Aufgabe 102

Gegeben sind die folgenden Punktmengen $\in \mathbb{R}^2$:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \in \mathbb{N} \ , \ x_2^2 = x_1 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \in \ (0,1) \ , \ x_2 \geqq 0 \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2 = 0 \ , \ x_1 \, x_2 = 1 \right\}$$

$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geqq x_2^3 \ , \ x_2 \geqq 0 \right\}$$

$$M_5 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\| \geqq 1 \ , \ (1, -1) \, x = 0 \right\}$$

a) Man stelle alle Mengen graphisch dar und prüfe mit Hilfe der Zeichnung, welche der Mengen offen, abgeschlossen, beschränkt, konvex ist.
b) Welche der paarweisen Durchschnitte sind leer?

Lösungshinweis:

a) $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \in \mathbb{N}, x_2^2 = x_1 \right\}$

M_1: abgeschlossen, nicht offen, nicht konvex, nicht beschränkt

$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \in (0,1), x_2 \geq 0 \right\}$

M_2: nicht abgeschlossen,nicht offen,konvex,nach unter beschränkt

$M_3 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2 = 0, x_1 x_2 = 1 \}$

$M_3 = \emptyset$: offen ,abgeschlossen,konvex,beschränkt

$M_4 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geq x_2^3, x_2 \geq 0 \}$

M_4: nicht offen,abgeschlossen,nicht offen,[illegible] konvex,n~~i~~ach~~t~~ unten beschränkt

$M_5 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\| > 1, x_1 - x_2 = 0 \}$

M_5: abgeschlossen, nicht offen, nicht konvex, nicht beschränkt

b) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$

$M_1 \cap M_3 = \emptyset$

$M_2 \cap M_3 = \emptyset$

$M_3 \cap M_4 = \emptyset$

$M_3 \cap M_5 = \emptyset$

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \in \mathbb{N} \ , \ x_2^2 = x_1 \right\}$$

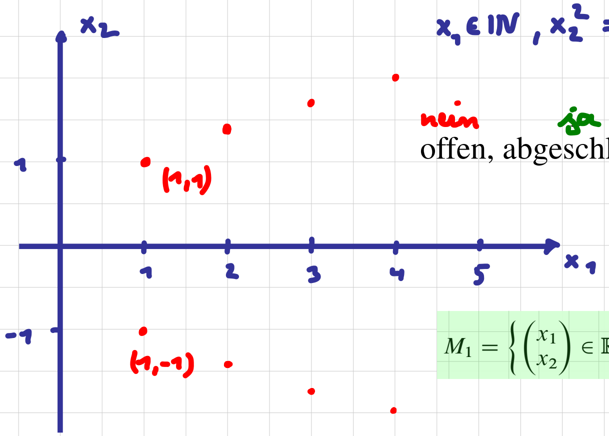
$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \in \ (0,1) \ , \ x_2 \geqq 0 \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2 = 0 \ , \ x_1 \, x_2 = 1 \right\}$$

$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geqq x_2^3 \ , \ x_2 \geqq 0 \right\}$$

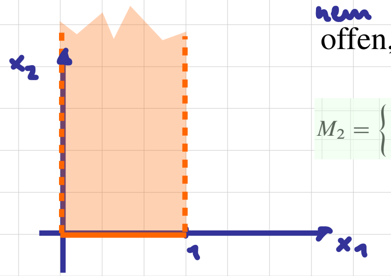
$$M_5 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\| \geqq 1 \ , \ (1,-1)\, x = 0 \}$$

$x_1 \in \mathbb{N}$, $x_2^2 = x_1$



nein ja nein nein
offen, abgeschlossen, beschränkt, konvex

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \in \mathbb{N} \ , \ x_2^2 = x_1 \right\}$$



nein nein nein ja
offen, abgeschlossen, beschränkt, konvex

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \in \ (0,1) \ , \ x_2 \geqq 0 \right\}$$

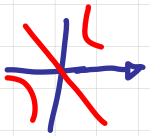
$]0,1[$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2 = 0 \ , \ x_1 \, x_2 = 1 \right\}$$

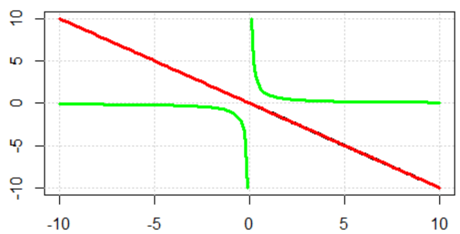
$x_1 = \frac{1}{x_2}$ in $x_1 + x_2 = 0$

