Statistik

HA 8.6.2016: 81-85, 87, 88, 90-92

für Betriebswirtschaft, Internationales Management, Wirtschaftsinformatik und Informatik

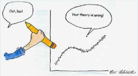
Sommersemester 2016

Veranstaltungen zur Statistik für BW/IM Sommersemester 2016				
Was?	Wer?	Wann?	Wo?	ab wann?
Vorlesung Statistik	Etschberger	Mi, 14.00-17.00	B2.14	16.03.2016
Vorlesung Statistik PLUS	Etschberger/Jansen	- Blocktermin -	?	?
Übung Statistik	Etschberger	Mi, 17.00-18.30	A1.10	30.03.2016
Übung Statistik	Jansen	Di, 11.30-13.00	W1.06	22.03.2016
Übung Statistik	Jansen	Di, 14.00-15.30	W2.14	22.03.2016
Übung Statistik	Jansen	Mi, 11.30-13.00	W2.11	30.03.2016
Übung Statistik	Jansen	Do, 14.00-15.30	W2.14	31.03.2016
Übung Statistik	Schneller	Do, 14.00-15.30	W3.03	31.03.2016
Übung Statistik	Schneller	Do, 15.30-17.00	W3.03	31.03.2016
Übung Statistik	Wins	Di, 14.00-15.30	J3.19	22.03.2016
Übung Statistik	Wins	Di, 15.30-17.00	J3.19	22.03.2016
Offener Statistikraum	Jansen/Tutoren	Mo, 14.00-17.45	B3.05	04.04.2016
Veranstaltungen für Teilnehmer der WiMa-Klausur im Juli 2016				
Was?	Wer?	Wann?	Wo?	ab wann?
Tutorium Mathematik	Burkart	Do 13.30-15.00	W1.06	07.04.2016
Tutorium Mathematik	Burkart	Do 15.00-16.15	W1.06	07.04.2016
Offener Matheraum	Etschberger/Tutoren	Fr 11.30-15.30	B3.05	29.04.2016

Datum	Statistik für IM/BW	Nr.
Mittwoch, 16. März 2016	Einführung, R Installation, Rstudio Einführung, Skalen	1
Mittwoch, 23. März 2016	univ. deskr. Stat., Quantile, Plots	2
Mittwoch, 30. März 2016	Streuung, Konzentrationsmaße	3
Mittwoch, 6. April 2016	Kontingenztabellen, Mosaikplots, Korrelation	4
Mittwoch, 13. April 2016	Preisindizes, lineare Regression	5
Mittwoch, 20. April 2016	Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit	6
Mittwoch, 27. April 2016	Wahrscheinlichkeit	7
Mittwoch, 4. Mai 2016	Pyramid	
Mittwoch, 11. Mai 2016	diskrete Zufallsvariablen	8
Mittwoch, 18. Mai 2016	Stetige ZV, Gleichverteilung	9
Mittwoch, 25. Mai 2016	Normalverteilung, Verteilungsparameter	10
Mittwoch, 1. Juni 2016	Schätzfunktionen und Punktschätzer, Konfidenzintervalle	11
Mittwoch, 8. Juni 2016	Konfidenzintervalle, Tests	12
Mittwoch, 15. Juni 2016	Go-Out-Tag	
Mittwoch, 22. Juni 2016	Tests, WH, (Fragen zur Probekl. In den Übungsgruppen)	13
Mittwoch, 29. Juni 2016	AW Prüfungswoche	

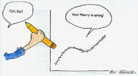
Prof. Dr. Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg

Wichtige Stichprobenfunktionen



- Gegeben: Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$, Beliebige Verteilung, mit $E(X_i) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$

Stichprobenfunktion V	**Bezeichnung**	$\mathbf{E}(V)$	$\mathbf{Var}(V)$
$\sum_{i=1}^{n} X_i$	Merkmalssumme	$n\mu$	$n\sigma^2$
$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	Stichprobenmittel	μ	$\frac{\sigma^2}{n}$
$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$	Gauß-Statistik	0	1
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	mittlere quadratische Abweichung bezüglich μ	σ^2	
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$	mittlere quadratische Abweichung	$\frac{n-1}{n}\sigma^2$	
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$	Stichprobenvarianz	σ^2	
$S = \sqrt{S^2}$	Stichproben-Standardabweichung		
$\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$	t-Statistik		

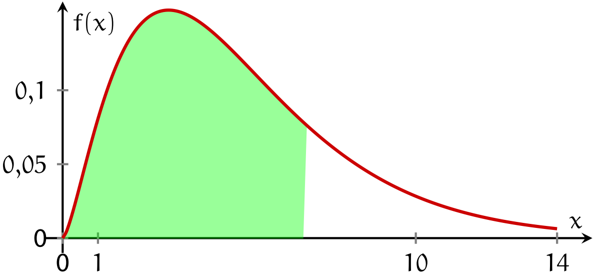


Chi-Quadrat-Verteilung

- Sind $X_1, \ldots, X_n$ iid $N(0;1)$-verteilte Zufallsvariablen, so wird die Verteilung von

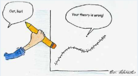
$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

als Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden bezeichnet.



