigma & (1) \\ 210 - \mu = 2.33 \cdot \sigma & (2) \end{array}\right.$$

$(2) - (1): \quad 10 = (2.33 - 0.52)\,\sigma$

$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{10}{1.81} \approx 5{,}525$

in (2): $\quad \mu = 210 - 2.33 \cdot 5.525 = 197{,}13$

b) $P(X = 200) = 0$

c) $P(X < 190) = F(190) = \Phi\left(\frac{190-197{,}13}{5{,}525}\right)$

$\approx \Phi(-1{,}29) = 1 - \Phi(1{,}29) \approx 1 - 0.90147$

$= 0{,}09853$

d) $P(190 \leq X \leq 195 \mid X \leq 195) = \frac{P(190 \leq X \leq 195)}{P(X \leq 195)}$

$= \frac{F(195) - F(190)}{F(195)} = 1 - \frac{F(190)}{F(195)} \overset{c)}{=} 1 - \frac{0.09853}{\Phi\left(\frac{195-197{,}13}{5{,}525}\right)}$

$= 1 - \frac{0.09853}{\underbrace{1 - \Phi(+0.39)}_{0.65173}} = 1 - 0.09853 : 0.34827 \approx 0.717$

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$x_1 \backslash x_2$	0	0.01	0.02	0.03
0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320
2	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010

Aufgabe 66

Die zufallsabhängige Nachfrage X nach einem Gut in einer Zeitperiode ist gemäß der folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktion verteilt:

$$P(x = n) = \frac{n}{40} \quad \text{für } n = 1, \ldots, 8 \quad \text{und} \quad P(x = 9) = \frac{1}{10}$$

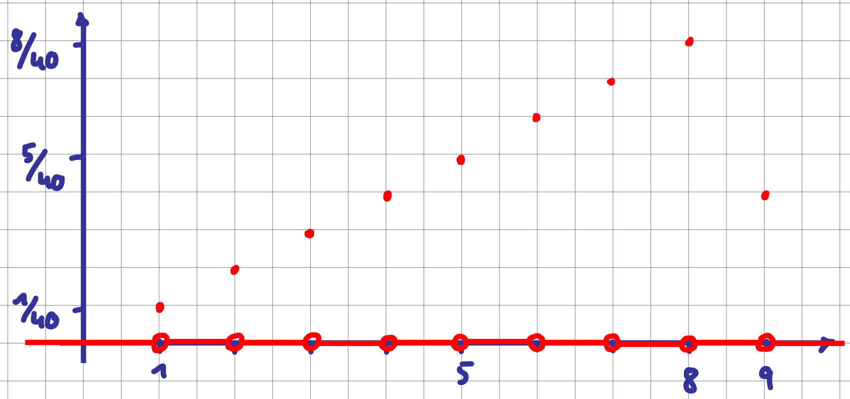
a) Skizzieren Sie den Verlauf der Wahrscheinlichkeitsfunktion.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 6 Stück des Gutes nachgefragt?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Nachfrage.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	$1/40$	$2/40$	$3/40$	...			..	$8/40$	$1/10$

a)



b) $P(X \geq 6) = P(X \in \{6,7,8,9\}) = 6/40 + 7/40 + 8/40 + 1/10 = 25/40 = 5/8 = 0.625 = 62{,}5\%$

c) $E[X] = 1 \cdot 1/40 + 2 \cdot 2/40 + \cdots + 8 \cdot 8/40 + 9 \cdot 1/10 = 6$

$\mathrm{Std}[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]} = \sqrt{E[X^2] - E^2[X]}$

$= \sqrt{1^2 \cdot 1/40 + 2^2 \cdot 2/40 + \cdots + 8^2 \cdot 8/40 + 9^2 \cdot 1/10 - 6^2} = \sqrt{4.5} \approx 2.12$

Aufgabe 67

Die Lebensdauer einer Maschine sei eine über dem Zeitintervall [0,65] gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie

a) den Erwartungswert der Lebensdauer

b) die Varianz der Lebensdauer

c) die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer zwischen 13 und 39 liegt.