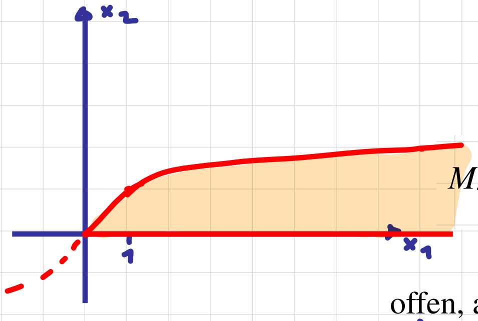
$\frac{1}{x_2} + x_2 = 0$

$\Rightarrow M_3 = \{\}$



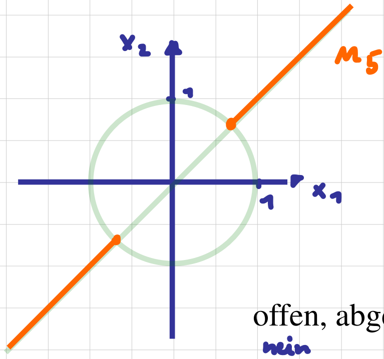
ja ja ja ja
offen, abgeschlossen, beschränkt, konvex





$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geqq x_2^3 \ , \ x_2 \geqq 0 \right\}$$

offen, abgeschlossen, beschränkt, konvex
nein ja nein ja



$$M_5 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\| \geqq 1 \ , \ (1,-1)\, x = 0 \}$$

$(1,-1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 = 0$

$\Leftrightarrow \ x_1 = x_2$

offen, abgeschlossen, beschränkt, konvex
nein ja nein

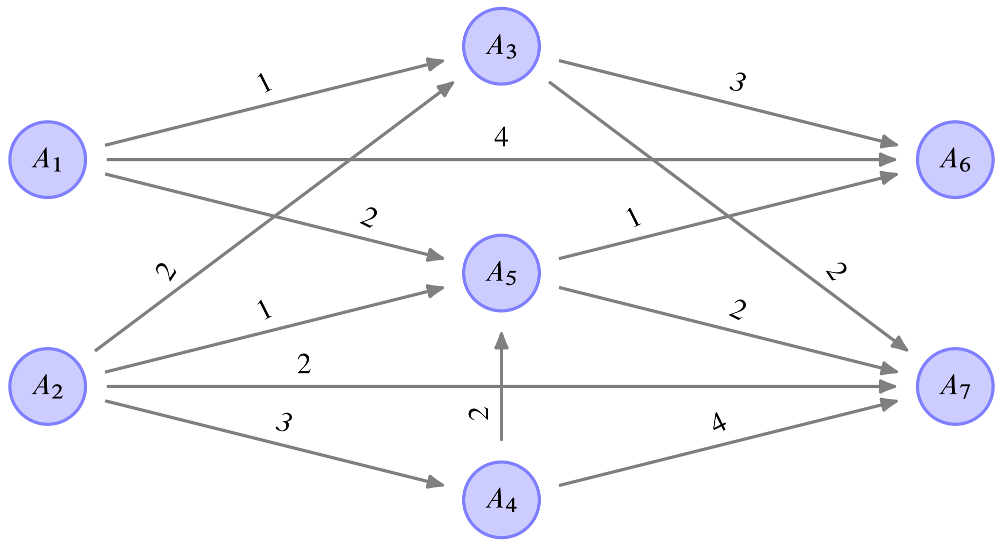
$\cap$	M_1	M_2	M_3	M_4
M_2	$\{\}$			
M_3	$\{\}$	$\{\}$		
M_4	$\neq\{\}$	$\neq\{\}$	$\{\}$	
M_5	$\neq\{\}$	$\neq\{\}$	$\{\}$	$\neq\{\}$

LineareGleichungssysteme

Aufgabe 107

LineareGleichungssysteme: Gozintograph (A4.7)

Aus den Werkstoffen A_1, A_2 werden Zwischenprodukte A_3, A_4, A_5 und Endprodukte A_6, A_7 hergestellt. Die nachfolgende Graphik stellt die Verknüpfungen dar.



Die Pfeilbewertung a_{ij} mit $A_i \xrightarrow{a_{ij}} A_j$ gibt an, wie viele Mengeneinheiten von A_i zur Herstellung einer Einheit A_j benötigt werden.

