Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2016/17

Datum	WiMa für IM/BW	Nr.
05.10.2016	Einführung, R, Grundlagen	1
12.10.2016	Grundlagen, Aussagen	2
19.10.2016	Aussagen, Mengen, Relationen	3
26.10.2016	Folgen, Reihen	4
02.11.2016	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
09.11.2016	Differentialrechnung	6
16.11.2016	Differentialrechnung	7
23.11.2016	Integration	8
30.11.2016	FiMa	9
07.12.2016	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
14.12.2016	Determinanten, Eigenwerte	11
21.12.2016	Lineare Optimierung	12
28.12.2016	Weihnachten	
04.01.2017	Weihnachten	
11.01.2017	Puffer, Wiederholung	13
18.01.2017	Beginn derPrüfungszeit	

```
News:
-------

Übungsgruppe Etschberger:
Mi 12.10.: muss leider entfallen...

Übungsgruppen Burkart:
Do. (13.10.) Start einmalig ab 16:00
(16:00-17:30 Uhr und 17:30-19:00 Uhr).
(trotzdem: Raum W2.14)

VL nächste Woche (19.10.2016):
Hörsaal B2.14 belegt (dies academicus)
Aufteilen auf 2 Hörsäle im
W-Gebäude; Videoübertragung?
```

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Potenzieren

$a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$

$\in$: „ist Element von"

$x = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} = a^n$

n: Exponent, „a hoch n"

a: Basis

„n-te Potenz von A"

Beispiele: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $10^{12} = 1$ Billion

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

Rechenregeln: $a, b \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N}$

(1) $\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$

Achtung: $a^n + b^n \neq (a+b)^n$

(z.B. $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
$(3+4)^2 = 7^2 = 49$)

(2) $\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$

(3) $\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}}$

z.B. $2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}$

$3^9 : 3^3 = \frac{\cancel{3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3 \cdot 3 \cdot 3}} = 3^{9-3} = 3^6$

Beobachtungen: $(a \neq 0)$: $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$ $\quad \boxed{a^0 = 1}$

$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

(4) $\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$

Achtung: $a^{n^m} = a^{(n^m)} \neq (a^n)^m$

$2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$

$(2^3)^2 = 8^2 = 2^{3 \cdot 2} = 64$

Radizieren (Wurzel ziehen) $\quad (a > 0, \quad n \in \mathbb{N})$

Gesucht: x mit $x^n = a$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt[n]{a}$

n: Wurzelexponent

a: Radikand

„n-te Wurzel aus a"

Überführen in Potenzschreibweise

$x = \sqrt[n]{a} \quad \Rightarrow \quad x^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Was wäre, wenn $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ und die Potenzrechenregeln für alle reelle Exponenten gelten würden

$x^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{1/n}\right)^n \overset{\text{Regel (4)}}{=} a^{1/n \cdot n} = a^1 = a$

$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{1/n}}$

Beispiel: $x = \sqrt[3]{27} = 27^{1/3} = 3 \quad \left(= (3 \cdot 3 \cdot 3)^{1/3} = (3^3)^{1/3} = 3^{3 \cdot 1/3} = 3^1 = 3 \right)$

Achtung: Unterscheide $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

Beispiele: $(a, b > 0)$

- $\sqrt[m]{a^n} = (a^n)^{1/m} = a^{n \cdot 1/m} = a^{\frac{n}{m}}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{1/n + 1/m} = a^{\frac{m+n}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (ab)^{1/n} = \sqrt[n]{ab}$

Achtung: $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$

(z.B. $\sqrt[2]{9} + \sqrt[2]{16} = 3 + 4 = 7$

$\sqrt[2]{9+16} = \sqrt[2]{25} = 5$)

Schreibweise: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ „Quadratwurzel"

Beobachtung: geg.: $x^n = a$ $(n \in \mathbb{N})$

$a > 0$: $\begin{cases} n \text{ gerade} \Rightarrow x = \pm\sqrt[n]{a} \\ n \text{ ungerade} \Rightarrow x = +\sqrt[n]{a} \end{cases}$

[$x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$]