a) $E[x] = \frac{65+0}{2} = 32.5$

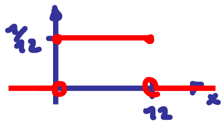
b) $Var[x] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{65^2}{12} = 352.08$

c) $P(13 < x < 39) = \frac{39-13}{65} = 0.4$

Aufgabe 68

Eine Unternehmung sieht sich auf dem Absatzmarkt zufällig schwankender Nachfrage gegenübergestellt. Die Höhe der Nachfrage X sei folgendermaßen verteilt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}, & \text{für } 0 \leq x \leq 12 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



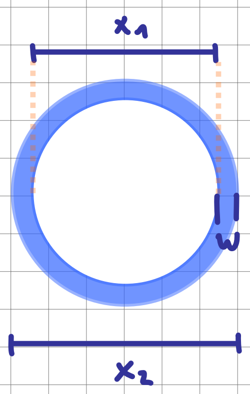
Die Produktion der Unternehmung wird unmittelbar abgesetzt, d.h. es existieren keine Absatzlager. Die Kostenfunktion der Unternehmung lautet $Y = 2X + 10$. Man gebe den Erwartungswert und die Varianz der Kosten an.

$$E[Y] = E[2X+10] = 2\,E[X] + 10 = 2 \cdot \frac{0+12}{2} + 10 = 22$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{Var}[2X+10] = 2^2\,\mathrm{Var}[X] = 4 \cdot \frac{(12-0)^2}{12} = 48$$

Aufgabe 69

Ein Röhrenwerk produziert Stahlröhren, deren Durchmesser produktionsbedingten Schwankungen unterliegen. Für den Innendurchmesser X_1 hat man $\mathrm{E}(X_1) = 800$ und $\mathrm{Var}(X_1) = 0{,}01$ und für den Außendurchmesser X_2 hat man $\mathrm{E}(X_2) = 810$ und $\mathrm{Var}(X_2) = 0{,}02$. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz für die Wandstärke der Röhren, wenn angenommen werden kann, dass Innen- und Außendurchmesser voneinander unabhängig schwanken.



Wandstärke $\hat{=}$ W

$$W = \tfrac{1}{2}(X_2 - X_1)$$

$$E[W] = E\left[\tfrac{1}{2}(X_2 - X_1)\right] = \tfrac{1}{2}\left(E[X_2] - E[X_1]\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}(810 - 800) = 5$$

$$\mathrm{Var}[W] = \mathrm{Var}\left[\tfrac{1}{2}(X_2 - X_1)\right] = \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{Var}[X_2] + \mathrm{Var}[-X_1]\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{Var}[X_2] + (-1)^2\,\mathrm{Var}[X_1]\right) = \tfrac{1}{4}(0.02 + 0.01)$$
$$= 0.0075$$

Aufgabe 70

Der Besitzer eines Zeitschriftenladens hat für einen längeren Zeitraum in der Vergangenheit folgende tägliche Nachfrageverteilung nach einer bestimmten Tageszeitung beobachtet:

pro Tag nachgefragte Exemplare	0	1	2	3	4	> 4
Nachfragewahrscheinlichkeit	0,20	0,30	0,20	0,20	0,10	0

Er rechnet für die Zukunft mit keiner Änderung der Nachfrageverteilung. Der Einkaufspreis eines Exemplars beträgt 0,50 €, der Verkaufspreis 1,50 €. Unverkaufte Exemplare können nicht zurückgegeben werden. Für einen längeren Zeitraum muss er eine feste Zahl von Zeitungen pro Tag bestellen. Wie viele Zeitungen pro Tag sollte er bestellen, um seinen erwarteten Gewinn zu maximieren?

