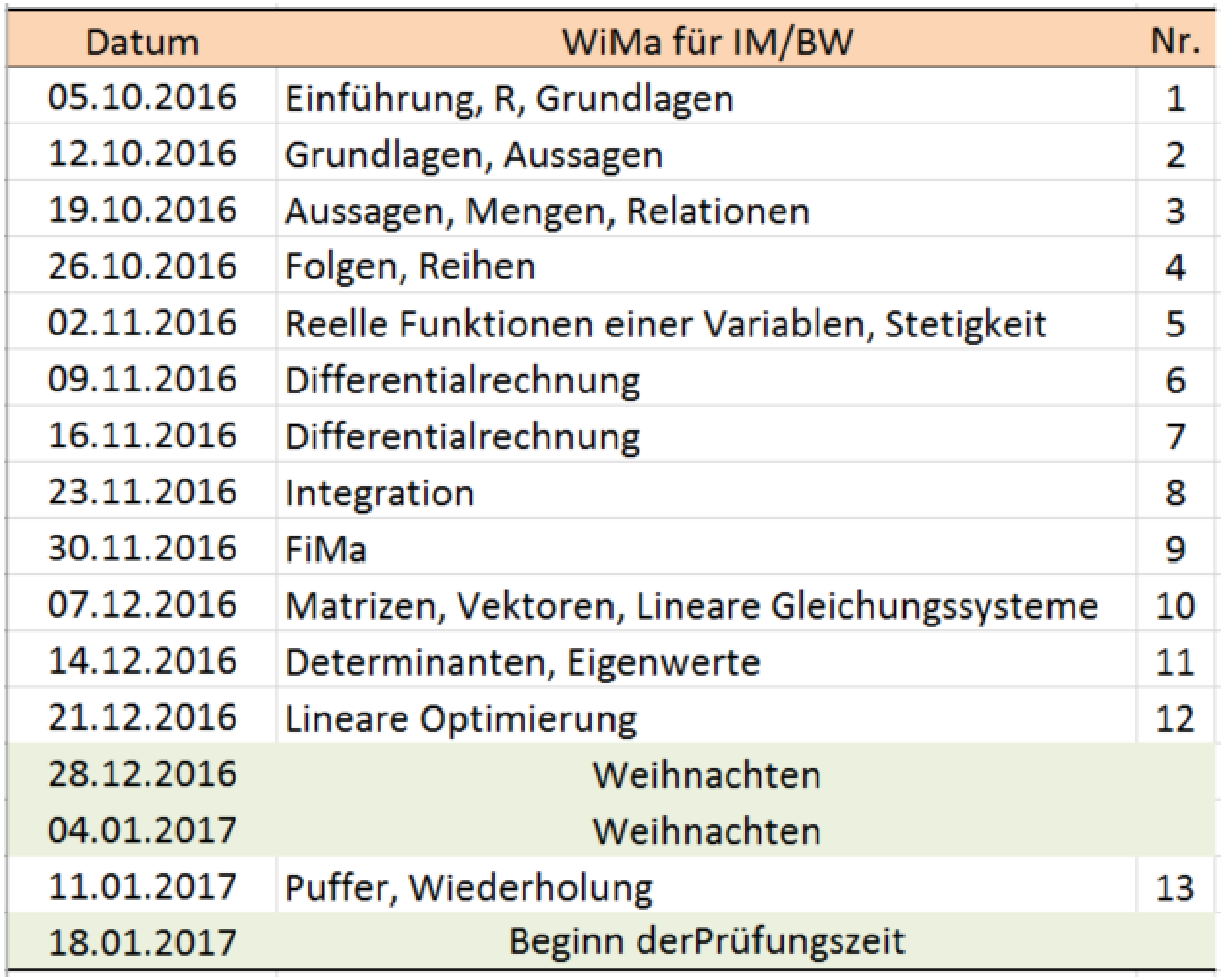
Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

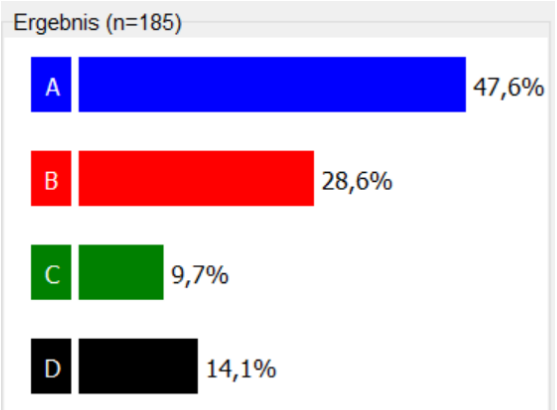
Wintersemester 2016/17



Datum	WiMa für IM/BW	Nr.
05.10.2016	Einführung, R, Grundlagen	1
12.10.2016	Grundlagen, Aussagen	2
19.10.2016	Aussagen, Mengen, Relationen	3
26.10.2016	Folgen, Reihen	4
02.11.2016	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
09.11.2016	Differentialrechnung	6
16.11.2016	Differentialrechnung	7
23.11.2016	Integration	8
30.11.2016	FiMa	9
07.12.2016	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
14.12.2016	Determinanten, Eigenwerte	11
21.12.2016	Lineare Optimierung	12
28.12.2016	Weihnachten	
04.01.2017	Weihnachten	
11.01.2017	Puffer, Wiederholung	13
18.01.2017	Beginn derPrüfungszeit	