[$x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$]

$a < 0$: $\begin{cases} n \text{ gerade} \Rightarrow \text{keine Lsg} \\ n \text{ ungerade} \Rightarrow x = \sqrt[n]{a} \end{cases}$

[$x^4 = -16 \Rightarrow$ keine Lsg]

[$x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$]

Termine, Personen, Räume

Veranstaltungen zur Mathematik für BW/IM Wintersemester 2016/17					
Was?	**Wer?**	**Tag**	**Uhrzeit**	**Wo?**	**Ab wann?**
Vorlesung Mathematik	Etschberger	Mi	14.00-17.00	B2.14	05.10.2016
Übung Mathematik	Korb	Di	9.50-11.20	W1.04	18.10.2016
Übung Mathematik	Korb	Di	11.30-13.00	W1.10	18.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Di	11.30-13.00	W2.10	11.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Mi	11.30-13.00	W2.14	12.10.2016
Übung Mathematik	Etschberger	Mi	17.00-18.30	B4.02	12.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Do	11.30-13.00	?	13.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Do	14.00-15.30	W4.04	13.10.2016
Übung Mathematik	Burkart	Do	12.15-14.00	W2.14	13.10.2016
Übung Mathematik	Burkart	Do	14.00-15.30	W2.14	13.10.2016
Offener Matheraum	???/Etschberger	Fr?	???	B3.05	ca. 21.10.
Offener Matheraum	???/Jansen	Fr?	???	B3.05	ca. 21.10.
Veranstaltungen für Teilnehmer der Statistik-Klausur im Januar 2017					
Was?	**Wer?**		**Wann?**	**Wo?**	**Ab wann?**
Vorlesung Statistik	Wins	Di	14.00-17.00	W3.02	04.10.2016
Statistik Übung	Ivanov	Do	14.00-15.30	J3.19	13.10.2016
Statistik Übung	Ivanov	Do	15.40-17.10	J3.19	13.10.2016
Statistik Tutorium	Jansen	Mi	14.00-15.30	W1.06	12.10.2016

Gliederung

Grundlagentest Potenzen und Wurzeln!

Testfrage: Klammern 2

Welches Ergebnis liefert Ausmultiplizieren des Ausdrucks

$$(2x - 2y)(2x - 2y)(x - y)?$$

Testfrage: Klammern 2

Welches Ergebnis liefert Ausmultiplizieren des Ausdrucks

$$(2x - 2y)(2x - 2y)(x - y)?$$

$4 \cdot (x-y)(x-y)(x-y)$

$= 4 \cdot (x^2 - 2xy + y^2)(x-y)$

$= 4 \cdot (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)$

$= \ldots$ B

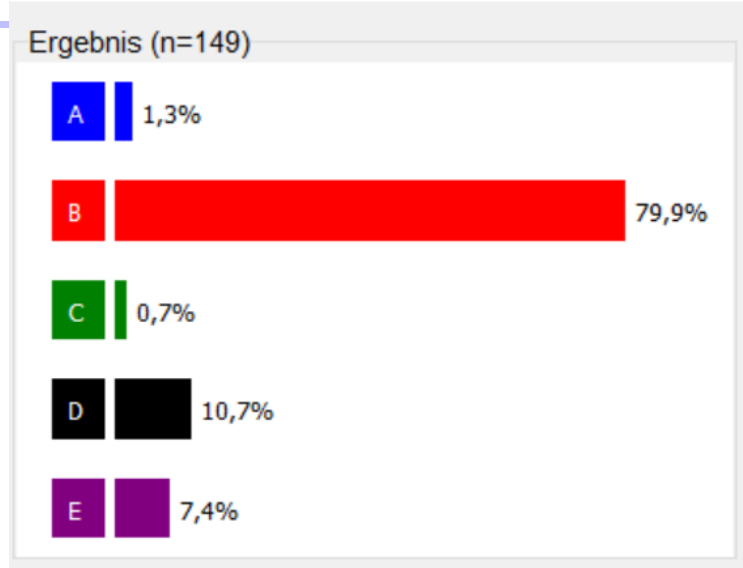
A $x^3 - y^3$

B $4x^3 - 12x^2y + 12xy^2 - 4y^3$ ✓

C $16x^3 - 16y^3$

D $4x^3 - 4y^3$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Testfrage: Klammern 2