$k \;\hat{=}\;$ Anzahl Zeitschriften, die pro Tag bestellt werden

$G \;\hat{=}\;$ Gewinn pro Tag

$k = 0: \quad G = 0$

$k = 1: \quad G = \begin{cases} -0{,}5€ & \text{mit W. } 0.2 \\ 1{,}0€ & \text{mit W. } 0.8 \end{cases}$

$\Rightarrow E[G] = -0.5€ \cdot 0.2 + 1{,}0€ \cdot 0.8 = 0.7€$

$k = 2: \quad G = \begin{cases} -1€ & \text{mit W. } 0.2 \\ 0{,}5€ & \text{mit W. } 0.3 \\ 2{,}0€ & \text{mit W. } 0.5 \end{cases}$

$E[G] = -1€ \cdot 0.2 + 0{,}5€ \cdot 0.3 + 2{,}0€ \cdot 0.5 = 0.95€$ optimal

$k = 3: \quad E[G] = -1{,}5€ \cdot 0.2 + 0€ \cdot 0.3 + 1{,}5€ \cdot 0{,}2 + 3{,}0€ \cdot 0{,}3 = 0.90€$

$k = 4: \quad E[G] = -2€ \cdot 0.2 + \cdots + 4€ \cdot 0.1 = 0.55€$

Aufgabe 71

Die Versicherungsgesellschaft *Ollionz* verlangt als Prämie das 1,3-fache des Erwartungswertes ihrer Zahlungen an den Versicherungsnehmer. Es werden einjährige Lebensversicherungen des folgenden Typs betrachtet:

Der Betrag von 100.000 € ist zu zahlen, wenn der Versicherungsnehmer innerhalb eines Jahres nach Abschluss des Vertrages stirbt. Im Erlebensfall ist keine Zahlung zu leisten.

Die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit betrage 0,006.

a) Wie hoch ist die Prämie für einen derartigen Vertrag?

b) Betrachten Sie den aus einem solchen Vertrag resultierenden Gewinn G. Wie hoch sind der Erwartungswert $\mathrm{E}[G]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[G]$ des Gewinns?

c) Berechnen Sie die Standardabweichung σ sowie das Intervall $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ (den Drei-Sigma-Bereich). Interpretieren Sie dieses Intervall.

d) Die Versicherungsgesellschaft schließt 50.000 derartige Verträge ab. Bestimmen Sie den Drei-Sigma-Bereich des durchschnittlichen Gewinns pro Vertrag

$$\overline{G} = \frac{1}{50.000}\left[G_1 + G_2 + \cdots + G_{50.000}\right],$$

der aus den Verträgen resultiert und interpretieren Sie diese Zahl.

Hinweis: Setzen Sie die Unabhängigkeit der Einzelgewinne G_i voraus.

a) $P = 1{,}3 \cdot E[\text{Zahlung}] = 1{,}3 \cdot [100000 \cdot 0.006 + 0 \cdot 0.994]$

$= 780\,€$

b) Gewinn $G = \begin{cases} 780 & \text{mit W. } 0.994 \\ 780 - 100000 & \text{mit W. } 0.006 \end{cases}$

$E[G] = 780 \cdot 0.994 + (780 - 100') \cdot 0.006$
$= 180\,€$

Auszahlung

$\mathrm{Var}[G] = \mathrm{Var}[780 - Z] = \mathrm{Var}[Z] = E[Z^2] - E^2[Z]$

$\mathrm{Var}[a + bX] = b^2 \mathrm{Var}[X]$

$= 100000^2 \cdot 0.006 \; (+\; 0^2 \cdot 0.994) - 600^2$

$= 59.640.000$

c) $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[G]} \approx 7722{,}69\,€$

3-Sigma-Bereich:

$[180 \pm 3 \cdot 7722{,}69] = [-22989{,}08 ; 23349{,}07]$

→ sehr riskant, Verluste wahrscheinlich

d) $\mathrm{Var}\left[\frac{1}{50000} \cdot (G_1 + \dots + G_{50000})\right]$

$= \left(\frac{1}{50000}\right)^2 \left[\underbrace{\mathrm{Var}[G_1]}_{=59640000} + \dots + \underbrace{\mathrm{Var}[G_{50000}]}_{=\dots}\right]$

$= \dfrac{50000 \cdot 59640000}{50000^2} = \dfrac{59640000}{50000} = 1192{,}80$

$\Rightarrow \sigma = 34{,}54$

$\Rightarrow$ 3-Sigma: $[180 \pm 3 \cdot 34{,}54] = [76{,}38 ; 283{,}62]$

Aufgabe 72

Für eine Zufallsvariable X sei die Wahrscheinlichkeit $P(|X-10| \geq 2,5)$ mit p^* abgekürzt.

