Integralrechnung

Aufgabe 62

Integralrechnung: Fläche zwischen Kurven (Flaeche2)

Gegeben seien die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = -2x + 10 \qquad \text{sowie} \qquad g(x) = x^2 + 2\,.$$

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von f und g.

b) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Graphen von f und g eingeschlossen wird.

Lösungshinweis:

a) Schnittpunkte bei $x = -4$ und $x = 2$.

b)

$$\int_{-4}^{2} f(x) - g(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 8x\right]_{-4}^{2} = -\frac{8}{3} - 4 + 16 - \left(\frac{64}{3} - 16 - 32\right) = 36$$

Aufgabe 63

$z = x^3 + 1$

$\frac{dz}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow dz = 3x^2 dx$

a) Man berechne das bestimmte Integral:

$$I(y) = \int_1^y \frac{\overset{dz}{3x^2}}{2\sqrt{\underset{z}{x^3+1}}}\, dx \qquad (\text{für } y > 1)$$

$\frac{1}{2p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p}$

$= \frac{1}{2} \int_1^y \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} z^{-\frac{1}{2}+1} \right]_1^y = \left[\sqrt{z} \right]_1^y = \sqrt{y} - \sqrt{1}$

Zeigen Sie außerdem, dass $I(y)$ streng monoton wächst, und berechnen Sie $I(2)$.

b) Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = 5 - \frac{1}{2}x^2$$
$$g(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$$

eingeschlossen wird.
(*Hinweis*: Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus den Schnittpunkten der Graphen.)

Lösungshinweis:

a) Substitutionsregel: Mit $z = (x^3 + 1) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dz = 3x^2 dx$ folgt:

$$\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} dx = \frac{1}{2} \int z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} z^{-\frac{1}{2}+1} + C = (x^3+1)^{\frac{1}{2}} + C$$
$$\Rightarrow I(y) = \left[(x^3+1)^{\frac{1}{2}} \right]_1^y = \sqrt{y^3+1} - \sqrt{2}$$

b) Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \iff 5 - \frac{1}{2}x^2 = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$.

$$\iff -\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0$$
$$\iff x_{1,2} = \frac{1}{3}\left(-2 \pm \sqrt{4+12}\right) = -1 \pm 2 = \begin{cases} +1 \\ -3 \end{cases}$$

Fläche zwischen den Graphen:

$$\int_{-3}^{1} f(x) - g(x) dx = \int_{-3}^{1} -\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \right]_{-3}^{1}$$
$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \right) - \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{2} - \frac{27}{2} \right) = \frac{32}{2} = 16$$

Aufgabe 64

Gegeben sei eine Grenzkostenfunktion

$$c'(x) = \begin{cases} 3\cdot\sqrt{x} & \text{für} \quad x\in[0,100] \\ 30 & \text{für} \quad x\in[100,400] \\ \frac{600}{\sqrt{x}} & \text{für} \quad x\in[400,900] \end{cases} .$$

$\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}\cdot x^{3/2}+k_1$

$c(0)=1000$

$(k_1=1000)$

$x=100:$ $2\cdot 100^{3/2}+1000$ $=3000$

$30x+k_2$

$x=100:$ $30\cdot 100+k_2$ $\Rightarrow k_2=0$

$x=400:$ $30\cdot 400 = 12000$

$600\cdot 2\cdot\sqrt{x}+k_3$

$x=400$ $600\cdot 2\cdot 20+k_3 = 12000$ $\Rightarrow k_3=-12000$

Die fixen Kosten betragen $c(0) = 1000$.