Umfrage:

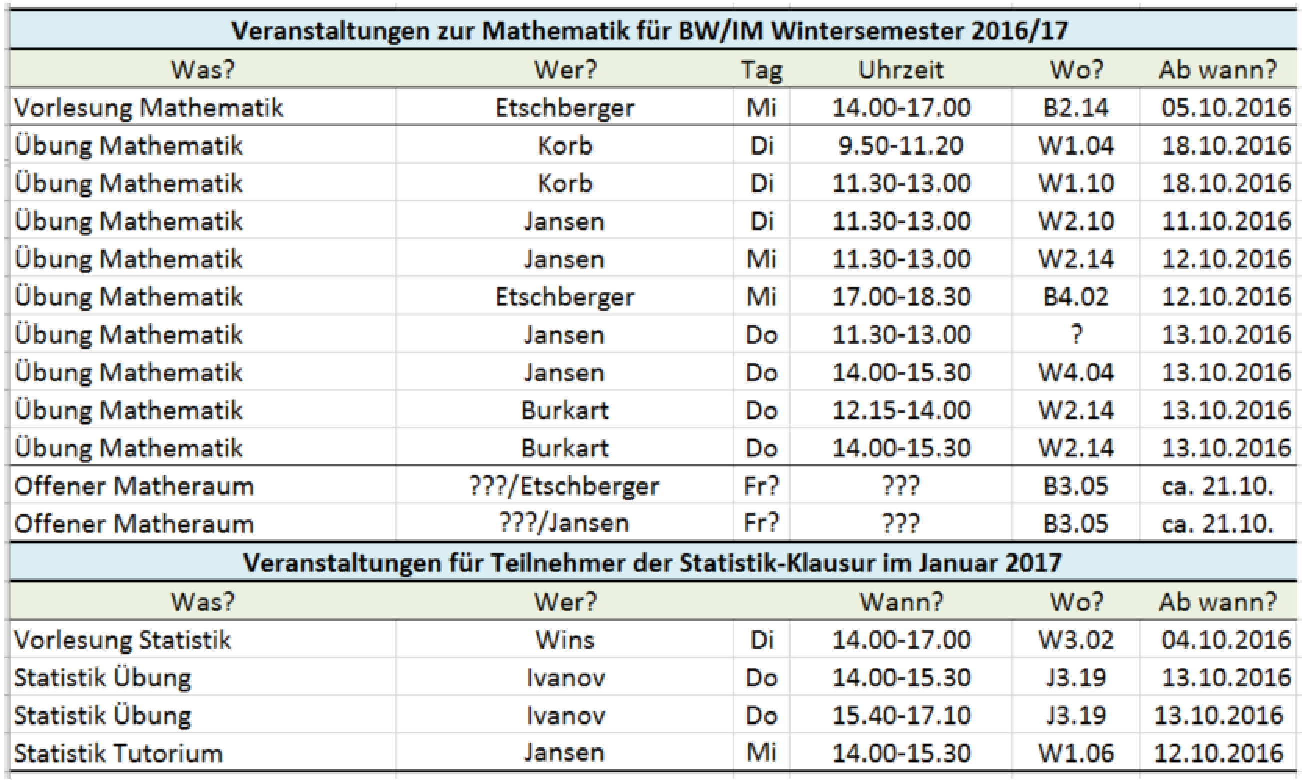
A) Ich sitze im W214
B) Ich sitze im W210
C) Ich sitze woanders
D) Mathe ist toll



Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Organisation

Termine, Personen, Räume



Veranstaltungen zur Mathematik für BW/IM Wintersemester 2016/17					
Was?	Wer?	Tag	Uhrzeit	Wo?	Ab wann?
Vorlesung Mathematik	Etschberger	Mi	14.00-17.00	B2.14	05.10.2016
Übung Mathematik	Korb	Di	9.50-11.20	W1.04	18.10.2016
Übung Mathematik	Korb	Di	11.30-13.00	W1.10	18.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Di	11.30-13.00	W2.10	11.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Mi	11.30-13.00	W2.14	12.10.2016
Übung Mathematik	Etschberger	Mi	17.00-18.30	B4.02	12.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Do	11.30-13.00	?	13.10.2016
Übung Mathematik	Jansen	Do	14.00-15.30	W4.04	13.10.2016
Übung Mathematik	Burkart	Do	12.15-14.00	W2.14	13.10.2016
Übung Mathematik	Burkart	Do	14.00-15.30	W2.14	13.10.2016
Offener Matheraum	???/Etschberger	Fr?	???	B3.05	ca. 21.10.
Offener Matheraum	???/Jansen	Fr?	???	B3.05	ca. 21.10.
Veranstaltungen für Teilnehmer der Statistik-Klausur im Januar 2017					
Was?	Wer?		Wann?	Wo?	Ab wann?
Vorlesung Statistik	Wins	Di	14.00-17.00	W3.02	04.10.2016
Statistik Übung	Ivanov	Do	14.00-15.30	J3.19	13.10.2016
Statistik Übung	Ivanov	Do	15.40-17.10	J3.19	13.10.2016
Statistik Tutorium	Jansen	Mi	14.00-15.30	W1.06	12.10.2016

