

Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2016/17

Datum	WiMa für IM/BW	Nr.
05.10.2016	Einführung, R, Grundlagen	1
12.10.2016	Grundlagen, Aussagen	2
19.10.2016	Aussagen, Mengen, Relationen	3
26.10.2016	Folgen, Reihen	4
02.11.2016	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
09.11.2016	Differentialrechnung	6
16.11.2016	Differentialrechnung	7
23.11.2016	Integration	8
30.11.2016	FiMa	9
07.12.2016	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
14.12.2016	Determinanten, Eigenwerte	11
21.12.2016	Lineare Optimierung	12
28.12.2016	Weihnachten	
04.01.2017	Weihnachten	
11.01.2017	Puffer, Wiederholung	13
18.01.2017	Beginn der Prüfungszeit	

Termine, Personen, Räume

Veranstaltungen zur Mathematik für BW/IM Wintersemester 2016/17					
Was?	Wer?	Tag	Uhrzeit	Wo?	Ab wann?
Vorlesung Mathematik	Etschberger	Mi	14.00-17.00	B2.14	05.10.2016
Übung Mathematik	Korb	Di	9.50-11.20	W1.04	18.10.2016
Übung Mathematik	Korb	Di	11.30-13.00	W1.10	18.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Di	11.30-13.00	W2.10	11.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Mi	11.30-13.00	W2.14	12.10.2016
Übung Mathematik	Etschberger	Mi	17.00-18.30	B4.02	12.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Do	11.30-13.00	W1.19	13.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Do	14.00-15.30	W4.04	13.10.2016
Übung Mathematik	Burkart	Do	12.15-14.00	W2.14	13.10.2016
Übung Mathematik	Burkart	Do	14.00-15.30	W2.14	13.10.2016
Offener Matheraum	??*/Etschberger	Fr?	???	B3.05	ca. 21.10.
Offener Matheraum	??*/Jansen	Fr?	???	B3.05	ca. 21.10.
Veranstaltungen für Teilnehmer der Statistik-Klausur im Januar 2017					
Was?	Wer?		Wann?	Wo?	Ab wann?
Vorlesung Statistik	Wins	Di	14.00-17.00	W3.02	04.10.2016
Statistik Übung	Ivanov	Do	14.00-15.30	J3.19	13.10.2016
Statistik Übung	Ivanov	Do	15.40-17.10	J3.19	13.10.2016
Statistik Tutorium	Jansen	Mi	14.00-15.30	W1.06	12.10.2016

Gliederung

- 1 Grundlegende Bausteine
 - Reelle Zahlen
 - Ganzzahlige Potenzen
 - Algebraische Umformungen
 - Brüche
 - Nichtganzzahlige Potenzen
 - Logarithmen
 - Notation von Summen
- 2 Aussagenlogik
 - Einführung
 - Aussagenverknüpfungen
 - Argumentationstechniken
- 3 Mengen
 - Grundlagen
 - Beziehungen zwischen Mengen
 - Relationen
- 4 Folgen und Reihen
 - Eigenschaften und Beispiele
 - Konvergenz und Grenzwert
 - Reihen
- 5 Reelle Funktionen
 - Grundbegriffe
 - Elementare Funktionen
 - Stetigkeit reeller Funktionen
- 6 Differentialrechnung
 - Differentialquotient und Ableitung
 - Änderungsrate und Elastizität
 - Kurvendiskussion
- 7 Integration
 - Unbestimmte Integrale
 - Bestimmte Integrale
 - Uneigentliche Integrale
- 8 Finanzmathematik
 - Zinsen
 - Renten
 - Tilgung
 - Kursrechnung
- 9 Lineare Algebra
 - Matrizen und Vektoren
 - Matrixalgebra
 - Punktmengen im \mathbb{R}^n
 - Lineare Gleichungssysteme
 - Inverse Matrizen
 - Determinanten
 - Eigenwerte
- 10 Lineare Programme
 - Nebenbedingungen und Zulässigkeit
 - Zielfunktion
 - Graphische Lösung

Vorlesungsbegleitende Unterlagen

- ▶ **Arbeitsmaterial:** Foliensatz, Aufgabenskript, Mitschrift auf Wunsch
- ▶ **Bücher** (unterstützend):



Arens, Tilo, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Ulrich Kockelkorn, Klaus Lichtenegger und Hellmuth Stachel (2015). **Mathematik**. 3. Aufl. Springer Spektrum.



Cramer, Erhard und Johanna Neslehová (2015). **Vorkurs Mathematik: Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen**. 6. Aufl. Springer Spektrum.



Opitz, Otto und Robert Klein (2011). **Mathematik - Lehrbuch**. 11. Aufl. De Gruyter Oldenbourg.



Opitz, Otto, Robert Klein und Wolfgang R. Burkart (2014). **Mathematik - Übungsbuch**. 8. Aufl. De Gruyter Oldenbourg.



Purkert, Walter (2014). **Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler**. 8. Aufl. Springer Gabler.

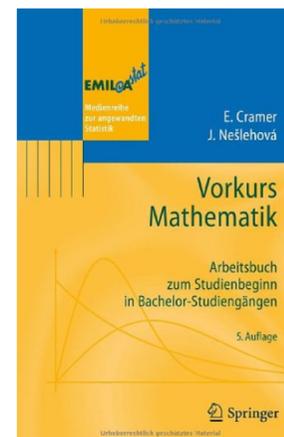


Tietze, Jürgen (2011). **Einführung in die Finanzmathematik**. 11. Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

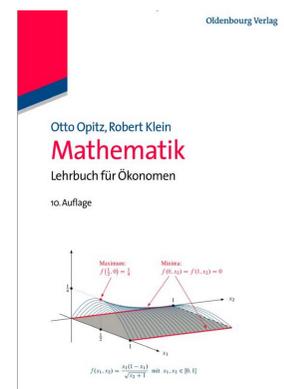


Tietze, Jürgen (2013). **Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik**. 17., erw. Aufl. 2013. Springer Spektrum.