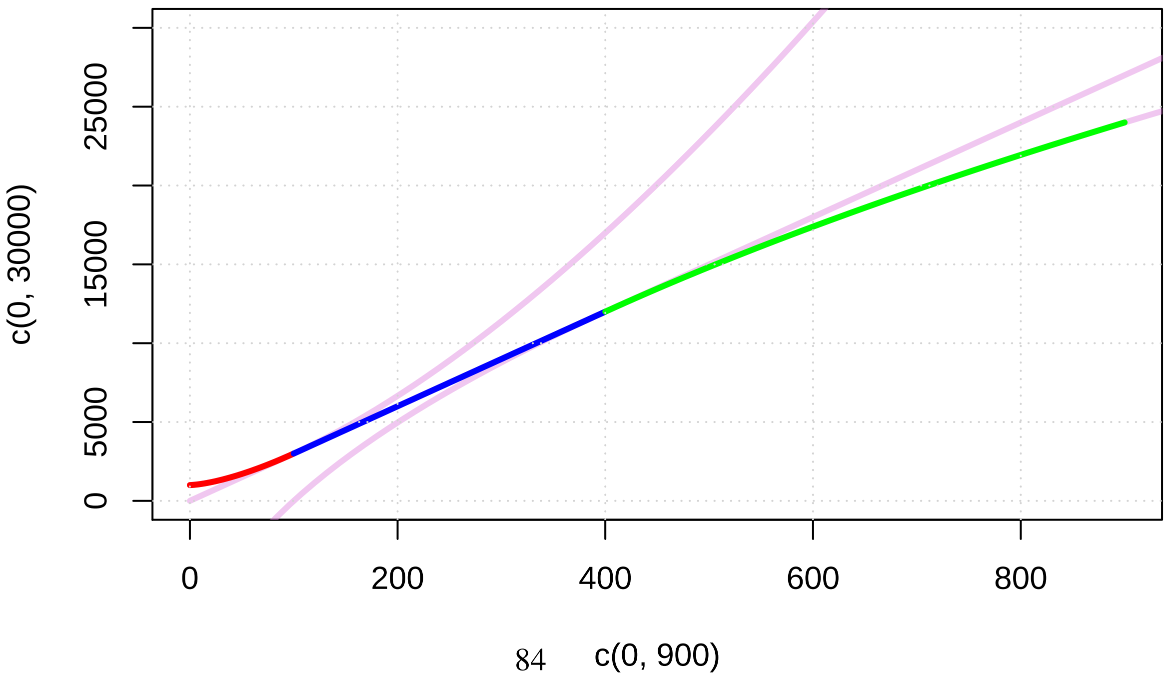
Bestimmen Sie dazu eine stetige Gesamtkostenfunktion $c(x)$ und berechnen Sie die Gesamtkosten für $x = 100,\ x = 150$ und $x = 625$.

Lösungshinweis:

$$c(x) = \begin{cases} 2x^{\frac{3}{2}} + 1.000 & \text{für } x\in[0;100] \\ 30x & \text{für } x\in[100;400] \\ 1.200\sqrt{x} - 12.000 & \text{für } x\in[400;900] \end{cases}$$

Damit:

$$c(100) = 2\cdot 1.000 + 1.000 = 3.000$$
$$c(150) = 30\cdot 150 = 4.500$$
$$c(625) = 1.200\cdot\sqrt{625} - 12.000 = 18.000$$



Aufgabe 65

Der momentane Umsatz eines Produktes zum Zeitpunkt t sei durch die Funktion $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit

$$u(t) \;=\; 1000(t+1)\, e^{-\frac{t}{2}}$$

gegeben.

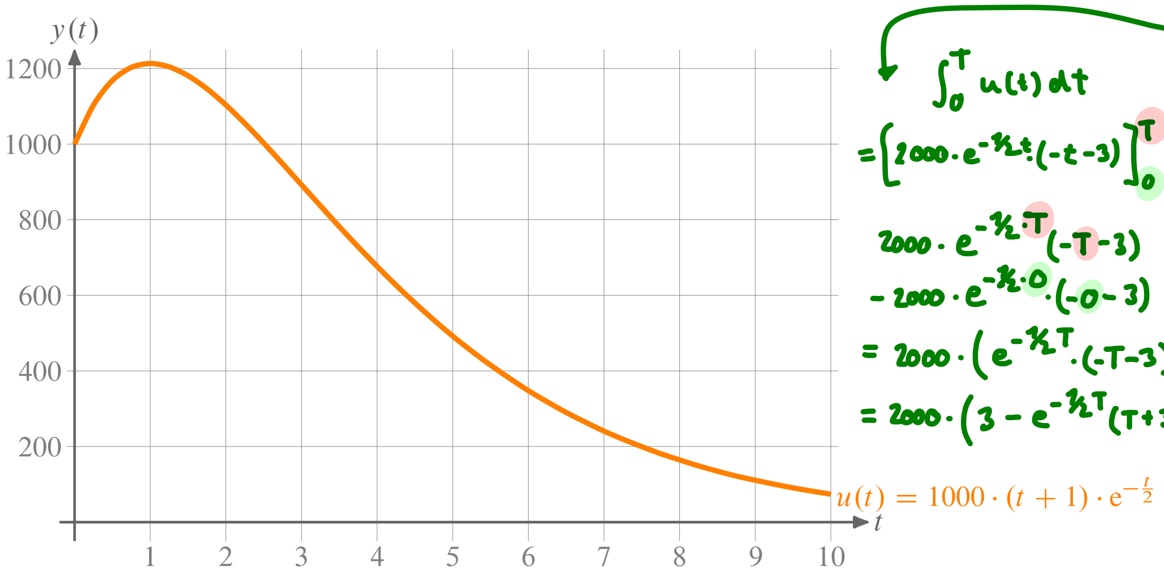
a) Skizzieren Sie die Funktion u im Planungszeitraum $[0,10]$ und berechnen Sie den Gesamtumsatz in $[0,T]$.