Welches Ergebnis liefert Ausmultiplizieren des Ausdrucks

$$(2x-2y)(2x-2y)(x-y)?$$

- A $x^3 - y^3$
- B $4x^3 - 12x^2y + 12xy^2 - 4y^3$
- C $16x^3 - 16y^3$
- D $4x^3 - 4y^3$
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: B

Testfrage: Potenzen 1

Fassen Sie den folgenden Ausdruck für $a \neq 0$ zusammen:

$$-121ab^3 - \left(11a^2b\right)^2 \cdot \left(-2a^{-3}b\right)$$

Fassen Sie den folgenden Ausdruck für $a \neq 0$ zusammen:

$$-121ab^3 - \left(11a^2b\right)^2 \cdot \left(-2a^{-3}b\right)$$

$= -121ab^3 + 121 \cdot a^4 b^2 \cdot 2 \cdot a^{-3} b$

$= -121ab^3 + 242\, a\, b^3 = 121ab^3$ C

A $-134ab^3$

B $-121ab^3 + 22\frac{b^3}{a}$

C $121ab^3$

D $-99ab^3$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Testfrage: Potenzen 1

Fassen Sie den folgenden Ausdruck für $a \neq 0$ zusammen:

$$-121ab^3 - \left(11a^2b\right)^2 \cdot \left(-2a^{-3}b\right)$$

- (A) $-134ab^3$
- (B) $-121ab^3 + 22\frac{b^3}{a}$
- (C) $121ab^3$
- (D) $-99ab^3$
- (E) Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: C

Testfrage: Wurzeln 1

Fassen Sie den folgenden Ausdruck für $x + y \neq 0$ zusammen:

$$\frac{3y^{a+2}}{\sqrt{2x^2 + 4xy + 2y^2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{xy^{a+1}}{x+y}$$

Testfrage: Wurzeln 1

Fassen Sie den folgenden Ausdruck für $x + y \neq 0$ zusammen:

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{3y^{a+2}}{\sqrt{2x^2 + 4xy + 2y^2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{xy^{a+1}}{x+y}$$

$$= \frac{3y^{a+2}}{\sqrt{2}\cdot\underbrace{\sqrt{x^2+2xy+y^2}}_{x+y}} + \frac{3xy^{a+1}}{\sqrt{2}\,(x+y)}$$

$$= \frac{3y^{a+1}\cdot y + 3y^{a+1}\cdot x}{\sqrt{2}\,(x+y)} = \frac{3y^{a+1}\cancel{(x+y)}}{\sqrt{2}\;\cancel{(x+y)}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,y^{a+1} \quad \text{D}$$

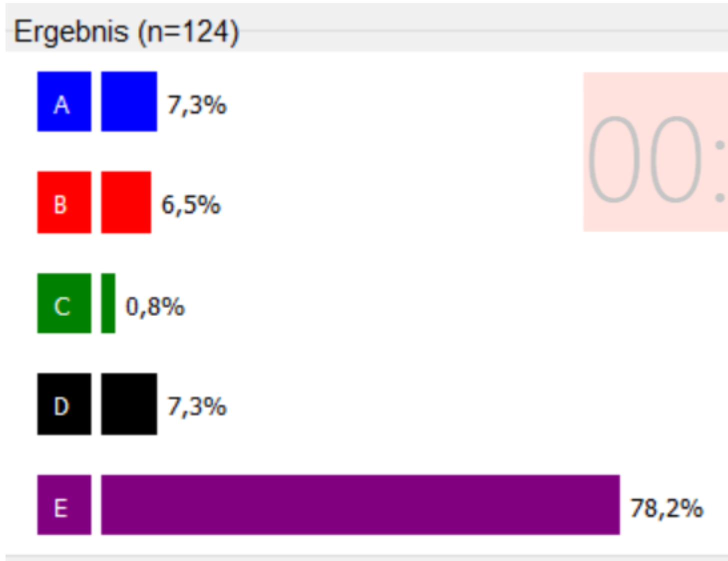
A $\frac{3y^{a} + 3\sqrt{2}x}{x+y}$

B $\frac{3\sqrt{2}\cdot y^{a+1}}{x+y}$

C $\frac{3y}{\sqrt{2}}$

D $\frac{3y^{a+1}}{\sqrt{2}}$ ✓

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Testfrage: Wurzeln 1

Fassen Sie den folgenden Ausdruck für $x + y \neq 0$ zusammen:

