Aufgabe 82

Finanzmathematik: Maschine (FIMA.11)

Für den Kauf einer Maschine stehen folgende Zahlungsalternativen zur Auswahl:

a) 8.000 € sofort, 4 jährliche Raten zu je 2.000 €, zahlbar am Ende eines jeden Jahres

b) vier jährliche Raten zu je 4.000 €, zahlbar am Ende eines jeden Jahres

c) 5.000 € sofort, je 3.000 € am Ende des 2. und 3. Jahres und 5.000 € am Ende des 4. Jahres.

Für welche Zahlungsalternative (Barwertvergleich) soll man sich bei einem Zinssatz von 10% entscheiden?

Lösungshinweis:

a) Kapitalwert: $8000 + 2000 \frac{1}{1{,}1^4} \frac{1{,}1^4 - 1}{0{,}1} \approx 14.339{,}73$

b) Rentenbarwert: $4000 \cdot \frac{1}{1{,}1^4} \cdot \frac{1{,}1^4 - 1}{0{,}1} \approx 12.679{,}40$

c) Kapitalwert: $5000 + \frac{3000}{1{,}1^2} + \frac{3000}{1{,}1^3} + \frac{5000}{1{,}1^4} \approx 13.148{,}35$

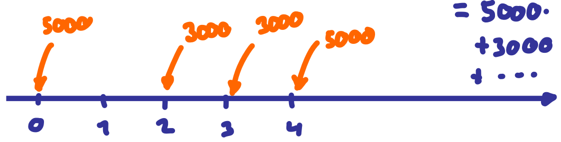
$K_0 = \sum A_t \cdot q^{-t}$

$= 5000 \cdot 1.1^0$

$+ 3000 \cdot 1.1^{-2}$

$+ \dots$

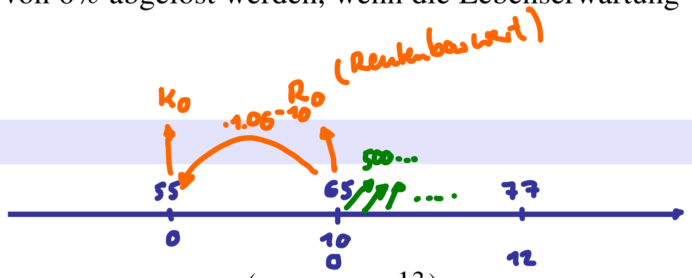
Also: Variante (2) ist am günstigsten



Aufgabe 83

Ein heute 55-jähriger Arbeitnehmer hat in 10 Jahren einen Anspruch auf eine monatliche Betriebsrente von 500 €, die vorschüssig bezahlt wird. Durch welche Gegenleistung kann sie heute bei einem Zinssatz von 6% abgelöst werden, wenn die Lebenserwartung von 77 Jahren angenommen wird.

Lösungshinweis:



$$r_e = 500\left(12 + 0{,}06 \cdot \frac{13}{2}\right) = 6195{,}00\,€$$

Rente ab 65: $R_0 = r_e \cdot \frac{q^{12}-1}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{12}} \approx 51.937{,}91\,€$

heute: $\frac{R_0}{q^{10}} \approx 29.001{,}86\,€$

Aufgabe 84

Ein Bausparer hat einen Bausparvertrag über 50.000 € Bausparsumme abgeschlossen. Der Habenzins beträgt 3%. Der Bausparvertrag ist zuteilungsreif, wenn 40% der Bausparsumme eingezahlt sind.

a) Nach wieviel Jahren ist der Bausparvertrag zuteilungsreif, wenn
   - 3.000 € jährlich nachschüssig
   - 3.000 € jährlich vorschüssig
   - 300 € monatlich nachschüssig

   einbezahlt werden?

b) Welche Sparrate muß der Bausparer
   - jährlich nachschüssig
   - jährlich vorschüssig
   - monatlich nachschüssig

   leisten, damit der Vertrag in vier Jahren zuteilungsreif ist?