E-Books innerhalb des Hochschulnetzwerks kostenlos unter



<http://goo.gl/qHwN7X>



<http://goo.gl/CWC1v2>

Veranstaltungskonzept

- ▶ **Mitschrift** empfohlen!
- ▶ Folien sind **nur ergänzendes** Material zur Mitschrift
- ▶ Aufteilung in Vorlesung (Plenum) und Übungsgruppen (kleinere Gruppen)
- ▶ Viele Aufgaben als Hausaufgabe, Besprechung in Übungsgruppen
- ▶ Ohne **selbständiges Rechnen** der Übungsaufgaben ist Nutzen der Veranstaltung sehr gering
- ▶ **Fragenstellen** ist jederzeit erwünscht
- ▶ Bei Fragen oder Problemen: E-Mail an Team
- ▶ Informations-Backbone für Unterlagen und mehr:
<http://bit.ly/2cZpYz3>



Klausur:

- ▶ **Klausur** am Ende des Semesters
- ▶ Bearbeitungszeit:
90 Minuten
- ▶ Erreichbare Punktzahl: 90
- ▶ Aufgaben mit R sind Prüfungsbestandteil
- ▶ Hilfsmittel:
 - **Schreibzeug**,
 - **Taschenrechner**, der nicht 70! berechnen kann,
 - **ein Blatt** (DIN-A4, vorne und hinten beschrieben) mit handgeschriebenen Notizen (keine Kopien oder Ausdrücke)

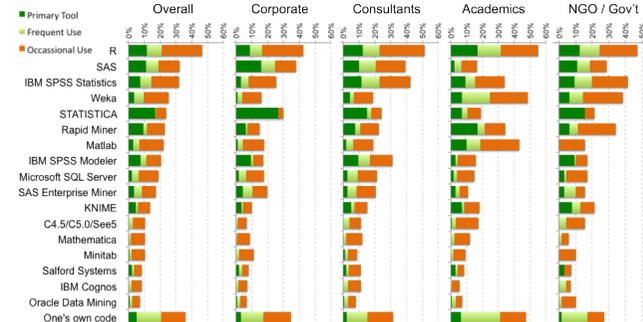


Was ist R und warum sollte man es benutzen?

- ▶ R ist ein **freies** Softwarepaket zu Mathematik, Statistik und Datenanalyse
- ▶ R ist sehr mächtig und **weit verbreitet** in Wissenschaft und Industrie (sogar von mehr Leuten benutzt als z.B. SPSS)
- ▶ Ursprung von R: **1993** an der Universität Auckland von Ross Ihaka and Robert Gentleman entwickelt
- ▶ Seitdem: Viele Leute haben R verbessert mit **tausenden von Paketen** für viele Anwendungen
- ▶ Nachteil (auf den ersten Blick): Kein point and click tool
- ▶ Großer Vorteil (auf den zweiten Blick): Kein point and click tool



- The average data miner reports using 4 software tools.
- R is used by the most data miners (47%).
- STATISTICA is the primary data mining tool chosen most often (17%).



source: <http://goo.gl/axhGhh>

graphics source: <http://goo.gl/W70kms>

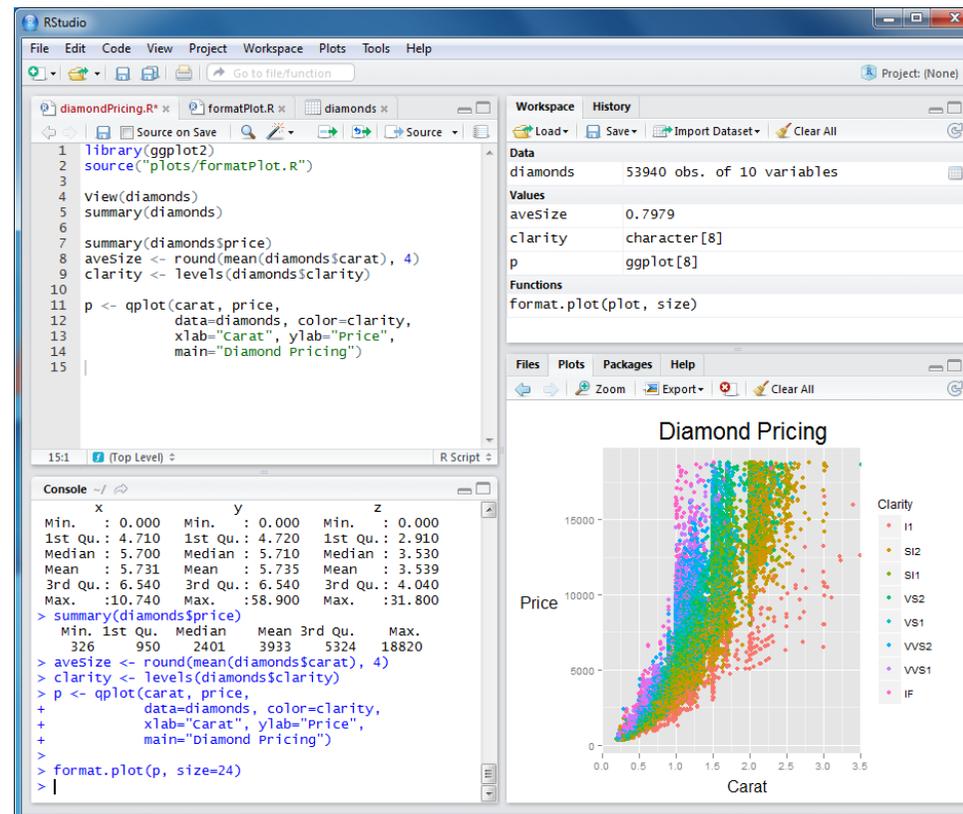
Download: R-project.org

Was ist RStudio?

- ▶ RStudio ist ein **Integrated Development Environment** (IDE) um R leichter benutzen zu können.
- ▶ Gibt's für OSX, Linux und Windows
- ▶ Ist auch frei
- ▶ Trotzdem: Sie müssen Kommandos schreiben
- ▶ Aber: RStudio unterstützt Sie dabei
- ▶ **Download: [RStudio.com](https://www.rstudio.com)**