$$\frac{3y^{a+2}}{\sqrt{2x^2 + 4xy + 2y^2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{xy^{a+1}}{x+y}$$

A $\frac{3y^a + 3\sqrt{2}x}{x+y}$

B $\frac{3\sqrt{2} \cdot y^{a+1}}{x+y}$

C $\frac{3y}{\sqrt{2}}$

D $\frac{3y^{a+1}}{\sqrt{2}}$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: D

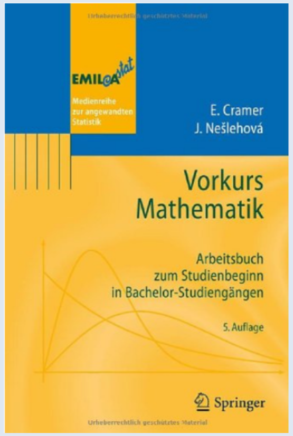
Testauswertung:

Ihr Ergebnis:

- 3 Antworten richtig: Alles im Lot mit Potenzen und Wurzeln!
- 2 Antworten richtig: Rechnen Sie mindestens die Hälfte der Aufgaben aus einem der beiden Bücher!
- Nur 1 Antwort richtig: Rechnen Sie mindestens alle Aufgaben aus einem der Bücher
- Keine Antwort richtig: Rechnen Sie alle Aufgaben aus beiden Büchern!

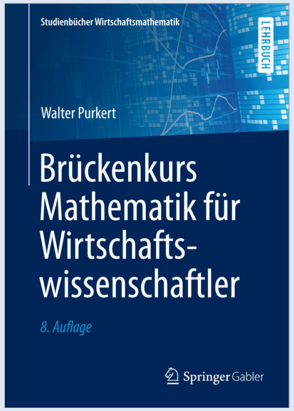
Übungsmaterial

Aufgaben 3.9 - 3.14 aus



http://goo.gl/qHwN7X

S. 98ff: Aufg. zu Kapitel 2: 1-8, 14-21 aus



http://goo.gl/2D1oYo

L

Logarithmen $(a, b > 0)$

Gesucht: x mit $a^x = b$

„a hoch wieviel ist b?"

Beispiele: $2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3$

$10^x = 1$ Billion $\Leftrightarrow x = 12$

$5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2$
$5^x = 125 \Leftrightarrow x = 3$
$5^x = 124 \Leftrightarrow x =$ keine Ahnung, vermutlich bisschen weniger als 3

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ „a hoch wieviel ist b?"

„Logarithmus zur Basis a von b"

Beispiele: $\log_2 8 = 3$ („2 hoch wieviel ist 8?")

$\log_{10} 1 \text{ Billion} = 12$

$\log_5 125 = 3$, $\log_5 124 \approx 2.995$

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

Rechenregeln

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$
$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a(b) - \log_a(c)$$

Bezeichnungen: $\log_e a = \ln a$ Logarithmus naturalis

$\hookrightarrow$ Eulersche Zahl 2.71828...

$\log_{10} a = \log a$ dekadischer Log. 10er Log.

$\log_2 a = \operatorname{ld} a$ Logarithmus dualis 2er Log.