Wie viele Einheiten von A_1, A_2, A_3, A_4 werden benötigt, wenn von A_5, A_6, A_7 genau 50, 200, 120 Einheiten verkauft werden können?

Lösungshinweis:

Sei $x_i\,(i = 1, \ldots, 7)$ der Gesamtbedarf
(+ Verkauf) von A_i.

Dann ergibt sich der Reihe nach:
$x_7 = 120, x_6 = 200, x_5 = 490,$
$x_4 = 1460, x_3 = 840, x_2 = 6790, x_1 = 2620$

Aufgabe 108

a) Welche der folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme sind wahr bzw. falsch? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

a.1) Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen ist stets lösbar.

a.2) Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen ist nicht immer lösbar.

a.3) Wenn ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen lösbar ist, dann ist die Lösung eindeutig.

a.4) Ein lineares Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Variablen ist nicht lösbar.

a.5) Ein lineares Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Variablen kann eindeutig lösbar sein.

b) Für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ sei die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \,|\, b)$ durch

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right\} \quad \longrightarrow (1)-(2)$$

x_3, x_4, x_5 frei wählbar

$x_1 = -x_3 - 2x_5$, $x_2 = -x_3 - 2x_5$

gegeben.

b.1) Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems $(b = 0)$ sowie eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems an.

b.2) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das gegebene Gleichungssystem lösbar?

b.3) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $x^T = (1, -1, 2, 1, 0)$ das Gleichungssystem $Ax = b$ löst?

Lösungshinweis:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, x_1, x_2- Basis, x_3, x_4, x_5- Nicht-Basis

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
(1)	1	1	2	0	4	a	
(2)	0	1	1	0	2	1	
	1	0	1	0	2	$a-1$	(1) − (2)
	0	1	1	0	2	1	(2)

- Spezielle Lösung des inhomogenen Systems (Startpunkt)
  $x_3 = x_4 = x_5 = 0 \Rightarrow x_S^T = (a-1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)$
- Allgemeine Lösung des homogenen Systems (Richtungsvektoren):
  $x_3{=}1,\ x_4{=}0,\ x_5{=}0 \Rightarrow x_k^T = (-1 \;\; -1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)$
  $x_3{=}0,\ x_4{=}1,\ x_5{=}0 \Rightarrow x_e^T = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0)$
  $x_3{=}0,\ x_4{=}0,\ x_5{=}1 \Rightarrow x_m^T = (-2 \;\; -2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1)$

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Rightarrow$ LGS ist für alle $a \in \mathbb{R}$ lösbar.

b.3) $x^T = (1 \ -1 \ 2 \ 1 \ 0)$

$$\begin{aligned} x_5 &= 0 + 0 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 + 1 \cdot t_3 = 0 \quad && \Rightarrow t_3 = 0 \\ x_4 &= 0 + 0 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3 = 1 \quad && \Rightarrow t_2 = 1 \\ x_3 &= 0 + 1 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3 = 2 \quad && \Rightarrow t_1 = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Lösungsvektor: $a - 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) = 1 \Rightarrow a - 1 + (-2) = 1 \Rightarrow a = 4$
$1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) = -1$
$0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2$
$0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$
$0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

Aufgabe 109

Die Abteilungen A_1, A_2, A_3 eines Betriebes sind durch mengenmäßige Leistungen a_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ von A_i nach A_j gegenseitig verbunden. Jede der Abteilungen gibt ferner Leistungen b_i $(i = 1,2,3)$ an den Markt ab und hat sogenannte Primärkosten c_i $(i = 1,2,3)$ zu tragen. Gegeben seien folgende Daten:

$$A = (a_{ij})_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 10 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 170 \\ 60 \end{pmatrix}$$

a) Formulieren Sie mit den Variablen x_1, x_2, x_3 für die innerbetrieblichen Verrechnungspreise ein lineares Gleichungssystem für ein innerbetriebliches Kostengleichgewicht der Abteilungen A_1, A_2, A_3 .

b) Lösen Sie das Gleichungssystem von a) und interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösungshinweis:

a)