b) Ermitteln Sie den Gesamtumsatz für $T = 10$ und $T \to \infty$.

Lösungshinweis:

a)

$$\mathrm{GU}(T) = \int_0^T 1000 \cdot (t+1) \cdot e^{-\frac{t}{2}}\, dt = 1000 \cdot \left(6 - (2T+6) \cdot e^{-\frac{T}{2}}\right)$$



$$\int_0^T u(t)\,dt$$
$$= \left[2000 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}(-t-3)\right]_0^T$$
$$2000 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot T}(-T-3)$$
$$-2000 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} \cdot (-0-3)$$
$$= 2000 \cdot \left(e^{-\frac{1}{2}T} \cdot (-T-3) + 3\right)$$
$$= 2000 \cdot \left(3 - e^{-\frac{1}{2}T}(T+3)\right)$$

b)

$$\mathrm{GU}(10) = 1000 \cdot \left(6 - 26 \cdot e^{-5}\right) \approx 5.825{,}8$$

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{GU}(T) = \lim_{T\to\infty} 1000 \cdot \left(6 - \frac{2T+6}{e^{\frac{T}{2}}}\right) = 1000 \cdot \left(6 - \lim_{T\to\infty} \frac{2}{\frac{1}{2} e^{\frac{T}{2}}}\right) = 6.000$$

partielle Integration

$f' = e^{-\frac{1}{2}t}$

$f = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$

$$\int u(t)\,dt = 1000 \cdot \int \underbrace{(t+1)}_{g} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t}}_{f'}\,dt = 1000\Big[\underbrace{(t+1)\cdot(-2\cdot e^{-\frac{1}{2}t})}_{g\cdot f} \underbrace{- \int 1 \cdot (-2 \cdot e^{-\frac{1}{2}t})\,dt}_{-\int g' \cdot f}\Big]$$

$$= 1000 \cdot \left[-2(t+1)e^{-\frac{1}{2}t} + 2 \cdot (-2 \cdot e^{-\frac{1}{2}t})\right]$$
$$= 1000 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \cdot [-2t - 2 - 4]$$
$$= 2000 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}(-t-3)$$

funktioniert hier gut, weil g durch ableiten einfacher wird und f' durch integrieren nicht viel komplizierter wird

Aufgabe 66

Für ein Produkt sollen die Kosten- und Umsatzentwicklungen in Abhängigkeit der Zeit $t \geqq 0$ betrachtet werden. Dabei wurden für die Veränderung der Kosten $k(t)$ bzw. des Umsatzes $u(t)$ die Beziehungen folgendermaßen ermittelt:

$$k'(t) = \frac{\mathrm{d}k(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{100}{t+1} \quad \text{bzw.} \quad u'(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1000}{(t+1)^2} \qquad \text{für alle} \quad t \geqq 0$$

a) Zeigen Sie, dass die Kosten $k(t)$ und der Umsatz $u(t)$ für $t \geqq 0$ monoton wachsen, während der Gewinn $g(t) = u(t) - k(t)$ für $t \leqq 9$ monoton wächst und für $t \geqq 9$ monoton fällt.

b) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$k_9 = \int_0^9 k'(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad u_9 = \int_0^9 u'(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad g_9 = u_9 - k_9$$

und interpretieren Sie diese Ergebnisse.

c) Zeigen Sie, dass es eine obere Integrationsgrenze $z \geqq 9$ mit $g_z = 0$ gibt (keine Berechnung erforderlich).