Beliebige Logarithmen mit „ln"

z.B. $5^x = 124 \quad / \ln(\ldots)$

$\Leftrightarrow \ln(5^x) = \ln 124$

$\Leftrightarrow x \cdot \ln 5 = \ln 124$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 124}{\ln 5}$

allgemein: $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

z.B. $\log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3$

Aussagenlogik

Axiom: Grundtatsache, Vorausgesetzt, nicht zu beweisen

z.B.: jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger

Definition: Formulierung, Abkürzung, weder wahr noch falsch

z.B.: $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} = a^n$

Aussage (Satz, Theorem, Lemma): Als wahr oder falsch identifizierbar

z.B.: $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1 \qquad (\text{wahr})$$

Gliederung

1 Grundlegende Bausteine

- Reelle Zahlen
- Ganzzahlige Potenzen
- Algebraische Umformungen
- Brüche
- Nichtganzzahlige Potenzen
- Logarithmen
- Notation von Summen

„Vernünftige" Zahlen

- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}$
- Ganze Zahlen; $\mathbb{Z}$
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q}$
- Rationale Zahlen liegen unendlich dicht auf dem Zahlenstrahl

Aber

- Aber: Lösungen von Gleichungen wie

$$x^2 = 2$$

  haben keine rationale Lösung
- Folge: Es gibt auch irrationale Zahlen: Z.B. $\sqrt{2}$

Zahldarstellung über Vielfache von 10

- Die meisten Leute schreiben Zahlen heute im Dezimalsystem
- Damit möglich: Schreiben jeder natürlichen Zahl mit Kombinationen der Ziffern $0, 1, \ldots, 9$
- z.B.: $2009 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
- Mit Dezimalkomma: Schreiben rationaler Zahlen möglich
- z.B.: $2{,}36 = 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 6 \cdot \frac{1}{10^2}$ (endlicher Dezimalbruch)
- z.B.: $\frac{10}{3} = 3{,}333\ldots = 3 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^3} + \ldots$ (unendlicher Dezimalbruch)
- Jede rationale Zahl kann man über einen periodischen Dezimalbruch darstellen

Definition reeller Zahlen

- Eine reelle Zahl hat die Form

$$x = m, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

- Dabei: m: Ganze Zahl
- und a_i (mit $i = 1, 2, \ldots$) ist unendliche Folge von Ziffern von 0 bis 9
- Damit: Nichtperiodische Dezimalbrüche heißen irrationale Zahlen
- Beispiele:

$$\sqrt{2}, \quad -\sqrt{17}, \quad \pi, \quad 0{,}1121121112\ldots$$

- Rechenoperationen $+, -, \cdot, :$ mit reellen Zahlen ergeben wieder reelle Zahlen
- Einzige Ausnahme: $\frac{p}{0}$ ist keine reelle Zahl

Ganzzahlige Potenzen

- Abkürzung: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ oder $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$
- Allgemein:

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots a$$

- Rechenregeln:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

- Achtung: im allgemeinen

$$(a+b)^r \neq a^r + b^r$$

Zinseszinsen

- Anlage von 1000 € auf Bankkonto
- Verzinsung jeweils am Jahresende 2,5 %
- Zinsen nach einem Jahr: $1000 \cdot 2{,}5\ \% = 25$
- Kontostand am Jahresende:

$$1000 + 1000 \cdot 2{,}5\ \% = 1000 \cdot (1 + 0{,}025) = 1000 \cdot 1{,}025$$

- Kontostand am Ende des zweiten Jahres:

$$\begin{aligned}&(1000 \cdot 1{,}025) + (1000 \cdot 1{,}025) \cdot 0{,}025 \\ &= 1000 \cdot 1{,}025 \cdot (1 + 0{,}025) \\ &= 1000 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}025 = 1000 \cdot 1{,}025^2\end{aligned}$$

- Allgemein: Kontostand ist bei Anfangskapital K und einem Zinssatz von i nach n Jahren

$$\boxed{K_n = K \cdot (1 + i)^n}$$

Wichtige Rechenregeln

Es gilt für beliebige Zahlen a, b, c:

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + 0 = a$
4. $a + (-a) = 0$
5. $ab = ba$
6. $(ab)c = a(bc)$
7. $1 \cdot a = a$
8. $aa^{-1} = 1$ (für $a \neq 0$)
9. $(-a)b = a(-b) = -ab$
10. $(-a)(-b) = ab$
11. $a(b + c) = ab + ac$
12. $(a + b)c = ac + bc$