Gliederung

Grundlagentest
Logarithmus!

Testfrage: Logarithmen 1

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\log_2(8) + \frac{\log_4(64)}{\log_{64}(4)} + \log_{\frac{1}{2}}\left(32^2\right)$$

Testfrage: Logarithmen 1

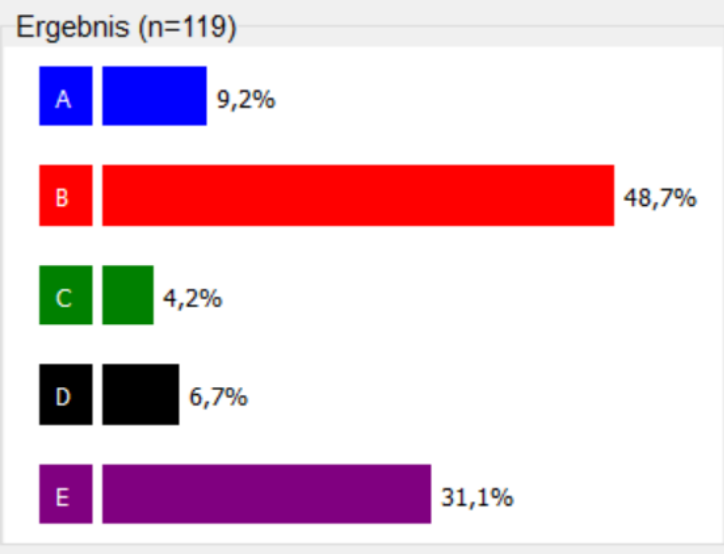
$a^x = b$

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\underbrace{\log_2(8)}_{3} + \frac{\overset{\nearrow 3}{\log_4(64)}}{\underset{\searrow 1/3}{\log_{64}(4)}} + \underbrace{\log_{\frac{1}{2}}(32^2)}_{2\cdot(-5)}$$

$3 + 9 - 10 = 2$ ✓

- A 36
- B 2 ✓
- C -5
- D -6
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Testfrage: Logarithmen 1

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\log_2(8) + \frac{\log_4(64)}{\log_{64}(4)} + \log_{\frac{1}{2}}\left(32^2\right)$$

- A 36
- B 2
- C -5
- D -6
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: B

Testfrage: Logarithmen 2

Fassen Sie folgende Ausdrücke für $x > 0$ zusammen.

$$2\log_a(3x) + \log_a(3x) + 4\log_a(2x) - \frac{1}{2}\log_a\left(64x^2\right)$$

Testfrage: Logarithmen 2

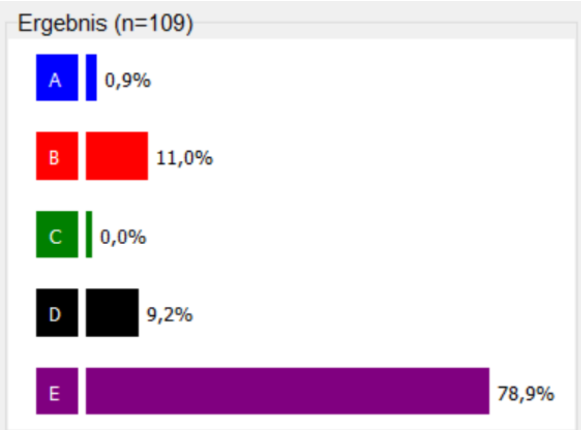
Fassen Sie folgende Ausdrücke für $x > 0$ zusammen.

$$2\log_a(3x) + \log_a(3x) + 4\log_a(2x) - \frac{1}{2}\log_a(64x^2)$$

$$= \log_a(3x)^2 + \log_a(3x) + \log_a(2x)^4 - \log_a(64x^2)^{1/2}$$

$$= \log_a\left(\frac{9x^2 \cdot 3\cancel{x} \cdot \overset{2}{\cancel{16}}x^4}{\cancel{8}\cancel{x}}\right) = \log_a(54x^6)$$

- A $\log_a x$
- B $\log_a(54x^6)$
- C $\log_a(17x - 32x^2)$
- D $6{,}5 \cdot \log_a(8x - 64x^2)$
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Testfrage: Logarithmen 2