- Kurzschreibweise: $Z \sim \chi^2(n)$
- **Beispiel:** $\chi^2(30)$: $x_{0,975} = 46{,}98$

Wichtige Fraktilswerte

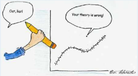


Wichtige $N(0;1)$-Fraktilswerte:

α	x_α
0,9	1,281552
0,95	1,644854
0,975	1,959964
0,99	2,326348
0,995	2,575829

(I.d.R. genügen drei Nachkommastellen.)

Konfidenzintervall für μ bei beliebiger Verteilung



- Voraussetzung: $n > 30$, bzw. falls G dichotom: $5 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n - 5$

  2 Ausprägungen: 0, 1

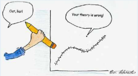
- Vorgehensweise:
  1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1 - \alpha$
  2. Bestimmung des $(1 - \frac{\alpha}{2})$-Fraktils c der Standardnormalverteilung $N(0;1)$
  3. Berechnung des Stichprobenmittels $\bar{x}$ sowe (i) eines Schätzwertes $\hat{\sigma}$ für die Standardabweichung σ der GG mittels

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} \sigma, & \text{falls } \sigma \text{ bekannt} \\ \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}, & \text{falls GG dichotom} \\ s, & \text{sonst} \end{cases}$$

  4. Berechnung von $\frac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}}$
  5. Ergebnis der Intervallschätzung:

$$\left[\bar{x} - \frac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + \frac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}} \right]$$

- Zu Schritt 3: Manchmal kann anderer Schätzwert $\hat{\sigma}$ sinnvoller sein.



Beispiel:

Poisson-Verteilung mit $\lambda \; (= \mu = \sigma^2)$ unbekannt.

$(x_1, \ldots, x_{40}) = (3; 8; \ldots; 6)$

Gesucht: KI für λ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0{,}9$

1. $1 - \alpha = 0{,}9$
2. $N(0;1): \; c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-\frac{0,1}{2}} = x_{0,95} = 1{,}645$
3. $\bar{x} = \dfrac{1}{40}(3 + 8 + \cdots + 6) = 6{,}5$

   $\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{x}} = \sqrt{6{,}5} = 2{,}55$ (da $\sigma^2 = \lambda$)
4. $\dfrac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}} = \dfrac{2{,}55 \cdot 1{,}645}{\sqrt{40}} = 0{,}66$
5. $\text{KI} = [6{,}5 - 0{,}66; 6{,}5 + 0{,}66] = [5{,}84; 7{,}16]$

`anderes Beispiel in VL`

Beispiel: Schätze Konfidenzintervall des Männeranteils der Grundgesamtheit mit Normalverteilungsnäherung und Konfidenzniveau 70%

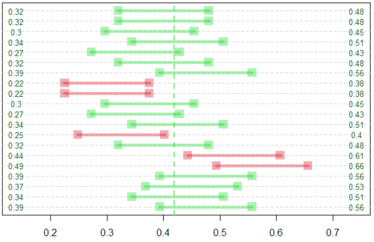
	0	1
[1,]	21	19
[2,]	23	17
[3,]	22	18
[4,]	21	19
[5,]	17	23
[6,]	19	21
[7,]	24	16
[8,]	27	13
[9,]	23	17
[10,]	26	14
[11,]	25	15
[12,]	28	12
[13,]	28	12
[14,]	21	19
[15,]	24	16
[16,]	26	14
[17,]	23	17
[18,]	25	15
[19,]	24	16
[20,]	24	16

1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1-\alpha$
2. Bestimmung des $(1-\frac{\alpha}{2})$-Fraktils c der Standardnormalverteilung $N(0;1)$
3. Berechnung des Stichprobenmittels $\bar{x}$ sowe eines Schätzwertes $\hat{\sigma}$ für die Standardabweichung σ der GG mittels

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} \sigma, & \text{falls } \sigma \text{ bekannt} \\ \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}, & \text{falls GG dichotom} \\ s, & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Berechnung von $\frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}$
5. Ergebnis der Intervallschätzung:

$$\left[\bar{x} - \frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}\right]$$



Anteil Grundgesamtheit = 0.42 ;
Anzahl falsch: 5 ; Fehlerquote = 0.25

$n = 40$

Frau → Mann

0	1
21	19

1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1-\alpha$
2. Bestimmung des $(1-\frac{\alpha}{2})$-Fraktils c der Standardnormalverteilung $N(0;1)$
3. Berechnung des Stichprobenmittels $\bar{x}$ sowe eines Schätzwertes $\hat{\sigma}$ für die Standardabweichung σ der GG mittels