Algebraische Ausdrücke

- Beispiel für einen algebraischen Ausdruck:

$$4x^2y^2 + 7y^4x - 9xy + 11xy^4$$

- Die einzelnen Summanden ($4x^2y^2$, $-9xy$, usw.) heißen Terme des Ausdrucks
- Faktoren vor den Buchstaben ($4,\ 7,\ -9,\ 11$): Koeffizienten
- Terme, die sich maximal durch Koeffizienten unterscheiden, genannt Koeffizienten von der gleichen Art, können zusammengefasst werden:

$$7y^4x + 11xy^4 = 18xy^4$$

Binomische Formeln

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Primfaktorzerlegung

- Zahlen können multiplikativ in Primfaktoren zerlegt werden,
- Beispiel

$$64 = 8 \cdot 8 \quad \text{oder} \quad 1848 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

Faktorisierung algebraischer Ausdrücke

- Analog bei algebraischen Ausdrücken:
  Zerlegung in irreduzible Faktoren
- Beispiele:

$$5a^2b^3 - 15ab^2 = 5 \cdot a \cdot b^2 \cdot (ab - 3)$$

$$16a^4b^2 - 9b^4 = b^2 \cdot \left(4a^2 - 3b\right) \cdot \left(4a^2 + 3b\right)$$

Brüche

- Division zweier Zahlen ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) kann durch Bruch geschrieben werden

$$a : b = \frac{a}{b} = a/b$$

- Rechenregeln ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \quad (b, c \neq 0)$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{(-a) \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{a}{b}$$

$$-\frac{a}{b} = (-1)\frac{a}{b} = \frac{(-1)a}{b} = \frac{-a}{b}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

- Potenz mit a^x, wenn $a \geqslant 0$ und $x = 1/2$: Quadratwurzel
- Schreibweise:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad \text{wenn } a \geqslant 0$$

- Rechenregeln für $a \neq 0$ und $b > 0$:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

- Achtung: Im allgemeinen:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

N-te Wurzeln

- Problem: Was bedeutet z.B. $5^{\frac{1}{3}}$?
- Damit Rechenregeln gültig bleiben: $5^{\frac{1}{3}}$ ist Lösung der Gleichung $x^3 = 5$
- Also Allgemein ($a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$):

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^1 = a$$

- Schreibweise:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

- Allgemeine rationale Exponenten ($a \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$):

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p}$$

- Wie löst man die Gleichung $a^x = b$ nach x auf?
(dabei soll gelten $a, b > 0$ und $a \neq 1$)
- Neues Symbol: Der Logarithmus von b zur Basis a:

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b$$

- Beobachtungen:
  - $\log_a a = 1$
  - $\log_a 1 = 0$
  - $\log_a (a^n) = n$
- Rechenregeln:

$$\log_a (c \cdot d) = \log_a c + \log_a d$$

$$\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Spezielle Logarithmen:

- $\log_2 x = \mathrm{ld}\, x$ Logarithmus dualis
- $\log_{10} x = \log x$ Dekadischer Logarithmus
- $\log_e x = \ln x$ Logarithmus naturalis

Umrechnung von Basen

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Beispiel

- Nach wieviel Jahren verdoppelt sich ein Anfangskapital K mit einem jährlichen Zins von 5%?
- Lösung:

$$\begin{aligned} & 2K = K \cdot (1 + 5\%)^n = K \cdot 1{,}05^n \\ \Leftrightarrow\quad & 1{,}05^n = 2 \\ \Leftrightarrow\quad & n = \log_{1{,}05} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2 \end{aligned}$$

Summenzeichen

- Oft sinnvoll: Abkürzen von längeren Summen durch das Summenzeichen $\sum$ (Großes griechisches Sigma)
- Beispiel: Summe von 6 durchnumerierten Zahlen:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = \sum_{i=1}^{6} N_i$$

Sprechweise: „Summe von i gleich 1 bis 6 über N_i"

- Obere und untere Summationsgrenze kann variieren, z.B.