Fassen Sie folgende Ausdrücke für $x > 0$ zusammen.

$$2\log_a(3x) + \log_a(3x) + 4\log_a(2x) - \frac{1}{2}\log_a\left(64x^2\right)$$

Ⓐ $\log_a x$

Ⓑ $\log_a\left(54x^6\right)$

Ⓒ $\log_a\left(17x - 32x^2\right)$

Ⓓ $6{,}5 \cdot \log_a\left(8x - 64x^2\right)$

Ⓔ Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: Ⓑ

Testfrage: Logarithmen 3

Was ist die Summe aller Lösungen folgender Gleichung? (Benutzen Sie keinen Taschenrechner)

$$\ln(x-1) - \tfrac{1}{3}\ln(8) = \tfrac{1}{5}\ln(32) - \ln(x+2)$$

Testfrage: Logarithmen 3

Was ist die Summe aller Lösungen folgender Gleichung? (Benutzen Sie keinen Taschenrechner)

Definiert für : $x>1$ und $x>-2$, also für $x>1$

$$\ln(x-1) - \tfrac{1}{3}\ln(8) = \tfrac{1}{5}\ln(32) - \ln(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1) - \ln(2) = \ln(2) - \ln(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln(2) + \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \ln[(x-1)\cdot(x+2)] = \ln 4$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

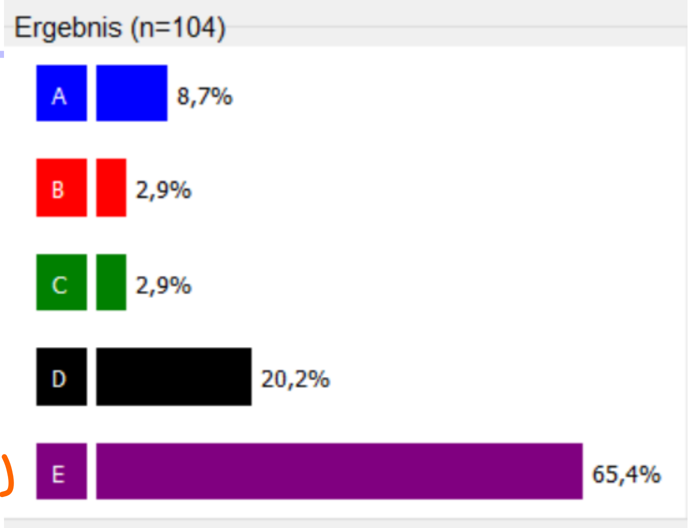
$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \tfrac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+24}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

2 → einzige Lsg.

-3 → keine Lsg. (nicht definiert)

- A -3
- B -1
- C 1
- D 2 ✓
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Testfrage: Logarithmen 3

Was ist die Summe aller Lösungen folgender Gleichung? (Benutzen Sie keinen Taschenrechner)

$$\ln(x-1) - \frac{1}{3}\ln(8) = \frac{1}{5}\ln(32) - \ln(x+2)$$

Ⓐ -3

Ⓑ -1

Ⓒ 1

Ⓓ 2

Ⓔ Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

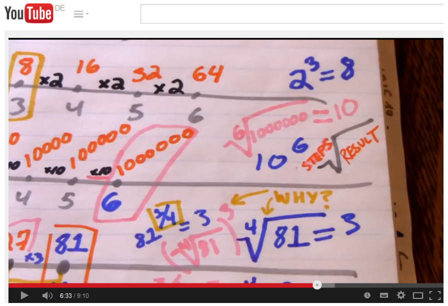
Richtig: Ⓓ

Testauswertung:

Ihr Ergebnis:

- 3 Antworten richtig: Alles im Lot mit Ihrem Logarithmus!
- 2 Antworten richtig: Rechnen Sie mindestens die Hälfte der Aufgaben aus einem der beiden Bücher!
- Nur 1 Antwort richtig: Rechnen Sie mindestens alle Aufgaben aus einem der Bücher
- Keine Antwort richtig: Rechnen Sie alle Aufgaben aus beiden Büchern!

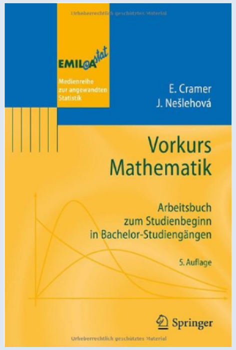
Video zum Thema:



`http://goo.gl/zhfB3t`

Übungsmaterial

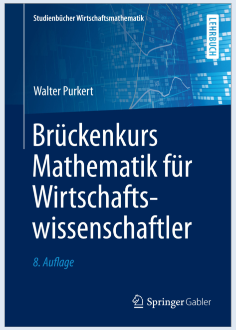
Aufgaben 3.16-3.18, 6.12-6.14 aus



EMIL@a-stat
Medienreihe zur angewandten Statistik
E. Cramer
J. Nešlehová
Vorkurs Mathematik
Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen
5. Auflage
Springer