Lösungshinweis:

a) $k'(t)$ und $u'(t)$ sind jeweils die Ableitung von $k(t)$ bzw. $u(t)$. Da $k'(t)$ und $u'(t)$ positiv sind für alle $t > 0$ müssen $k(t)$ bzw. $u(t)$ streng monoton steigen.

$$g'(t) = u'(t) - k'(t) = \frac{1000}{(t+1)^2} - \frac{100}{t+1} = \frac{100}{(t+1)^2} \cdot (9-t) \Rightarrow g'(t) > 0$$

und damit $g(t)$ streng mon. steigend für $0 < t < 9$ und $g'(t) < 0$ sowie $g(t)$ streng monoton fallend für $t > 9$.

b) $k_9 = \int_0^9 k'(t)\,dt = 100 \cdot \Big[\ln|t+1|\Big]_0^9 = 100 \cdot \ln 10$

$u_9 = \int_0^9 u'(t)\,dt = 1000 \cdot \left[\frac{-1}{t+1}\right]_0^9 = 1000 \cdot \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{1}\right) = 900$

$g_9 = u_9 - k_9 = 900 - 100 \cdot \ln 10 \approx 669{,}74$

c) $g_z = 1000 \cdot \left(-\frac{1}{z+1} + 1\right) - 100 \cdot \ln(z+1)$

$= 100 \cdot \left[10 - \frac{10}{z+1} - \ln(z+1)\right]$

Beispielsweise gilt für $z = \mathrm{e}^{10}$ für

$$g_{\mathrm{e}^{10}} = 100 \cdot \Big(10 \underbrace{-\frac{10}{\mathrm{e}^{10}+1}}_{<0} \underbrace{-\ln\left(\mathrm{e}^{10}+1\right)}_{<-\ln \mathrm{e}^{10}=-10}\Big) < 0$$

Weil g_z stetig muss damit mind. ein $9 \leq z \leq \mathrm{e}^{10}$ mit $g_z = 0$ existieren (Zwischenwertsatz)

Aufgabe 67

Integralrechnung: Absatzverlauf (A.Integral.7)

Für den Verlauf des Absatzes $y(t)$ eines Produktes in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 0$ wird die folgende Beziehung angenommen:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{a} \cdot y(t) \cdot (a - y(t)) \qquad \text{mit} \quad y(t) \in \langle 0,a \rangle \; \forall t \tag{6}$$

a) Formen Sie diese Gleichung in eine Integralgleichung der Form

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

um und berechnen Sie daraus eine Funktion $y(t)$, die Gleichung (6) erfüllt.

b) Bestimmen Sie $y(t)$, wenn $a = 100$, $c = 1$ und $y(0) = 50$ gilt.

c) Skizzieren Sie die in b) erhaltene Funktion und interpretieren Sie Gleichung (6) mit Hilfe Ihrer Skizze.

Lösungshinweis:

a)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{c}{a} y(a-y) \Rightarrow \int \frac{a}{y(a-y)} dy = \int c\, dt$$

schwer

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{a-y} = \int c\, dt$$

leicht

$$\Rightarrow \ln y - \ln(a-y) = c \cdot t + k$$

$$\Rightarrow \ln \frac{y}{a-y} = ct + k$$

(ganz) leicht

$$\Rightarrow \frac{y}{a-y} = e^{ct} + K \Leftrightarrow y = (e^{ct}+k)(a-y)$$

$$= (e^{ct}+k) \cdot a - (e^{ct}+k)\, y$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{a e^{ct}}{1+e^{ct}} + K$$