Berechnen Sie p^* für die Fälle, daß X

$x - 10 \geq 2,5$ oder $x - 10 \leq -2,5$ $\}$ $x \geq 12,5$ oder $x \leq 7,5$

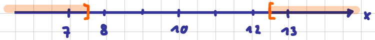
a) im Intervall $[5;15]$ gleichverteilt ist

b) einer $N(\mu;\sigma)$–Verteilung mit $\mu = 10$ und $\sigma^2 = 4$ genügt

c) die Werte 3, 6, 9, 12, 15 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 annimmt

d) Poisson–verteilt ist mit dem Parameter $\lambda = 10$.

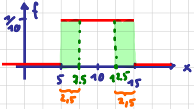
Empfehlung: Veranschaulichen Sie den Bereich $\{x \in \mathbb{R} : |x-10| \geq 2,5\}$ auf einer Zahlengeraden.



a) $p^* = P(5 \leq x \leq 7,5 \ \cup \ 12,5 \leq x \leq 15)$

$= \frac{2,5}{10} + \frac{2,5}{10}$

$= 0.50$



b) $p^* = P(x \leq 7,5 \ \cup \ x \geq 12,5)$

$= F(7,5) + (1 - F(12,5))$

$= \phi\left(\frac{7,5-10}{2}\right) + \left(1 - \phi\left(\frac{12.5-10}{2}\right)\right)$

$= \phi(-1,25) + (1 - \phi(1,25))$

$= 1 - \phi(1,25) + 1 - \phi(1,25)) = 2(1 - \phi(1,25))$

$= 2(1 - 0.89435) = 0.21112$

c) $p^* = P(x \in \{3, 6, 15\}) = 0.2 + 0.2 + 0.2 = 0.60$

d) $p^* = P(x \in \{0, 1, \ldots, 7\} \ \cup \ x \in \{13, 14, \ldots\})$

$= F(7) + (1 - F(12)) = 0.2202 + (1 - 0.7916)$

Tabelle $\lambda = 10$

$= 0.4286$

Aufgabe 73

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der möglichen Tore der deutschen Nationalmannschaft bei Länderspielen. Es kommen nur die folgenden Ergebnisse mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten vor:

x	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X = x)$	0,4	0,5	0,07	0,025	0,005

Wie groß ist der

a) Erwartungswert von X,

b) die Varianz und die Standardabweichung von X und

c) $P\left(|X - \mathrm{E}[X]| \leq \mathrm{Sta}[X]\right)$?

a) $E[X] = \sum x_i \cdot f(x_i) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.07 + 3 \cdot 0.025 + 4 \cdot 0.005$
$= 0.735$

b) $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X] = 0^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.5 + \cdots + 4^2 \cdot 0.005 - 0.735^2$
$= 0.544775$

$\mathrm{Sta}[X] \approx 0.7381$

c) $P(|X - 0.735| \leq 0.7381) = P(X \in \{0, 1\}) = 0.4 + 0.5 = 0.9$

Aufgabe 74

Die Zufallsvariablen X und Y haben die nebenstehende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion. Man berechne

x \ y	0	1	2	
1	0,1	0,2	0,3	0.6
2	0,2	0	0,2	0.4
	0.3	0.2	0.5	

a) die Randverteilungen, Erwartungswerte und Varianzen für X und Y,
b) die Kovarianz und Korrelation zwischen X und Y.

a) $E[X] = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.4 = 1.4$

$E[Y] = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.5 = 1.2$

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X] = 1^2 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.4 - 1.4^2$$
$$= 0.24$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \cdots = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.5 - 1.2^2$$
$$= 0.76$$

b) $\mathrm{Cov}[X,Y] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$

$$= 1 \cdot 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 1 \cdot 0.2 + 1 \cdot 2 \cdot 0.3$$
$$+ 2 \cdot 0 \cdot 0.2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 0.2$$
$$- 1.4 \cdot 1.2$$

$$= -0.08$$

$$\rho[X,Y] = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X] \cdot \mathrm{Var}[Y]}} = \frac{-0.08}{\sqrt{0.24 \cdot 0.76}} \approx -0.187$$