`http://goo.gl/qHwN7X`

ab S. 99: Aufg. zu Kapitel 2: 22-24 aus



Studienbücher Wirtschaftsmathematik
LEHRBUCH
Walter Purkert
Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
8. Auflage
Springer Gabler

`http://goo.gl/2D1oYo`

Gliederung

1 Grundlegende Bausteine

2 Aussagenlogik

3 Mengen

4 Folgen und Reihen

5 Reelle Funktionen

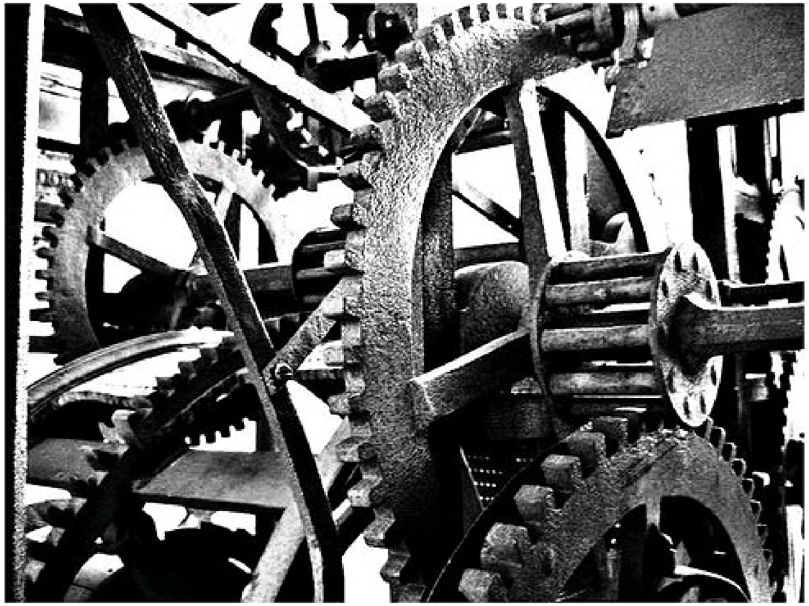
6 Differentialrechnung

7 Integration

8 Finanzmathematik

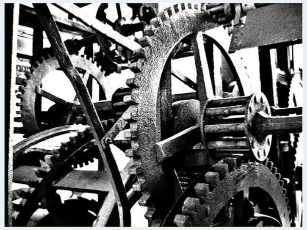
9 Lineare Algebra

10 Lineare Programme



2 Aussagenlogik

- Einführung
- Aussagenverknüpfungen
- Argumentationstechniken

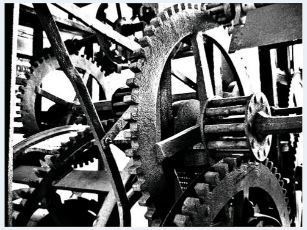


Warum beschäftigen wir uns mit der Aussagenlogik?

- zahlreiche „Aussagen“ aus der Vorlesung erforden grundlegendes Verständnis der Aussagenlogik
- Grundlage der mathematischen Beweisführung
- Hilfreich zum Erlernen von Programmiersprachen

Wesentliche Lernziele

- Kenntniss der relevanten Begriffe wie Definition, Axiom, Satz und Beweis
- Verständnis der wesentlichen aussagenlogischen Operatoren
- Auswertung logischer Aussagen hinsichtlich der Eigenschaften „wahr“ oder „falsch“
- Beherrschung grundlegender Beweistechniken wie dem direkten und indirekten Beweis sowie der vollständigen Induktion



Aussagen eines Politikers zur Wahl

- Die Vollbeschäftigung wird erhalten oder die Steuern dürfen nicht erhöht werden.
- Wenn sich Politiker um die Bevölkerung kümmern, müssen die Steuern angehoben werden.
- Die Politiker kümmern sich um die Bevölkerung oder die Vollbeschäftigung kann nicht erhalten werden.
- Es stimmt nicht, dass die Erhaltung der Vollbeschäftigung eine Steuererhöhung zur Folge haben muss.

Hat sich der Politiker widersprochen?

Verknüpfung von Aussagen

Negation : Aussage A, Negation: $\bar{A}$

z.B. A: Es regnet , $\bar{A}$: Es regnet nicht

Wahrheitstabelle:

A	w	f
$\bar{A}$	f	w

Konjunktion : Aussagen A,B

$A \wedge B$ „A und B"

z.B. A: Herr Mayer ist gesund
B: Herr Mayer atmet

$A \wedge B$: Herr Mayer ist gesund und atmet

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f

Disjunktion $A \underset{\text{vel}}{\vee} B$ „A oder B"
(nicht: entweder oder)

Bsp: $A \vee B$: Herr M. ist gesund oder er atmet

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \vee B$	w	w	w	f

Implikation:

$A \Rightarrow B$

„Wenn A, dann B"
„Aus A folgt B"
„A ist hinreichend für B"
„B ist notwendig für A"

Beispiel: $A \Rightarrow B$: Wenn er gesund, dann atmet er.