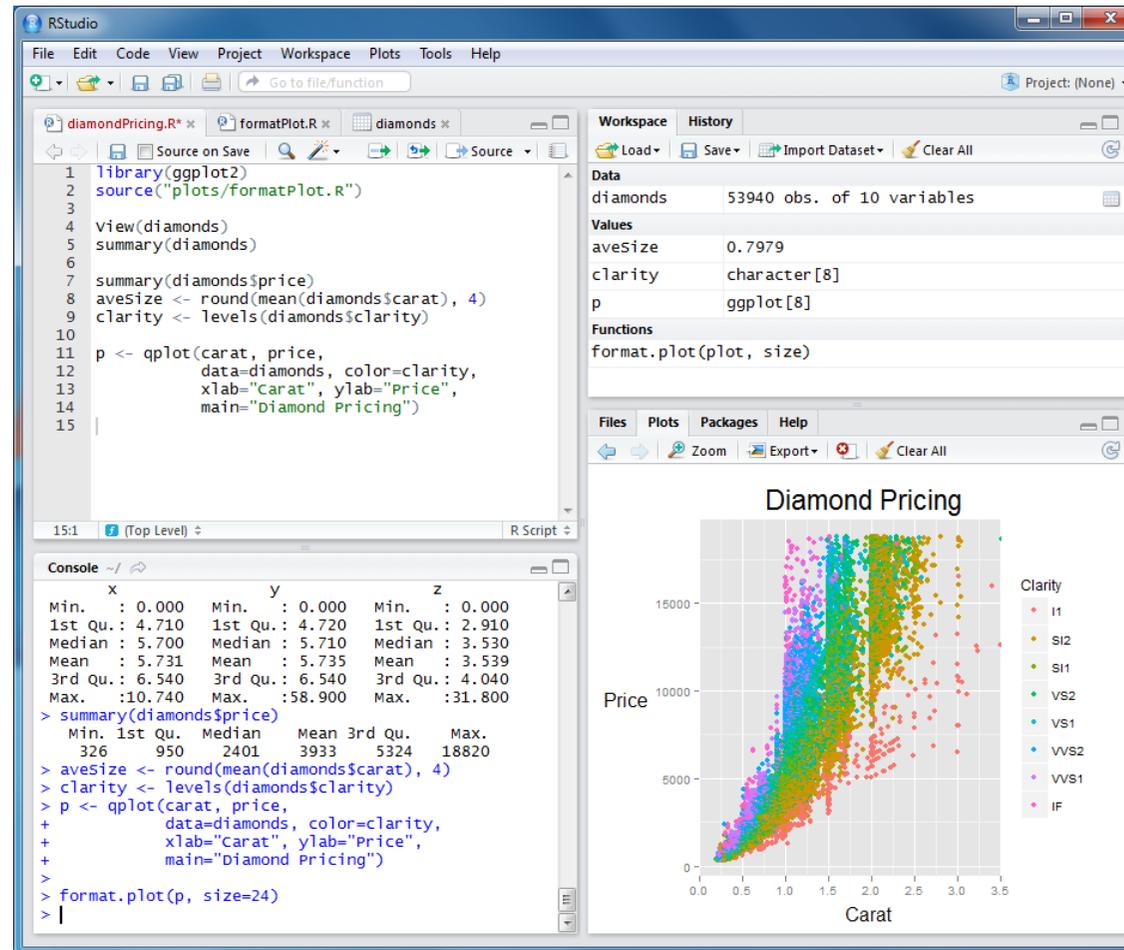


Free & Open-Source IDE for R



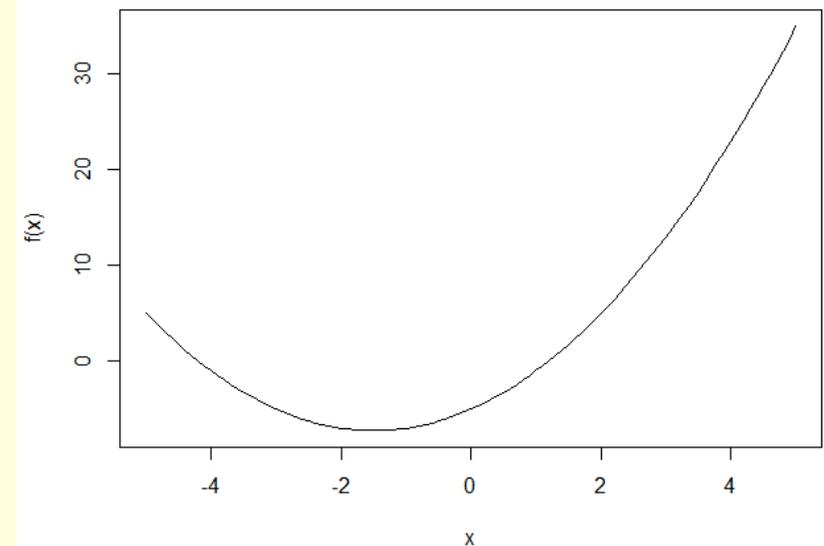
RStudio Kennenlernen

- ▶ Code
- ▶ Console
- ▶ Workspace
- ▶ History
- ▶ Files
- ▶ Plots
- ▶ Packages
- ▶ Help
- ▶ Auto-Completion
- ▶ Data Import



Erste Schritte in R

```
# -----  
# R als Taschenrechner  
# -----  
1 + 1  
  
## [1] 2  
0.2 * 4 + 1 # Dezimaltrenner ".", Punkt vor Strich gilt  
  
## [1] 1.8  
(3 - 2/5)^2 # runde Klammern zum Gruppieren, Potenzen mit "^"  
  
## [1] 6.76  
x = 2^10 # Ergebnisse in Variablen abgespeichert  
x # und anschließend weiterverwendet  
  
## [1] 1024  
x - 1  
  
## [1] 1023  
f = function(x) {x^2 + 3*x - 5} # Funktionsterm  
f(0) # ein Funktionswert  
  
## [1] -5  
f(-1:3) # mehrere Funktionswerte  
  
## [1] -7 -5 -1 5 13
```

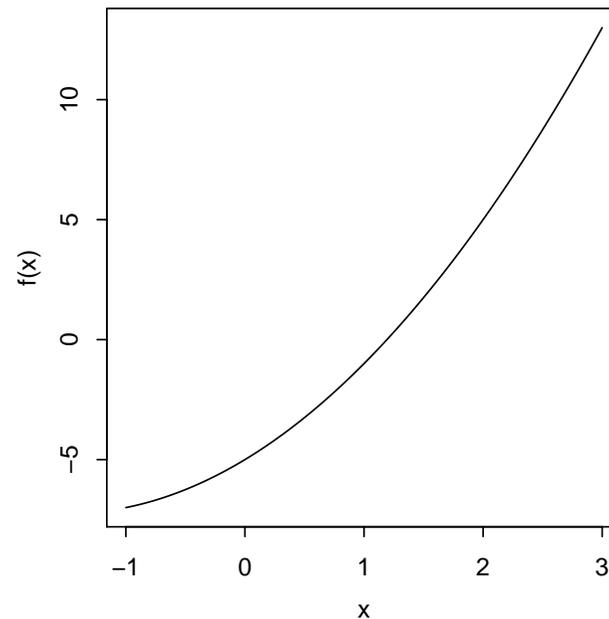


Erste Schritte in R

```
x = seq(from=-1, to=3, by=0.5) # x-Werte
data.frame(x, f(x))           # Wertetabelle

##      x  f.x.
## 1 -1.0 -7.00
## 2 -0.5 -6.25
## 3  0.0 -5.00
## 4  0.5 -3.25
## 5  1.0 -1.00
## 6  1.5  1.75
## 7  2.0  5.00
## 8  2.5  8.75
## 9  3.0 13.00

curve(f, from = -1, to = 3)  # Funktionsgraph
```



Umfragen in Vorlesung mit **EduVote**:

- ▶ System zur Abstimmung im Hörsaal
- ▶ App herunterladen oder direkt benutzen unter eduvote.de
- ▶ User-Id: [Etschberger](#), kein Session-Code



The screenshot shows the EduVote website interface. At the top left is the 'eduVote' logo. The main content area features a large image of a lecture hall with a thought bubble above it containing a smartphone and a bar chart. Below the image is a navigation bar with tabs for 'iOS (iPhone & Co)', 'Android', 'Windows (Netbook)', 'Mac OS (Laptop)', and 'Andere Geräte'. On the left side, there is a vertical menu with buttons for 'Home', 'Video', 'Downloads', 'Lizenz', and 'ACB'. The main text area is titled 'Downloadbereich für Studenten, die ein iOS-Gerät verwenden' and contains instructions for students on how to register and vote using an iOS device. It also includes a section for 'iPhone, iPod touch, iPad' with a link to the AppStore.