Aufgabe 75

Man betrachte die Klausurergebnisse in Mathematik (Zufallsvariable X) und Statistik (Zufallsvariable Y). Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion der zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) sei durch die folgende Tabelle gegeben:

$x \downarrow$ $y \rightarrow$	1	2	3	4	5	
1	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0.1
2	0,04	0,10	0,03	0,02	0,01	0.2
3	0,02	0,08	0,20	0,08	0,02	0.4
4	0,01	0,02	0,04	0,10	0,03	0.2
5	0,00	0,01	0,03	0,03	0,03	0.1
	0.11	0.24	0.32	0.24	0.09	

$P(Y \mid X=x)$		y				
	x	1	2	3	4	5
Beate	1	0.4	0.3	0.2	0.1	0
Peter	2	0.2	0.5	0.15	0.1	0.05
Helga	3	0.05	0.2	0.5	0.2	0.05
Bernd	4	0.05	0.1	0.2	0.5	0.15

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten
   (i) in Mathematik zu bestehen und in Statistik nicht zu bestehen
   (ii) in beiden Klausuren zu bestehen
   (iii) in beiden Klausuren nicht zu bestehen
   (iv) in beiden Klausuren besser als 3 zu erhalten
   (v) in beiden Klausuren zwischen 2 und 4 zu erreichen.

b) Geben Sie die Randwahrscheinlichkeits- und Randverteilungsfunktionen an.

c) Sind die beiden Zufallsvariablen unabhängig?

d) In Mathematik erzielen Beate, Peter, Helga und Bernd die Noten 1, 2, 3 und 4. Wie sehen für diese vier Kandidaten die Notenchancen bei der Statistikklausur aus?

(i) 0.06

$x \downarrow$ $y \rightarrow$	1	2	3	4	5
1	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
2	0,04	0,10	0,03	0,02	0,01
3	0,02	0,08	0,20	0,08	0,02
4	0,01	0,02	0,04	0,10	0,03
5	0,00	0,01	0,03	0,03	0,03

(ii) 0.84

$x \downarrow$ $y \rightarrow$	1	2	3	4	5
1	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
2	0,04	0,10	0,03	0,02	0,01
3	0,02	0,08	0,20	0,08	0,02
4	0,01	0,02	0,04	0,10	0,03
5	0,00	0,01	0,03	0,03	0,03

(iii) 0.03

$x \downarrow$ $y \rightarrow$	1	2	3	4	5
1	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
2	0,04	0,10	0,03	0,02	0,01
3	0,02	0,08	0,20	0,08	0,02
4	0,01	0,02	0,04	0,10	0,03
5	0,00	0,01	0,03	0,03	0,03

(iv) 0.21

$x \downarrow$ $y \rightarrow$	1	2	3	4	5
1	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
2	0,04	0,10	0,03	0,02	0,01
3	0,02	0,08	0,20	0,08	0,02
4	0,01	0,02	0,04	0,10	0,03
5	0,00	0,01	0,03	0,03	0,03

(v) 0.67

$x \downarrow$ $y \rightarrow$	1	2	3	4	5
1	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
2	0,04	0,10	0,03	0,02	0,01
3	0,02	0,08	0,20	0,08	0,02
4	0,01	0,02	0,04	0,10	0,03
5	0,00	0,01	0,03	0,03	0,03

b)

z	1	2	3	4	5
$P(X=z)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1
$P(X \le z)$	0.1	0.3	0.7	0.9	1.0
$P(Y=z)$	0.11	0.24	0.32	0.24	0.09
$P(Y \le z)$	0.11	0.35	0.67	0.91	1.00

$x \downarrow$ $y \rightarrow$	1	2	3	4	5	
1	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0.1
2	0,04	0,10	0,03	0,02	0,01	0.2
3	0,02	0,08	0,20	0,08	0,02	0.4
4	0,01	0,02	0,04	0,10	0,03	0.2
5	0,00	0,01	0,03	0,03	0,03	0.1
	0.11	0.24	0.32	0.24	0.09	

c) $\left.\begin{array}{l} P(X=1 \wedge Y=1) = 0.04 \\ P(X=1) \cdot P(Y=1) = 0.1 \cdot 0.11 = 0.011 \end{array}\right\}$ nicht unabhängig