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w

Achtung: $A \Rightarrow B$ ist nicht gleichwertig mit $\left\} \begin{array}{l} B \Rightarrow A \\ \bar{A} \Rightarrow \bar{B} \end{array} \right.$

aber $A \Rightarrow B$ ist gleichwertig zu $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

Beweis:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$\bar{A}$	f	f	w	w
$\bar{B}$	f	w	f	w
$B \Rightarrow A$	w	w	f	w
$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$	w	w	f	w
$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$	w	f	w	w

äquivalent

Äquivalenz

$A \Leftrightarrow B$ „Genau dann wenn A gilt, gilt B“

Beispiel : $2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3$

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w

Beobachtungen: $A \Leftrightarrow \bar{\bar{A}}$,

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$ → Tautologie (eine immer wahre Aussage)

Notation von Summen und Produkten

$$\sum_{i=n}^{m} a_i$$

Ober-grenze ← m

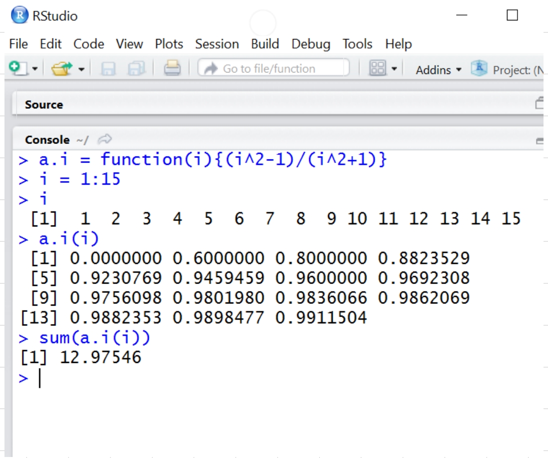
a_i → zu summierender Ausdruck

i → Laufindex Laufvariable

n → Untergrenze

Beispiel : $$\sum_{i=1}^{15} \frac{i^2-1}{i^2+1} = \underset{i=1}{\overset{0}{\frac{1^2-1}{1^2+1}}} + \underset{i=2}{\overset{0.6}{\frac{2^2-1}{2^2+1}}} + \dots + \underset{i=15}{\frac{15^2-1}{15^2+1}}$$

$0 + 0.6 + \dots +$



```
> a.i = function(i){(i^2-1)/(i^2+1)}
> i = 1:15
> i
 [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15
> a.i(i)
 [1] 0.0000000 0.6000000 0.8000000 0.8823529
 [5] 0.9230769 0.9459459 0.9600000 0.9692308
 [9] 0.9756098 0.9801980 0.9836066 0.9862069
[13] 0.9882353 0.9898477 0.9911504
> sum(a.i(i))
[1] 12.97546
> |
```

Produkte

analog Σ, mit Π : (mit „ $\cdot$ “ (mal) statt „ + “)

z.B. : $$\prod_{i=4}^{7} i = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$$

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$ (n Fakultät)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{k} i \cdot \prod_{i=1}^{n-k} i}$$ (Binomialkoeffizient)

[in TR : $\binom{7}{3} = 7 \text{ nCr } 3 = 35$

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{4}} = 35$$]

Argumentationstechniken

Direkter Beweis einer Implikation A => B

Über Zwischenschritte :

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$$

Beispiel : Behauptung $\underset{A}{(x+y)^2 = 4xy} \Rightarrow \underset{B}{x = y}$

$$(x+y)^2 = 4xy \qquad (A)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 4xy \qquad (C_1)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = 4xy - 4xy \qquad (C_2)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0 \qquad (C_3)$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 = 0 \qquad (C_4)$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \qquad (C_5)$$

$$\Rightarrow x = y \qquad (B)$$

Indirekter Beweis von A => B

Nutze aus : $A \Rightarrow B \iff \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

Beispiel : $\underset{A}{x^3 - x + x^2 - 1 \neq 0} \Rightarrow \underset{B}{|x| \neq 1}$

$$\overset{\overline{B}}{x = \pm 1} \Rightarrow \overset{\overline{A}}{x^3 - x + x^2 - 1 = 0} \quad \checkmark$$

Beweis von A ⇏ B durch Gegenbeispiel

Beispiel : Behauptung : $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x^{100} \geq x!$

$$200! = \begin{array}{c} 200 \\ 1 \\ \geq 200 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 199 \\ 2 \\ > 200 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 198 \\ 3 \\ > 200 \end{array} \cdots \begin{array}{c} 102 \\ 99 \\ > 200 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 101 \\ 100 \\ > 200 \end{array} \cdot$$

$$> 200^{100}$$

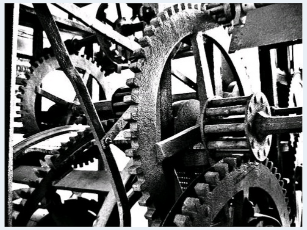
also gilt $x^{100} \geq x!$ nicht für $x = 200$