Downloadbereich für Studenten, die ein iOS-Gerät verwenden

Um als Student an einer Umfrage mit eduVote teilnehmen zu können, müssen Sie sich nicht registrieren. Alles was Sie brauchen ist das passende Programm für Ihr internetfähiges Gerät, mit dem Sie an der Umfrage teilnehmen möchten. Nach der Installation geben Sie einfach die User-ID Ihres Vortragenden ein und ggf. einen Session-Code und schon können Sie voten.

Wählen Sie in den Laschen oben, welches Betriebssystem Sie verwenden.

iPhone, iPod touch, iPad:
Bitte laden Sie sich eduVote im [AppStore](#) herunter.

Umfragen in Vorlesung mit **EduVote**:

- ▶ System zur Abstimmung im Hörsaal
- ▶ App herunterladen oder direkt benutzen unter eduvote.de
- ▶ User-Id: [Etschberger](#), kein Session-Code



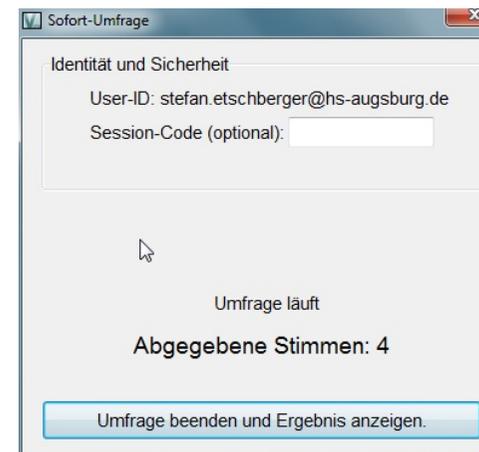
The screenshot shows the EduVote website interface. At the top left is the 'eduVote' logo. Below it is a navigation menu with buttons for 'Home', 'Video', 'Downloads', 'Lizenz', and 'ACB'. The main content area is titled 'Downloadbereich für Studenten, die ein iOS-Gerät verwenden'. It contains text explaining that users must register and provide their User-ID and Session-Code. Below this text are tabs for different operating systems: 'iOS (iPhone & Co)', 'Android', 'Windows (Netbook)', 'Mac OS (Laptop)', and 'Andere Geräte'. A thought bubble graphic shows a smartphone with a keypad and a bar chart, indicating the voting process.

Downloadbereich für Studenten, die ein iOS-Gerät verwenden

Um als Student an einer Umfrage mit eduVote teilnehmen zu können, müssen Sie sich nicht registrieren. Alles was Sie brauchen ist das passende Programm für Ihr internetfähiges Gerät, mit dem Sie an der Umfrage teilnehmen möchten. Nach der Installation geben Sie einfach die User-ID Ihres Vortragenden ein und ggf. einen Session-Code und schon können Sie voten.

Wählen Sie in den Laschen oben, welches Betriebssystem Sie verwenden.

iPhone, iPod touch, iPad:
Bitte laden Sie sich eduVote im [AppStore](#) herunter.



The screenshot shows a window titled 'Sofort-Umfrage'. It displays the user's identity and security information, including the User-ID 'stefan.etschberger@hs-augsburg.de' and a 'Session-Code (optional)' input field. Below this, it indicates that the survey is running ('Umfrage läuft') and shows the number of votes cast: 'Abgegebene Stimmen: 4'. At the bottom, there is a button labeled 'Umfrage beenden und Ergebnis anzeigen.'

Sofort-Umfrage

Identität und Sicherheit

User-ID: stefan.etschberger@hs-augsburg.de

Session-Code (optional):

Umfrage läuft

Abgegebene Stimmen: 4

Umfrage beenden und Ergebnis anzeigen.

Umfragen in Vorlesung mit **EduVote**:

- ▶ System zur Abstimmung im Hörsaal
- ▶ App herunterladen oder direkt benutzen unter eduvote.de
- ▶ User-Id: [Etschberger](#), kein Session-Code



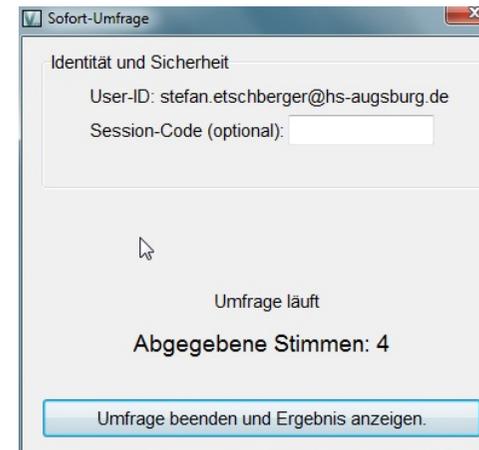
The screenshot shows the EduVote website interface. At the top left is the 'eduVote' logo. Below it is a navigation menu with buttons for 'Home', 'Video', 'Downloads', 'Lizenz', and 'ACB'. The main content area is titled 'Downloadbereich für Studenten, die ein iOS-Gerät verwenden'. It contains text explaining that users must register and provide their User-ID and Session-Code. Below this text are tabs for different operating systems: 'iOS (iPhone & Co)', 'Android', 'Windows (Netbook)', 'Mac OS (Laptop)', and 'Andere Geräte'. A thought bubble graphic shows a smartphone with a keypad and a bar chart, indicating the voting process.

Downloadbereich für Studenten, die ein iOS-Gerät verwenden

Um als Student an einer Umfrage mit eduVote teilnehmen zu können, müssen Sie sich nicht registrieren. Alles was Sie brauchen ist das passende Programm für Ihr internetfähiges Gerät, mit dem Sie an der Umfrage teilnehmen möchten. Nach der Installation geben Sie einfach die User-ID Ihres Vortragenden ein und ggf. einen Session-Code und schon können Sie voten.