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} \sigma, & \text{falls } \sigma \text{ bekannt} \\ \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}, & \text{falls GG dichotom} \\ s, & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Berechnung von $\frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}$
5. Ergebnis der Intervallschätzung:

$$\left[\bar{x} - \frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}\right]$$

① $1-\alpha = 0.80$

② $x_{1-\alpha/2} = x_{0.90} \approx 1.28 = c$

③ $\bar{x} = \frac{19}{40}$

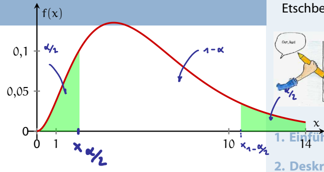
$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{19}{40}\left(1-\frac{19}{40}\right)}$

④ $\frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{40}} \approx 0.101$

⑤ $[\bar{x} \pm 0.101] = [\quad ; \quad]$

[1,]	0.475	0.4993746	0.3931652	0.5568348
[2,]	0.425	0.4943430	0.3439898	0.5060102
[3,]	0.450	0.4974937	0.3684735	0.5315265
[4,]	0.475	0.4993746	0.3931652	0.5568348
[5,]	0.575	0.4943430	0.4939898	0.6560102
[6,]	0.525	0.4993746	0.4431652	0.6068348
[7,]	0.400	0.4898979	0.3197182	0.4802818
[8,]	0.325	0.4683748	0.2482453	0.4017547
[9,]	0.425	0.4943430	0.3439898	0.5060102
[10,]	0.350	0.4769696	0.2718368	0.4281632
[11,]	0.375	0.4841229	0.2956646	0.4543354
[12,]	0.300	0.4582576	0.2249033	0.3750967
[13,]	0.300	0.4582576	0.2249033	0.3750967
[14,]	0.475	0.4993746	0.3931652	0.5568348
[15,]	0.400	0.4898979	0.3197182	0.4802818
[16,]	0.350	0.4769696	0.2718368	0.4281632
[17,]	0.425	0.4943430	0.3439898	0.5060102
[18,]	0.375	0.4841229	0.2956646	0.4543354
[19,]	0.400	0.4898979	0.3197182	0.4802818
[20,]	0.400	0.4898979	0.3197182	0.4802818

Konfidenzintervall für σ^2 bei Normalverteilung



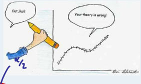
Vorgehensweise

1. Festlegen eines Konfidenzniveaus $1-\alpha$
2. Bestimmung der $\frac{\alpha}{2}$- bzw. $(1-\frac{\alpha}{2})$-Fraktile (c_1 bzw. c_2) der $\chi^2(n-1)$-Verteilung
3. Aus der Stichprobe: Berechnung der Größe

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

4. Berechnung des Konfidenzintervalls

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{c_2}; \frac{(n-1)s^2}{c_1}\right]$$



KI für σ^2 bei Normalverteilung

Beispiel:

$G \sim N(\mu; \sigma)$;

$(x_1, \ldots, x_5) = (1, 1.5, 2.5, 3, 2)$

Gesucht: KI für σ^2 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0{,}99$

$\downarrow \alpha \setminus n \rightarrow$	1	2	3	4
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71
0.1	0.02	0.21	0.58	1.06
0.2	0.06	0.45	1.01	1.65
0.25	0.10	0.58	1.21	1.92
0.4	0.28	1.02	1.87	2.75
0.5	0.45	1.39	2.37	3.36
0.6	0.71	1.83	2.95	4.04
0.75	1.32	2.77	4.11	5.39
0.8	1.64	3.22	4.64	5.99
0.9	2.71	4.61	6.25	7.78
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86

1. $1 - \alpha = 0{,}99$ $\alpha = 0.01$
2. $\chi^2(5-1): \; c_1 = x_{\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}005} = 0{,}21$
   $c_2 = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}995} = 14{,}86$
3. $\bar{x} = \frac{1}{5}(1 + 1{,}5 + 2{,}5 + 3 + 2) = 2$
   $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 5 \cdot \bar{x}^2 = 1^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2 + 3^2 + 2^2 - 5 \cdot 2^2 = 2{,}5$

   TR: Shift → STAT → Var...

   $\left.\begin{array}{l} \sigma_{x_{n-1}}^2 \cdot (n-1) \\ s_x^2 \cdot (n-1) \end{array}\right\} = 2{,}5$
4. $KI = \left[\frac{2{,}5}{14{,}86}; \frac{2{,}5}{0{,}21}\right] = [0{,}17; 11{,}9]$

(KI für σ : $[0.4123106; 3.4496377]$
($\sqrt{\sigma^2}$)

(Extrem groß, da n klein.)