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) \cdot \frac{100}{2}$$

101 101 101

$$= 101 \cdot 50 = 5050$$

allgemein : $\sum_{i=1}^{n} i = (1+n) \cdot \frac{n}{2}$



Begriffe

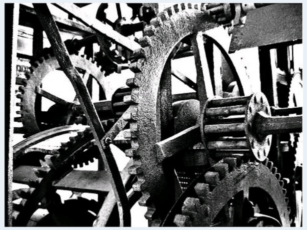
- Axiom: Grundsachverhalt als Ausgangspunkt, wird nicht bewiesen
- Definition: Sachverhalt, wird durch neuen Begriff beschrieben, bezieht sich auf bereits Definiertes oder auf Axiome
- Aussage (math. Satz): Formulierung auf Basis bisherigen Wissens, wird als wahr oder falsch identifiziert.
- Aussagenverknüpfungen: Negation ($\overline{A}$), Konjunktion ($A \wedge B$), Disjunktion ($A \vee B$), Implikation ($A \Rightarrow B$), Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$)
- Tautologie: Verknüpfte, stets wahre Aussage
- Kontradiktion: Verknüpfte, stets falsche Aussage
- Allaussage:

$$A(1) \wedge A(2) \ldots \quad = \quad \bigwedge_{x} A(x) \ (\text{für } x = 1,2,\ldots) \quad = \quad \forall\, x: \ A(x)$$

- Existenzaussage:

$$A(1) \vee A(2) \ldots \quad = \quad \bigvee_{x} A(x) \ (\text{für } x = 1,2,\ldots) \quad = \quad \exists\, x: \ A(x)$$

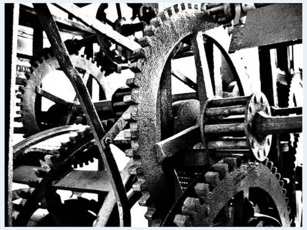
Aussagenverknüpfungen



Wahrheitswerte aller möglichen Verknüpfungen der Aussagen A und B

A	w	w	f	f	
B	w	f	w	f	
1)	w	w	w	w	Verknüpfung ist stets wahr
2)	f	f	f	f	Verknüpfung ist stets falsch
2)	f	f	f	f	Verknüpfung ist stets falsch
3)	w	w	w	f	Disjunktion $A \vee B$
4)	w	w	f	w	Implikation $B \Rightarrow A$
5)	w	f	w	w	Implikation $A \Rightarrow B$
6)	f	w	w	w	Negierte Konjunktion $\overline{A \wedge B}$
7)	w	f	f	f	Konjunktion $A \wedge B$
8)	f	w	f	f	Negierte Implikation $\overline{A \Rightarrow B}$
9)	f	f	w	f	Negierte Implikation $\overline{B \Rightarrow A}$
10)	f	f	f	w	Negierte Disjunktion $\overline{A \vee B}$
11)	w	f	f	w	Äquivalenz $A \iff B$
12)	f	w	w	f	Negierte Äquivalenz $\overline{A \iff B}$
13)	f	w	f	w	Negation $\overline{B}$
14)	f	f	w	w	Negation $\overline{A}$

Beispiel

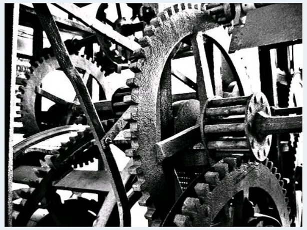


Gegeben sind Aussagen über den Marktanteil eines weltweit vertriebenen Markterzeugnisses P in zwei Handelszonen:

A: *„Das Produkt* P *hat in der Europäischen Union (EU) einen Marktanteil von mehr als 25 %"*

B: *„Das Produkt* P *hat in Nordamerika (NA) einen Marktanteil von mehr als 25 %"*

Beispiel



Gegeben sind Aussagen über den Marktanteil eines weltweit vertriebenen Markterzeugnisses P in zwei Handelszonen:

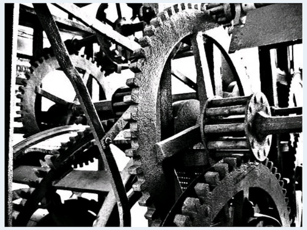
A: *„ Das Produkt* P *hat in der Europäischen Union (EU) einen Marktanteil von mehr als 25 %"*

B: *„ Das Produkt* P *hat in Nordamerika (NA) einen Marktanteil von mehr als 25 %"*

Abgeleitete Aussagen:

- $\overline{A}$: Der Marktanteil von P in der EU beträgt höchstens 25%.