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$$

- Auch konkrete Berechnungsvorschriften sind möglich, z.B.

$$\sum_{i=3}^{8} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$$

Rechenregeln für das Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \text{Additivität}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{Homogenität}$$

- Damit leicht zu zeigen (Setze $\mu_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$):

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - \mu_x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - \mu_x)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) - n \cdot \mu_x^2$$

Produktzeichen

- Analog zum Summenzeichen:
  Das Produktzeichen $\prod$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot$$

- Zum Beispiel:

$$\prod_{i=1}^{2} \left(x + (-1)^i\right) = (x-1)(x+1)$$

- Spezielle Abkürzung:

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! \qquad \text{„n Fakultät“}$$

- Man definiert den Binomialkoeffizienten als:

$$\binom{m}{k} = \frac{\prod\limits_{i=(m-k+1)}^{m} i}{\prod\limits_{j=1}^{k} j} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$$

- Wobei $0! = 1$ gesetzt wird. Also: $\binom{m}{0} = 1$
- Beispiel:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

- Rechenregeln:

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \quad \text{und} \quad \binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1}$$

Binomische Formel

- Newtons binomische Formel

$$(a+b)^m = \binom{m}{0} a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \cdots + \binom{m}{m-1} a b^{m-1} + \binom{m}{m} b^m$$

- Kurzform:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

- Zum Beispiel:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Doppelsummen

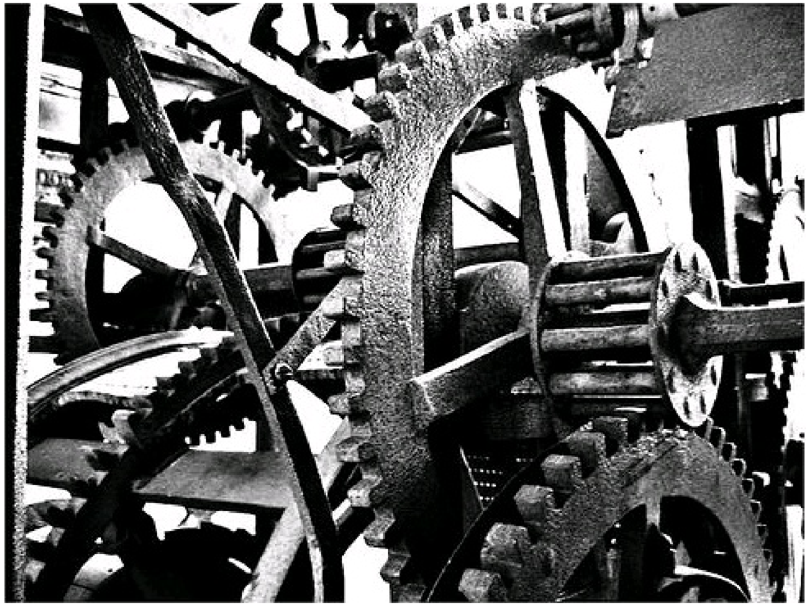
- Beispielsituation: Daten in Tabellenform in n Spalten und m Zeilen
- Einzelne Einträge: a_{ij} mit $i \in 1, \ldots, m$ und $j \in 1, \ldots, n$
- Summe über alle Zahlen mit Doppelsummen:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \ldots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right)$$

- Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Gliederung



2 Aussagenlogik

- Einführung
- Aussagenverknüpfungen
- Argumentationstechniken

Warum beschäftigen wir uns mit der Aussagenlogik?

- zahlreiche „Aussagen“ aus der Vorlesung erforden grundlegendes Verständnis der Aussagenlogik
- Grundlage der mathematischen Beweisführung
- Hilfreich zum Erlernen von Programmiersprachen

Wesentliche Lernziele

- Kenntniss der relevanten Begriffe wie Definition, Axiom, Satz und Beweis
- Verständnis der wesentlichen aussagenlogischen Operatoren
- Auswertung logischer Aussagen hinsichtlich der Eigenschaften „wahr“ oder „falsch“
- Beherrschung grundlegender Beweistechniken wie dem direkten und indirekten Beweis sowie der vollständigen Induktion