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
[1,]	162	173	164	160	165
[2,]	160	163	168	163	165
[3,]	160	169	170	165	158
[4,]	169	165	160	160	168
[5,]	162	172	168	172	162
[6,]	160	168	165	170	156
[7,]	164	158	158	158	170
[8,]	164	165	164	170	165
[9,]	162	180	172	164	164
[10,]	165	167	163	170	173
[11,]	172	180	166	168	165
[12,]	165	170	162	175	168
[13,]	160	160	158	160	175
[14,]	155	183	158	166	165
[15,]	169	155	168	175	167
[16,]	168	175	164	174	170
[17,]	170	165	160	165	165
[18,]	165	160	165	165	166
[19,]	170	160	165	164	165
[20,]	165	170	170	159	162

gesucht: KI für sigma (!), KI-Niveau 0,8

1. Festlegen eines Konfidenzniveaus $1-\alpha$
2. Bestimmung der $\frac{\alpha}{2}$- bzw. $(1-\frac{\alpha}{2})$-Fraktile (c_1 bzw. c_2) der $\chi^2(n-1)$-Verteilung
3. Aus der Stichprobe: Berechnung der Größe

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

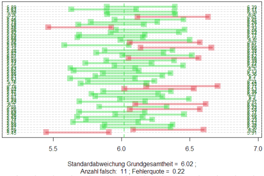
4. Berechnung des Konfidenzintervalls

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{c_2}; \frac{(n-1)s^2}{c_1}\right]$$

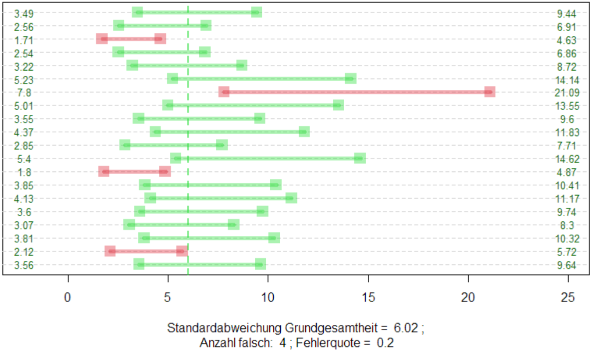
5. falls σ verlangt: $\sqrt{\sigma^2}$

↓α \ n→	1	2	3	4	5	6
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64
0.1	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20
0.2	0.06	0.45	1.01	1.65	2.34	3.07
0.25	0.10	0.58	1.21	1.92	2.67	3.45
0.4	0.28	1.02	1.87	2.75	3.66	4.57
0.5	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35
0.6	0.71	1.83	2.95	4.04	5.13	6.21
0.75	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84
0.8	1.64	3.22	4.64	5.99	7.29	8.56
0.9	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55

n = 500 (50 Stichproben)



	n.minus.1.mal.sQuadrat	KI:u	KI:o
[1,]	98.8	3.563726	9.637948
[2,]	34.8	2.115025	5.719996
[3,]	113.2	3.814600	10.316427
[4,]	73.2	3.067477	8.295864
[5,]	100.8	3.599615	9.735009
[6,]	132.8	4.131663	11.173909
[7,]	115.2	3.848151	10.407162
[8,]	25.2	1.799808	4.867505
[9,]	227.2	5.404182	14.615385
[10,]	63.2	2.850259	7.708407
[11,]	148.8	4.373481	11.827898
[12,]	98.0	3.549269	9.598848
[13,]	195.2	5.009170	13.547090
[14,]	473.2	7.799166	21.092520
[15,]	212.8	5.230120	14.144640
[16,]	80.8	3.222786	8.715891
[17,]	50.0	2.535192	6.856320
[18,]	22.8	1.711959	4.629920
[19,]	50.8	2.555393	6.910953
[20,]	94.8	3.490840	9.440832

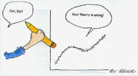


Signifikanztests

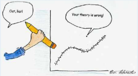
- Vorliegen einer Hypothese über die Verteilung(en) der Grundgesamtheit(en).
- Beispiele:
  - „Der Würfel ist fair."
  - „Die Brenndauern zweier unterschiedlicher Glühbirnensorten sind gleich."
- Hypothese soll anhand einer Stichprobe überprüft werden.
- Prinzip:
  - Hypothese verwerfen, wenn „signifikanter" Widerspruch zur Stichprobe.
  - Ansonsten: Hypothese nicht verwerfen.
- Eine verworfene Hypothese gilt als statistisch widerlegt.
- Nicht-Verwerfung ist dagegen ein „Freispruch aus Mangel an Beweisen".

Zu Beachten:

Nicht-Verwerfung ist **kein** „statistischer Beweis", dass Hypothese wahr ist!
(„Trick": Hypothese falsch $\iff$ Gegenhypothese wahr!)



Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit



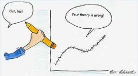
- Zunächst:
  - $G \sim N(\mu; \sigma)$ mit σ bekannt
  - Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$
  - (Null-)Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Beispiel:**
  $X_1, \ldots, X_{25}$ mit X_i = Füllmenge der i-ten Flasche $\sim N(\mu; 1{,}5)$
  Nullhypothese $H_0 : \mu = 500$, d.h. $\mu_0 = 500$
- Je nach Interessenlage sind unterschiedliche **Gegenhypothesen** möglich:

  a) $H_1 : \mu \neq \mu_0$
  b) $H_1 : \mu < \mu_0$
  c) $H_1 : \mu > \mu_0$

- Entscheidung:

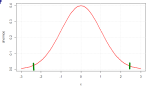
	$H_0 : \mu = \mu_0$	wird abgelehnt gegenüber
a)	$H_1 : \mu \neq \mu_0$,	wenn $\lvert\bar{x} - \mu_0\rvert$ „sehr groß“ ist
b)	$H_1 : \mu < \mu_0$,	wenn $\bar{x}$ „weit kleiner“ als μ_0 ist
c)	$H_1 : \mu > \mu_0$,	wenn $\bar{x}$ „weit größer“ als μ_0 ist

Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit



Entscheidungskriterium aus Stichprobe:

$$v = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$



Mögliche Fehlentscheidungen

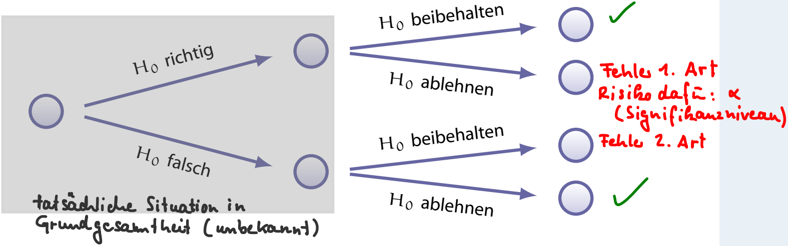
Ablehnung von H_0, obwohl H_0 richtig ist: Fehler 1. Art

Nicht-Ablehnung von H_0, obwohl H_0 falsch ist: Fehler 2. Art

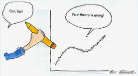
- Vorteil: Verteilung bekannt: $N(0;1)$
- Dann:

$H_0 : \mu = \mu_0$ wird abgelehnt gegenüber

a)	$H_1 : \mu \neq \mu_0$,	wenn $\lvert v \rvert$ „sehr groß“	ist
b)	$H_1 : \mu < \mu_0$,	wenn v „sehr negativ“	ist
c)	$H_1 : \mu > \mu_0$,	wenn v „sehr positiv“	ist



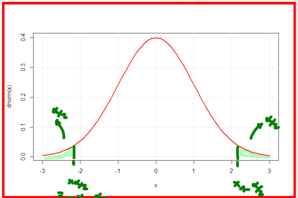
- Signifikanzniveau α: Maximal erlaubte Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.



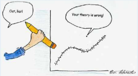
Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit

- Mithilfe von α und V kann geklärt werden, was „sehr groß“ usw. heißt:
  Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art im Fall a): $|v| > x$, obwohl H_0 richtig:

$$
\begin{aligned}
P(|V| > x) &= P(V > x) + P(V < -x) \\
&= 2 \cdot P(V > x) \qquad \text{(Symmetrie der Normalverteilung)} \\
&= 2 \cdot [1 - P(V \leq x)] = 2 \cdot [1 - \Phi(x)] \overset{!}{=} \alpha \\
&\iff \Phi(x) = 1 - \tfrac{\alpha}{2} \\
&\iff x = x_{1-\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$



  H_0 wird demnach verworfen, wenn $|v| > x_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $v \in B$ ist.
  $B = (-\infty; -x_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (x_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$ heißt Verwerfungsbereich.
- Analoge Vorgehensweise für die Fälle b) und c)

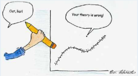


Rezept

1. Ein Signifikanzniveau α wird festgelegt.
2. Der Verwerfungsbereich

$$B = (-\infty;\ -x_{1-\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2};\ \infty) \qquad \text{im Fall a)}$$
$$B = (-\infty;\ -x_{1-\alpha}) \qquad \text{im Fall b)}$$
$$B = (x_{1-\alpha};\ \infty) \qquad \text{im Fall c)}$$

   wird festgelegt, wobei $x_{1-\alpha/2}$ bzw. $x_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha/2)$- bzw. das $(1-\alpha)$-Fraktil der $N(0,1)$-Verteilung ist. (Wichtig: Der Ablehnungsbereich ist also unabhängig von der Stichprobe)
3. Wichtig: Erst jetzt werden die Daten der Stichprobe erhoben/beachtet:
   Der Testfunktionswert $v = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ wird berechnet.
4. H_0 wird genau dann verworfen, wenn $v \in B$ gilt.