Abteilung	Sek.kost. für abgegebene Leistungen		Sekundärkosten für erhaltene Leistg. + Primärkosten
A_1	$x_1(40+10+10)$	$=$	$50 + 20x_2 + 30x_3$
A_2	$x_2(70+20+10)$	$=$	$170 + 10x_1 + 10x_3$
A_3	$x_3(60+30+10)$	$=$	$60 + 10x_1 + 10x_1$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 60x_1 - 20x_2 - 30x_3 &= 50 \\ -10x_1 + 100x_2 - 10x_3 &= 170 \\ -10x_1 - 10x_2 + 100x_3 &= 60 \end{aligned}$$

b) Gaußalgorithmus liefert:
$x_3 = 1$ (Verrechnungspreis Abteilung A_1),
$x_2 = 2$ (V.P. Abt. A_2),
$x_1 = 2$ (A_3)

Aufgabe 109

Die Abteilungen A_1, A_2, A_3 eines Betriebes sind durch mengenmäßige Leistungen a_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ von A_i nach A_j gegenseitig verbunden. Jede der Abteilungen gibt ferner Leistungen b_i $(i = 1,2,3)$ an den Markt ab und hat sogenannte Primärkosten c_i $(i = 1,2,3)$ zu tragen. Gegeben seien folgende Daten:

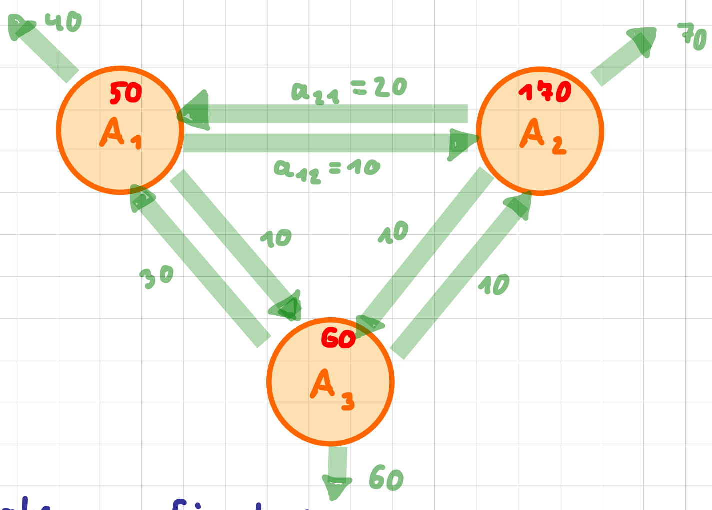
$$A = (a_{ij})_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 10 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 170 \\ 60 \end{pmatrix}$$

a) Formulieren Sie mit den Variablen x_1, x_2, x_3 für die innerbetrieblichen Verrechnungspreise ein lineares Gleichungssystem für ein innerbetriebliches Kostengleichgewicht der Abteilungen A_1, A_2, A_3 .
b) Lösen Sie das Gleichungssystem von a) und interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösungshinweis:

a)

Abteilung	Sek.kost. für abgegebene Leistungen		Sekundärkosten für erhaltene Leistg. + Primärkosten
A_1	$x_1(40+10+10)$	$=$	$50 + 20x_2 + 30x_3$
A_2	$x_2(70+20+10)$	$=$	$170 + 10x_1 + 10x_3$
A_3	$x_3(60+30+10)$	$=$	$60 + 10x_1 + 10x_1$



Ausgaben Einnahmen

A_1: $20x_2 + 30x_3 + 50 = (40+10+10)\,x_1$
A_2: $10x_1 + 10x_3 + 170 = (70+20+10)\,x_2$
A_3: $10x_1 + 10x_2 + 60 = (60+30+10)\,x_3$

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 5 \\ -x_1 + 10x_2 - x_3 &= 17 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}\right.$$

	x_1	x_2	x_3		
1	6	-2	-3	5	
2	-1	10	-1	17	
3	-1	-1	10	6	
4	1	1	-10	-6	- 3
5	0	-8	57	41	1 + 6 3
6	0	11	-11	11	2 - 3
7	1	0	-9	-7	4 - $\frac{1}{11}$ 6
8	0	1	-1	1	$\frac{1}{11}$ 6
9	0	0	49	49	5 + $\frac{8}{11}$ 6
	1	0	0	2	7 + $\frac{9}{49}$ 9
	0	1	0	2	8 + $\frac{1}{49}$ 9
	0	0	1	1	$\frac{1}{49}$ 9

$x_1 = 2$
$x_2 = 2$
$x_3 = 1$

Aufgabe 110

Gegeben sind die beiden folgenden Gleichungssysteme:

$$(G_1)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array} \qquad (G_2)\quad \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) Welches der beiden Gleichungssysteme besitzt keine Lösung, eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen?
b) Wie verändert sich die Lösungsmenge von (G_1), wenn die Gleichung $-x_1 + x_2 + x_3 = 2$ zusätzlich berücksichtigt werden soll?
c) Wie verändert sich die Lösungsmenge von (G_2), wenn die Gleichung $2x_1 + x_3 = 1$ entfallen soll?
d) Bestimmen Sie für (G_1) und (G_2), falls möglich, eine Lösung mit $x_3 = 1$.