Lösungshinweis:

a)
- 3000 € jährlich nachschüssig:

$$20.000 = 3000\frac{1{,}03^n - 1}{0{,}03} \quad \Rightarrow \quad 1{,}03^n = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad n \approx 6{,}17\,\text{Jahre}$$

- 3000 € jährlich vorschüssig:

$$20.000 = 3000 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^n - 1}{0{,}03} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 1{,}194}{\ln 1{,}03} \approx 6\,\text{Jahre}$$

- 3000 € monatlich nachschüssig:

$$r_e = 300\left(12 + 0{,}03 \cdot \frac{11}{2}\right) = 3649{,}50 \quad \Rightarrow \quad n = 5{,}15\,\text{Jahre}$$

b) wie a), jetzt r gesucht
- jährlich nachschüssig: $r = 4780{,}54$ €
- jährlich vorschüssig: $r = 4641{,}30$ €
- monatlich nachschüssig: $r_e = 4780{,}54 \quad \Rightarrow \quad r = 392{,}97$ €

Aufgabe 85

Das Vermögen von A ist mit 100.000 € doppelt so hoch wie das Vermögen von B. A spart jährlich 4.000 € nachschüssig, während B 8.000 € spart. Die jährliche Verzinsung ist 6%.

a) Nach wie vielen Jahren sind die Vermögen von A und B gleich hoch?

b) Wie hoch muss die jährliche Sparleistung von B sein, damit er in 10 Jahren das gleiche Vermögen wie A hat?

Lösungshinweis:

a) $100.000 \cdot 1{,}06^n + 4000\dfrac{1{,}06^n - 1}{0{,}06} = 50.000 \cdot 1{,}06^n + 8000\dfrac{1{,}06^n - 1}{0{,}06} \quad \Rightarrow \quad n \approx 23{,}79$

b) $\underbrace{50.000 \cdot 1{,}06^{10}}_{\text{Vorsprung von A}} = (r_b - \underbrace{4000}_{\text{Sparrate von A}}) \cdot \dfrac{1{,}06^{10} - 1}{0{,}06} \quad \Rightarrow \quad r_B = 10.793{,}40\,€$

$$100.000 \cdot 1{,}06^n + 4000\frac{1{,}06^n - 1}{0{,}06} = 50.000 \cdot 1{,}06^n + 8000\frac{1{,}06^n - 1}{0{,}06}$$

$\Leftrightarrow \quad 50000 \cdot 1.06^n = 4000 \cdot \dfrac{1.06^n - 1}{0.06}$

$\Leftrightarrow \quad 0.06 \cdot 12.5 \cdot 1.06^n = 1.06^n - 1$

$\Leftrightarrow \quad 0.75 \cdot 1.06^n = 1 \cdot 1.06^n - 1 \qquad 0.75x = 1x - 1$

$\Leftrightarrow \quad 1 = 0.25 \cdot 1.06^n$

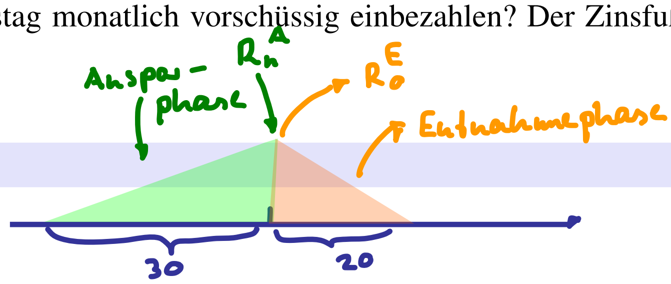
$\Leftrightarrow \quad 4 = 1.06^n \quad \Leftrightarrow \quad n = \log_{1.06}(4) \approx 23.79$

Aufgabe 86

Finanzmathematik: Sparen für die Rente (FIMA.15)

Jemand möchte von seinem 63. Geburtstag an 20 Jahre lang eine jährliche nachschüssige Rente in Höhe von 20.000 € ausbezahlt bekommen. Welchen Betrag muß er dafür 30 Jahre lang bis zu seinem 63. Geburtstag monatlich vorschüssig einbezahlen? Der Zinsfuß betrage 5,5% jährlich.