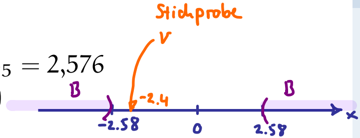
Beispiel:

$X_1, \ldots, X_{25}$ mit $X_i \sim N(\mu; 1{,}5)$ und $\bar{x} = 499{,}28$

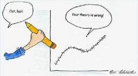
Prüfe $H_0: \ \mu = 500, \ H_1: \ \mu \neq 500$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$

Lösung: Einstichproben-Gaußtest, Fall a)

1. $\alpha = 0{,}01$
2. $N(0;1): \ x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-0{,}005} = x_{0{,}995} = 2{,}576$
   $\Rightarrow B = (-\infty; -2{,}576) \cup (2{,}576; \infty)$
3. $v = \frac{499{,}28 - 500}{1{,}5} \cdot \sqrt{25} = -2{,}4$
4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen



Interpretation: Zum Signifikanzniveau 1 % kann der Brauerei keine Abweichung vom Sollwert $\mu_0 = 500$ nachgewiesen werden.



Einstichproben-t-Test und approximativer Gaußtest

Gegeben:

- Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit
- $E(X_i) = \mu, \quad Var(X_i) = \sigma^2$

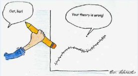
Hypothesenpaare:

$$
\begin{array}{llll}
\text{a)} & H_0: \mu = \mu_0 & & H_1: \mu \neq \mu_0 \\
\text{b)} & H_0: \mu = \mu_0 & (\text{oder } \mu \geqq \mu_0), & H_1: \mu < \mu_0 \\
\text{c)} & H_0: \mu = \mu_0 & (\text{oder } \mu \leqq \mu_0), & H_1: \mu > \mu_0
\end{array}
$$

Voraussetzungen:

1. Normalverteilung mit σ unbekannt (Einstichproben-t-Test)
   oder
2. Beliebige Verteilung
   mit $n > 30$ bzw. $5 \leqq \sum x_i \leqq n - 5$ (bei $B(1;p)$)
   (approximativer Gaußtest)

dichotom
(nur 2 Werte
z.B. „Treffer/Niete")



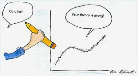
Ablauf:

1. Festlegen des Signifikanzniveaus α
2. Festlegen des Verwerfungsbereichs B:
   - Falls $H_1 : \mu \neq \mu_0$: $\quad B = (-\infty; -x_{1-\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}; \infty)$
   - Falls $H_1 : \mu < \mu_0$: $\quad B = (-\infty; -x_{1-\alpha})$
   - Falls $H_1 : \mu > \mu_0$: $\quad B = (x_{1-\alpha}; \infty)$

   Dabei steht $x_{1-\alpha/2}$ bzw. $x_{1-\alpha}$ für das jeweilige Fraktil
   - der $t(n-1)$-Verteilung bei $n \leqslant 29$ bzw.
   - der $N(0;1)$-Verteilung bei $n \geqslant 30$.
3. Berechnen des Testfunktionswertes:

$$v = \begin{cases} \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} & \text{falls Grundgesamtheit } N(\mu;\sigma)\text{-verteilt, } \sigma \text{ unbekannt oder falls Verteilung der GG beliebig, } n > 30,\ \sigma \text{ unbekannt} \\ \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} & \text{falls Verteilung der GG beliebig, } n > 30,\ \sigma \text{ bekannt} \\ \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\mu_0(1-\mu_0)}}\sqrt{n} & \text{falls GG gemäß } B(1;\mu)\text{-verteilt, } n > 30 \end{cases}$$

dichotom



Einstichproben-t-Test: Beispiel

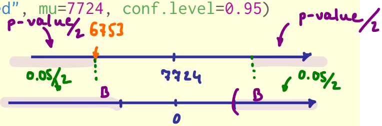
Beispiel t-Test: Energieaufnahme von Frauen

- Empfohlene täglich Energieaufnahme für Frauen: 7724 kJ (1845 kcal)
- Nehme einfache Stichprobe von 11 Frauen und teste zum Signifkanzniveau $\alpha = 0{,}05$ für
- H_0: „Der Erwartungswert der täglichen Energieaufnahme für Frauen ist 7724 kJ“ (μ_0)
- gegen H_1: $\mu \neq \mu_0$

```
daily.intake <- c(5260, 5470, 5640, 6180, 6390, 6515, 6805, 7515, 7515, 8230, 8770)
t.test(daily.intake, alternative="two.sided", mu=7724, conf.level=0.95)

##
##  One Sample t-test
##
## data:  daily.intake
## t = -2.8179, df = 10, p-value = 0.01823
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 7724
## 95 percent confidence interval:
##  5986.348 7520.925
## sample estimates:
## mean of x
##  6753.636
```

degrees of freedom



p-value < α ⇒ H_0 verwerfen

Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

Dabei bedeutet $\Phi(x)$ zum Beispiel: $\Phi(2,13) = \Phi(2,1+0,03) = 0,9834$. Diesen Wert findet man in der Zeile mit $x_1 = 2,1$ und der Spalte mit $x_2 = 0,03$.