Lösungshinweis:

a) G_1: eindeutige Lösung mit
$x_3 = 2, x_2 = 1, x_1 = 1$
G_2: unendlich viele Lösungen, z.B. der Form:
$x_3 \in \mathbb{R}$ bel., $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3, x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3$
b) Einsetzen: $-x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 1 + 2 = 2 \Rightarrow$ keine Veränderung der Lösung
c) 3. Gleichung entfällt $\Rightarrow$ Keine Veränderung der Lösungsmenge
d) G_1: $x_3 = 1 \Rightarrow$ Widerspruch, damit G_1 nicht lösbar.
e) G_2: $x_3 = 1 \Rightarrow X_1 = 0, x_2 = 1$. Damit ist G_2 eindeutig lösbar.

Aufgabe 111

Ein regionaler Markt wird von drei konkurrierenden Produkten P_1, P_2, P_3 beherrscht. Bezeichnet man mit $a_{ij} \in [0,1]$ den Anteil von P_i-Käufern zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$, der zum Zeitpunkt $t+1 \in \mathbb{N}$ das Produkt P_j kauft, so charakterisiert die Matrix

d.h. 20% der „heutigen" P_2 Käufer wechselt „morgen" zu P_3

$$A = (a_{ij})_{3,3} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \quad a_{23} \quad i \; j$$

die anteiligen Käuferfluktuationen zwischen den Produkten. Ferner beschreibt der Vektor

$$x_1^T = (0{,}5\,,\ 0{,}5\,,\ 0) \qquad x_2^T = x_1^T \cdot A$$

die Marktanteile der Produkte P_1, P_2, P_3 zum Zeitpunkt $t = 1$.

a) Interpretieren Sie die in A und x_1 enthaltenen Nullen.
b) Berechnen Sie die Marktanteile der Produkte zu den Zeitpunkten $t = 2{,}3$ und begründen Sie die Marktanteilszuwächse von P_3 mit Hilfe von A.
c) Geben Sie eine stationäre Marktverteilung an, das heißt, für beliebiges $t \in \mathbb{N}$ sind x_t^T und $x_{t+1}^T = x_t^T\, A$ identisch.

$(x_1 \ x_2 \ x_3) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \cdot A$

Lösungshinweis:

a) $a_{13} = a_{31} = 0$: Der Käuferanteil, der im Zeitpunkt $t+1$ gegenüber t von P_1 nach P_3 bzw. von P_3 nach P_1 wechselt, ist 0.
$x_{13} = 0$: Zum Zeitpunkt $t = 1$ ist der Marktanteil von P_3 gleich 0.
b) $x_2^T = x_1^T A = (0{,}4, 0{,}5, 0{,}1)$
$x_3^T = x_2^T A = (0{,}34, 0{,}48, 0{,}18)$
Wachsende Marktanteile von P_3:
$a_{23} = a_{32} = 0{,}2$: P_2 gibt an P_3 20% seines Marktanteils ab, ebenso P_3 an P_2.
Andererseits ist der Marktanteil von P_3 für $t = 1{,}2$ jeweils kleiner als der Marktanteil von P_2.
Wegen $a_{13} = a_{31} = 0$ spielt dabei P_1 keine Rolle.
c) $y = x_t = x_{t+1} \Rightarrow y^T = y^T A \Rightarrow y^T(E - A) = 0^T$ mit $y_1 + y_2 + y_3 = 1$
$\Rightarrow$ stationäre Marktverteilung
$y^T = (0{,}2, 0{,}4, 0{,}4)$

$(x_1 \ x_2 \ x_3) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 0.6 x_1 + 0.2 x_2 + 0 \cdot x_3$
$x_2 = 0.4 x_1 + 0.6 x_2 + 0.2 \cdot x_3$
$x_3 = 0 x_1 + 0.2 x_2 + 0.8 \cdot x_3$
zusätzlich: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ (100%)

Aufgabe 112

Ein Teegroßhändler führt drei Sorten Tee: *Darjeeling*, *Nepal* und *Java* mit den Anfangsbeständen x_1, x_2, x_3 .

