Aufgabe 101

Gegeben ist eine stetige Zufallsvariable X mit der zugehörigen Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{1}{10}x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 10 \\ a\left(2 - \frac{1}{10}x\right) & \text{für} \quad 10 < x \leq 20 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Welchen Wert muss a haben, so dass f eine Dichtefunktion ist.

b) Berechnen Sie $P(X \leq 12)$.

c) Bestimmen Sie zu X die Verteilungsfunktion $F(x)$.

d) Benutzen Sie F, um $P(3 \leq X \leq 25)$ zu ermitteln.

Lösungshinweis:

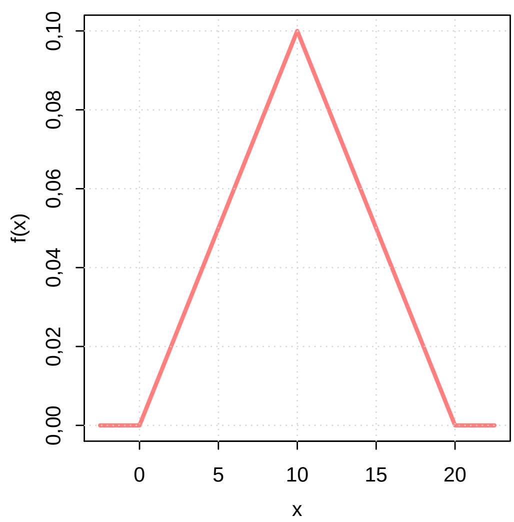
a) Graph von f ist ein Dreieck. Damit f Dichte ist, muss Fläche unter f gleich 1 sein. Also: $20 \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 1 \iff a = \frac{1}{10}$. Also ist

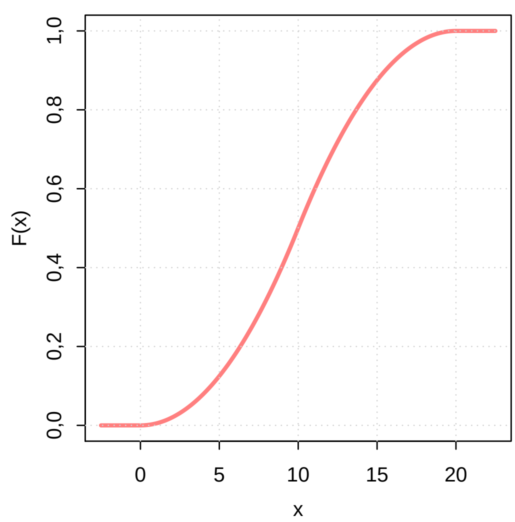
$$f(x) = \begin{cases} 0.01x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 0.2 - 0.01x & \text{für} \quad 10 < x \leq 20 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) $$P(X \leq 12) = \int_{-\infty}^{12} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{10} 0.01x\mathrm{d}x + \int_{10}^{12} (0.2 - 0.01x)\mathrm{d}x$$
$$= 0,01 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^2 + \left[0.2x - 0.005 \cdot x^2\right]_{10}^{12} = 0.5 + (2.4 - 0.72) - (2 - 0.5) = 0.68$$

c) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ 0.005x^2 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 10 \\ -1 + 0.2x - 0.005x^2 & \text{für} \quad 10 < x \leq 20 \\ 1 & \text{für} \quad x > 20 \end{cases}$$

d) $P(3 \leq X \leq 25) = F(25) - F(3) = 1 - 0.005 \cdot 3^2 = 0.955$





Aufgabe 102

Gegeben ist zur Zufallsvariablen X die Dichtefunktion f gemäß

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \cdot \ln 2} & \text{für} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Graph von f.

b) Bestimmen Sie zu X die Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$ und skizzieren Sie auch deren Graph.

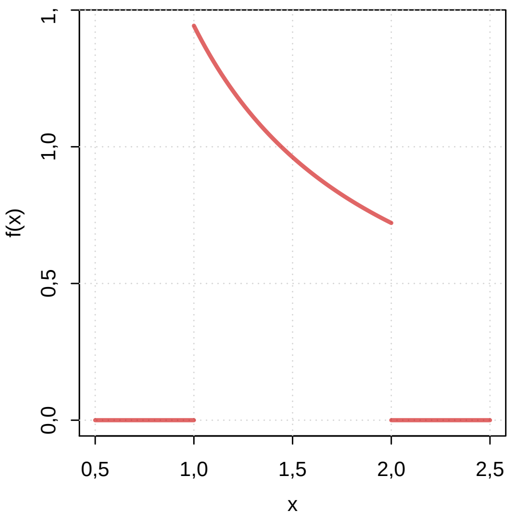
c) Berechnen Sie $P(1.2 \leq X \leq 1.8)$.

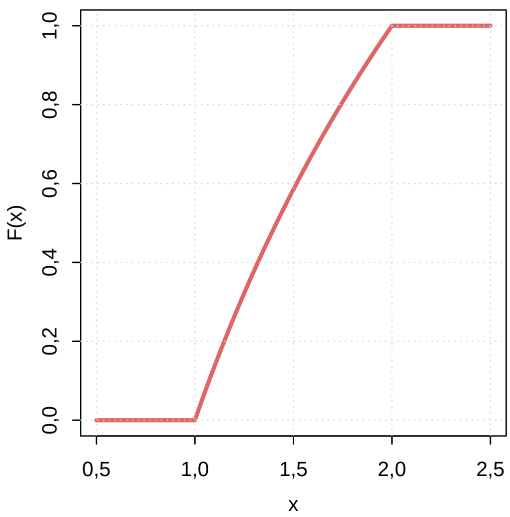
d) Berechnen Sie $\mathrm{E}[X]$ sowie

e) $\mathrm{Var}[X]$.

Lösungshinweis:

a) Graph von f:





b) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)} & \text{für} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

(Skizze siehe oben)

c) $P(1.2 \leq X \leq 1.8) = F(1.8) - F(1.2) = \dfrac{\ln(1.8) - \ln(1.2)}{\ln(2)} = \dfrac{\ln(3/2)}{\ln(2)} \approx 0{,}58496.$

d) $\mathrm{E}[X] = \dfrac{1}{\ln 2} \displaystyle\int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}4427$

e) $$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X] &= \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x - \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] - \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2 = \frac{3}{2\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2} \approx 0{,}08267. \end{aligned}$$