Wählen Sie in den Laschen oben, welches Betriebssystem Sie verwenden.

iPhone, iPod touch, iPad:
Bitte laden Sie sich eduVote im [AppStore](#) herunter.



The screenshot shows a window titled 'Sofort-Umfrage'. It contains a section for 'Identität und Sicherheit' with the following text: 'User-ID: stefan.etschberger@hs-augsburg.de' and 'Session-Code (optional):' followed by an empty input field. Below this, the text 'Umfrage läuft' is displayed, followed by 'Abgegebene Stimmen: 4'. At the bottom, there is a button labeled 'Umfrage beenden und Ergebnis anzeigen.'

Sofort-Umfrage

Identität und Sicherheit

User-ID: stefan.etschberger@hs-augsburg.de

Session-Code (optional):

Umfrage läuft

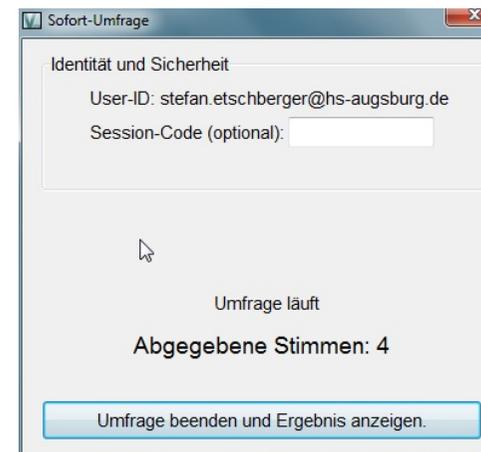
Abgegebene Stimmen: 4

Umfrage beenden und Ergebnis anzeigen.

Testfrage: Was ist ein Veterinär?

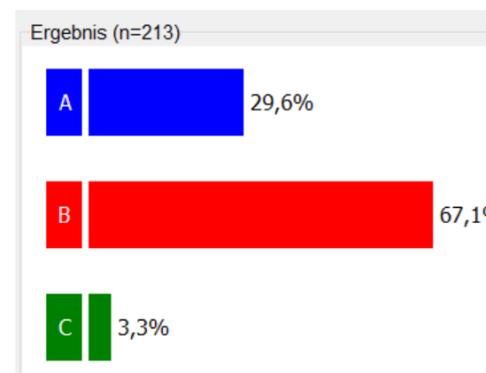
Umfragen in Vorlesung mit **EduVote**:

- ▶ System zur Abstimmung im Hörsaal
- ▶ App herunterladen oder direkt benutzen unter eduvote.de
- ▶ User-Id: [Etschberger](#), kein Session-Code



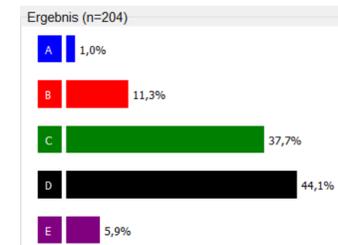
Testfrage: Was ist ein Veterinär?

- A) Ein ehemaliger Soldat
- B) Ein Tierarzt
- C) Jemand, der kein Fleisch isst



Wie alt sind Sie?

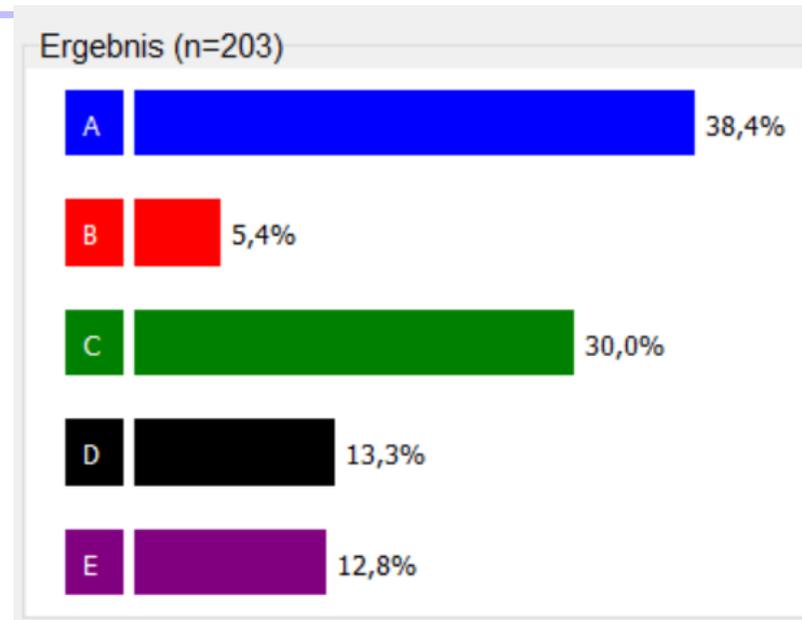
- A) 17
- B) 18
- C) 19, 20
- D) 21-25
- E) 26-



Wie viel Zeit ist seit Ihrer letzten Mathestunde vergangen?

(ohne Startklar oder Vorkurs an der Hochschule zu zählen)

- A 0 bis 6 Monate
- B mehr als 6 Monate bis 1 Jahr
- C mehr als 1 Jahr bis 2 Jahre
- D mehr als 2 Jahre bis 4 Jahre
- E mehr als 4 Jahre

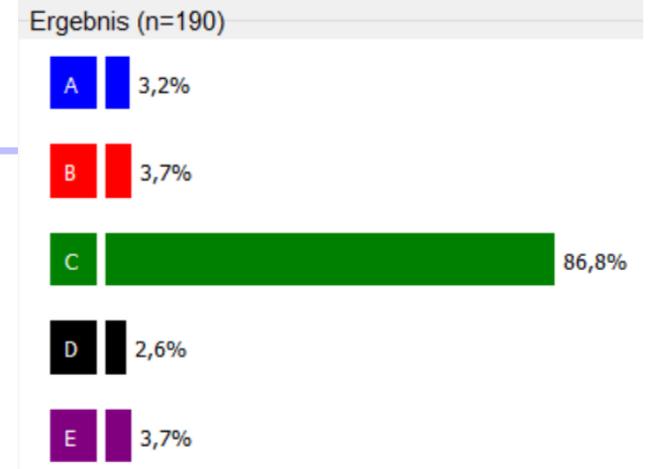


Begriff	Nie gehört	Gehört	Kann ich erklären
Logarithmus			
Kartesisches Produkt			
Geometrische Reihe			
Kapitalwert			
Simplex-Algorithmus			

Testfrage: Griechische Buchstaben

ζ zeta Σ ,
 ξ xi
 η H P

Wie spricht man die Buchstaben γ , λ , ψ , σ , Θ aus?