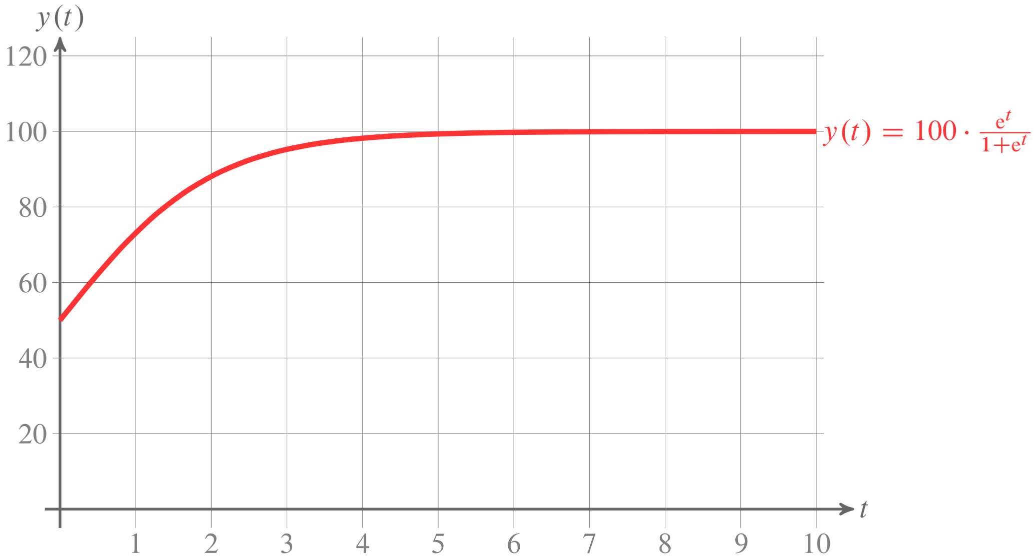
$$y + (e^{ct}+k)\, y = (e^{ct}+k)\, a$$

$$y = \frac{e^{ct}+k}{1+e^{ct}+k} \cdot a$$

b)

$$y(0) = \frac{100 \cdot e^0}{1+1} + K = 50 \quad \Rightarrow \quad K = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 100 \cdot \frac{e^t}{1+e^t}$$

c) Zeichnung für $t \in [0; 10]$



$y(t)$ startet mit Steigung $\frac{1}{100}y(0) \cdot (100 - y(0)) = \frac{1}{100} \cdot 50 \cdot (100 - 50) = 25$ und sättigt für $t \to \infty$ gegen 100.

Aufgabe 68

Die Gammafunktion $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

kann für $n \in \mathbb{N}$ zur Berechnung der Fakultät $n!$ genutzt werden. Im Folgenden soll mit Hilfe vollständiger Induktion gezeigt werden, dass $\Gamma(n) = (n-1)!$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass $\Gamma(1) = 1$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$ gilt!

Tipps für b):

- Verwenden Sie partielle Integration
- Sie dürfen verwenden, dass $\lim\limits_{t\to\infty} -t^n \mathrm{e}^{-t} = 0$.

Lösungshinweis:

a)

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \underbrace{t^{1-1}}_{=1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

b)

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty t^{n+1-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \\ &= \left[-t^n \cdot \mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty n t^{n-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \\ &= 0 + n \cdot \Gamma(n)\end{aligned}$$

Aufgabe 69

Ist identisch zu Aufgabe 63!

Aufgabe 70

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ ist gegeben mit

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3}.$$

a) Bestimmen Sie alle Extremwerte der Funktion, falls es welche gibt.

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x)$.

Lösungshinweis:

a) $$f'(x) = \frac{x^2 - \ln(x)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{1-3\ln(x)}{x^4} = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{3} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{12\ln(x) - 7}{x^5} \Rightarrow f''\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{4-7}{\mathrm{e}^{\frac{5}{3}}} < 0$$

Damit ist $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$ das einzige Extremum, ein globales Maximum.

b) $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^{-3}\cdot\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1}\cdot\ln(x) - \int \frac{1}{2}x^{-2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + C = \frac{-2-\ln(x)}{4x^2}$$

partielle Integration

$$\int \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx = \int \underbrace{x^{-3}}_{g'}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{f}\,dx = \underbrace{-\tfrac{1}{2}x^{-2}\cdot\ln(x)}_{g\cdot f} - \int \underbrace{-\tfrac{1}{2}\cdot x^{-2}}_{g}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{f'}\,dx$$

$$g = \int x^{-3}dx = \frac{1}{-3+1}\cdot x^{-3+1} = -\tfrac{1}{2}\cdot x^{-2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}x^{-2}\cdot\ln(x) + \tfrac{1}{2}\int x^{-3}\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{2}x^{-2}\ln(x) + \tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\cdot x^{-2}\right)$$

$$= \frac{\ln(x) + \tfrac{1}{2}}{-2x^2}$$