Lösungshinweis:



$$
\begin{aligned}
R_0 &= 20.000 \cdot \frac{1{,}05^{20} - 1}{0{,}055} \cdot \frac{1}{1{,}055^{20}} \\
&= 239.007{,}65\,€ \\
&= r\left(12 + 0{,}055\frac{13}{2}\right) \cdot \frac{1{,}055^{30} - 1}{0{,}055} \\
\Rightarrow \quad r &= 267{,}01\,€
\end{aligned}
$$

Aufgabe 87

Welches Kapital benötig man heute, wenn daraus 5 Jahre lang zu jedem Quartalsbeginn eine Spende von 1000 € überwiesen werden soll? Die vierteljährliche Verzinsung ist 1%.

Lösungshinweis:

$$R_0 = 1000 \cdot \frac{1{,}01^{20}-1}{0{,}01} \cdot 1{,}01 \cdot \frac{1}{1{,}01^{20}} \approx 18.226{,}00\,€$$

Aufgabe 88

In einer Pensionszusage wird eine Rente über 5000 € zu Beginn eines Quartals 10 Jahre lang bezahlt. Welchen Betrag muss die Firma bei einem Jahreszinssatz von 5% am Anfang der Rentenzahlungen für die Pensionsrückstellung (Barwert) einsetzen?

Lösungshinweis:

nachschüssiger Rentenbarwert

$$r_e = 5000 \cdot \left(4 + 0{,}05 \cdot \frac{5}{2}\right) = 20.625 \quad \Rightarrow \quad R_0 = 159.260{,}77\,€$$

$$R_0 = 20625 \cdot \frac{1.05^{10} - 1}{1.05 - 1} \cdot 1.05^{-10}$$

Aufgabe 89

Ein Unternehmen nimmt einen Kredit über 500.000 € zu 7% Zins auf. Der Kredit ist in fünf Jahren mit gleichbleibenden Tilgungsraten zu tilgen. Erstellen Sie den Tilgungsplan.

Lösungshinweis:

$$T = \frac{1}{5} \cdot 500.000 = 100.000$$

Jahr	R_k	Z_k	T	A_k
1	500.000	35.000	100.000	135.000
2	400.000	28.000	100.000	128.000
3	300.000	21.000	100.000	121.000
4	200.000	14.000	100.000	114.000
5	100.000	7.000	100.000	107.000
6	0	0	0	0

Aufgabe 90

Eine GmbH nimmt einen Kredit über 2.000.000 € zu 10% Zins auf, der mit gleichbleibenden Tilgungsraten in 20 Jahren zu tilgen ist. Berechnen Sie

a) die Restschuld am Anfang des 10. Jahres,
b) die Restschuld nach 15 Jahren,
c) den Zinsbetrag im 12. Jahr und
d) die Aufwendungen im 18. Jahr.

Lösungshinweis:

a) $R_{10} = 100.000 \cdot (20 - 10 + 1) = 1.100.000$
b) $R_{15} = 100.000 \cdot (20 - 16 + 1) = 500.000$
c) $Z_{12} = 100.000(20 - 12 + 1) \cdot 0{,}1 = 90.000$
d) $A_{18} = \underset{T_{18}}{\cancel{t}} + Z_{18} = 130.000$

Aufgabe 91

Ein Auto, das 57.000 € kostet, soll durch einen Kredit finanziert werden. Die Hausbank bietet einen Kredit, der in zwei gleich hohen jährlichen Tilgungsraten zurückzuzahlen ist, mit folgenden Konditionen an: Zins p.a. 8%, Auszahlung 90%. Wie hoch ist der Effektivzinsfuß für den Kredit?