- A alpha, lambda, phi, delta, Omega
- B beta, lambda, psi, delta, Theta
- C gamma, lambda, psi, sigma, Theta
- D der zweite heißt lambda, bei den anderen bin ich mir nicht sicher
- E ich kenne keinen der Buchstaben genau

Testfrage: Griechische Buchstaben

Wie spricht man die Buchstaben γ , λ , ψ , σ , Θ aus?

-
- A alpha, lambda, phi, delta, Omega
 - B beta, lambda, psi, delta, Theta
 - C gamma, lambda, psi, sigma, Theta
 - D der zweite heißt lambda, bei den anderen bin ich mir nicht sicher
 - E ich kenne keinen der Buchstaben genau
-

Richtig: C

Grundlagen und Arithmetik

Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ rationale Zahlen, Brüche

↑ Zähler
↓ Nenner



Auf dem Zahlenstrahl: Viele Nicht-Brüche
irrationale Zahlen

Brüche und irrationale Zahlen ergeben
reelle Zahlen \mathbb{R}

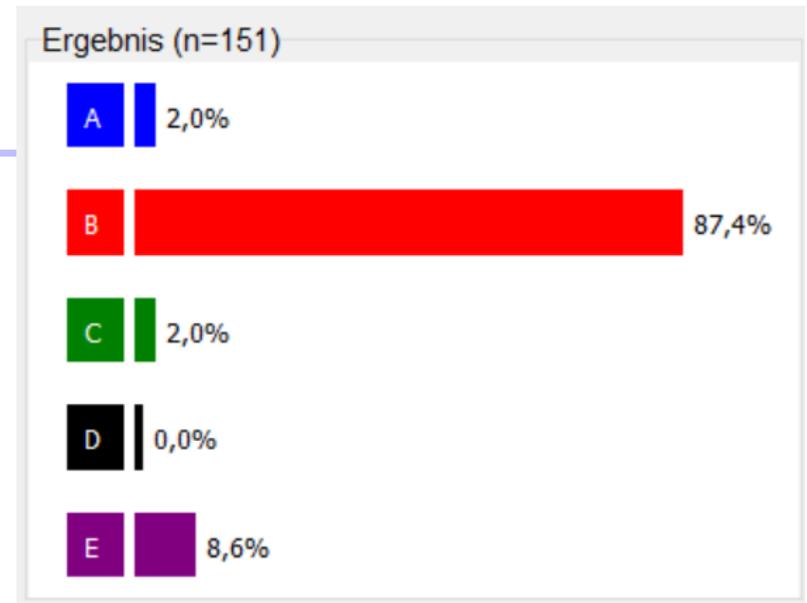
Grundlagentest Bruchrechnen!

Testfrage: Bruchrechnung 1

Wie lautet das Ergebnis des folgenden Ausdrucks
(Rechnung ohne Taschenrechner)?

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{2}{3}}$$

-
- A $\frac{3}{5}$
 - B 7
 - C $\frac{5}{36}$
 - D $\frac{9}{15}$
 - E Keine Ahnung / Keine der Lösungen oben!
-



Richtig: B

Testfrage: Bruchrechnung 2

Erni, Bert und das Krümelmonster essen Kekse. Ernie isst $\frac{3}{2}$ Kekse, Bert ist $\frac{4}{3}$ der Menge die Ernie isst, und das Krümelmonster isst $\frac{6}{7}$ der Menge, die Bert und Ernie zusammen essen.

Wieviele Kekse essen alle zusammen (Rechnung ohne Taschenrechner)?

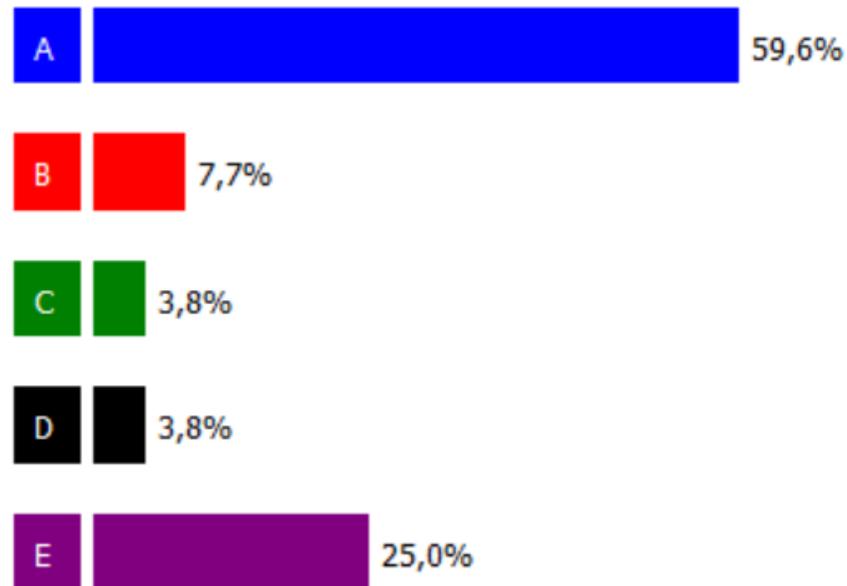
A $\frac{13}{2}$

B 6

C $\frac{57}{14}$

D $\frac{54}{7}$

E Ich habe ein anderes Ergebnis oder ich weiß nicht wie das geht.



Testfrage: Bruchrechnung 2

Erni, Bert und das Krümelmonster essen Kekse. Ernie isst $\frac{3}{2}$ Kekse, Bert ist $\frac{4}{3}$ der Menge die Ernie isst, und das Krümelmonster isst $\frac{6}{7}$ der Menge, die Bert und Ernie zusammen essen.

Wieviele Kekse essen alle zusammen (Rechnung ohne Taschenrechner)?

-
- A $\frac{13}{2}$
 - B 6
 - C $\frac{57}{14}$
 - D $\frac{54}{7}$
 - E Ich habe ein anderes Ergebnis oder ich weiß nicht wie das geht.
-

Richtig: A

Testfrage: Bruchrechnung 3

Falls $x, y \neq -1$ und $x \neq \pm y$ gilt: Wie kann man den folgenden Ausdruck noch schreiben?

$$\frac{\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}}{\frac{x-y}{x+y}}$$

-
- A $\frac{x+y}{xy+x+y+1}$
- B $\frac{x+y}{x-y}$
- C $x + y$
- D $\frac{(x+1)(y+1)}{x+y}$
- E Ich habe ein anderes Ergebnis oder ich weiß nicht wie das geht.
-