$x_1 \backslash x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976

α-Fraktile der χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden

$\downarrow \alpha \setminus n \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16	2.60	3.07	3.56	4.07	4.60
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26
0.1	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20	2.83	3.49	4.17	4.87	5.58	6.30	7.04	7.79	8.55
0.2	0.06	0.45	1.01	1.65	2.34	3.07	3.82	4.59	5.38	6.18	6.99	7.81	8.63	9.47	10.31
0.25	0.10	0.58	1.21	1.92	2.67	3.45	4.25	5.07	5.90	6.74	7.58	8.44	9.30	10.17	11.04
0.4	0.28	1.02	1.87	2.75	3.66	4.57	5.49	6.42	7.36	8.30	9.24	10.18	11.13	12.08	13.03
0.5	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35	6.35	7.34	8.34	9.34	10.34	11.34	12.34	13.34	14.34
0.6	0.71	1.83	2.95	4.04	5.13	6.21	7.28	8.35	9.41	10.47	11.53	12.58	13.64	14.69	15.73
0.75	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84	9.04	10.22	11.39	12.55	13.70	14.85	15.98	17.12	18.25
0.8	1.64	3.22	4.64	5.99	7.29	8.56	9.80	11.03	12.24	13.44	14.63	15.81	16.98	18.15	19.31
0.9	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64	12.02	13.36	14.68	15.99	17.27	18.55	19.81	21.06	22.31
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.95	23.59	25.19	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80

$\downarrow \alpha \setminus n \rightarrow$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.005	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43	8.03	8.64	9.26	9.89	10.52	11.16	11.81	12.46	13.12	13.79
0.01	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26	8.90	9.54	10.20	10.86	11.52	12.20	12.88	13.56	14.26	14.95
0.025	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59	10.28	10.98	11.69	12.40	13.12	13.84	14.57	15.31	16.05	16.79
0.05	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85	11.59	12.34	13.09	13.85	14.61	15.38	16.15	16.93	17.71	18.49
0.1	9.31	10.09	10.86	11.65	12.44	13.24	14.04	14.85	15.66	16.47	17.29	18.11	18.94	19.77	20.60
0.2	11.15	12.00	12.86	13.72	14.58	15.44	16.31	17.19	18.06	18.94	19.82	20.70	21.59	22.48	23.36
0.25	11.91	12.79	13.68	14.56	15.45	16.34	17.24	18.14	19.04	19.94	20.84	21.75	22.66	23.57	24.48
0.4	13.98	14.94	15.89	16.85	17.81	18.77	19.73	20.69	21.65	22.62	23.58	24.54	25.51	26.48	27.44
0.5	15.34	16.34	17.34	18.34	19.34	20.34	21.34	22.34	23.34	24.34	25.34	26.34	27.34	28.34	29.34
0.6	16.78	17.82	18.87	19.91	20.95	21.99	23.03	24.07	25.11	26.14	27.18	28.21	29.25	30.28	31.32
0.75	19.37	20.49	21.60	22.72	23.83	24.93	26.04	27.14	28.24	29.34	30.43	31.53	32.62	33.71	34.80
0.8	20.47	21.61	22.76	23.90	25.04	26.17	27.30	28.43	29.55	30.68	31.79	32.91	34.03	35.14	36.25
0.9	23.54	24.77	25.99	27.20	28.41	29.62	30.81	32.01	33.20	34.38	35.56	36.74	37.92	39.09	40.26
0.95	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41	32.67	33.92	35.17	36.41	37.65	38.89	40.11	41.34	42.56	43.77
0.975	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17	35.48	36.78	38.08	39.36	40.65	41.92	43.19	44.46	45.72	46.98
0.99	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57	38.93	40.29	41.64	42.98	44.31	45.64	46.96	48.28	49.59	50.89
0.995	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00	41.40	42.80	44.18	45.56	46.93	48.29	49.64	50.99	52.34	53.67

α-Fraktile der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden

$\downarrow n \setminus \alpha \rightarrow$	0.6	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.325	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.820	63.657
2	0.289	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	0.979	1.638	2.353	3.183	4.541	5.841
4	0.271	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.897	3.355
9	0.261	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.698	0.875	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.696	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.054
13	0.259	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.603	2.947
16	0.258	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.684	0.856	1.316	1.708	2.059	2.485	2.787
26	0.256	0.684	0.856	1.315	1.706	2.055	2.479	2.779
27	0.256	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.683	0.855	1.312	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750