Lösungshinweis:

$$S = \frac{57.000}{0{,}9} \quad \text{und} \quad T = \frac{S}{2} \quad \text{und} \quad 57.000 = S \cdot 0{,}9 = \frac{A_1}{q} + \frac{A_2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = S \cdot 1/2 + S \cdot 0{,}08 = S \cdot 0{,}58$$

$$\text{und} \quad A_2 = S \cdot 1/2 + S \cdot 1/2 \cdot 0{,}08 = S \cdot 0{,}54$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{S} \cdot 0{,}9 = \frac{\cancel{S} \cdot 0{,}58}{q} + \frac{\cancel{S} \cdot 0{,}54}{q^2} \quad \Leftrightarrow \quad 90q^2 - 58q - 54 = 0$$

$$\Rightarrow \quad q^2 = \frac{0{,}58}{0{,}9} \cdot q + \frac{0{,}54}{0{,}9}$$

$$\Rightarrow \quad q_{1/2} = \frac{58 \pm \sqrt{58^2 + 4 \cdot 90 \cdot 54}}{2 \cdot 90} \approx \begin{cases} 1{,}1612 & (> 0 \rightarrow \text{ OK}) \\ \ldots & (< 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad i \approx 0{,}1612 = 16{,}12\,\%$$

Aufgabe 92

Eine Anleihe von 1.000.000 € soll mittels gleichbleibender Annuität zu 7% verzinst und innerhalb der nächsten 5 Jahre getilgt werden. Wie gestaltet sich der Tilgungsplan?

Lösungshinweis:

$$S = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n}$$

$$\Leftrightarrow A = S \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1}$$

$$A = 1.000.000 \cdot \frac{1{,}07^5 \cdot 0{,}07}{1{,}07^5 - 1} \approx 243.890{,}69$$

Jahr	R_k	Z_k	T_k	A
1	1.000.000,00	70.000,00	173.890,69	243.890,69
2	826.109,31	57.827,65	186.063,04	243.890,69
3	640.046,26	44.803,24	199.087,46	243.890,69
4	440.958,81	30.867,12	213.023,58	243.890,69
5	227.935,23	15.955,47	227.935,23	243.890,69

Aufgabe 93

Ein festverzinsliches Wertpapier ist mit einem Kupon von 8 % p.a. und einem Rücknahmekurs von 103 % nach 15 Jahren ausgestattet. Welches ist der Preis (Kurs) des Wertpapiers bei einer Restlaufzeit von 7 Jahren unmittelbar nach der 8. Zinszahlung, wenn dem Erwerber eine dem dann herrschenden Marktzinsniveau entsprechende Umlaufrendite von 9 % garantiert wird?

Lösungshinweis:

$$C_8 = 1{,}09^{-7} \cdot \left(8 \cdot \frac{1{,}09^7 - 1}{1{,}09 - 1} + 103\right) \approx 96{,}608$$

Aufgabe 94

Ein festverzinsliches Wertpapier ist mit einem Kupon von 7 % p.a. und einem Rücknahmekurs von 102 % nach 15 Jahren ausgestattet.

a) Welches ist der Emissionskurs, wenn das herrschende Marktzinsniveau bei 8 % liegt?
b) Die Steigung des Emissionskurses bei diesem Marktzins beträgt $C_0'(0{,}08) = -812{,}441$. Welches ist die modifizierte Duration?
c) Welches ist die Elastizität des Emissionskurses bezüglich des Marktzinsniveaus?
d) Wenn der Marktzins um $\Delta i = 0{,}001$ steigt: Auf welchen Wert sinkt C_0 näherungsweise?