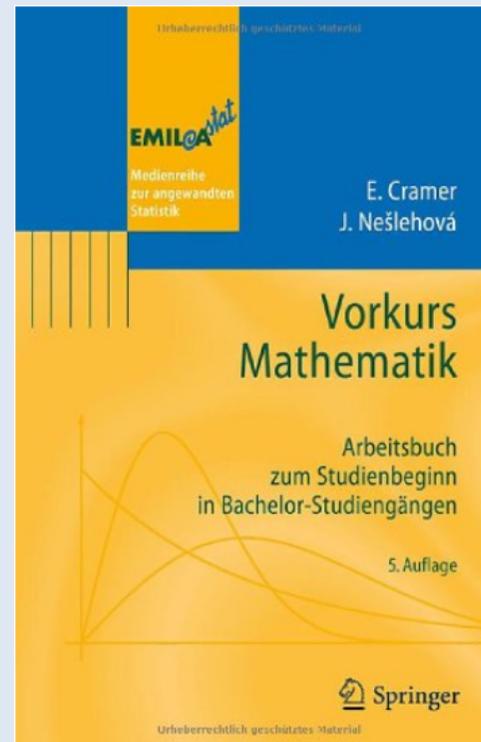
Richtig: A

Ihr Ergebnis:

- ▶ 3 Antworten richtig: Sie können Bruchrechnen!
- ▶ 2 Antworten richtig: Rechnen Sie mindestens die Hälfte der Aufgaben!
- ▶ Nur 1 Antwort richtig: Rechnen Sie alle Aufgaben!
- ▶ Keine Antwort richtig: Rechnen Sie alle Aufgaben und suchen Sie noch nach weiterem Übungsmaterial zu diesem Thema!

Übungsmaterial

Zu diesem Thema:
Aufgaben 3.1 - 3.7
aus



<http://goo.gl/qHwN7X>

- 1 Grundlegende Bausteine
- 2 Aussagenlogik
- 3 Mengen
- 4 Folgen und Reihen
- 5 Reelle Funktionen
- 6 Differentialrechnung
- 7 Integration
- 8 Finanzmathematik
- 9 Lineare Algebra
- 10 Lineare Programme



- 1 Grundlegende Bausteine
 - Reelle Zahlen
 - Ganzzahlige Potenzen
 - Algebraische Umformungen
 - Brüche
 - Nichtganzzahlige Potenzen
 - Logarithmen
 - Notation von Summen



„Vernünftige“ Zahlen

- ▶ **Natürliche** Zahlen: \mathbb{N}
- ▶ **Ganze** Zahlen; \mathbb{Z}
- ▶ **Rationale** Zahlen: \mathbb{Q}
- ▶ Rationale Zahlen liegen unendlich dicht auf dem Zahlenstrahl

Aber

- ▶ Aber: Lösungen von Gleichungen wie

$$x^2 = 2$$

haben keine rationale Lösung

- ▶ Folge: Es gibt auch **irrationale Zahlen**: Z.B. $\sqrt{2}$

1. Grundlagen

1.1. Reelle Zahlen

1.2. Ganzzahlige Potenzen

1.3. Algebraische Umformungen

1.4. Brüche

1.5. Nichtganzzahlige Potenzen

1.6. Logarithmen

1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



Zahldarstellung über Vielfache von 10

- ▶ Die meisten Leute schreiben Zahlen heute im **Dezimalsystem**
- ▶ Damit möglich: Schreiben jeder natürlichen Zahl mit Kombinationen der Ziffern $0, 1, \dots, 9$
- ▶ z.B.: $2009 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
- ▶ Mit Dezimalkomma: Schreiben rationaler Zahlen möglich
- ▶ z.B.: $2,36 = 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 6 \cdot \frac{1}{10^2}$ (**endlicher Dezimalbruch**)
- ▶ z.B.: $\frac{10}{3} = 3,333\dots = 3 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^3} + \dots$ (**unendlicher Dezimalbruch**)
- ▶ Jede rationale Zahl kann man über einen **periodischen** Dezimalbruch darstellen

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



- ▶ Eine **reelle Zahl** hat die Form

$$x = m, a_1 a_2 a_3 \dots$$

- ▶ Dabei: m : Ganze Zahl
- ▶ und a_i (mit $i = 1, 2, \dots$) ist unendliche Folge von Ziffern von 0 bis 9
- ▶ Damit: Nichtperiodische Dezimalbrüche heißen **irrationale Zahlen**
- ▶ Beispiele:

$$\sqrt{2}, \quad -\sqrt{17}, \quad \pi, \quad 0,1121121112\dots$$

- ▶ Rechenoperationen $+$, $-$, \cdot , $:$ mit reellen Zahlen ergeben wieder reelle Zahlen
- ▶ Einzige Ausnahme: $\frac{p}{0}$ ist keine reelle Zahl

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



- ▶ Abkürzung: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ oder $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$
- ▶ Allgemein:

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

- ▶ Rechenregeln:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

- ▶ Achtung: im allgemeinen

$$(a + b)^r \neq a^r + b^r$$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme

Zinseszinsen

- ▶ Anlage von 1000 € auf Bankkonto
- ▶ Verzinsung jeweils am Jahresende 2,5 %
- ▶ Zinsen nach einem Jahr: $1000 \cdot 2,5 \% = 25$
- ▶ Kontostand am Jahresende:

$$1000 + 1000 \cdot 2,5 \% = 1000 \cdot (1 + 0,025) = 1000 \cdot 1,025$$

- ▶ Kontostand am Ende des zweiten Jahres:

$$\begin{aligned} & (1000 \cdot 1,025) + (1000 \cdot 1,025) \cdot 0,025 \\ &= 1000 \cdot 1,025 \cdot (1 + 0,025) \\ &= 1000 \cdot 1,025 \cdot 1,025 = 1000 \cdot 1,025^2 \end{aligned}$$

- ▶ Allgemein: Kontostand ist bei Anfangskapital K und einem Zinssatz von i nach n Jahren

$$K_n = K \cdot (1 + i)^n$$



1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



Es gilt für beliebige Zahlen a , b , c :

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + 0 = a$
4. $a + (-a) = 0$
5. $ab = ba$
6. $(ab)c = a(bc)$
7. $1 \cdot a = a$
8. $aa^{-1} = 1$ (für $a \neq 0$)
9. $(-a)b = a(-b) = -ab$
10. $(-a)(-b) = ab$
11. $a(b + c) = ab + ac$
12. $(a + b)c = ac + bc$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



Algebraische Ausdrücke

- ▶ Beispiel für einen **algebraischen Ausdruck**:

$$4x^2y^2 + 7y^4x - 9xy + 11xy^4$$

- ▶ Die einzelnen Summanden ($4x^2y^2$, $-9xy$, usw.) heißen **Terme** des Ausdrucks
- ▶ Faktoren vor den Buchstaben (4, 7, -9 , 11): **Koeffizienten**
- ▶ Terme, die sich maximal durch Koeffizienten unterscheiden, genannt **Koeffizienten von der gleichen Art**, können zusammengefasst werden:

$$7y^4x + 11xy^4 = 18xy^4$$

Binomische Formeln

- ▶ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ▶ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ▶ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