α-Fraktile der F-Verteilung mit den Freiheitsgraden ν_1 und ν_2

$\alpha = 0{,}95$

$\nu_1 \backslash \nu_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100
1	161.4	18.51	10.13	7.71	6.61	5.99	5.59	5.32	5.12	4.96	4.54	4.35	4.17	4.08	4.03	3.94
2	199.5	19.00	9.55	6.94	5.79	5.14	4.74	4.46	4.26	4.10	3.68	3.49	3.32	3.23	3.18	3.09
3	215.7	19.16	9.28	6.59	5.41	4.76	4.35	4.07	3.86	3.71	3.29	3.10	2.92	2.84	2.79	2.70
4	224.6	19.25	9.12	6.39	5.19	4.53	4.12	3.84	3.63	3.48	3.06	2.87	2.69	2.61	2.56	2.46
5	230.2	19.30	9.01	6.26	5.05	4.39	3.97	3.69	3.48	3.33	2.90	2.71	2.53	2.45	2.40	2.31
6	234.0	19.33	8.94	6.16	4.95	4.28	3.87	3.58	3.37	3.22	2.79	2.60	2.42	2.34	2.29	2.19
7	236.8	19.35	8.89	6.09	4.88	4.21	3.79	3.50	3.29	3.14	2.71	2.51	2.33	2.25	2.20	2.10
8	238.9	19.37	8.85	6.04	4.82	4.15	3.73	3.44	3.23	3.07	2.64	2.45	2.27	2.18	2.13	2.03
9	240.5	19.38	8.81	6.00	4.77	4.10	3.68	3.39	3.18	3.02	2.59	2.39	2.21	2.12	2.07	1.97
10	241.9	19.40	8.79	5.96	4.74	4.06	3.64	3.35	3.14	2.98	2.54	2.35	2.16	2.08	2.03	1.93
15	245.9	19.43	8.70	5.86	4.62	3.94	3.51	3.22	3.01	2.85	2.40	2.20	2.01	1.92	1.87	1.77
20	248.0	19.45	8.66	5.80	4.56	3.87	3.44	3.15	2.94	2.77	2.33	2.12	1.93	1.84	1.78	1.68
30	250.1	19.46	8.62	5.75	4.50	3.81	3.38	3.08	2.86	2.70	2.25	2.04	1.84	1.74	1.69	1.57
40	251.1	19.47	8.59	5.72	4.46	3.77	3.34	3.04	2.83	2.66	2.20	1.99	1.79	1.69	1.63	1.52
50	251.8	19.48	8.58	5.70	4.44	3.75	3.32	3.02	2.80	2.64	2.18	1.97	1.76	1.66	1.60	1.48
100	253.0	19.49	8.55	5.66	4.41	3.71	3.27	2.97	2.76	2.59	2.12	1.91	1.70	1.59	1.52	1.39

$\alpha = 0{,}99$

$\nu_1 \backslash \nu_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100
1	4052	98.50	34.12	21.20	16.26	13.75	12.25	11.26	10.56	10.04	8.68	8.10	7.56	7.31	7.17	6.90
2	5000	99.00	30.82	18.00	13.27	10.92	9.55	8.65	8.02	7.56	6.36	5.85	5.39	5.18	5.06	4.82
3	5403	99.17	29.46	16.69	12.06	9.78	8.45	7.59	6.99	6.55	5.42	4.94	4.51	4.31	4.20	3.98
4	5625	99.25	28.71	15.98	11.39	9.15	7.85	7.01	6.42	5.99	4.89	4.43	4.02	3.83	3.72	3.51
5	5764	99.30	28.24	15.52	10.97	8.75	7.46	6.63	6.06	5.64	4.56	4.10	3.70	3.51	3.41	3.21
6	5859	99.33	27.91	15.21	10.67	8.47	7.19	6.37	5.80	5.39	4.32	3.87	3.47	3.29	3.19	2.99
7	5928	99.36	27.67	14.98	10.46	8.26	6.99	6.18	5.61	5.20	4.14	3.70	3.30	3.12	3.02	2.82
8	5981	99.37	27.49	14.80	10.29	8.10	6.84	6.03	5.47	5.06	4.00	3.56	3.17	2.99	2.89	2.69
9	6022	99.39	27.35	14.66	10.16	7.98	6.72	5.91	5.35	4.94	3.89	3.46	3.07	2.89	2.78	2.59
10	6056	99.40	27.23	14.55	10.05	7.87	6.62	5.81	5.26	4.85	3.80	3.37	2.98	2.80	2.70	2.50
15	6157	99.43	26.87	14.20	9.72	7.56	6.31	5.52	4.96	4.56	3.52	3.09	2.70	2.52	2.42	2.22
20	6209	99.45	26.69	14.02	9.55	7.40	6.16	5.36	4.81	4.41	3.37	2.94	2.55	2.37	2.27	2.07
30	6261	99.47	26.50	13.84	9.38	7.23	5.99	5.20	4.65	4.25	3.21	2.78	2.39	2.20	2.10	1.89
40	6287	99.47	26.41	13.75	9.29	7.14	5.91	5.12	4.57	4.17	3.13	2.69	2.30	2.11	2.01	1.80
50	6303	99.48	26.35	13.69	9.24	7.09	5.86	5.07	4.52	4.12	3.08	2.64	2.25	2.06	1.95	1.74
100	6334	99.49	26.24	13.58	9.13	6.99	5.75	4.96	4.41	4.01	2.98	2.54	2.13	1.94	1.82	1.60