Lösungshinweis:

a) $C_0 = 1{,}08^{-15} \cdot \left(7 \cdot \frac{1{,}08^{15}-1}{1{,}08-1} + 102\right) \approx 92{,}071$
b) $\text{MD} = -\dfrac{C_0'}{C_0} \approx -\dfrac{-812.441}{92{,}071} \approx 8{,}82407$
c) $\varepsilon_{C_0,\,0{,}08} = -\text{MD} \cdot 0{,}08 \approx -8{,}82407 \cdot 0{,}08 \approx -0{,}7059$
d) $C_0(0{,}08 + 0{,}001) \approx 92{,}071 \cdot (1 - 8{,}82407 \cdot 0{,}001) \approx 91{,}26$

Aufgabe 95

Eine Unternehmung will ein festverzinsliches Wertpapier emittieren, das dem Erwerber während der 15-jährigen Laufzeit einen Effektivzins von 9 % garantiert. Der Emissionskurs ist 96 %, der Rücknahmekurs 101%.

Mit welchem nominellen Zinssatz muss die Unternehmung das Papier ausstatten?

Lösungshinweis:

$$\begin{aligned} 96 &= 1{,}09^{-15} \cdot \left(p^* \cdot \frac{1{,}09^{15} - 1}{0{,}09} + 101 \right) \\ \Leftrightarrow \quad p^* &= (96 \cdot 1{,}09^{15} - 101) \cdot \frac{0{,}09}{1{,}09^{15} - 1} \approx 8{,}470 \end{aligned}$$

Aufgabe 96

Anton Arglos hat von seiner Großmutter 30 000 € geschenkt bekommen, um sein Studium zu finanzieren. Nehmen Sie für die Aufgaben a) und b) an, dass Anton sein Studium ausschließlich aus dem Geldgeschenk finanziert und von einem konstanten, jährlichen Zins von 7 % ausgegangen werden kann. Stellen Sie Ihren Rechenweg jeweils ausführlich und nachvollziehbar dar!

a) Wie lang darf Antons Studium dauern, wenn er jährlich nachschüssig 7000 € entnimmt?
b) Anton fällt auf, dass er das Geld eigentlich jährlich vorschüssig benötigt, aber mit 5000 € jährlich auskommt. Wie lang kann sein Studium unter diesen Annahmen dauern?

Am Ende seines Studiums bemerkt der geschäftstüchtige Anton, dass er nun insgesamt ein Vermögen von 50 000 € besitzt. Anton bekommt ein Angebot seiner Hausbank, das Geld als Festgeld zum jährlichen Zinssatz von i_{Haus} anzulegen. Anton freut sich, da er nun weiß, dass er in 12 Jahren ein Endvermögen von 100 000 € besitzen wird.

c) Wie hoch ist der Zinssatz i_{Haus}, den Anton von seiner Hausbank angeboten bekommt?
d) Die Onlinebank Fastmoney bietet ihm eine Anlage zu einem monatlichen Zins (mit monatlicher Zinsausschüttung) von 0,5 % an. Soll er das Angebot von Fastmoney gegenüber dem Angebot seiner Hausbank bevorzugen? Nehmen Sie (unabhängig von Ihrer Lösung unter Aufgabe c) an, dass die Hausbank Anton einen jährlichen Zins von 6 % anbietet) Begründen Sie Ihre Empfehlung rechnerisch!

Anton entschließt sich, anstatt das Geld anzulegen ein Haus zu kaufen. Hierfür nimmt er zusätzlich einen Kredit von 200 000 € zu einem konstanten Zins von 8 % auf. Der Kredit ist mit gleichbleibenden Tilgungsraten in 20 Jahren zu tilgen.

e) Wieviel Zinsen muss Anton im 15. Jahr bezahlen?

Lösungshinweis:

a) $$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot q^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln\left(\frac{r}{r-i\cdot R_0}\right)}{\ln\ q} \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln\left(\frac{7000}{7000-0{,}07\cdot 300000}\right)}{\ln\ 1{,}07} = 5{,}2716.$$
Das Geld reicht 5 Jahre.

b) $$R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} q^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad 30000 = 5000 \cdot 1{,}07 \cdot \frac{1 - 1{,}07^{-n}}{0{,}07}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{6 \cdot 0{,}07}{1{,}07} = 1{,}07^n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{6\cdot 0{,}07}{1{,}07}\right)}{\ln 1{,}07} \approx 7{,}367\,.$$
das Geld reicht also in diesem Fall 7 Jahre.