Primfaktorzerlegung

- ▶ Zahlen können multiplikativ in **Primfaktoren** zerlegt werden,
- ▶ Beispiel

$$64 = 8 \cdot 8 \quad \text{oder} \quad 1848 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

Faktorisierung algebraischer Ausdrücke

- ▶ Analog bei algebraischen Ausdrücken:
Zerlegung in **irreduzible Faktoren**
- ▶ Beispiele:

$$5a^2b^3 - 15ab^2 = 5 \cdot a \cdot b^2 \cdot (ab - 3)$$

$$16a^4b^2 - 9b^4 = b^2 \cdot (4a^2 - 3b) \cdot (4a^2 + 3b)$$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



- Division zweier Zahlen ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) kann durch **Bruch** geschrieben werden

$$a : b = \frac{a}{b} = a/b$$

- Rechenregeln ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \quad (b, c \neq 0)$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{(-a) \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{a}{b}$$

$$-\frac{a}{b} = (-1) \frac{a}{b} = \frac{(-1)a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{Achtung: } \neq \frac{a+b}{c+c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

Achtung:
 $2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4}$
 gemischte Zahl

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

Achtung:
 $a\frac{3}{4} = a \cdot \frac{3}{4}$
 $2\frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{3}{4}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Achtung:

$$\frac{a}{c/b} \rightarrow \begin{cases} a : \frac{c}{b} = \frac{ac}{b} \\ \frac{a}{c} : c = \frac{a}{c} : \frac{1}{1/c} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot c} = \frac{a}{bc} \end{cases}$$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

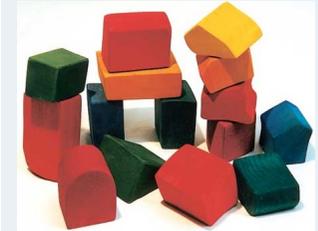
6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



- ▶ Potenz mit a^x , wenn $a \geq 0$ und $x = 1/2$: **Quadratwurzel**
- ▶ Schreibweise:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \quad \text{wenn } a \geq 0$$

- ▶ Rechenregeln für $a \neq 0$ und $b > 0$:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

- ▶ Achtung: Im allgemeinen:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



- ▶ Problem: Was bedeutet z.B. $5^{\frac{1}{3}}$?
- ▶ Damit Rechenregeln gültig bleiben: $5^{\frac{1}{3}}$ ist Lösung der Gleichung $x^3 = 5$
- ▶ Also Allgemein ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^1 = a$$

- ▶ Schreibweise:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

- ▶ Allgemeine rationale Exponenten ($a \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$):

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



- ▶ Wie löst man die Gleichung $a^x = b$ nach x auf?
(dabei soll gelten $a, b > 0$ und $a \neq 1$)
- ▶ Neues Symbol: Der **Logarithmus von b zur Basis a** :

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

- ▶ Beobachtungen:

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a (a^n) = n$

- ▶ Rechenregeln:

$$\log_a (c \cdot d) = \log_a c + \log_a d$$

$$\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

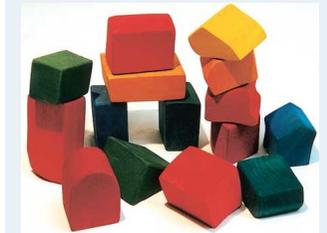
6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



Spezielle Logarithmen:

- ▶ $\log_2 x = \text{ld } x$ **Logarithmus dualis**
- ▶ $\log_{10} x = \log x$ **Dekadischer Logarithmus**
- ▶ $\log_e x = \ln x$ **Logarithmus naturalis**

Umrechnung von Basen

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Beispiel

- ▶ Nach wieviel Jahren verdoppelt sich ein Anfangskapital K mit einem jährlichen Zins von 5%?
- ▶ Lösung:

$$\begin{aligned} 2K &= K \cdot (1 + 5\%)^n = K \cdot 1,05^n \\ \Leftrightarrow 1,05^n &= 2 \\ \Leftrightarrow n &= \log_{1,05} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2 \end{aligned}$$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



- ▶ Oft sinnvoll: Abkürzen von längeren Summen durch das **Summenzeichen** \sum (Großes griechisches Sigma)
- ▶ Beispiel: Summe von 6 durchnummerierten Zahlen:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = \sum_{i=1}^6 N_i$$

Sprechweise: „Summe von i gleich 1 bis 6 über N_i “

- ▶ Obere und untere Summationsgrenze kann variieren, z.B.

$$\sum_{i=p}^q a_i = a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$$

- ▶ Auch konkrete Berechnungsvorschriften sind möglich, z.B.

$$\sum_{i=3}^8 i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



Rechenregeln für das Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \quad \text{Additivität}$$

$$\sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{Homogenität}$$

► Damit leicht zu zeigen (Setze $\mu_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$):

$$\sum_{i=1}^n (a_i - \mu_x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i - \mu_x)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) - n \cdot \mu_x^2$$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



- ▶ Analog zum Summenzeichen:
Das **Produktzeichen** \prod

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

- ▶ Zum Beispiel:

$$\prod_{i=1}^2 (x + (-1)^i) = (x - 1)(x + 1)$$

- ▶ Spezielle Abkürzung:

$$\prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n! \quad \text{„n Fakultät“}$$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



- ▶ Man definiert den **Binomialkoeffizienten** als:

$$\binom{m}{k} = \frac{\prod_{i=(m-k+1)}^m i}{\prod_{j=1}^k j} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$$

- ▶ Wobei $0! = 1$ gesetzt wird. Also: $\binom{m}{0} = 1$

- ▶ Beispiel:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

- ▶ Rechenregeln:

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \quad \text{und} \quad \binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1}$$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



► Newtons **binomische Formel**

$$(a + b)^m = \binom{m}{0} a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \dots \\ + \binom{m}{m-1} a b^{m-1} + \binom{m}{m} b^m$$

► Kurzform:

$$(a + b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

► Zum Beispiel:

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme



- ▶ Beispielsituation: Daten in Tabellenform in n Spalten und m Zeilen
- ▶ Einzelne Einträge: a_{ij} mit $i \in 1, \dots, m$ und $j \in 1, \dots, n$
- ▶ Summe über alle Zahlen mit **Doppelsummen**:

$$\sum_{i=1}^m a_{i1} + \sum_{i=1}^m a_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^m a_{in} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)$$

- ▶ Es gilt:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$$

1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

2. Aussagenlogik

3. Mengen

4. Folgen und Reihen

5. Reelle Funktionen

6. Differenzieren

7. Integration

8. Finanzmathematik

9. Lineare Algebra

10. Lineare Programme