Beispiel



Gegeben sind Aussagen über den Marktanteil eines weltweit vertriebenen Markterzeugnisses P in zwei Handelszonen:

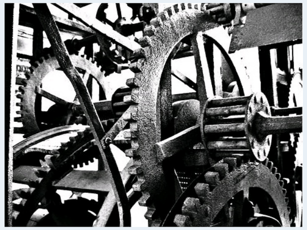
A: *„ Das Produkt P hat in der Europäischen Union (EU) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

B: *„ Das Produkt P hat in Nordamerika (NA) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

Abgeleitete Aussagen:

- $\overline{A}$: Der Marktanteil von P in der EU beträgt höchstens 25%.
- $A \wedge B$: Der Marktanteil von P beträgt in der EU und in NA mehr als 25%.

Beispiel



Gegeben sind Aussagen über den Marktanteil eines weltweit vertriebenen Markterzeugnisses P in zwei Handelszonen:

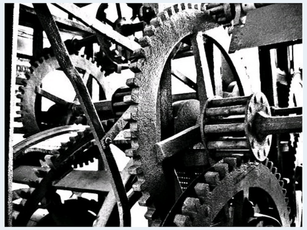
A: *„ Das Produkt P hat in der Europäischen Union (EU) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

B: *„ Das Produkt P hat in Nordamerika (NA) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

Abgeleitete Aussagen:

- $\overline{A}$: Der Marktanteil von P in der EU beträgt höchstens 25%.
- $A \wedge B$: Der Marktanteil von P beträgt in der EU und in NA mehr als 25%.
- $A \vee B$: Der Marktanteil von P beträgt in der EU oder in NA mehr als 25%.

Beispiel



Gegeben sind Aussagen über den Marktanteil eines weltweit vertriebenen Markterzeugnisses P in zwei Handelszonen:

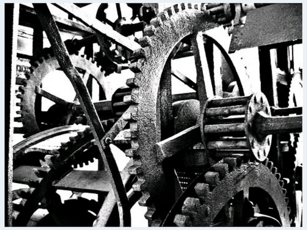
A: *„Das Produkt P hat in der Europäischen Union (EU) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

B: *„Das Produkt P hat in Nordamerika (NA) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

Abgeleitete Aussagen:

- $\overline{A}$: Der Marktanteil von P in der EU beträgt höchstens 25%.
- $A \wedge B$: Der Marktanteil von P beträgt in der EU und in NA mehr als 25%.
- $A \vee B$: Der Marktanteil von P beträgt in der EU oder in NA mehr als 25%.
- $A \Rightarrow B$: Wenn der Marktanteil von P in der EU mehr als 25% beträgt, so liegt er auch in NA über 25 %.

Beispiel



Gegeben sind Aussagen über den Marktanteil eines weltweit vertriebenen Markterzeugnisses P in zwei Handelszonen:

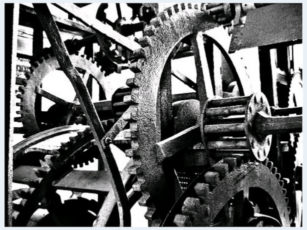
A: *„Das Produkt P hat in der Europäischen Union (EU) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

B: *„Das Produkt P hat in Nordamerika (NA) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

Abgeleitete Aussagen:

- $\overline{\mathrm{A}}$: Der Marktanteil von P in der EU beträgt höchstens 25%.
- $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$: Der Marktanteil von P beträgt in der EU und in NA mehr als 25%.
- $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$: Der Marktanteil von P beträgt in der EU oder in NA mehr als 25%.
- $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$: Wenn der Marktanteil von P in der EU mehr als 25% beträgt, so liegt er auch in NA über 25 %.
- $\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$: der Marktanteil von P in der EU beträgt genau dann mehr als 25%, wenn er auch in NA über 25 % liegt.

Beispiel



Ausgangspunkt: Aussage A mit

A: „ *Der Gewinn einer Unternehmung ist gleich dem Umsatz abzüglich der Kosten.*“

Daraus abgeleitet:

A_1: Die Kosten wachsen.

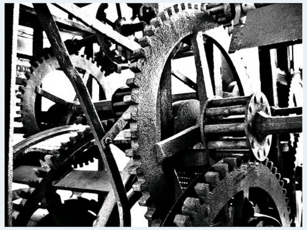
A_2: Der Umsatz wächst.

A_3: Der Gewinn wächst.

Dann ist die folgende Implikation wahr:

- $\left(\overline{A_1} \wedge A_2\right) \Rightarrow A_3$:

Beispiel



Ausgangspunkt: Aussage A mit

A: *„ Der Gewinn einer Unternehmung ist gleich dem Umsatz abzüglich der Kosten.“*

Daraus abgeleitet:

A_1: Die Kosten wachsen.

A_2: Der Umsatz wächst.

A_3: Der Gewinn wächst.

Dann ist die folgende Implikation wahr:

- $\left(\overline{A_1} \wedge A_2\right) \Rightarrow A_3$: *„Wenn der Umsatz bei nicht steigenden Kosten wächst, so wächst auch der Gewinn.“*