Lineare Algebra

Aufgabe 100

Lineare Algebra: Rechnen mit Matrizen (A4.2)

Gegeben sind die Matrizen A, B, C sowie die Vektoren a, b mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie, welche der folgenden Ausdrücke berechenbar sind, und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

a) $(A + B)a$,
b) ABb,
c) $(B + C^T)a$,
d) $BA(a + b)$,
e) $ab^T A$,
f) $(a + b)b^T$,
g) CAB,
h) $a^T B^T C b$

$(a^T B^T) \cdot (C b)$
$1\times 3 \quad 3\times 3 \quad 3\times 3 \quad 3\times 1$

Lösungshinweis:

- $(A + B)a$: Nicht möglich,
- ABb: Nicht möglich,
- $(B + C^T)a = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$,
- $BA(a + b)$: Nicht möglich,
- $ab^T A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,
- $(a + b)b^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,
- CAB: Nicht möglich,
- $a^T B^T C b = -8$

Aufgabe 101

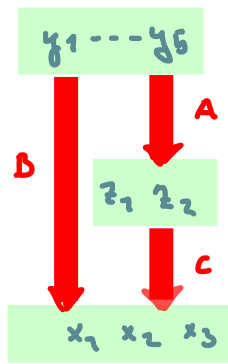
Eine Unternehmung produziert mit Hilfe von fünf Produktionsfaktoren $F_1, \ldots, F_5$ zwei Zwischenprodukte Z_1, Z_2, sowie mit diesen Zwischenprodukten und den Faktoren F_1, F_2, F_3 drei Endprodukte P_1, P_2, P_3.

In den Matrizen $A = (a_{ij})_{5,2},\ B = (b_{ik})_{5,3},\ C = (c_{jk})_{2,3}$ bedeute

a_{ij} = Anzahl der Einheiten von F_i zur Herstellung einer Einheit von Z_j,

b_{ik} = Anzahl der Einheiten von F_i zur Herstellung einer Einheit von P_k,

c_{jk} = Anzahl der Einheiten von Z_j zur Herstellung einer Einheit von P_k.



AC+B

a) Bestimmen Sie mit den Daten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$y = (AC+B)\,x$

$= \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} x$

den Vektor $y \in \mathbb{R}^5_+$ von Produktionsfaktoren, der erforderlich ist, um eine Einheit von P_k zu fertigen (für $k = 1,2,3$).

b) Welche Faktormengen braucht man, um den Endproduktvektor (30, 20, 30) zu realisieren?

c) Berechnen Sie mit den Vektoren

c^T	=	(1, 1, 2, 3, 1)	für die Beschaffungskosten der Faktoren,
q^T	=	(15, 20, 10)	für die Produktionskosten der Produkte,
p^T	=	(40, 50, 40)	für die Verkaufspreise der Produkte,

die Gesamtkosten, den Umsatz und den Gewinn des Endproduktvektors (30, 20, 30).

Lösungshinweis:

- Produktion seriell: AC, Produktion parallel: $B + AC$

- Damit: Faktorenbedarf $y \in \mathbb{R}^5_+$ für Endproduktvektor $x \in \mathbb{R}^3_+$:

$$y = (B + AC)x$$

a) $AC + B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = D$

Damit benötigt man für jede Einheit von P_1, P_2, P_3:

$$y^1 = D \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y^2 = D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y^3 = D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) $y = D \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 670 \\ 270 \\ 160 \\ 240 \end{pmatrix}$

c) Kosten: $c^t y + q^t x = 2350 + 1150 = 3500$

Umsatz: $p^t x = 3400$

Gewinn: $p^t x - c^t y - q^t x = -100$