Der Lagerbestand zu Beginn der ersten Woche beträgt 32 Tonnen. Nach der ersten (zweiten) Woche hat er 25 % (50 %) des Bestandes an Darjeeling und jeweils 20 % (40 %) des Bestandes an Nepal bzw. Java verkauft. Der Lagerbestand beträgt nach der ersten (zweiten) Woche 25 (18) Tonnen. Nach der dritten Woche hat er bei einem Gesamtlagerbestand von 5.2 Tonnen noch Vorräte von 10 % Darjeeling und jeweils 20 % Nepal bzw. Java (im Vergleich zu deren Anfangsbeständen).

a) Formulieren Sie ein lineares Gleichungssystem mit den unbekannten Variablen x_1, x_2, x_3 , das alle gegebenen Informationen angemessen wiedergibt.
b) Ermitteln Sie alle ökonomisch sinnvollen Lösungen des Gleichungssystems.
c) Verwerten Sie – falls möglich – die zusätzliche Information, dass zu Beginn der ersten Woche der Vorrat an Darjeeling um 20 % höher war als der Vorrat an Nepal.
Wie verändert sich damit die Lösung von b)?

Lösungshinweis:

a) Lagerbestand zu Beginn: $x_1 + x_2 + x_3 = 32$
Lagerbestand nach der 1. Woche:
$0{,}75x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}8x_3 = 25$
Lagerbestand nach der 2. Woche:
$0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}6x_3 = 18$
Lagerbestand nach der 3. Woche:
$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 = 5{,}2$

b) Gaußalgorithmus liefert:
$L = \left\{x \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 = 12, x_2 + x_3 = 20\right\}$
c) $x_1 = 1{,}2 \cdot x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 10 \Rightarrow x_3 = 10$

Aufgabe 113

Eine Brauerei stellt 3 Biersorten her: Hell, Pils und Bock. Die Herstellung erfordert eine Arbeitszeit von 2 Stunden für 1 hl Hell, 4 Stunden für 1 hl Pils und 5 Stunden für 1 hl Bock, wobei insgesamt genau Z Arbeitsstunden zu leisten sind. Das für Werbung bewilligte Budget beträgt 35.000 €, wobei die Werbekosten je hl Hell und Bock 1 € und bei Pils 2 € betragen. Der Gewinn pro hl beträgt 10 € bei Hell, 20 € bei Pils und 30 € bei Bock. Insgesamt soll ein Gewinn von 550.000 € erzielt werden.

a) Formulieren Sie das gegebene Gleichungssystem.
b) Ermitteln Sie die ökonomisch sinnvolle Lösungsmenge. (Hinweis: die zu produzierenden Einheiten an hl Bier sind nicht negativ). Für welchen Arbeitseinsatz Z gibt es keine Lösung, genau eine Lösung, mehrere Lösungen?
c) Skizzieren Sie das in b) erhaltene Ergebnis.

Lösungshinweis:

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+$: Biermenge in hl für Hell (x_1), Pils (x_2) und Bock (x_3)

a)
$$\begin{array}{rcll} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & Z & \text{(Arbeitszeit)} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 35000 & \text{(Werbung)} \\ 10x_1 + 20x_2 + 30x_3 & = & 550000 & \text{(Gewinn)} \end{array}$$

a) Gaußalgorithmus liefert:
Keine Lösung für $Z \neq 100$;
für $Z = 100$: $\Rightarrow x_3 = 10000$ und $x_1 + 2x_2 = 25000$. Damit Lösungsmenge:

$$L = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_+ : x = \begin{pmatrix} 25000 \\ 0 \\ 10000 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Ökonomisch sinnvolle Lösungen für $x_1, x_2 > 0$. Damit: $0 \leq \lambda \leq 12500$

Aufgabe 114

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}A$ orthogonal ist.

b) Berechnen Sie B^{-1}.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $AB\,x = c$ mit

$$x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)\,, \quad c^T = (1, 2, 3, 4)$$

unter Verwendung von b).

Lösungshinweis:

a) Ausmultiplizieren liefert:
$A \cdot \frac{1}{4}A = E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}A$

b) $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Von links (!) mit $B^{-1}A^{-1}$ multiplizieren ergibt: $x = B^{-1}A^{-1}c = \begin{pmatrix} -2{,}0 \\ 1{,}0 \\ 1{,}5 \\ 2{,}0 \end{pmatrix}$